50282

Über die Gleichheit der Polynomfunktionen auf Ringen

Von J. ACZÉL in Debrecen

Herrn Professor Ladislaus Rédei zum 60. Geburtstag gewidmet

Bei der Bestimmung jener Polynome zweier Veränderlichen, die als Operationen betrachtet assoziativ sind (siehe z. B. [1]), macht man einzig von der Tatsache Gebrauch, daß zwei Polynome (dann und) nur dann gleich sind, wenn alle Koeffizienten übereinstimmen, oder — was auf dasselbe hinausgeht — aus

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=0 \tag{1}$$

notwendigerweise

$$a_0=a_1=\cdots=a_{n-1}=a_n=0 \tag{2}$$

folgt. Dies nennen wir das *Koeffizientenvergleichungsprinzip.* Hier werden die Polynome *als Funktionen* aufgefaßt, diese Betrachtungen gehören also zu dem von L. RÉDEI und T. SZELE [2] angegriffenen Problemkreis, wo solche Funktionen mit Anführungszeichen „Polynome" genannt werden. In [1] werden reelle (komplexe) Polynome betrachtet. Ich warf die Frage auf, in welchen Ringen diese Betrachtungen gültig bleiben, in welchen Ringen also das oben erwähnte Prinzip seine Gültigkeit behält (es seien außer der Veränderlichen etwa auch die Koeffizienten Ringelemente). Es war eine Überraschung für mich, als ich (u. a. von Prof. L. RÉDEI) hörte, daß diese als natürlich erscheinende Frage anscheinend noch nicht untersucht wurde.

So wage ich hier einen einfachen Satz zu beweisen, der eine hinreichende Bedingung für einen Ring angibt, damit in diesem Ring das Koeffizientenvergleichungsprinzip gelte. Die Frage bezüglich einer notwendigen und hinreichenden Bedingung werfe ich auch auf.

Die üblichen Schritte (Einsetzen von $x=0$ um $a_n=0$ zu konstatieren, dann Dividieren durch x oder Derivieren, wieder $x=0$ zu setzen usw.), mit denen man im Reellen oder Komplexen aus (1) auf (2) folgert, sind in allgemeinen Ringen nicht oder nur unter sehr einschränkenden Bedingungen durchführbar.[1]) Wir werden einen anderen Kunstgriff, den der Differenzenbildung anwenden und beweisen hiermit den folgenden

Satz. *Das Koeffizientenvergleichungsprinzip ist in jedem Ring mit Einselement gültig, dessen additive Gruppe torsionsfrei ist.*

Beweis. Offenbar genügt es zu beweisen, daß in solchen Ringen aus (1) das Bestehen von $a_0=0$ (bei jedem n) folgt, denn danach folgt auch aus $a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=0$ das Bestehen von $a_1=0$ usw. Weiter genügt es aus (1) eine Formel der Gestalt

$$na_0x^{n-1}+P_{n-2}=0 \tag{3}$$

zu folgern, wo P_{n-2} ein Polynom höchstens $(n-2)$-ten Grades ist, da hieraus durch wiederholte Anwendung $n!\,a_0=0$, also wegen der Torsionsfreiheit $a_0=0$ folgt.

Um (3) zu beweisen, setzen wir in (1) $x+e$ statt x ein, wo e das Einselement ist, dessen Existenz vorausgesetzt wurde. Da e mit jedem Ringelement vertauschbar ist, erhalten wir

$$a_0(x+e)^n+a_1(x+e)^{n-1}+\cdots+a_n=a_0x^n+na_0x^{n-1}+Q_{n-2}+a_1x^{n-1}+R_{n-2}=0,$$

wo Q_{n-2} und R_{n-2} Polynome höchstens $(n-2)$-ten Grades sind. Wenn wir hieraus (1) subtrahieren, erhalten wir einen Ausdruck der Gestalt (3), womit der Beweis beendet ist.

Bemerkungen. Falls (2) aus (1) nicht für alle n, sondern nur für alle $n\leqq N$, folgen soll, so genügt es vorauszusetzen, daß $N!$ kein Mehrfaches der (additiven) Ordnung des gegebenen Ringes mit Einselement ist (d. h. $N!\,a=0$ für kein Ringelement $a\neq 0$ bestehe). Dann können nämlich auch $(N-1)!$, $(N-2)!,\ldots,2!$ keine Mehrfache der Ordnung sein. — Unter den Voraus-

[1]) Ein weiteres Verfahren wäre das Einsetzen von $n+1$ verschiedenen Werten für x, womit man ein homogenes lineares Gleichungssystem für $a_0, a_1, \ldots, a_n$ erhielte, dessen Koeffizientenschema eine Vandermondeschen Matrix ist. Nun besteht aber vor der Bildung der Vandermondeschen Determinante, die dann nicht-verschwindend sein müßte, ein Hindernis, falls der Ring nicht kommutativ ist. — Nach Abschluß dieser Note hat L. Fuchs meine Aufmerksamkeit gefälligst darauf aufgerufen, daß dieser Gedankengang doch durchfürbar ist, falls wir r_ix $(i=0, 1, \ldots, n)$ für x einsetzen, wo die r_i ganze rationale Zahlen sind, deren Potenzen also mit allen Ringelementen vertauschbar sind, insbesondere mit den Koeffizienten und mit der Veränderlichen und natürlich auch miteinander. Also erhalten wir ein homogenes lineares Gleichungssystem für $a_0x^n, a_1x^{n-1},\ldots, a_{n-1}x, a_n$ aus dessen Koeffizientenschema jetzt die Vandermondesche Determinante ohne Schwierigkeit gebildet werden kann, die, falls die r_i alle verschieden sind, nichtverschwindend ist. Deshalb ist $a_kx^{n-k}=0$, $(k=1,\ldots,n)$. Wenn es wenigstens einen Nicht-Nullteiler im Ringe gibt, so folgt $a_k=0$, $(k=0, 1, \ldots, n)$.

setzungen unseres Satzes scheint die der Existenz eines Einselementes nicht wesentlich, dagegen die der Torsionsfreiheit wesentlich zu sein.[2])

Ich bin den Herren Prof. BÉLA SZ.-NAGY und M. HOSSZÚ für wertvolle Anregungen zum Dank verpflichtet.

Schriftenverzeichnis

[1] E. T. BELL, A functional equation in arithmetic, *Transactions Amer. Math. Soc.*, 39 (1936), 341—344.

[2] L. RÉDEI—T. SZELE, Algebraisch-zahlentheoretische Betrachtungen über Ringe. I, *Acta Math.*, 79 (1947), 291—320.

(Eingegangen am 22. Juli 1959)

[2]) Bezüglich der Entbehrlichkeit des Einselementes s. [1]) und die nachstehende Note von M. HOSSZÚ. — Bezüglich der Wesentlichkeit der Torsionsfreiheit kann erwähnt werden, daß es zu jeder (additiven) Ordnung Ringe dieser Ordnung gibt, in denen das Koeffizientenvergleichungsprinzip nicht gültig ist. Herr Z. PAPP hat bemerkt, daß sogar jeder endliche kommutative Ring (mit Einselement) ein solches Beispiel liefert: sind nämlich $0, c_1, c_2, \dots, c_{n-1}$ die Elemente des Ringes, so ist $x(x+c_1)\dots(x+c_{n-1}) = x^n + \dots + c_1 c_2 \dots c_{n-1} x$ ein Polynom das für jedes Ring element identisch verschwindet, ohne daß alle Koeffizienten gleich 0 wären. (Es gibt nämlich für jedes $x = c_k$ ein c_i derart, daß $c_k + c_i = 0$ gilt. Deshalb verschwindet unser Polynom, welches offenbar auch bei $x = 0$ gleich 0 ist, für jedes $x = c_k$, $k = 1, 2, \dots, n-1$.)