

## La mesure de Jordan et l'intégrale de Riemann dans un espace mesuré topologique

Par S. MARCUS à Bucarest

### § 1. Introduction

On a essayé plusieurs fois de caractériser l'intégrabilité riemannienne à l'aide de la mesurabilité jordanienne. Les premiers résultats concernant ce sujet ont été donnés en 1933 par MIRON NICOLESCU [1] et ORRIN FRINK Jr. [2]. J. RIDDER a remarqué déjà en 1935 que la condition qu'une fonction bornée soit mesurable Jordan (dans un sens approché à celui considéré ci-dessous) est nécessaire et suffisante pour que la fonction soit intégrable Riemann [3]. J. S. LIPINSKI a retrouvé certains résultats de FRINK et a donné aussi quelques nouvelles caractérisations de l'intégrabilité riemannienne à l'aide de la mesurabilité jordanienne [4]. Certains auteurs comme par exemple OTTO HAUPT et CHRISTIAN PAUC ont défini, dans un espace mesuré topologique, la notion d'"ensemble quarrable" par la condition que sa frontière soit de mesure nulle [5]. CHRISTIAN PAUC a esquissé, pour les fonctions réelles définies dans un espace mesuré topologique, une théorie de l'intégrale riemannienne basée sur des partitions "horizontales", c'est-à-dire des partitions de l'espace de définition de la fonction [6]. Une notion de "fonction mesurable Jordan" équivalente à celle donnée ci-dessous et un critère correspondant d'intégrabilité riemannienne se trouvent dans un travail de L. H. LOOMIS [7]. Remarquons encore, parmi les travaux concernant une théorie abstraite de l'intégrale riemannienne, ceux de E. HEWITT [8] et HEINZ BAUER [9], [10]. Nous avons esquissé une théorie abstraite de la mesure de Jordan et donné une construction, utilisant des partitions "verticales", pour l'intégrale de Riemann d'une fonction réelle définie sur un ensemble mesurable Jordan de  $R^n$  [11].

Les résultats du présent travail généralisent et apportent des améliorations aux résultats de [1], [2], [4] et [11]. En même temps, les démonstrations que nous allons donner, tout en gardant certaines idées, surtout de [2], nous

semblent plus simples que celles données par les auteurs cités. En contraste avec le procédé de PAUC, nous utilisons des partitions verticales.

Le théorème 2 du présent travail n'a pas d'analogue dans les travaux cités ci-dessus.

Je remercie M. le Professeur MIRON NICOLESCU pour avoir posé la question qui fait l'objet du présent travail.

## § 2. Ensembles mesurables Jordan

La terminologie sera celle de [12].

Soit  $S$  un espace topologique. Soit  $K$  une  $\sigma$ -algèbre d'ensembles de  $S$ . Supposons que chaque ensemble borelien de  $S$  appartient à  $K$ .

Soit  $\mu$  une mesure finie, définie sur  $K$ . Nous supposons cette mesure complète, c'est-à-dire que chaque sous-ensemble d'un ensemble de mesure nulle appartient à  $K$ . Nous dirons qu'un ensemble  $X \subset S$  est *mesurable Jordan* (tout court: mesurable ( $J$ )) si  $\mu(\text{Fr } X) = 0$ <sup>1)</sup>. Des formules bien connues pour la frontière  $[\text{Fr}(X \cup Y) \subset (\text{Fr } X) \cup (\text{Fr } Y) \supset \text{Fr}(X \cap Y)$ ,  $\text{Fr } X = \text{Fr } S - X$  etc.; voir, par exemple, [13]] il s'ensuit qu'une réunion et une intersection finies d'ensembles mesurables ( $J$ ) sont aussi mesurables ( $J$ ) et le complémentaire d'un ensemble mesurable ( $J$ ) est mesurable ( $J$ ). De  $X - Y = X \cap (S - Y)$  et de  $\text{Fr } S = 0$  il s'ensuit que la différence de deux ensembles mesurables ( $J$ ) est mesurable ( $J$ ) et que  $S$  est mesurable ( $J$ ). On a donc le résultat suivant:

*Les ensembles mesurables ( $J$ ) de  $S$  forment une algèbre.*

Puisque  $\text{Int } X$  est ouvert, donc borelien, il s'ensuit que pour  $X$  mesurable ( $J$ ) on a

$$\mu(X) = \mu(\text{Int } X) + \mu(X \cap \text{Fr } X) = \mu(\text{Int } X)$$

donc:

*chaque ensemble  $X$  mesurable ( $J$ ) appartient à  $K$  et on a  $\mu(X) = \mu(\text{Int } X)$ .*

De ce que  $\text{Fr}(\text{Fr } X) \subset \text{Fr } X$  (voir, par exemple, [13]) et  $\text{Fr } X = \bar{X} - X$  il s'ensuit que *la frontière et la fermeture d'un ensemble  $X$  mesurable ( $J$ ) sont mesurables ( $J$ ). On a  $\mu(X) = \mu(\bar{X})$ .*

Puisque  $\text{Int } X = \bar{X} - \text{Fr } X$  on déduit que *l'intérieur d'un ensemble mesurable ( $J$ ) est mesurable ( $J$ ).*

<sup>1)</sup> A l'occasion d'une conférence sur l'intégrale de Riemann, que j'ai donnée à la Société Bolyai de Budapest, M. le Professeur G. ALEXITS m'a suggéré la définition du texte. J'ai retrouvé, ultérieurement, cette définition dans le travail [5] de HAUPT et PAUC.

### § 3. Fonctions mesurables Jordan

Soit  $f$  une fonction réelle définie sur  $S$ . Nous dirons que  $f$  est mesurable Jordan sur  $S$  si un au moins des ensembles

$$A_\alpha = \{x: f(x) > \alpha\}, \quad B_\alpha = \{x: f(x) \geq \alpha\}$$

est mesurable ( $J$ ) pour chaque  $\alpha$ , à l'exception possible d'un ensemble au plus dénombrable de valeurs de  $\alpha$ .

Puisque  $C_\alpha = \{x: f(x) \leq \alpha\} = S - A_\alpha$ ,  $D_\alpha = \{x: f(x) < \alpha\} = S - B_\alpha$  il s'ensuit que  $f$  est mesurable ( $J$ ) si et seulement si un au moins des ensembles  $C_\alpha$  et  $D_\alpha$  est mesurable ( $J$ ) pour chaque  $\alpha$ , à l'exception possible d'un ensemble au plus dénombrable de valeurs de  $\alpha$ .

Contrairement à ce qui se passe avec les fonctions mesurables Lebesgue, dans la définition des fonctions mesurables ( $J$ ) on ne peut pas supprimer l'ensemble dénombrable exceptionnel. Par exemple, la fonction égale à 0 pour  $x$  irrationnel et à  $\frac{1}{q}$  pour  $x = \frac{p}{q}$  ( $p, q$  entiers,  $(p, q) = 1$ ) est mesurable ( $J$ ) sur  $[0, 1]$  mais l'ensemble  $A_0$  n'est pas mesurable ( $J$ ).

Désignons par  $\mathcal{A}$  l'ensemble des points de discontinuité de  $f$  sur  $S$ .

**Lemme 1.** Si  $f$  est mesurable ( $J$ ) sur  $S$ , alors  $\mu(\mathcal{A}) = 0$ .

**Démonstration.** Supposons qu'il existe un ensemble réel dénombrable  $H$  tel que  $A_\alpha$  est mesurable ( $J$ ) pour chaque  $\alpha \notin H$ . Il existe alors un ensemble réel dénombrable  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n, \dots$  partout dense sur  $(-\infty, \infty)$  et tel que  $A_{\beta_n}$  (et donc aussi  $C_{\beta_n}$ ) soit mesurable ( $J$ ) pour  $n = 1, 2, \dots$ . Posons

$$F = \bigcup_{n=1}^{\infty} \text{Fr } A_{\beta_n}. \quad \text{On a } \mu(F) = 0. \quad \text{Il suffit donc de montrer que } \mathcal{A} \subset F.$$

Soit  $x \in \mathcal{A}$ . Il existe un nombre positif  $\varrho$  tel que  $\omega(f; x)$  (l'oscillation de  $f$  au point  $x$ ) est  $> \varrho$ . En tenant compte que  $\{\beta_n\}_{1 \leq n < \infty}$  est partout dense sur  $(-\infty, \infty)$ , il résulte l'existence de deux nombres entiers positifs  $p$  et  $r$  tels que

$$(1) \quad \beta_p < f(x) < \beta_r, \quad \beta_r - \beta_p < \frac{\varrho}{2}$$

donc

$$(2) \quad x \in A_{\beta_p} \cap C_{\beta_r}.$$

S'il existait un ensemble ouvert contenant  $x$  et contenu dans  $A_{\beta_p} \cap C_{\beta_r}$ , alors on déduirait de (1) que  $\omega(f; x) < \varrho$ , ce qui est contradictoire. Il y a donc dans chaque voisinage de  $x$  un point au moins qui n'appartient pas à

$A_{\beta_p} \cap C_{\beta_r}$ . En vertu de (2) il s'ensuit

$$x \in \text{Fr}(A_{\beta_p} \cap C_{\beta_r}) \subset (\text{Fr } A_{\beta_p}) \cup (\text{Fr } C_{\beta_r}) = (\text{Fr } A_{\beta_p}) \cup (\text{Fr } A_{\beta_r})$$

donc  $x \in F$  et  $\mathcal{A} \subset F$ .

Supposons maintenant qu'il existe un ensemble réel dénombrable  $H$  tel que  $B_\alpha$  soit mesurable ( $J$ ) pour chaque  $\alpha \notin H$ . Par une voie analogue à celle ci-dessus on trouve que  $\mathcal{A} \subset F$ .

Remarque. En fait, on a démontré ci-dessus la proposition suivante qui apporte une amélioration au lemme 1:

*S'il existe un ensemble  $\Omega$  partout dense sur  $(-\infty, \infty)$  et tel que, pour  $\alpha \in \Omega$ , l'ensemble  $A_\alpha$  soit mesurable ( $J$ ), alors  $\mu(\mathcal{A}) = 0$ . Au lieu de  $A_\alpha$  on peut poser dans cet énoncé  $B_\alpha$ .*

Lemme 2. Si  $\mu(\mathcal{A}) = 0$ , alors il existe un ensemble réel dénombrable  $H$  tel que pour  $\alpha \notin H$  les ensembles  $A_\alpha$  et  $B_\alpha$  (donc aussi  $C_\alpha$  et  $D_\alpha$ ) soient mesurables ( $J$ ).

Démonstration. Soit  $\mu(\mathcal{A}) = 0$ . Posons

$$P_\alpha = \{x: f(x) = \alpha, x \in S - \mathcal{A}\}, \quad Q_\alpha = \{x: f(x) = \alpha, x \in \mathcal{A}\}.$$

De  $Q_\alpha \subset \mathcal{A}$  il s'ensuit que  $\mu(Q_\alpha) = 0$ . Puisque  $f$  est continue sur  $S - \mathcal{A}$  il s'ensuit que  $P_\alpha$  est fermé par rapport à  $S - \mathcal{A}$  donc  $P_\alpha = \Phi \cap (S - \mathcal{A})$ , où  $\Phi$  est un ensemble fermé. De  $S \in K$  il s'ensuit que  $(S - \mathcal{A}) \in K$ . D'autre part  $\Phi$ , étant fermé, est borelien donc  $\Phi \in K$  et  $P_\alpha \in K$ . Posons  $N_\alpha = \{x: f(x) = \alpha, x \in S\}$ . On a  $N_\alpha = P_\alpha \cup Q_\alpha$ , donc  $N_\alpha \in K$  pour chaque  $\alpha$ . Puisque pour  $\alpha' \neq \alpha''$  on a  $N_{\alpha'} \cap N_{\alpha''} = \emptyset$  et puisque  $\mu(S) < \infty$ , il résulte l'existence d'un ensemble réel dénombrable  $H$  tel que pour  $\alpha \notin H$  on ait  $\mu(N_\alpha) = 0$ .

Nous allons montrer que pour chaque  $\alpha \notin H$  les ensembles  $A_\alpha$  et  $B_\alpha$  sont mesurables ( $J$ ). En effet, soit  $x \in \text{Fr } A_\alpha$ , où  $\alpha \notin H$ . Si  $x \notin N_\alpha$ , alors  $x \in A_\alpha \cup D_\alpha$ . Si  $x \in A_\alpha$ , alors  $x \in A_\alpha \cap \bar{C}_\alpha$  donc  $x \in \mathcal{A}$ . Si  $x \in D_\alpha$ , alors  $x \in D_\alpha \cap \bar{B}_\alpha$  et de nouveau  $x \in \mathcal{A}$ . Il s'ensuit que  $\text{Fr } A_\alpha \subset \mathcal{A} \cup N_\alpha$ . Mais on a  $\mu(\mathcal{A}) = \mu(N_\alpha) = 0$ , donc  $\mu(\text{Fr } A_\alpha) = 0$  pour chaque  $\alpha \notin H$  et  $A_\alpha$  est mesurable ( $J$ ).

D'une manière analogue on prouve que  $B_\alpha$  est mesurable ( $J$ ) pour chaque  $\alpha \notin H$ .

Des lemmes 1 et 2 et de la remarque qui précède le lemme 2 on déduit le

**Théorème 1.** *Les propositions suivantes sont équivalentes:*

- 1°  $f$  est mesurable ( $J$ ) sur  $S$ ;
- 2° il existe un ensemble réel dénombrable  $H$  tel que, pour  $\alpha \notin H$ , les ensembles  $A_\alpha$  et  $B_\alpha$  (donc aussi  $C_\alpha$  et  $D_\alpha$ ) soient mesurables ( $J$ );
- 3°  $\mu(\mathcal{A}) = 0$ ;

4° un au moins des ensembles  $A_\alpha$  et  $B_\alpha$  est mesurable (J) pour chaque  $\alpha$ , à l'exception possible d'un ensemble frontière de valeurs de  $\alpha$ ;

5° les ensembles  $A_\alpha$  et  $B_\alpha$  sont mesurables (J) pour chaque  $\alpha$ , à l'exception possible d'un ensemble frontière de valeurs de  $\alpha$ .

En tenant compte du théorème 1 et du fait qu'une suite uniformément convergente de fonctions réelles définies dans  $S$  et continues en un même point  $x \in S$  a pour limite une fonction continue en  $x$ , on obtient le fait suivant:

Si  $\{f_n\}_{1 \leq n < \infty}$  est une suite uniformément convergente de fonctions réelles définies et mesurables (J) sur  $S$ , alors  $f = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$  est mesurable (J) sur  $S$ .

Existe-t-il un théorème du type Lusin pour les fonctions mesurables (J)? La réponse est donnée par le

**Théorème 2.** Une condition nécessaire et suffisante pour que à chaque  $\varepsilon > 0$  corresponde un ensemble  $E_\varepsilon$  mesurable (J), tel que  $\mu(E_\varepsilon) > \mu(S) - \varepsilon$  et que la restriction de  $f$  sur  $E_\varepsilon$  soit continue, est que  $\Delta$  soit mesurable (J) et  $\mu(\Delta) = 0$ .

**Démonstration.** La condition est nécessaire. Soit  $\varepsilon > 0$  et soit  $E_\varepsilon$  mesurable (J) tel que  $\mu(E_\varepsilon) > \mu(S) - \varepsilon$  et la restriction de  $f$  sur  $E_\varepsilon$  soit continue. En vertu de ce qu'on a montré dans § 2,  $\text{Int } E_\varepsilon$  est mesurable (J) et  $\mu(E_\varepsilon) = \mu(\text{Int } E_\varepsilon)$ . Posons  $G_\varepsilon = \text{Int } E_\varepsilon$ .  $G_\varepsilon$  est un ensemble ouvert, donc  $f$  est continue en chaque point de  $G_\varepsilon$ . De  $\Delta \subset S - G_\varepsilon$  et du fait que  $S - G_\varepsilon$  est fermé on déduit  $\bar{\Delta} \subset S - G_\varepsilon$  et, comme on a  $\mu(G_\varepsilon) > \mu(S) - \varepsilon$ , on obtient  $\mu(\bar{\Delta}) \leq \varepsilon$ , quel que soit  $\varepsilon > 0$ . Donc  $\mu(\bar{\Delta}) = 0$  et  $\mu(\text{Fr } \Delta) = \mu(\bar{\Delta} - \Delta) = 0 = \mu(\Delta)$ . On a prouvé ainsi que  $\Delta$  est mesurable (J) et  $\mu(\Delta) = 0$ .

La condition est suffisante. En effet, si  $\Delta$  est mesurable (J) et  $\mu(\Delta) = 0$ , alors  $f$  est continue en chaque point de l'ensemble mesurable (J)  $S - \Delta$ , où  $\mu(S - \Delta) = \mu(S)$ . On peut donc prendre  $E_\varepsilon = S - \Delta$ .

#### § 4. L'intégrale de Riemann

Soit  $f$  une fonction réelle, définie et bornée sur  $S$ . Désignons par  $m$  et  $M$  les bornes de  $f$  sur  $S$ . Supposons que pour tout  $\alpha, \beta$  ( $\alpha < \beta$ ), sauf peut-être les points d'un ensemble dénombrable  $H$  de nombres réels, l'ensemble  $B_\alpha \cap D_\beta = \{x : \alpha \leq f(x) < \beta\}$  est mesurable (J). Soit  $a < m \leq M < b$ . (donc  $a \notin H, b \notin H$ ). Considérons une partition  $\delta = (a = y_0 < y_1 < \dots < y_i < y_{i+1} < \dots < y_n = b)$  de  $[a, b]$  telle que  $y_i \notin H$  ( $i = 0, 1, \dots, n$ ). Posons

$$S_\delta = \sum_{i=0}^{n-1} y_i \cdot \mu(B_{y_i} \cap D_{y_{i+1}}), \quad S_\delta = \sum_{i=0}^{n-1} y_{i+1} \cdot \mu(B_{y_i} \cap D_{y_{i+1}}).$$

On a  $a \cdot \mu(S) \leq s_\delta \leq S_\delta \leq b \cdot \mu(S)$  donc il existe

$$U = \sup_{\delta} \{s_\delta\}, \quad V = \inf_{\delta} \{S_\delta\}.$$

Par un raisonnement bien connu on montre que si  $\delta'$  est plus fine que  $\delta$ , alors  $s_\delta \leq s_{\delta'}$ ,  $S_{\delta'} \leq S_\delta$ . On déduit que pour deux partitions arbitraires  $\delta_1$  et  $\delta_2$ , on a  $s_{\delta_1} \leq S_{\delta_2}$ , donc  $U \leq V$ .

Par définition, s'il existe un ensemble réel dénombrable  $H$  tel que pour  $\alpha \notin H, \beta \in H$  l'ensemble  $B_\alpha \cap D_\beta$  soit mesurable ( $J$ ) et si  $U = V$ , alors  $f$  est *intégrable Riemann* (tout court: *intégrable (R)*) sur  $S$  et la valeur  $U = V$  est l'intégrale riemannienne de  $f$  sur  $S$ :

$$(R) \int_S f(x) d\alpha.$$

L'ensemble  $H$  est l'ensemble *exceptionnel* de  $f$ .

**Théorème 3.** *Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction réelle  $f$ , définie et bornée sur  $S$ , soit intégrable Riemann sur  $S$ , est que  $f$  soit mesurable ( $J$ ) sur  $S$ .*

**Démonstration.** La condition est nécessaire. Soit  $f$  intégrable ( $R$ ) sur  $S$ . Il existe donc  $H$  réel dénombrable tel que pour  $\alpha \notin H, \beta \in H$  l'ensemble  $B_\alpha \cap D_\beta$  soit mesurable ( $J$ ). Mais de  $a < m$  il s'ensuit  $a \notin H$ , car dans le cas contraire  $B_a \cap D_\beta$  serait non mesurable ( $J$ ) pour chaque  $a < m$ , ce qui est contrairement à l'hypothèse. Donc  $B_a \cap D_\beta$  est mesurable ( $J$ ) pour chaque  $\beta \in H$ . De  $B_a \cap D_\beta = D_\beta$  il s'ensuit alors que  $D_\beta$  est mesurable ( $J$ ) pour  $\beta \in H$  donc  $B_\beta$  (le complémentaire de  $D_\beta$ ) est aussi mesurable ( $J$ ) pour  $\beta \in H$  et  $f$  est mesurable ( $J$ ).

*La condition est suffisante.* Soit  $f$  bornée et mesurable ( $J$ ) sur  $S$ . Soit  $\varepsilon > 0$ . Désignons par  $\delta$  une partition de  $[a, b]$  telle que  $y_i \notin H$ , où par  $H$  on a désigné l'ensemble *exceptionnel* de  $f$ . Supposons que  $\nu(\delta) = \max_{0 \leq i \leq n-1} (y_{i+1} - y_i) < \frac{\varepsilon}{\mu(S)}$ . On a

$$\begin{aligned} 0 \leq V - U \leq S_\delta - s_\delta &= \sum_{i=0}^{n-1} (y_{i+1} - y_i) \cdot \mu(B_{y_i} \cap D_{y_{i+1}}) < \frac{\varepsilon}{\mu(S)} \sum_{i=0}^{n-1} \mu(B_{y_i} \cap D_{y_{i+1}}) = \\ &= \frac{\varepsilon}{\mu(S)} \cdot \mu(S) = \varepsilon, \end{aligned}$$

donc  $U = V$  et  $f$  est intégrable ( $R$ ) sur  $S$ .

**Théorème 4.** *Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction simple  $f$ , définie sur  $S$ , soit intégrable ( $R$ ) sur  $S$  est que chaque ensemble de niveau de  $f$  soit mesurable ( $J$ ).*

**Démonstration. La condition est nécessaire.** Soient  $y_1 < y_2 < \dots < y_i < \dots < y_n$  les valeurs prises par  $f$  sur  $S$ . Posons  $L_i = \{x : f(x) = y_i, x \in S\}$ . Supposons que  $f$  soit intégrable (R) sur  $S$ . Il s'ensuit que, à l'exception possible d'un ensemble dénombrable de valeurs  $\alpha$  et  $\beta$ ,  $B_\alpha \cap D_\beta$  est mesurable (J). Admettons, par réduction à l'absurde, qu'il existe un entier  $p$  tel que  $1 \leq p \leq n$  et  $L_p$  ne soit pas mesurable (J). Si  $1 < p < n$ , alors il y a une infinité non dénombrable de valeurs de  $\alpha$  et  $\beta$  telles que  $y_{p-1} < \alpha \leq y_p < \beta < y_{p+1}$  et pour ces valeurs on a  $L_p = B_\alpha \cap D_\beta$ , ce qui est contradictoire. Si  $p = 1$ , alors pour chaque  $\alpha$  tel que  $y_1 < \alpha < y_2$  l'ensemble  $D_\alpha = L_1$  n'est pas mesurable (J). Si  $p = n$ , alors pour chaque  $\alpha$  tel que  $y_{n-1} < \alpha < y_n$  l'ensemble  $A_\alpha = L_n$  n'est pas mesurable (J), donc on a de nouveau une contradiction avec la mesurabilité jordanienne de  $f$  sur  $S$ .

**La condition est suffisante.** Supposons que chaque  $L_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) est mesurable (J). Dans ce cas, pour chaque  $\alpha$  l'ensemble  $A_\alpha$ , comme réunion de certains des ensembles  $L_1, L_2, \dots, L_n$ , est mesurable (J). Donc  $f$  est mesurable (J) et, en vertu du théorème 3,  $f$  est intégrable (R) sur  $S$ .

**Théorème 5.** Si  $f$  est intégrable (R) sur  $S$ , alors il existe une suite uniformément convergente de fonctions  $f_n$  simples et mesurables (J) sur  $S$  telle que  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f$ .

**Démonstration.** Soit  $\{\delta_n\}$  une suite de partitions de  $[a, b]$  ( $a < m \leq M < b$ ) où  $\delta_n = (a = y_0^n < y_1^n < \dots < y_i^n < y_{i+1}^n < \dots < y_{p_n}^n = b)$  et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{0 \leq i \leq p_n - 1} (y_{i+1}^n - y_i^n) = 0.$$

Désignons par  $H$  l'ensemble exceptionnel de  $f$  et supposons que  $y_i^n \notin H$  pour  $i = 0, 1, \dots, p_n$  et  $n = 1, 2, 3, \dots$ . Posons

$$f_n(x) = y_i^n \text{ si } y_i^n \leq f(x) < y_{i+1}^n \quad (n = 1, 2, \dots; i = 0, 1, \dots, p_n).$$

$f_n$  est une fonction simple et on a  $L_i^n = \{x : f_n(x) = y_i^n\} = B_{y_i^n} \cap D_{y_{i+1}^n}$  donc  $L_i^n$  est mesurable (J) pour  $i = 0, 1, \dots, p_n$  et  $n = 1, 2, \dots$ . En vertu du théorème 4 il s'ensuit que chaque  $f_n$  est intégrable (R) sur  $S$ .

Montrons que la convergence de  $\{f_n\}$  vers  $f$  est uniforme. On a, en effet,  $|f_n(x) - f(x)| \leq y_{i+1}^n - y_i^n \leq \max_{0 \leq i \leq p_n - 1} (y_{i+1}^n - y_i^n) = \lambda_n$  et  $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = 0$ .

Des théorèmes 1, 3 et 5 on déduit, compte tenu de la remarque faite avant le théorème 2, le

**Théorème 6.** Si  $f$  est une fonction réelle, définie et bornée sur  $S$ , alors les affirmations suivantes sont équivalentes:

- 1°  $f$  est mesurable ( $J$ ) sur  $S$ ;  
 2°  $\mu(\Delta) = 0$ ;  
 3°  $f$  est la limite d'une suite uniformément convergente de fonctions simples, intégrables ( $R$ ) sur  $S$ .  
 4°  $f$  est intégrable ( $R$ ) sur  $S$ .

### Ouvrages cités

- [1] MIRON NICOLESCU, Sur les fonctions mesurables ( $J$ ), *Bulletin des Sciences Math.*, 57 (1933), 276—281.  
 [2] ORRIN FRINK JR., Jordan measure and Riemann integration, *Annals of Math.*, 34 (1933), 518—526.  
 [3] J. RIDDER, Integration in abstrakten Räumen, *Fundamenta Math.*, 24 (1935), 72—117.  
 [4] J. S. LIPINSKI, Sur les ensembles  $\{f(x) > a\}$ , où  $f(x)$  sont des fonctions intégrables au sens de Riemann, *Fundamenta Math.*, 43 (1956), 202—229.  
 [5] OTTO HÄUPT—CHRISTIAN PAUC, Mesure et topologie adaptées. Espaces mesurés topologiques, *Comptes Rendus Acad. Sci. Paris*, 230 (1950), 711—712.  
 [6] CHRISTIAN PAUC, Intégrale de partition et intégrale topologique. Familles dérivantes topologiques, *Comptes Rendus Acad. Sci. Paris*, 230 (1950) 810—811.  
 [7] L. H. LOOMIS, Linear functionals and content, *American Journal of Math.*, 76 (1954), 168—182.  
 [8] EDWIN HEWITT, Integral representation of certain linear functionals, *Arkiv för Mat.*, 2 (1952), 269—282.  
 [9] HEINZ BAUER, Über die Beziehungen einer abstrakten Theorie des Riemann-Integrals zur Theorie Radonscher Maße, *Math. Zeitschrift*, 65 (1956), 448—482.  
 [10] HEINZ BAUER, Zur Theorie des Riemann-Integrals in lokal kompakten Räumen, *Sitzungsber. Math.-Natw. Kl. Bayer. Akad. Wiss.*, (1955), 187—208.  
 [11] S. MARCUS, Sur une théorie du type Lebesgue pour l'intégrale de Riemann (en roumain, avec un résumé en russe et en français), *Studii și Cercetări Mat.*, 9 (1958), 333—369.  
 [12] P. R. HALMOS, *Measure Theory* (New York, 1950).  
 [13] C. KURATOWSKI, *Topologie I* (Warszawa—Wrocław, 1940), p. 29—30.

(Reçu le 12 février 1959)