Sur une classe de fonctions définies par des inégalités, introduite par M. Á. Császár.*)

Par S. MARCUS à Bucarest.

Introduction.

L'objet principal de ce travail est l'étude d'une classe de fonctions que nous appelons „internes“ et qui sont caractérisées par la double inégalité

$$\min(f(x), f(y)) \leqq f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leqq \max(f(x), f(y)).$$

Une fonction interne présente une structure intéressante chaque fois qu'elle n'est pas monotone. Une solidarité, semblable au lien organique qui existe entre les diverses parties d'une fonction analytique, établit une dépendance étroite entre les propriétés locales et globales de telle fonction. Les fonctions internes et non monotones se dérobent à tout ce qu'il y a habituel dans la théorie des fonctions, du point de vue métrique comme du point de vue topologique.

Dans le § 1 nous rappelons la notion de „fonction interne“ due à M. ÁKOS CSÁSZÁR et nous montrons les motifs qui exigent l'introduction de la notion de fonction interne selon la définition ci-dessus. Dans le § 2, une analyse détaillée nous permet de pénétrer dans la structure des fonctions internes et non monotones. Les résultats de ce paragraphe forment la base de tout le travail. Dans le § 3 on établit la structure des fonctions internes, du point de vue de la mesure et de la propriété de Baire. Dans le § 4 nous donnons quelques exemples non triviaux de fonctions internes, exemples qui montrent la différence de structure entre ces fonctions et celles internes au sens de M. Á. CSÁSZÁR. Dans le § 5 on donne une description des ensembles de niveau des fonctions internes et on en fait quelques applications. La „quasi-analyticité“ des fonctions internes et non monotones forme l'objet du

*) Qu'il me soit permis d'exprimer ma reconnaissance à M. ÁKOS CSÁSZÁR pour ses remarques me permettant d'améliorer sensiblement la rédaction du présent article.

§ 6. Que se passe-t-il si au lieu de $\frac{x+y}{2}$ on prend, dans la définition des fonctions internes au sens de M. Á. CSÁSZÁR, la valeur $px+qy$, où $p>0$, $q>0$, $p+q=1$? La réponse à cette question est donnée dans le § 7. Le dernier paragraphe contient des applications à certaines équations fonctionnelles.

1. Deux types de fonctions internes.

M. Á. CSÁSZÁR a introduit la notion de „fonction interne" comme il suit [6]: Il appelle une fonction réelle $f(x)$, définie sur (a, b) *interne* sur (a, b), si pour $a<x<y<b$ on a soit

$$\min(f(x), f(y)) < f\left(\frac{x+y}{2}\right) < \max(f(x), f(y))$$

soit

$$\min(f(x), f(y)) = f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \max(f(x), f(y)).$$

Nous dirons que telle fonction est *strictement interne.*

Les fonctions strictement monotones et les solutions de l'équation fonctionnelle $f(x+y)=f(x)+f(y)$ sont des exemples de fonctions strictement internes. Comme l'a montré M. Á. CSÁSZÁR dans [6] et [7] et comme nous l'avons montré dans [16], les fonctions strictement internes non monotones fournissent beaucoup de „situations rares" concernant la mesurabilité, la propriété de Baire et la propriété de Darboux des fonctions, la connexion des ensembles, etc. Puis, il existe beaucoup d'équations fonctionnelles dont les solutions sont des fonctions strictement internes. Enfin, il faut remarquer que certaines méthodes utilisées dans l'étude des fonctions internes se montrent utiles aussi dans l'étude d'autres classes de fonctions définies par des inégalités, par exemple les fonctions convexes et les fonctions sousadditives. Nous avons esquissé de tels procédés dans [18], [19] et [20]. Nous avons l'intention de reprendre cette question dans un prochain travail.

Dans la définition des fonctions strictement internes, on prend une précaution de nature très restrictive. En effet, soit $f(x)$ telle que pour $a<x<y<b$ on ait

$$\min(f(x), f(y)) \leqq f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leqq \max(f(x), f(y))$$

et pour certaines valeurs de x et y on ait

$$\min(f(x), f(y)) < f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \max(f(x), f(y))$$

ou

$$\min(f(x), f(y)) = f\left(\frac{x+y}{2}\right) < \max(f(x), f(y)).$$

Une telle fonction n'est plus interne, d'après la définition de M. Á. CSÁSZÁR.

Le caractère désavantageux de l'élimination de ces fonctions résulte des trois remarques suivantes:

a) Il existe des fonctions monotones qui ne sont pas strictement internes (par exemple, toute fonction monotone, non constante, qui n'est pas strictement monotone); par contre, toute fonction monotone serait interne, si nous acceptions les deux possibilités ci-dessus.

b) La classe des fonctions strictement internes n'est pas fermée par rapport à l'opération de passage à la limite; en effet, soit $\{f_n\}$ une suite convergente de fonctions strictement internes sur (a, b). On a pour $a<x<y<b$

$$\min(f_n(x), f_n(y)) < f_n\left(\frac{x+y}{2}\right) < \max(f_n(x), f_n(y))$$

ou

$$\min(f_n(x), f_n(y)) = f_n\left(\frac{x+y}{2}\right) = \max(f_n(x), f_n(y)).$$

Pour $n\to\infty$, on obtient, en posant $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$,

$$\min(f(x), f(y)) \leqq f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leqq \max(f(x), f(y)).$$

c) Chaque fois que nous essayons d'étudier *par un procédé uniforme* les divers types de fonctions définies par des inégalités, c'est la notion de fonction interne (et non pas celle de fonction strictement interne) qui s'offre d'une manière naturelle. Voir par exemple [18], [19] et les théorèmes du § 3 du présent travail.

Il est donc naturel d'étudier la classe des fonctions caractérisées par la définition suivante:

Une fonction réelle $f(x)$, définie sur (a, b), est i n t e r n e *sur (a, b), si pour $a<x<y<b$ on a*

$$\min(f(x), f(y)) \leqq f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leqq \max(f(x), f(y)).$$

Par certaines modifications apportées aux raisonnements de M. Á. CSÁSZÁR et en utilisant, en outre, d'autres procédés, nous allons montrer que beaucoup de propriétés des fonctions strictement internes restent valables pour les fonctions internes. En même temps, il y a des propriétés importantes de structure qui distinguent ces deux classes de fonctions.

1. Préliminaires sur les fonctions internes.

Désignons par R l'ensemble des nombres de la forme $\frac{m}{2^n}$, ou $m=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ et $n=0,1,2,\ldots$. Soit, pour $a<\alpha<\beta<b$, $M(\alpha,\beta)$ l'ensemble des x tels que $a<x<b$ et de la forme $x=p\alpha+q\beta$, où $p,q\in R$ et $p+q=1$. Posons $P(\alpha,\beta)=[\alpha,\beta]\cap M(\alpha,\beta)$.

Remarque. *L'ensemble $M(\alpha,\beta)$ est dense sur (a,b), donc $P(\alpha,\beta)$ l'est sur (α,β).* On voit aussitôt que $\alpha',\beta'\in M(\alpha,\beta)$, $\alpha'<\beta'$ entraîne $M(\alpha',\beta')\subset M(\alpha,\beta)$. En effet, en posant

$$\alpha'=p'\alpha+q'\beta,\quad p',q'\in R,\quad p'+q'=1,$$
$$\beta'=p''\alpha+q''\beta,\quad p'',q''\in R,\quad p''+q''=1,$$

on a pour $p,q\in R$, $p+q=1$

$$p\alpha'+q\beta'=p(p'\alpha+q'\beta)+q(p''\alpha+q''\beta)=(pp'+qp'')\alpha+(pq'+qq'')\beta,$$

où $pp'+qp''\in R$, $pq'+qq''\in R$ et

$$pp'+qp''+pq'+qq''=p(p'+q')+q(p''+q'')=1.$$

On en tire évidemment que $\alpha',\beta'\in P(\alpha,\beta)$ entraîne $P(\alpha',\beta')\subset P(\alpha,\beta)$.

(*) *Les nombres $a_1<b_1<\alpha'<\beta'<a_2<b_2$ étant donnés, il existe des nombres α et β tels que*

$$a_1<\alpha<b_1,\quad a_2<\beta<b_2\quad \textit{et que}\quad \alpha',\beta'\in P(\alpha,\beta).$$

En effet, on peut supposer sans restriction de la généralité que $\alpha'=0$, $\beta'=1$. Soient: $\varepsilon>0$ tel que $\varepsilon<b_1-a_1$, $\varepsilon<b_2-a_2$; un entier m_1 tel que $m_1\varepsilon>b_2-a_1$; un entier n tel que $2^n>m_1(b_2-a_1)$; enfin un entier m tel que $2^n+1<m(b_2-a_1)<2^n+m\varepsilon$. L'existence d'un m de la propriété exigée est aisée à voir; on peut prendre en effet pour m le plus petit entier tel que $2^n+1<m(b_2-a_1)$, car on aura alors $m>m_1$, donc

$$2^n+m\varepsilon-(2^n+1)=m\varepsilon-1>m_1\varepsilon-1>b_2-a_1.$$

En posant donc $m(b_2-a_1)=2^n+m\eta$ on a $1<m\eta<m\varepsilon$, donc

$$\frac{1}{m}<\eta<\varepsilon.$$

On peut trouver donc un entier k tel que

$$a_1<\frac{k}{m}<a_1+\eta<a_1+\varepsilon$$

et, en vertu de l'égalité $b_2-a_1-\eta=\frac{2^n}{m}$, que

$$b_2-\varepsilon<b_2-\eta<\frac{k+2^n}{m}<b_2.$$

Posons

$$\alpha=\frac{k}{m}, \quad \beta=\frac{k+2^n}{m}.$$

On a en ce cas

$$a_1<\alpha<a_1+\varepsilon<b_1, \quad a_2<b_2-\varepsilon<\beta<b_2$$

et

$$\frac{k+2^n}{2^n}\alpha-\frac{k}{2^n}\beta=0=\alpha', \quad \frac{k+2^n-m}{2^n}\alpha+\frac{m-k}{2^n}\beta=1=\beta'.$$

C. q. f. d.

Or, les nombres $a<\alpha<\beta<b$ étant donnés, on construit au moyen de la proposition (*) deux suites $\{\alpha_n\}$ et $\{\beta_n\}$ telles que

$$a<\alpha_n<\alpha_{n-1},\ \alpha_n\to a; \quad \beta_{n-1}<\beta_n<b,\ \beta_n\to b$$

et que

$$\alpha, \beta\in P(\alpha_1, \beta_1), \quad \alpha_{n-1}, \beta_{n-1}\in P(\alpha_n, \beta_n),$$

tout cela étant valable même pour $a=-\infty$, $b=+\infty$. La fonction $f(x)$ étant interne sur (a, b), on constate aussitôt qu'elle est monotone sur chacun des ensembles $P(\alpha_n, \beta_n)$, donc en conséquence de $P(\alpha_{n-1}, \beta_{n-1})\subset P(\alpha_n, \beta_n)$, elle est monotone sur leur réunion. ($f(x)$ est soit constante sur chacun d'eux, soit il existe un indice minimum n tel que $f(x)$ n'est pas constante sur $P(\alpha_{n_0}, \beta_{n_0})$ et alors $f(x)$ est monotone non-décroissante ou non croissante sur $P(\alpha_n, \beta_n)$ pour $n>n_0$, suivant qu'elle l'est pour $n=n_0$.) Or, on a évidemment $M(\alpha, \beta)\subset M(\alpha_n, \beta_n)$, donc

$$M(\alpha, \beta)\subset\bigcup_{n=1}^{\infty} P(\alpha_n, \beta_n),$$

d'où il résulte:

Lemme 1*). *Si $a<\alpha<\beta<b$ et si $f(x)$ est interne sur (a, b), alors $f(x)$ est monotone sur $M(\alpha, \beta)$.*

Nous allons utiliser souvent dans la suite la suivante

Remarque. *Si $f(x)$ est interne sur (a, b) et si $a<\alpha<\beta<b$, alors on a, pour chaque $x\in[\alpha, \beta]\cap M(\alpha, \beta)$,*

$$\min(f(\alpha), f(\beta))\leqq f(x)\leqq\max(f(\alpha), f(\beta)).$$

En particulier, si $f(\alpha)=f(\beta)$, alors $f(x)$ est constante sur $[\alpha, \beta]\cap M(\alpha, \beta)$.

Lemme 2. *Une fonction réelle $f(x)$, interne sur (a, b), constante $(=k)$ sur (α, β) $(a<\alpha<\beta<b)$, est monotone sur (a, b).*

---

*) La forme initiale du lemme 1, donnée par l'auteur, n'était valable, comme l'a remarqué M. Á. Császár, que dans le cas $(a, b)=(-\infty, \infty)$. La définition ci-dessus de l'ensemble $M(\alpha, \beta)$ ainsi que la démonstration du lemme 1, sont dûes à M. Á. Császár.

Démonstration. On peut supposer que $f(x)$ n'est pas constante sur (a, b). Soit alors $\xi \in (a, b)$ tel que $f(\xi) \neq k$. Soit, pour fixer les idées, $\xi < \alpha$ et $f(\xi) < k$.

Considérons un point η tel que $\beta < \eta < b$. Si l'on avait $f(\eta) < k$, alors, en vertu de la remarque qui suit le lemme 1, on aurait $f(x) < k$ pour chaque $x \in [\xi, \eta] \cap M(\xi, \eta)$, ce qui est contradictoire, parce que l'ensemble $M(\xi, \eta)$ possède des points sur (α, β) où $f(x)$ est égale à k. On a donc $f(x) \geqq k$ pour chaque x tel que $\beta < x < b$,

Supposons que $a < u < \xi$ et que $f(u) > k$. Alors, d'après le lemme 1, $f(x)$ est monotone décroissante sur $M(u, \xi)$. Mais en ce cas on a, pour $x \in (\alpha, \beta) \cap M(u, \xi)$, $f(x) \leqq f(\xi) < k$, ce qui est contradictoire.

Supposons enfin que $\xi < \nu < \alpha$ et que $f(\nu) > k$. Alors, d'après le lemme 1, $f(x)$ est monotone croissante sur $M(\xi, \nu)$. Mais en ce cas on a, pour $x \in (\alpha, \beta) \cap M(\xi, \nu)$, $k < f(\nu) \leqq f(x)$, ce qui est contradictoire.

En tout cas, pour chaque $x < \alpha$ on a $f(x) \leqq k$ et pour chaque $x > \beta$ on a $f(x) \geqq k$.

Soit maintenant $a < x < y < b$. Si $x < \alpha < \beta < y$, alors on a $f(x) \leqq f(y)$. Si $a < x < y < \alpha$ et si l'on avait $f(x) > f(y)$, alors, en considérant un point

$$z \in (\alpha, \beta) \cap M(x, y)$$

il résulterait, en vertu du lemme 1,

$$f(x) > f(y) \geqq f(z) = k.$$

Mais, en tenant compte que $x < \alpha$ et d'après la conclusion ci-dessus, on a

$$f(x) \leqq f(z).$$

On a abouti ainsi à une contradiction qui montre qu'en ce cas aussi on a $f(x) \leqq f(y)$.

Une conclusion analogue s'obtient pour $\beta < x < y < b$.

On a démontré ainsi que $f(x)$ est monotone croissante sur (a, b). Si l'on avait $f(\xi) > k$, alors il résulterait que $f(x)$ est monotone décroissante sur (a, b).

Lemme 3. *Si $f(x)$ est interne sur (a, b) et monotone sur $(\alpha, \beta) \subset (a, b)$, alors $f(x)$ est monotone sur (a, b).*

Démonstration. Si $f(x)$ est constante sur un intervalle partiel de (α, β), alors, en vertu du lemme 2, elle est monotone sur (a, b). Supposons donc que $f(x)$ soit strictement monotone sur (α, β) et, pour faire un choix, supposons-la croissante sur (α, β). Soient maintenant x et y tels que $a < x < y < b$ et $f(x) \neq f(y)$. L'ensemble $M(x, y)$ est, comme on sait, dense sur (a, b). Il existe donc $u < \nu$ tels que $u \in (\alpha, \beta) \cap M(x, y)$, $\nu \in (\alpha, \beta) \cap M(x, y)$.

On a, par hypothèse, $f(u)<f(v)$ et, en vertu du lemme 1, on a aussi $f(x)<f(y)$. Donc $f(x)$ est monotone croissante sur (a, b).

Si l'on supposait que $f(x)$ est décroissante sur (α, β), on obtiendrait la monotonie décroissante sur (a, b).

Remarque. En vertu du lemme 3, l'expression „fonction interne non monotone" a un sens complètement déterminé.

Théorème 1. *Soit $f(x)$ interne et non monotone sur (a, b). Désignons par m et M les bornes de $f(x)$ sur (a, b) (y compris le cas $m=-\infty$ ou $M=+\infty$).*

En chaque point de (a, b) les limites inférieures à gauche et à droite de $f(x)$ sont égaux à m, tandis que les limites supérieures à gauche et à droite de $f(x)$ sont égaux à M.

Démonstration. Supposons que a, b, m et M sont finis. Il existe un point $\xi \in [a, b]$ où $f(x)$ a la borne inférieure égale à m et un point $\eta \in [a, b]$ où $f(x)$ a la borne supérieure égale à M. Supposons $\xi \neq \eta$ et, pour faire un choix, $\xi<\eta$.

Soit $\varepsilon>0$ tel que $m+\varepsilon<M-\varepsilon$. Il existe deux points x et y tels que $x<y$, $f(x)<m+\varepsilon$ et $f(y)>M-\varepsilon$. On a donc $f(x)<f(y)$.

D'après le lemme 1, $f(x)$ est monotone croissante sur $M(x, y)$, donc il existe un ensemble dense sur (a, x) où $f(x)$ prend des valeurs inférieures à $m+\varepsilon$ et un ensemble dense sur (y, b), où $f(x)$ prend des valeurs supérieures à $M-\varepsilon$. En tenant compte de ce que x, resp. y, peuvent être pris aussi proches qu'on veut de ξ, resp. η et que ε peut être arbitrairement petit, il s'ensuit qu'en chaque point de l'intervalle (a, ξ) la borne inférieure de $f(x)$ est égale à m et qu'en chaque point de l'intervalle (η, b) la borne supérieure de $f(x)$ est égale à M.

En vertu du lemme 2, $f(x)$ n'est pas constante sur (a, ξ). Il existe donc un point ω tel que $a<\omega<\xi$ et $f(\omega)>m$. D'autre part, dans chaque voisinage de ξ il existe un point ω_1 tel que $\omega<\omega_1$ et $f(\omega)>f(\omega_1)$.

D'après le lemme 1, $f(x)$ est monotone décroissante sur l'ensemble $M(\omega, \omega_1)$, donc il existe sur l'intervalle (ω_1, b) un ensemble dense de points où les valeurs de $f(x)$ sont inférieures à $f(\omega_1)$. Le point ω_1 pouvant être choisi aussi près qu'on veut de ξ et tel que la valeur $f(\omega_1)$ soit aussi voisine qu'on veut de m, il s'ensuit qu'en chaque point de l'intervalle (ξ, b) la borne inférieure de $f(x)$ est égale à m.

D'une manière analogue on prouve qu'en chaque point de l'intervalle (a, η) la borne supérieure de $f(x)$ est égale à M.

Si l'on a $\xi=\eta$, le raisonnement est presque le même.

Dans le cas où certains des nombres a, b, m et M sont infinis, les modifications dans le raisonnement ci-dessus sont tellement évidentes, que nous nous dispensons d'en donner les détails.

Le théorème en résulte tout de suite.

R e m a r q u e. Le théorème 1, pour les fonctions strictement internes, résulte, par une voie tout à fait différente, du lemme 4 de [6]. Voir aussi le théorème 4 de [16].

C o r o l l a i r e 1. Si $f(x)$ est interne et non monotone sur (a, b), alors, pour $a<\alpha<b$ tel que $m<f(\alpha)$, resp. $f(\alpha)<M$, l'ensemble

$$\{x; f(x)<f(\alpha)\}, \text{ resp. } \{x; f(x)>f(\alpha)\}$$

est partout dense sur (a, b).

C o r o l l a i r e 2. Si $f(x)$ est interne et non monotone sur (a, b), alors l'ensemble

$$\{x; f(x)=m\}$$

est vide ou partout dense sur (a, b). La même chose est vraie pour l'ensemble $\{x; f(x)=M\}$.

Des corollaires 1 et 2 on déduit le

C o r o l l a i r e 3. *Si $f(x)$ est interne et non monotone sur (a, b), alors chacun des ensembles*

$$\{x; f(x)\leqq f(\alpha)\}, \ \{x; f(x)\geqq f(\alpha)\}$$

est partout dense sur (a, b) pour tout α tel que $a<\alpha<b$.

3. Mesurabilité, propriété de Baire et fonctions internes.

T h é o r è m e 2. *Si $f(x)$ est interne et non monotone sur (a, b), si $a<\alpha<\beta<2\beta-\alpha<b$ et si $m<f(\alpha)<M$, $m<f(\beta)<M$, alors l'ensemble*

$$E=\{x; \min(f(\alpha), f(\beta))<f(x)<\max(f(\alpha), f(\beta)), \alpha<x<\beta\}$$

est de mesure intérieure nulle et ne contient aucun ensemble de deuxième catégorie, jouissant de la propriété de Baire.

D é m o n s t r a t i o n. On suit une voie analogue à celle du lemme de [7].

Si $f(\alpha)=f(\beta)$, on n'a rien à démontrer. Supposons donc $f(\alpha)\neq f(\beta)$ et, pour fixer les idées, soit $f(\alpha)<f(\beta)$. Soit E_1 un sous-ensemble mesurable de E et supposons, par réduction à l'absurde, que $\mu(E_1)>0$. (Par μ on désigne toujours la mesure de Lebesgue.) Il existe un sous-intervalle I de (α, β), tel que $\mu(E_1\cap I)>0$. Puisque $2\beta-\alpha<b$, l'ensemble E_3, symétrique à $E_2=$ $=E_1\cap I$ par rapport au point β, est contenu dans (a, b) et on a, pour $x\in E_3$,

$f(\beta) \leqq f(x)$. En vertu du corollaire 1 du théorème 1 et du fait que $m < f(\alpha)$, l existe une suite $\{\beta_n\}$ de nombres tels que $f(\beta_n) < f(\alpha)$ et $\lim\limits_{n\to\infty} \beta_n = \beta$. En désignant par E_4^n le symétrique de E_3 par rapport au point β_n et en tenant compte de ce que pour $x \in E_3$ on a $f(x) > f(\beta_n)$, on déduit que, pour tout entier n suffisamment grand, $x \in E_4^n$ entraîne $f(x) \leqq f(\beta_n) < f(\alpha)$. On constate ainsi que $E_2 \cap E_4^n = 0$ pour chaque n assez grand; mais, d'autre part, on constate que E_4^n se déduit de E_2 par une translation de composante $2(\beta_n - \beta)$ et, en vertu d'un théorème de STEINHAUS [24], on doit avoir, pour n assez grand, $E_2 \cap E_4^n \neq 0$. La contradiction obtenue achève la démonstration.

Pour démontrer la partie descriptive du théorème 2, on suit une voie analogue, en tenant compte des faits suivants:

Si un ensemble A est de deuxième catégorie et jouit de la propriété de Baire, alors il existe un intervalle par rapport auquel le complémentaire de A est de première catégorie;

la catégorie d'un ensemble se conserve par une translation ou une symétrie;

si un ensemble A est de deuxième catégorie et jouit de la propriété de Baire, alors il existe un $\omega > 0$ tel que tout ensemble qui s'obtient de A par une translation inférieure à ω a des points communs avec A.

R e m a r q u e. La condition $2\beta - \alpha < b$ peut être évitée dans le théorème 2, ainsi que l'on fait dans [7]. Mais pour les besoins de ce travail, cette condition n'est pas restrictive.

Une fonction $f(x)$ est *qualitativement continue* au point ξ s'il existe un ensemble R, résiduel sur un certain voisinage de ξ et tel que $f(x)$ est continue, par rapport à R, au point ξ [17].

T h é o r è m e 3. *Si une fonction $f(x)$, interne et non monotone sur (a, b), est approximativement ou qualitativement continue en un point $\xi \in (a, b)$, alors on a $f(\xi) = m$ ou $f(\xi) = M$* (m et M étant les bornes de $f(x)$ sur (a, b)).

D é m o n s t r a t i o n. En essence, la démonstration est analogue à celle du théorème de [7].

Supposons par réduction à l'absurde, qu'il existe un point ξ de continuité approximative, tel que $a < \xi < b$ et $m < f(\xi) < M$. Il existe alors un ensemble A, ayant ξ pour point de densité et tel que $f(x)$ soit continue, par rapport à A, au point ξ. Soit $\varepsilon > 0$ assez petit pour que $m < f(\xi) - \varepsilon$ et $f(\xi) + \varepsilon < M$. Il existe un $\eta > 0$ tel que $\xi + 3\eta < b$ et $|f(x) - f(\xi)| < \varepsilon$ pour chaque $x \in B = A \cap [\xi - \eta, \xi + \eta]$. L'ensemble B est donc de mesure intérieure positive, mais, d'autre part, en faisant usage du théorème 2 (avec $\alpha = \xi - \eta$, $\beta = \xi + \eta$), on constate que B est de mesure intérieure nulle.

Si ξ était un point de continuité qualitative, alors il existerait un ensemble A résiduel dans un certain voisinage de ξ, tel que $f(x)$ soit continue, par rapport à A, au point ξ. En faisant usage de la partie descriptive du théorème 2, on aboutit, de la même manière que ci-dessus, à une contradiction qui démontre le théorème.

Le résultat que nous venons d'obtenir pose le problème de la mesurabilité et de la propriété de Baire des fonctions internes et non monotones. On sait, d'après un théorème de DENJOY, qu'une fonction mesurable et finie est approximativement continue presque partout et, d'autre part, il s'ensuit, d'après un théorème de KURATOWSKI, qu'une fonction jouissant de la propriété de Baire est qualitativement continue en chaque point, à l'exception possible d'un ensemble de première catégorie ([14], p. 306 ou [17], p. 260). C'est M. Á. CSÁSZÁR qui, en utilisant nos théorèmes 1 et 3 ci-dessus, a démontré, le premier, la non mesurabilité de toute fonction interne et non monotone. Puis, nous avons esquissé une autre voie pour trouver le résultat de M. Á. CSÁSZÁR [18].

En utilisant certains résultats de S. PICCARD, nous nous proposons ici de résoudre les problèmes suivants, qui pour les fonctions strictement internes et non monotones ont reçu une réponse négative ([7] et théorème 3 de [16]): Est-il possible qu'une fonction interne et non monotone possède: 1° un point de continuité approximative? 2° un point de continuité qualitative? Est-il possible qu'une fonction interne et non monotone 1° soit mesurable par rapport à un ensemble de mesure positive? 2° possède la propriété de Baire par rapport à un ensemble de deuxième catégorie, jouissant de la propriété de Baire?

Il est clair, en vertu des théorèmes de DENJOY et de KURATOWSKI, que la réponse négative aux deux premiers problèmes entraîne la réponse négative pour les deux derniers. Nous allons donc nous occuper des deux premiers. Mais voyons d'abord un lemme qui, d'ailleurs, sera fondamental dans ce qui suit.

On dit qu'un ensemble E, linéaire, est *médian* si pour $x \in E$, $y \in E$, on a $\frac{x+y}{2} \in E$.

Lemme 4. *Un ensemble médian et frontière est de mesure intérieure nulle. Tout ensemble jouissant de la propriété de Baire, contenu dans un ensemble médian et frontière, est de première catégorie.**)

Démonstration. S. PICCARD a démontré le théorème suivant: Si un ensemble linéaire A est de mesure positive ou s'il est de deuxième catégorie

*) Pour la partie métrique de ce lemme voir aussi [18], ou cet énoncé est obtenu par une autre voie.

et jouit de la propriété de Baire, alors l'ensemble $S(A)$ des nombres de la forme $x+y$, où $x \in A$, $y \in A$, contient un intervalle ([23], p. 187).

Dans les conditions du théorème de S. PICCARD, on déduit que l'ensemble $\frac{1}{2} S(A)$ des nombres $\frac{x+y}{2}$, où $x \in A$, $y \in A$, contient aussi un intervalle. Soit alors E médian; on a $\frac{1}{2} S(E) \subset E$, donc si E était de mesure intérieure positive, il contiendrait un intervalle et ne pourrait être un ensemble frontière. D'une manière analogue on prouve la partie descriptive du lemme 4.

Nous dirons qu'un ensemble A est de *mesure extérieure complète* sur un ensemble mesurable E, si la mesure de E est égale à la mesure extérieure de $A \cap E$.

Théorème 4. *Pour toute $f(x)$ interne et non monotone sur (a,b) et pour tout α et β tels que $m<\alpha<\beta<M$ (m et M étant les bornes de $f(x)$ sur (a,b)), chacun des ensembles:*

$$\{x; f(x)<\alpha, a<x<b\}, \quad \{x; f(x) \leqq \alpha, a<x<b\},$$
$$\{x; f(x) \geqq \alpha, a<x<b\}, \quad \{x; f(x)>\alpha, a<x<b\}$$

est de mesure extérieure complète sur tout ensemble mesurable de (a,b); l'ensemble

$$\{x; \alpha \leqq f(x) \leqq \beta, a<x<b\}$$

est de mesure intérieure nulle.

Tout ensemble jouissant de la propriété de Baire, contenu dans l'un des cinq ensembles ci-dessus, est de première catégorie.

Démonstration. D'après la définition des fonctions internes, les ensembles ci-dessus sont des ensembles médians. En vertu de la non monotonie de $f(x)$ et d'après le théorème 1, tous les ensembles ci-dessus sont des ensembles frontières. En vertu du lemme 4, tous ces ensembles sont de mesure intérieure nulle et ne contiennent aucun ensemble de deuxième catégorie, jouissant de la propriété de Baire. Le complémentaire d'un des premiers quatre ensembles est aussi parmi les premiers quatre. Il reste à utiliser le théorème H du § 14 de [9].

Théorème 5. *Une fonction interne et non monotone n'admet aucun point de continuité approximative et aucun point de continuité qualitative.*

Démonstration. D'après le théorème 3, si ξ est un point de continuité approximative, alors on a $\xi \in H = \{x; f(x)=m\} \cup \{x; f(x)=M\}$. Supposons, pour fixer les idées, que $\xi \in \{x; f(x)=m\}$. Il existe donc, pour $\varepsilon>0$, un ensemble G de mesure positive, ayant ξ comme point de densité et tel que $f(x)<f(\xi)+\varepsilon=m+\varepsilon$ pour $x \in G$. Supposons que ε soit assez petit pour que

$m+\varepsilon<M$. Puisque $f(x)$ est interne, l'ensemble $L=\{x; a<x<b, f(x)<m+\varepsilon\}$ est un ensemble médian. En vertu de la non monotonie de $f(x)$ et du corollaire 1 du théorème 1, L est un ensemble frontière et, donc, d'après le lemme 4, il a la mesure intérieure nulle. Mais cella est en contradiction avec l'inégalité ci-dessus.

Démontrons que $f(x)$ n'admet aucun point ξ de continuité qualitative. Supposons par réduction à l'absurde, que tel point existe. D'après le théorème 3, on a $\xi \in H$. Supposons, pour fixer les idées, que $\xi \in \{x; f(x)=m\}$. Il existe donc, pour $\varepsilon>0$, un $\eta>0$ et un ensemble R qui est un résiduel sur l'intervalle $(\xi-\eta, \xi+\eta)$, tels que $f(x)<f(\xi)+\varepsilon=m+\varepsilon$ pour $x \in R$. Mais cette inégalité est en contradiction avec le fait que l'ensemble L $(\supset R)$, étant médian et frontière, ne contient, en vertu du lemme 4, aucun ensemble de deuxième catégorie et jouissant de la propriété de Baire.

R e m a r q u e. Le théorème 5 généralise le théorème de M. Á. Császár de [7]. En même temps, le théorème 5 résout en sens négatif tous les problèmes que nous avons posés au commencement de ce paragraphe.

On sait [22] que toute fonction convexe sur $[a, b]$, supérieurement bornée sur un ensemble de mesure positive contenu dans (a, b) est supérieurement bornée sur (a, b). D'autre part, M. Hukuhara a montré [11] que ce théorème reste vrai si l'on remplace le mot „supérieurement" par le mot „inférieurement".

Y a-t-il une propriété analogue pour les fonctions internes? Si $f(x)$ est interne sur (a, b) et si M est sa borne supérieure sur un certain ensemble F de mesure positive, alors l'ensemble $E=\{x; f(x)\leqq M, a<x<b\}$ est médian et, en vertu du lemme 4, il contient un intervalle $I\subset(a, b)$. En tenant compte du théorème 1 et en supposant, en outre, que $f(x)$ n'est pas monotone sur (a, b), il s'ensuit que $f(x)\leqq M$ pour chaque $x \in (a, b)$.

Un raisonnement analogue s'applique au cas où F est un ensemble de deuxième catégorie, jouissant de la propriété de Baire. (Dans ce cas on va utiliser la partie descriptive du lemme 4.) D'autre part, on peut raisonner de la même manière pour la borne inférieure de $f(x)$ et on aboutit ainsi au

T h é o r è m e 6. *Si une fonction $f(x)$, interne et non monotone sur (a, b), admet sur un certain ensemble de mesure positive ou de deuxième catégorie et jouissant de la propriété de Baire, les bornes m et M, alors m et M sont les bornes de $f(x)$ sur (a, b).*

4. Quelques exemples non triviaux de fonctions internes et non monotones.

Pour donner une justification complète à l'étude des fonctions internes, il faut montrer, par exemples, l'existence des fonctions internes qui ne sont ni monotones, ni strictement internes. Nous allons démontrer non seulement l'existence de telles fonctions, mais aussi des fonctions internes qui jouissent de certaines propriétés de structure qui n'apparaissent jamais dans la classe des fonctions strictement internes.

On sait, d'après le lemme 4 de [6] (ou le théorème 4 de [16]) qu'une fonction strictement interne et non monotone n'atteint en aucun point ni sa borne inférieure, ni sa borne supérieure. Ce n'est pas le cas pour les fonctions internes et non monotones, comme le montre notre

Exemple 1. *Il existe une fonction $f(x)$ interne, non monotone, qui n'est pas strictement interne et telle que les ensembles $\{x; f(x)=m\}$ et $\{x; f(x)=M\}$ ne sont pas vides (m et M étant les bornes de $f(x)$).*

Démonstration. Soit $\varphi(x)$ une solution discontinue de l'équation fonctionnelle $\varphi(x)+\varphi(y)=\varphi(x+y)$. On sait que le graphique de telle fonction est partout dense dans le plan. D'autre part, $\varphi(x)$ est évidemment strictement interne. Considérons trois constantes k, m et M telles que $m<M$, $k>0$ et posons

$$\psi(u)=\begin{cases} m, \text{ si } u<-k \\ \text{strictement croissante de } m \text{ à } M \text{ si } -k\leqq u\leqq k \\ M, \text{ si } u>k \end{cases}$$

et

$$f(x)=\psi(\varphi(x)).$$

Une fonction monotone d'une fonction interne étant évidemment interne, $f(x)$ est interne. D'autre part, $f(x)$ n'est pas strictement interne, car les ensembles $\{x; f(x)=m\}$, $\{x; f(x)=M\}$ ne sont pas vides (théorème 4 de [16]).

Le graphique de $\varphi(x)$ étant dense dans le plan, il existe des $x<y$ tels que $-k<\varphi(x)<\varphi(y)<k$. Il y a aussi un z tel que $x<z<y$ et $\varphi(y)<\varphi(z)<k$, donc en vertu de la monotonie strictement croissante de $\psi(u)$ sur $(-k, k)$ on déduit $f(x)<f(y)<f(z)$ et il s'ensuit ainsi que f n'est pas monotone.

Une fonction strictement interne et non monotone prend toujours une infinité de valeurs distinctes. Ce n'est pas le cas pour les fonctions internes et non monotones, comme le montre notre

Exemple 2. *Il existe une fonction $f(x)$ interne et non monotone, qui prend seulement deux valeurs (donc $f(x)$ n'est pas strictement interne).*

Démonstration. Soient $\alpha < \beta$. Posons

$$\psi(u) = \begin{cases} \alpha, & \text{si } u \leqq 0, \\ \beta, & \text{si } u > 0. \end{cases}$$

Soit $\varphi(x)$ une fonction interne et non monotone sur toute la droite, ayant la borne inférieure <0, la borne supérieure >0. Posons $f(x) = \psi(\varphi(x))$; $f(x)$ est interne. D'autre part, il est visible que $f(x)$ prend seulement deux valeurs: α et β. Si $f(x)$ était monotone, par exemple monotone croissante, il existerait un point ξ tel que $f(x) \equiv \alpha$ pour $x < \xi$ et $f(x) \equiv \beta$ pour $x > \xi$. Cela veut dire que pour $x < \xi$ on aurait $\varphi(x) < 0$, donc pour $x < \xi$ la borne supérieure de $\varphi(x)$ serait $\leqq 0$. Mais alors, d'après le théorème 6, la borne supérieure de $\varphi(x)$ serait $\leqq 0$ sur toute la droite, ce qui est en contradiction avec la définition de $\varphi(x)$. Donc $f(x)$ n'est pas monotone.

Corollaire 1. *Il existe une décomposition de la droite en deux ensembles médians, partout denses.*

Démonstration. En effet, les deux ensembles de niveau de la fonction $f(x)$ de l'exemple 2 en fournissent la décomposition cherchée.

Corollaire 2. *Si $A \cup B$ est une décomposition de la droite réelle en deux ensembles disjoints, médians et partout denses, alors A et B sont non mesurables au sens de Lebesgue et dépourvus de la propriété de Baire.*

Démonstration. Soit $f(x)$ la fonction caractéristique de l'ensemble A. $f(x)$ est interne et non monotone. D'après le théorème 5, $f(x)$ est non mesurable et dépourvue de la propriété de Baire. On a $A = \{x; f(x) > 0\}$ donc A et B jouissent des propriétés annoncées.

On pourrait croire, en regardant les exemples 1 et 2, que le fait que les ensembles $\{x; f(x) = m\}$, $\{x; f(x) = M\}$ ne sont pas vides est obligatoire pour les fonctions internes et non monotones, qui ne sont pas strictement internes. Ce n'est pas le cas, comme le montre notre

Exemple 3. *Il existe une fonction $f(x)$, interne, non monotone et non strictement interne, telle que les ensembles $\{x; f(x) = m\}$, $\{x; f(x) = M\}$ sont vides (m et M sont les bornes de $f(x)$).*

Démonstration. Soit $\varphi(x)$ une solution discontinue de l'équation $\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y)$. Soit $k > 0$. Soit $\psi(u)$ égale à une constante λ pour $-k < u < k$, strictement croissante sur $(-\infty, k)$ et sur (k, ∞), telle que $\psi(-k-0) < \lambda < \psi(k+0)$. Il s'ensuit que $\psi(u)$ est une fonction monotone croissante sur $(-\infty, \infty)$ et que les valeurs $m = \lim\limits_{u \to -\infty} \psi(u)$, $M = \lim\limits_{u \to \infty} \psi(u)$ ne sont prises par $\psi(u)$ en aucun point.

Considérons la fonction $f(x) = \psi(\varphi(x))$. Comme dans les exemples ci-dessus, on montre que $f(x)$ est interne. Soient maintenant deux points x

et y tels que $-k<\varphi(x)<\varphi\left(\frac{x+y}{2}\right)<k<\varphi(y)$. Pour x et y on peut prendre, par exemple, deux points rationnels, tels que $-k<x\cdot\varphi(1)<\frac{x+y}{2}\cdot\varphi(1)<k<$ $<y\cdot\varphi(1)$, car on sait que toute solution $\varphi(x)$ de l'équation fonctionnelle de Cauchy a, sur l'ensemble des nombres rationnels, l'expression ax, où $a=\varphi(1)$. On a ainsi, d'après la définition de $\psi(u)$, $\lambda<\psi(\varphi(y))$, donc

$$\min(f(x), f(y)) = \min(\psi(\varphi(x)), \psi(\varphi(y))) = \min(\lambda, \psi(\varphi(y))) = \lambda =$$
$$=\psi\left(\varphi\left(\frac{x+y}{2}\right)\right)=f\left(\frac{x+y}{2}\right)<$$
$$<\psi(\varphi(y)) = \max(\psi(\varphi(x)), \psi(\varphi(y))) = \max(f(x), f(y)),$$

donc $f(x)$ n'est pas strictement interne.

En tenant compte de ce que le graphique de $\varphi(x)$ est partout dense dans le plan et que $\psi(u)$ est croissante, on montre comme dans l'exemple 1 que $f(x)$ n'est pas monotone.

Enfin, l'ensemble des valeurs de $f(x)$ étant le même que l'ensemble des valeurs de $\psi(u)$, on déduit que les bornes inférieure et supérieure de $f(x)$ sur $(-\infty, \infty)$ sont m et M et qu'il n'existe aucun x tel que $f(x)=m$ ou $f(x)=M$.

5. La structure des ensembles de niveau des fonctions internes et non monotones.

Rappelons qu'on appelle *ensemble de niveau* d'une fonction $f(x)$ l'ensemble des points où $f(x)$ prend la même valeur. Les ensembles de niveau (brièvement: les niveaux) d'une fonction interne non monotone ont des propriétés remarquables et conduisent à certains exemples rares de la théorie des ensembles ou des fonctions.

Nous allons supposer dans ce paragraphe que $f(x)$ est définie sur $(-\infty, \infty)$.

Proposition 1. *Tout ensemble de niveau d'une fonction strictement interne (resp. interne) el non monotone présente une et seulement une des trois situations suivantes:*

a) *il est vide;*

b) *il est formé d'un seul point;*

c) *il est un ensemble frontière, partout dense (resp. dense sur un certain intervalle).*

Pour la démonstration, il suffit de tenir compte du lemme de [6] (resp. de la remarque qui suit la démonstration du lemme 1 de la présente note).

D é f i n i t i o n. On dit que ξ est un *point de symétrie* d'un ensemble E, si pour $x \in E$ on a $2\xi - x \in E$.

P r o p o s i t i o n 2. *Chaque point d'un ensemble de niveau* $E \neq 0$ *d'une fonction strictement interne est un point de symétrie pour* E *et pour le complémentaire de* E. *Aucun point étranger à* E *n'est point de symétrie pour* E.

En effet, si E est du type b) (voir la proposition 1), la proposition 2 est évidente. Si E est du type c), soient $\xi \in E$, $x \in E$. D'après la définition des fonctions strictement internes, on a $2\xi - x \in E$. Pour $\xi \in E$, $x \notin E$, on a $2\xi - x \notin E$.

Si $\xi \notin E$ et $x \in E$, on a $2\xi - x \notin E$ (toujours en tenant compte de la définition des fonctions strictement internes).

P r o p o s i t i o n 3. *Tout ensemble de niveau* E *d'une fonction interne et non monotone est de mesure intérieure nulle au sens de Lebesgue.*

En effet, dans le cas contraire la fonction serait constante sur un certain ensemble de mesure positive (le noyau mesurable de E), en contradiction avec le théorème 5.

C o r o l l a i r e. *Si chaque ensemble de niveau d'une fonction interne et non monotone est mesurable au sens de Lebesgue, alors l'ensemble des valeurs de la fonction est non dénombrable.*

P r o p o s i t i o n 4. *Tout ensemble jouissant de la propriété de Baire, contenu dans un ensemble de niveau d'une fonction interne et non monotone, est de première catégorie.*

En effet, il suffit de tenir compte du théorème 5.

C o r o l l a i r e. Si chaque ensemble de niveau d'une fonction interne et non monotone jouit de la propriété de Baire, l'ensemble des valeurs de cette fonction est non dénombrable.

P r o p o s i t i o n 5. *Si* m *et* M *sont les bornes d'une fonction* $f(x)$ *strictement interne (resp. interne) et non monotone, alors chacun des ensembles* $\{x; f(x) = m\}$, $\{x; f(x) = M\}$ *est vide (resp. vide ou partout dense).*

En effet, si $f(x)$ est strictement interne et non monotone, notre assertion est démontrée en [16]. Pour $f(x)$ interne et non monotone, voir le corollaire 2 du théorème 1. Admettons, pour un instant, les valeurs $\pm\infty$ pour $f(x)$.

De la définition des fonctions strictement internes il ne résulte pas, au moins à priori, qu'une fonction strictement interne et non monotone ne pourrait prendre des valeurs infinies. On a pourtant comme conséquence immédiate de la proposition 5 la

P r o p o s i t i o n 6. *Une fonction strictement interne et non monotone est finie.*

R e m a r q u e. La finitude des fonctions de Hamel a été établie par I. HALPERIN [10].

P r o p o s i t i o n 7. *Il existe une fonction interne et non monotone, qui n'est pas finie.*

En effet, considérons une décomposition de la droite en deux ensembles A et B, médians et partout denses (telle décomposition existe, d'après le corollaire 1 de l'exemple 2). La fonction

$$f(x)=\begin{cases} 1, & \text{si } x\in A \\ \infty, & \text{si } x\in B \end{cases}$$

satisfait aux conditions de l'énoncé.

P r o p o s i t i o n 8. *La fonction caractéristique d'un ensemble de niveau E d'une fonction strictement interne, admet la dérivée symétrique nulle en chaque point de E.*

Conséquence de la proposition 2.

P r o p o s i t i o n 9. *Soit E est un ensemble de niveau du type* c) *(voir la Proposition 1) d'une fonction strictement interne non monotone. La fonction caractéristique $\varphi(x)$ de E admet alors la dérivée symétrique (nulle) en chaque point de E et seulement en ces points. La fonction $\varphi(x)$ est discontinue en chaque point.*

Conséquence des propositions 1 et 8.

Z. CHARZYNSKI a démontré [5] que, pour une fonction qui admet en chaque point la dérivée symétrique nulle, l'ensemble des points de discontinuité est clairsemé (donc dénombrable). Il se pose alors le problème: Quel est l'ensemble „maximum“ où une fonction peut admettre la dérivée symétrique nulle, en restant discontinue en chaque point? Une réponse est donnée par la

P r o p o s i t i o n 10. *Il existe une fonction $f(x)$, discontinue partout et dont l'ensemble des points où la dérivée symétrique est nulle, est de mesure extérieure complète sur chaque intervalle.*

Pour le démontrer, considérons une base de Hamel H qui rencontre tout ensemble parfait (l'existence de pareille base a été démontrée par BURSTIN [3]) et soit $\psi(x)$ une fonction égale à 1 sur H et définie dans le reste par le procédé de Hamel. $\psi(x)$, comme solution de l'équation $\psi(x+y)=$ $=\psi(x)+\psi(y)$, est une fonction strictement interne. Il est aisé de voir que tout ensemble de niveau de $\psi(x)$ est de mesure extérieure complète sur chaque intervalle. (Pour l'ensemble $\{x; \psi(x)=1\}$ ceci est évident, car il contient l'ensemble H; pour les autres niveaux, il en résulte du fait que les niveaux de $\psi(x)$ se déduisent l'un de l'autre par une translation). En tenant compte de la proposition 9, on déduit que la fonction caractéristique d'un ensemble de niveau de $\psi(x)$ jouit des propriétés désirées.

Proposition 11. *Si $f(x)$, interne sur (a, b), est symétriquement continue au point $\xi \in (a, b)$, alors $f(x)$ est continue au point ξ.*

En effet, on a

$$\min(f(x), f(2\xi-x)) \leqq f(\xi) \leqq \max(f(x), f(2\xi-x))$$

et

$$\lim_{x\to\xi}(f(2\xi-x)-f(x))=0,$$

donc

$$\lim_{x\to\xi} f(x)=f(\xi).$$

Corollaire. *Une fonction interne et non monotone n'est symétriquement continue en aucun point.*

6. La „quasi-analyticité" des fonctions internes, non monotones.

Théorème 7. *Soit $f(x)$ une fonction jouissant de la propriété de Darboux, interne et non monotone sur (a, b). Soit $g(x)$ une fonction strictement interne sur (a, b). S'il existe un sous-intervalle $(\alpha, \beta) \subset (a, b)$, tel que $f(x)=g(x)$ pour chaque $x \in (\alpha, \beta)$, on a $f(x) \equiv g(x)$ sur (a, b).*

Démonstration. Soit $\xi \in (a, b)-(\alpha, \beta)$. Supposons, pour fixer les idées, que $\beta < \xi < b$. Du fait que, en vertu du théorème 1, $f(x)$ a sur chaque intervalle partiel de (a, b) les mêmes bornes m_f et M_f que sur (a, b), du corollaire 2 du théorème 1 et de ce que $f(x)$ jouit de la propriété de Darboux, il s'ensuit que $f(x)$ prend, sur chaque intervalle partiel de (a, b), toute valeur comprise entre m_f et M_f. Il existe donc un $\eta \in (\alpha, \beta)$ tel que $f(\eta)=f(\xi)$. Il est aisé de voir, par induction complète, que pour chaque n entier positif on a

$$f\left(\frac{(2^n-1)\eta+\xi}{2^n}\right)=f(\xi).$$

Mais pour n assez grand

$$\alpha < \frac{(2^n-1)\eta+\xi}{2^n} < \beta,$$

donc

$$g\left(\frac{(2^n-1)\eta+\xi}{2^n}\right)=f\left(\frac{(2^n-1)\eta+\xi}{2^n}\right)$$

et, comme $g(x)$ est strictement interne sur (a, b), il résulte que $g(x)$ est constante sur l'ensemble (voir la notation introduite au commencement de cet article)

$$M\left(\eta, \frac{(2^n-1)\eta+\xi}{2^n}\right).$$

Mais

$$\xi \in M\left(\eta, \frac{(2^n-1)\eta+\xi}{2^n}\right)$$

donc $g(\xi)=g(\eta)$ et, d'ici, $g(\xi)=f(\xi)$.

R e m a r q u e. Pour que le théorème 10 ne soit pas dépourvu d'objet, il faut montrer qu'il existe une fonction interne, non monotone, jouissant de la propriété de Darboux. Une fonction de ce type, qui est, en outre, strictement interne, se trouve en [16]. Mais il existe aussi des fonctions internes, non monotones, jouissant de la propriété de Darboux et qui ne sont pas strictement internes. Telle est la fonction de l'exemple 1 du § 4, dès que $\psi(u)$ est continue et $\varphi(x)$ a le graphique connexe (l'existence d'une fonction de Hamel à graphique connexe a été démontré dans [13]).

7. Les fonctions strictement internes de poids p, q.

D é f i n i t i o n. Soient deux nombres réels p et q tels que $p>0$, $q>0$, $p+q=1$. Nous dirons que la fonction $f(x)$, définie sur (a, b), est, sur (a, b), strictement interne de poids p et q si pour $a<x<y<b$ on a soit

$$\min(f(x), f(y))=f(px+qy)=\max(f(x), f(y)),$$

soit

$$\min(f(x), f(y))<f(px+qy)<\max(f(x), f(y)).$$

Une fonction interne au sens de Á. Császár est donc strictement interne de poids $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$.

Soit $f(x)$ une fonction strictement interne de poids p, q sur (a, b). Soient α et β tels que $a<\alpha<\beta<b$. Nous allons définir, par récurrence, une suite d'ensembles finis $\mathfrak{M}_n(\alpha, \beta, p, q)$ $(n=0, 1, \ldots)$. Pour $n=0$ posons

$$\mathfrak{M}_0(\alpha, \beta, p, q)=\{\alpha, \beta\}.$$

Supposons qu'on a défini déjà l'ensemble $\mathfrak{M}_{n-1}(\alpha, \beta, p, q) \subset (a, b)$, soit

$$\mathfrak{M}_{n-1}(\alpha, \beta, p, q)=\{\lambda_1^{n-1}, \ldots, \lambda_i^{n-1}, \ldots, \lambda_{s_n}^{n-1}\},$$

où $\lambda_i^{n-1}<\lambda_j^{n-1}$ pour $i<j$. Posons alors

$$\mathfrak{M}'_n(\alpha, \beta, p, q)=\mathfrak{M}_{n-1}(\alpha, \beta, p, q) \cup \{p\lambda_i^{n-1}+q\lambda_{i+1}^{n-1}\} \quad (i=1, 2, \ldots, s_n-1),$$

et

$$\mathfrak{M}_n(\alpha,\beta,p,q)=\left\{\frac{1}{p}(\lambda_1^{n-1}-q\lambda_k^{n-1})\right\}\cup\left\{\frac{1}{q}(\lambda_{s_n}^{n-1}-p\lambda_m^{n-1})\right\}\cup\mathfrak{M}_n'(\alpha,\beta,p,q),$$

où les indices k et m sont le plus grand resp. le plus petit possible pour que les points correspondants soient encore situés en (a,b).

On a évidemment

$$\mathfrak{M}_{n-1}(\alpha,\beta,p,q)\subset\mathfrak{M}_n(\alpha,\beta,p,q) \qquad (n=1,2,\ldots).$$

Posons

$$\mathfrak{M}(\alpha,\beta,p,q)=\bigcup_{n=1}^{\infty}\mathfrak{M}_n(\alpha,\beta,p,q).$$

Remarque. *L'ensemble* $\mathfrak{M}(\alpha,\beta,p,q)$ *est partout dense sur* (a,b).

Nous allons essayer de transposer pour les fonctions strictement internes de poids p,q, la suite des idées de [6], [7] et [16].

Proposition 13. *Soit* $f(x)$ *strictement interne, de poids* p,q *sur* (a,b) $(p>0, q>0, p+q=1)$. *Soit* $a<\alpha<\beta<b$. *En ce cas,* $f(x)$ *est constante, strictement croissante ou décroissante sur l'ensemble* $\mathfrak{M}(\alpha,\beta,p,q)$, *suivant que* $f(\alpha)=f(\beta)$, $f(\alpha)<f(\beta)$ *ou* $f(\alpha)>f(\beta)$.

Démonstration. Supposons que $f(\alpha)<f(\beta)$. $f(x)$ est donc croissante sur $\mathfrak{M}_0(\alpha,\beta,p,q)$. Admettons que $f(x)$ est croissante sur l'ensemble $\mathfrak{M}_{n-1}(\alpha,\beta,p,q)$. On a donc

$$f(\lambda_1^{n-1})<f(\lambda_2^{n-1})<\cdots<f(\lambda_i^{n-1})<\cdots<f(\lambda_{s_n}^{n-1}).$$

En tenant compte de ce que $f(x)$ est strictement interne, de poids p,q, on en déduit

$$f\left(\frac{\lambda_1^{n-1}-q\lambda_k^{n-1}}{p}\right)<f(\lambda_1^{n-1})<f(p\lambda_1^{n-1}+q\lambda_2^{n-1})<f(\lambda_2^{n-1})<\cdots<f(\lambda_i^{n-1})<$$
$$<f(p\lambda_i^{n-1}+q\lambda_{i+1}^{n-1})<f(\lambda_{i+1}^{n-1})<\cdots<f(\lambda_{s_n}^{n-1})<f\left(\frac{\lambda_{s_n}^{n-1}-p\lambda_m^{n-1}}{q}\right),$$

donc $f(x)$ est croissante sur $\mathfrak{M}_n(\alpha,\beta,p,q)$, quel que soit l'entier positif n. Soient maintenant $x_1<x_2$, $x_1\in\mathfrak{M}(\alpha,\beta,p,q)$, $x_2\in\mathfrak{M}(\alpha,\beta,p,q)$. De la définition même de l'ensemble $\mathfrak{M}(\alpha,\beta,p,q)$ il résulte l'existence d'un entier positif n, tel que $x_1\in\mathfrak{M}_n(\alpha,\beta,p,q)$, $x_2\in\mathfrak{M}_n(\alpha,\beta,p,q)$ donc $f(x_1)<f(x_2)$ et $f(x)$ est croissante sur $\mathfrak{M}(\alpha,\beta,p,q)$.

Si $f(\alpha)>f(\beta)$, on prouve, par une voie analogue, que $f(x)$ est décroissante sur $\mathfrak{M}(\alpha,\beta,p,q)$.

Si $f(\alpha)=f(\beta)$, alors, en admettant que $f(x)$ est constante sur $\mathfrak{M}_{n-1}(\alpha,\beta,p,q)$, on déduit aisément que $f(x)$ est constante sur $\mathfrak{M}_n(\alpha,\beta,p,q)$ et, donc, que $f(x)$ est constante sur $\mathfrak{M}(\alpha,\beta,p,q)$.

Proposition 14. *Si $f(x)$ est strictement interne, de poids p, q sur (a, b) $(p>0, q>0, p+q=1)$, constante, resp. croissante, resp. décroissante sur un sous-intervalle de (a, b), alors elle est constante, resp. croissante, resp. décroissante sur (a, b).*

Démonstration. En vertu de la proposition 13, la démonstration se fait de la même manière que pour le lemme 2 de [6].

Proposition 15. *Soit $f(x)$ strictement interne, de poids p, q sur (a, b) $(p>0, q>0, p+q=1)$. Soit $a<\alpha<b$. Si pour un certain $\delta>0$ on a $f(\alpha)\leqq f(\alpha+h)$ $(0<h<\delta)$, alors $f(x)$ est croissante sur (a, b) ou constante sur (a, b).*

Démonstration. En essence, le raisonnement ne diffère pas de celui utilisé dans la démonstration du lemme 3 de [6].

En vertu de la proposition 14, il suffit de montrer que $f(x)$ est croissante ou constante sur un sous-intervalle de $(\alpha, \alpha+\delta)$. En effet, dans le cas contraire il existerait des ξ et η tels que $\alpha<\xi<\eta<\alpha+\delta$ et que $f(\xi)>f(\eta)\geqq f(\alpha)$.

D'après la proposition 13, $f(x)$ est décroissante sur l'ensemble $(a, b)\cap \cap \mathfrak{M}(\xi, \eta, p, q)$; il existe donc sur l'intervalle

$$\left(\alpha-\frac{q}{p}\delta, \alpha\right),$$

comme conséquence de ce que l'ensemble $\mathfrak{M}(\xi, \eta, p, q)$ est dense, un point y tel que $f(y)>f(\xi)\geqq f(\alpha)$. Mais, pour tel y, le point

$$z=\frac{\alpha-py}{q}$$

se trouve sur l'intervalle $(\alpha, \alpha+\delta)$ et $f(z)<f(\alpha)$, en contradiction avec l'hypothèse.

Proposition 16. *Si $f(x)$ est strictement interne, de poids p, q sur (a, b) $(p>0, q>0, p+q=1)$, non monotone sur (a, b), et si $a<\alpha<b$, alors les ensembles $\{x; f(x)>f(\alpha)\}$ et $\{x; f(x)<f(\alpha)\}$ sont partout denses sur (a, b).*

Démonstration. On procède comme au lemme 4 de [6],

Proposition 17. *Soit $f(x)$ une fonction strictement interne, de poids p, q $(p>0, q>0, p+q=1)$, non monotone sur (a, b). Soient α et β tels que*

$$a<\alpha<\beta<\frac{\beta-p\alpha}{q}<b.$$

Dans ces conditions, la mesure intérieure de l'ensemble

$$\{x; \alpha<x<\beta, \min(f(\alpha), f(\beta))<f(x)<\max(f(\alpha), f(\beta))\}$$

est égale à zéro.

D é m o n s t r a t i o n. On imite la première partie de la démonstration du lemme de [7], avec les deux modifications suivantes:

1. E_3, au lieu d'être l'ensemble symétrique de E_2 par rapport à β, est l'ensemble qui se déduit de E_2 de la manière suivante:

Si $x \in E_2$, alors $\dfrac{\beta - px}{q} \in E_3$;

2. E_4'', au lieu d'être l'ensemble symétrique de E_3 par rapport au point β_n, se déduit de E_3 de la manière suivante:

Si $x \in E_3$, alors $\dfrac{\beta_n - qx}{p} \in E_4''$.

P r o p o s i t i o n 18. *Dans les hypothèses et avec les notations de la proposition 17, tout ensemble jouissant de la propriété de Baire contenu dans l'ensemble*

$$\{x\,;\ \alpha < x < \beta,\ \min(f(\alpha), f(\beta)) < f(x) < \max(f(\alpha), f(\beta))\}$$

est de première catégorie.

D é m o n s t r a t i o n. On imite la démonstration du lemme de [16] avec les modifications indiquées dans la démonstration de la proposition 17.

T h é o r è m e 8. *Une fonction strictement interne de poids* p, q $(p>0, q>0, p+q=1)$, *non monotone sur* (a, b), *n'est mesurable sur aucun ensemble de mesure positive de* (a, b).

D é m o n s t r a t i o n. On imite la démonstration du théorème de [7] en remarquant que l'intervalle (α_1, β_1) peut être choisi assez petit pour qu'on ait

$$\frac{\beta_1 - p\alpha_1}{q} < b,$$

donc on peut faire usage de la proposition 17 ci-dessus.

T h é o r è m e 9. *Une fonction strictement interne de poids* p, q $(p>0, q>0, p+q=1)$, *non monotone sur* (a, b), *est dépourvue de la propriété de Baire par rapport à tout ensemble de deuxième catégorie, jouissant de la propriété de Baire.*

D é m o n s t r a t i o n. On imite la démonstration du théorème 3 de [6] en tenant compte de la remarque faite dans la démonstration du théorème 8. On utilise la proposition 18.

Des propositions 17 et 18 on peut déduire, de la même manière comme on a déduit le théorème 3 du théorème 2, le

T h é o r è m e 10. *Une fonction strictement interne de poids* p, q $(p>0, q>0, p+q=1)$, *non monotone sur* (a, b), *ne possède sur* (a, b) *aucun point de continuité approximative ou qualitative.*

8. Applications à certaines équations fonctionnelles.

Dans ce paragraphe nous nous proposons de donner quelques exemples d'équations fonctionnelles souvent rencontrées dans la littérature, dont les solutions sont des fonctions internes et donc leur étude profite des résultats établis jusqu'ici.

Considérons l'équation fonctionnelle

$$f(x+y)=G[f(x),f(y)]. \tag{1}$$

On sait (théorème 2 de [1], [4]) qu'une condition nécessaire et suffisante pour que l'équation (1) ait une solution continue et strictement monotone est que la fonction $G(t,u)$ soit continue, strictement croissante par rapport à chacune de ses variables prise à part, et qu'elle satisfasse à l'équation fonctionnelle

$$G[G(s,t),u]=G[s,G(t,u)].$$

Soit $G(t,u)$ telle que toute solution de (1) soit strictement interne et convexe. Compte tenu du théorème de [7], du théorème 3 de [16] et du théorème 1 de [18], on déduit que *les conditions imposées dans* [1] *par* J. Aczél *à la fonction* $G(t,u)$ *sont nécessaires et suffisantes pour que* (1) *admette une solution non constante approximativement ou qualitativement continue en un point.* (Ou une solution mesurable par rapport à un ensemble de mesure positive et jouissant de la propriété de Baire par rapport à un ensemble de deuxième catégorie, jouissant de la propriété de Baire.)

Considérons l'équation fonctionnelle

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right)=G[f(x),f(y)]. \tag{2}$$

On sait [21] qu'une condition nécessaire et suffisante pour que (2) admette une solution continue et strictement croissante est que $G(t,u)$ soit continue, croissante par rapport à chacune de ses variables prise à part et qu'elle satisfasse à l'équation fonctionnelle

$$G[G(s,t),u]=G[G(s,u),G(u,t)].$$

Soit $G(t,u)$ telle que toute solution de (2) soit strictement interne et convexe. En tenant compte du théorème de [7], du théorème 3 de [16] et du théorème 1 de [18], on déduit que *les conditions imposées dans* [21] *par* Ryll-Nardzewsky *à la fonction* $G(t,u)$ *sont nécessaires et suffisantes pour que* (2) *admette une solution non constante mesurable sur un ensemble de mesure positive ou une solution jouissant de la propriété de Baire par rapport à un ensemble de deuxième catégorie, jouissant de la propriété de Baire.*

Un exemple d'équation du type (2), dont les solutions sont des fonctions strictement internes et convexes, est donné par l'équation fonctionnelle de LOBATSCHEWSKY [15]:

$$(f(x))^2 = f(x+y)\cdot f(x-y). \tag{3}$$

En effet, toute solution est évidemment soit >0, soit $=0$, soit <0 partout. En supposant que $f(x)>0$ et, en posant $u=x+y$, $v=x-y$, on obtient

$$f\left(\frac{u+v}{2}\right) = \sqrt{f(u)\cdot f(v)},$$

donc $f(x)$ est strictement interne, et puisque

$$\sqrt{f(u)\cdot f(v)} \leqq \frac{f(u)+f(v)}{2}$$

on déduit que $f(x)$ est convexe au sens de JENSEN.

Les seules solutions continues et strictement monotones de l'équation de LOBATSCHEWSKY étant celles de la forme ac^x, il résulte que toute solution de (3), approximativement ou qualitativement continue en un point est de la forme ac^x.

J. L. W. JENSEN a considéré l'équation fonctionnelle [12]:

$$f(px+qy) = pf(x)+qf(y) \qquad (p>0, q>0, p+q=1). \tag{4}$$

Toute solution de (4) est, visiblement, une fonction strictement interne de poids p, q. Compte tenu des théorèmes 8 et 9 du présent ouvrage, on déduit que *toute solution de* (4), *mesurable sur un ensemble de mesure positive, ou jouissant de la propriété de Baire par rapport à un ensemble de deuxième catégorie, jouissant de la propriété de Baire, est une fonction monotone.*

On sait que la continuité d'une solution de (4) dans un point entraîne la continuité de cette solution dans chaque point. On sait aussi que toute solution continue de (4) est de la forme $ax+b$. En vertu des résultats obtenus jusqu'ici et du fait que toute fonction monotone admet des points de continuité, on déduit que *toute solution de* (4) *qui admet un point de continuité approximative ou qualitative est de la forme* $ax+b$.

Nous allons donner maintenant une généralisation de la proposition que nous venons d'énoncer.

J. ACZÉL a étudié [2] les solutions continues dans un point des équations fonctionnelles de la forme

$$f(\alpha x+\beta y) = pf(x)+qf(y). \tag{5}$$

Il a montré ([2], p. 249) que l'équation (5) admet une solution non constante, continue dans un point, si et seulement si $\alpha=p$, $\beta=q$ et que l'équation (5) admet une solution constante, non nulle, si et seulement si $p+q=1$.

A l'aide des théorèmes 8 et 9 de cet ouvrage on peut déterminer les solutions mesurables et celles jouissant de la propriété de Baire de certaines équations fonctionnelles du type (5). En effet, remarquons que pour $\alpha+\beta=$ $=p+q=1, \alpha>0, \beta>0, p>0, q>0,$ toute solution de (5) est une fonction interne de poids α, β. En tenant compte de ce que toute fonction monotone admet des points de continuité et que, en vertu d'un théorème de J. ACZÉL ([2], p. 249), toute solution de (5), continue dans un point, est de la forme $ax+b$, il résulte, en utilisant le théorème 10, que *pour* $\alpha>0, \beta>0, p>0, q>0,$ $\alpha+\beta=p+q=1$, *toute solution de* (5) *qui admet un point de continuité approximative ou qualitative est de la forme* $ax+b$.

Un résultat de Z. WARASKIEWICZ [25] nous attiré a l'attention sur l'équation fonctionnelle

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right)=\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y) \qquad (0<\lambda<1). \tag{6}$$

Z. WARASKIEWICZ affirme [25] que pour $\lambda \neq \frac{1}{2}$ cette équation n'admet aucune solution dérivable et non constante.

Mais l'équation (6) est un cas particulier de (5), donc, en vertu du résultat ci-dessus, il n'existe aucune solution non constante de (6), approximativement continue dans un point, si $\lambda \neq \frac{1}{2}$. On a ainsi un résultat plus précis que celui de Z. WARASKIEWICZ.

La remarque faite par Z. WARASKIEWICZ en [25] sur l'exemple de fonctions continues dépourvues de dérivée, fourni par l'équation (6) dans le cas $\lambda \neq \frac{1}{2}$, est donc sans objet. Mais on peut aller plus loin et montrer que *l'équation* (6) *est dépourvue de solution non constante, si* $\lambda \neq \frac{1}{2}$. Ce fait nous a été communiqué par M. I. BERSTEIN. Voici sa démonstration:

Supposons qu'il existe une solution non constante $f(x)$ de (6). Il existe donc deux valeurs x et y, telles que, en posant $f(x)=a,\ f(y)=b$, on ait $a \neq b$. On a aussi

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right)=\lambda a+(1-\lambda)b.$$

Désignons par x_1 et y_1 les milieux des intervalles

$$\left(x, \frac{x+y}{2}\right), \quad \left(\frac{x+y}{2}, y\right).$$

On a

$$f(x_1)=\lambda a+(1-\lambda)[\lambda a+(1-\lambda)b], \quad f(y_1)=\lambda[\lambda a+(1-\lambda)b]+(1-\lambda)b,$$

donc

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right)=\lambda^2 a+\lambda(1-\lambda)[\lambda a+(1-\lambda)b]+\lambda(1-\lambda)[\lambda a+(1-\lambda)b]+$$
$$+(1-\lambda)^2 b=[\lambda^2+2\lambda^2(1-\lambda)]a+[2\lambda(1-\lambda)^2+(1-\lambda)^2]b$$

d'où il s'ensuit que

$$\lambda a+(1-\lambda)b=\lambda^2(3-2\lambda)a+(2\lambda+1)(1-\lambda)^2 b.$$

Cette équation en λ a les seules solutions $\lambda_1=0$, $\lambda_2=1$, $\lambda_3=\frac{1}{2}$. Comme par définition on a $0<\lambda<1$, il résulte que l'équation (6) est dépourvue de solution non constante, pour $\lambda \neq \frac{1}{2}$.

Ouvrages cités.

[1] Я. Ацель, Некоторые общие методы в теории функциональных уравнений, Успехи Матем. Наук, **IX**:**3** (1956), 3—68.

[2] J. Aczél, Über eine Klasse von Funktionalgleichungen, *Commentarii Math. Helvetici*, **21** (1948), 247—256.

[3] C. Burstin, Die Spaltung des Kontinuums in c im L. Sinne nichtmeßbare Mengen, *Sitzungsber. d. Akad. d. Wiss. in Wien, Math. Nat. Kl. Abt. IIa*, **125** (1916).

[4] R. Caccioppoli, L'equazione funzionale $f(x+y)=F[f(x), f(y)]$, *Giornale di Mat.*, **66** (1928), 69—74.

[5] Z. Charzynski, Sur les fonctions dont la dérivée symétrique est partout finie, *Fundamenta Math.*, **21** (1933), 214—226.

[6] Á. Császár, Sur une classe de fonctions non mesurables, *Fundamenta Math.*, **36** (1949), 72—76.

[7] Á. Császár, Sur les fonctions internes non monotones, *Acta Sci. Math.*, **13** (1949), 48—50.

[8] H. Fried, Über die symmetrische Stetigkeit von Funktionen, *Fundamenta Math.*, **29** (1937), 134—137.

[9] P. Halmos, *Measure Theory* (New-York, 1951).

[10] I. Halperin, Non-finite Solutions of the Equation $f(x+y)=f(x)+f(y)$, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **54** (1948), 1063 (abstract).

[11] M. Hukuhara, Sur la fonction convexe, *Proc. Japan Acad.*, **30** (1954), 683—685.

[12] J. L. W. V. Jensen, Sur les fonctions convexes et les inégalités entre les valeurs moyennes, *Acta Math.*, **30** (1906), 179—193.

[13] F. B. Jones, Connected and disconnected plane sets and the functional equation, $f(x+y)=f(x)+f(y)$, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **48** (1942), 115—120.

[14] C. Kuratowski, *Topologie* I (Warszawa—Wrocław, 1948).

[15] N. I. Lobatschewsky, *Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien* (Berlin, 1840), §§ 33, 36.

[16] S. Marcus, Sur une généralisation des fonctions de G. Hamel, *Rendiconti Accad. Naz. Lincei, Cl. Sc. fis. mat. nat.*, **20** (1956), 584—589.

[17] S. Marcus, Contribuţii la o analiză a funcţiilor reale bazată pe noţiunea de categorie (în sensul lui Baire), *Studii şi Cercetări Matem.*, **7** (1956), 251—272.

[18] S. Marcus, Fonctions convexes et fonctions internes, *Bulletin Sci. Math. Paris*, **81** (1957), 66—70.

[19] S. Marcus, Un critère de finitude pour les fonctions sousadditives, *Comptes Rendus Acad. Sci. Paris*, **244** (1957), 2221—2222.

[20] S. Marcus, Critères de majoration pour les fonctions sousadditives, convexes ou internes, *Comptes Rendus Acad. Sci. Paris*, **244** (1957), 2270—2272 et 3195.

[21] C. Ryll-Nardzewski, Sur les moyennes, *Studia Math.*, **11** (1949), 31—37.

[22] A. Ostrowski, Über die Funktionalgleichung der Exponentialfunktion und verwandte Funktionalgleichungen, *Jahresbericht der Deutschen Math. Vereinigung*, **38** (1929), 54—62.

[23] S. Piccard, *Sur les ensembles parfaits* (Paris, 1942).

[24] H. Steinhaus, Sur les distances des points des ensembles de mesure positive, *Fundamenta Math.*, **1** (1920), 93—104.

[25] Z. Waraskiewicz, Sur les fonctions définies par les équations fonctionnelles $f\left(\frac{x+y}{2}\right) = 2f(x)f(y)/(f(x)+f(y))$ et $f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$ où $0 \leqq \lambda \leqq 1$. *Comptes Rendus Soc. Polonaise de Math., Cracovie*, **41** (1947). 237.

(Reçu le 27 mars 1958.)