Eine Verallgemeinerung eines Satzes von M. Deuring.

Von ANDRZEJ MOSTOWSKI in Warszawa.

Es sei K ein Körper, L eine endliche normale Erweiterung von K, $G(L/K)$ die Galois-Gruppe von L nach K, $R(L/K)$ der Gruppenring von $G(L/K)$ mit K als Koeffizientenbereich. Es ist wohlbekannt, daß L und $R(L/K)$ (aufgefaßt als K-Moduln mit G als Operatorenbereich) miteinander operatorisomorph sind.[1]) Dieser Satz wird hier auf den Fall einer unendlichen algebraischen Erweiterung von K verallgemeinert, allerdings unter der einschränkenden Voraussetzung, daß die Charakteristik von K Null ist. Der Beweis, der hier gegeben ist, funktioniert auch unter einer schwächeren Voraussetzung, daß für jeden endlichen Zwischenkörper M $(K\subset M\subset L)$ der Grad (M/K) von M über K prim zur Charakteristik von K ist. Es ist sehr wahrscheinlich, daß der Satz auch im allgemeinen Fall gilt, doch konnte ich nicht entscheiden, ob es dem wirklich so ist.

1. Wir beweisen zunächst ein Lemma, das sich auf den Fall einer endlichen normalen Erweiterung F/K bezieht. Es seien $M_1, M_2, \ldots, M_s$ endliche normale Erweiterungen von K $(K\subset M_j\subset F$ für $j=1,2,\ldots,s)$. Wir bezeichnen mit griechischen Buchstaben die Elemente des Ringes $R(F/K)$ und setzen

$$\sigma_j=\frac{1}{(F/M_j)}\sum_{\xi\in G(F/M_j)}\xi,\quad \sigma_j'=\varepsilon-\sigma_j,\quad j=1,2,\ldots,s,$$

wo ε das Einselement von $G(F/K)$ ist. Die Elemente σ_j und σ_j' $(j=1,2,\ldots,s)$ sind beide idempotent und gehören dem Zentrum von $R(F/K)$ an.

Ein Element $b_0\in F$ wird normal (oder genauer normal in F/K) genannt, falls es samt seiner Konjugierten eine Normalbasis von F über K bildet. Für ein normales b_0 gelten offenbar die folgenden Äquivalenzen:

(1.1) $$[\alpha b_0\in M_j]\Longleftrightarrow[\sigma_j\alpha=\alpha],$$

(1.2) $$[\alpha b_0 \text{ ist normal in } F/K]\Longleftrightarrow[\xi\alpha=0\Longrightarrow\xi=0 \text{ für jedes } \xi\in R(F/K)].$$

Wenn $\sigma_j\alpha=\alpha$ und b_0 normal in F/K ist, so gilt ferner

(1.3) $$[\alpha b_0 \text{ ist normal in } M_j/K]\Longleftrightarrow[\xi\alpha=0\Longrightarrow\xi\sigma_j=0 \text{ für jedes } \xi\in R(F/K)].$$

---

1) M. DEURING, Galoissche Theorie und Darstellungstheorie, *Math. Annalen*, **107** (1932), 140—144.

Denn bedeutet $\bar{\xi}$ den Automorphismus von M_j, der auf M_j mit ξ übereinstimmt, so stimmt $R(M_j/K)$ mit der Menge aller $\bar{\xi}$ für $\xi \in R(F/K)$ überein. Folglich haben wir $[c$ ist normal in $M_j/K] \Longleftrightarrow [\bar{\xi}c=0 \Longrightarrow \bar{\xi}=0$ für jedes $\xi \in R(F/K)]$. Da nun $\bar{\xi}c=\xi c$ für $c \in M_j$, $\xi\alpha b_0=0 \Longleftrightarrow \xi\alpha=0$ und $\bar{\xi}=0 \Longleftrightarrow \xi\sigma_j=0$, so folgt (1.3) aus der zuvor gegebenen Äquivalenz durch Substitution $c=\alpha b_0$.

Ein Element $\alpha \in R(F/K)$ nennen wir eine gemeinsame Erweiterung von Elementen $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$, falls

(1.4) $$\sigma_j \alpha = \alpha_j \quad \text{für} \quad j=1,2,\ldots,s.$$

Wenn es eine solche gemeinsame Erweiterung gibt, so gilt offenbar

(1.5) $$\sigma_j \alpha_j = \alpha_j, \quad \sigma_j \alpha_k = \sigma_k \alpha_j \quad \text{für} \quad 1 \leqq k < j \leqq s.$$

Wir beweisen nun die Umkehrung: gelten die Gleichungen (1.5), so ist das Element

(1.6) $$\alpha = \alpha_1 + \sigma_1'\alpha_2 + \sigma_1'\sigma_2'\alpha_3 + \cdots + \sigma_1'\sigma_2'\cdots\sigma_{s-1}'\alpha_s + \sigma_1'\cdots\sigma_s'\varrho \quad (\varrho \text{ beliebig})$$

eine gemeinsame Erweiterung von $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$.

Zum Beweis zeigen wir zunächst, daß es für $0 \leqq k < j \leqq s$ ein Element $v_{kj} \in R(F/K)$ gibt, so daß

(1.7) $$\alpha = \alpha_1 + \sigma_1'\alpha_2 + \cdots + \sigma_1'\cdots\sigma_k'\alpha_j + \sigma_j' v_{kj}.$$

Für $k=j-1$ genügt es nämlich

$$v_{j-1,j} = \sigma_1'\cdots\sigma_{j-1}'(\alpha_{j+1} + \sigma_{j+1}'\alpha_{j+2} + \cdots + \sigma_{j+1}'\cdots\sigma_{s-1}'\alpha_s + \sigma_{j+1}'\cdots\sigma_s'\varrho)$$

zu setzen. Gilt (1.7) für ein k $(0<k<j)$, so setzen wir $v_{k-1,j} = v_{kj} + \sigma_1'\cdots\sigma_{k-1}'\alpha_k$ und erhalten nach leichter Rechnung die Formel (1.7) für die Zahl $k-1$. (1.7) gilt also allgemein. Nun setzen wir in (1.7) $k=0$ und erhalten $\alpha=\alpha_j+\sigma_j' v_{0j}$, woraus nach (1.5) $\sigma_j\alpha=\sigma_j\alpha_j=\alpha_j$ folgt. Also ist α eine gemeinsame Erweiterung von $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$.

Wir können nun das Hauptlemma dieses Paragraphen formulieren:

(1.8). *Ist b_0 ein normales Element von F/K und sind $\alpha_1 b_0, \ldots, \alpha_s b_0$ normale Elemente von $M_1/K, \ldots, M_s/K$, für welche die Formeln* (1.5) *gelten, so gibt es eine gemeinsame Erweiterung α der Elemente $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$, so daß αb_0 ein normales Element von F/K ist.*

B e w e i s. Wir setzen $\varrho=\varepsilon$ in (1.6) und erhalten eine gemeinsame Erweiterung α der Elemente $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$. Um zu zeigen, daß αb_0 normal in F/K ist, haben wir nach (1.2) zu zeigen, daß $\xi\alpha=0 \Longrightarrow \xi=0$. Es sei also $\xi\alpha=0$. Wir multiplizieren diese Gleichung mit $\sigma_1'\cdots\sigma_{j-1}'\sigma_j$ und erhalten $\xi\sigma_1'\cdots\sigma_{j-1}'\sigma_j\alpha_j=0$, da nach (1.5)

$$(\sigma_1'\cdots\sigma_{k-1}'\alpha_k)(\sigma_1'\cdots\sigma_{j-1}'\sigma_j)=0$$

für $k \neq j$ ist. Da $\alpha_j b_0$ normal in M_j/K ist, so folgt daraus nach (1.3) $\xi\sigma_1'\cdots\sigma_{j-1}'\sigma_j=0$. Nun multiplizieren wir die Gleichung $\xi\alpha=0$ mit $\sigma_1'\cdots\sigma_s'$ und erhalten $\xi\sigma_1'\cdots\sigma_s'=0$. Durch Addition bekommen wir also

$$\xi(\sigma_1+\sigma_1'\sigma_2+\cdots+\sigma_1'\cdots\sigma_{s-1}'\sigma_s+\sigma_1'\cdots\sigma_s')=0,$$

also $\xi=0$, da die Summe in Klammern gleich ε ist.

2. Wir wenden nun das soeben bewiesene Lemma auf eine beliebige normale algebraische Erweiterung L von K an. Es sei $\mathfrak{N}$ die Klasse aller normalen Unterkörper $M\subset L$, für welche (M/K) endlich ist. Die Buchstaben $M, N, P, \ldots$ mit oder ohne Indizes bedeuten immer Elemente von $\mathfrak{N}$. Wir setzen

$$\sigma_{M/N}=\frac{1}{(M/M\cap N)}\sum_{\xi\in G(M/M\cap N)}\xi.$$

Die Operatoren $\sigma_{M/N}$ gehören den Ringen $R(M/N)$ an und haben folgende Eigenschaften:

(2. 1) $\qquad P\subset M$ und $b\in N\subset M\Longrightarrow\sigma_{N/P}(b)=\sigma_{M/P}(b)$,

(2. 2) $\qquad b\in M\supset N\supset P\Longrightarrow\sigma_{N/P}\,\sigma_{M/N}(b)=\sigma_{M/P}(b)$.

Eine Funktion Γ, die jedem M aus $\mathfrak{N}$ ein in M/K normales Element Γ_M zuordnet, nennen wir eine konsistente Auswahlfunktion, wenn

(2. 3) $\qquad \Gamma_{M\cap N}=\sigma_{M/N}(\Gamma_M)$ für $M, N\in\mathfrak{N}$.

L e m m a (2. 4). *Es gibt eine konsistente Auswahlfunktion.*

B e w e i s. Eine Klasse $\mathfrak{N}_0\subset\mathfrak{N}$ nennen wir voll, wenn $N\subset M\in\mathfrak{N}_0\Longrightarrow N\in\mathfrak{N}_0$. Eine auf $\mathfrak{N}_0$ erklärte Funktion Γ, die jedem $M\in\mathfrak{N}_0$ ein in M/K normales Element zuordnet und außerdem die Bedingung (2. 3) für $M, N\in\mathfrak{N}_0$ erfüllt, nennen wir eine konsistente Auswahlfunktion aus $\mathfrak{N}_0$. Um (2. 4) zu beweisen, genügt es (nach dem Lemma von Zorn) zu zeigen, daß, falls $\mathfrak{N}_0$ voll ist und $M_0\in\mathfrak{N}-\mathfrak{N}_0$, jede konsistente Auswahlfunktion aus $\mathfrak{N}_0$ sich auf die kleinste $\mathfrak{N}_0$ und M_0 enthaltende volle Klasse erweitern läßt.

Es sei also Γ eine konsistente Auswahlfunktion aus $\mathfrak{N}_0$ und b_0 ein normales Element von M_0/K. Wir bezeichnen mit $M_1, \ldots, M_s$ Unterkörper von M_0, die zu $\mathfrak{N}_0$ gehören, und mit $M_{s+1}, \ldots, M_{s+t}$ die übrigen Unterkörper von M_0. In $R(M_0/K)$ gibt es Elemente $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$, so daß $\alpha_j b_0=\Gamma_{M_j}$ für $j=1, 2, \ldots, s$. Wir setzen zur Abkürzung $\sigma_j=\sigma_{M_0/M_j}$ und erhalten aus (2. 1) und (2. 3) die Gleichungen

$$\sigma_j\alpha_k b_0=\sigma_j\Gamma_{M_k}=\sigma_{M_k/M_j}(\Gamma_{M_k})=\Gamma_{M_j\cap M_k}.$$

Durch Vertauschung von k und j erhalten wir daraus die Gleichung $\sigma_k\alpha_j b_0=\Gamma_{M_k\cap M_j}$. Folglich gelten die Gleichungen (1. 5), was nach (1. 8) beweist, daß es eine gemeinsame Erweiterung α von $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ gibt, die zu $R(M_0/K)$ gehört und der Bedingung genügt, daß αb_0 normal in M_0/K ist. Wir setzen nun

$$\Gamma_{M_0}=\alpha b_0,\quad \Gamma_{M_{s+h}}=\sigma_{M_0/M_{s+h}}(\Gamma_{M_0})\quad\text{für}\quad h=1, 2, \ldots, t$$

und erhalten somit eine Funktion, die auf der kleinsten $\mathfrak{N}_0$ und M_0 enthaltenden vollen Klasse $\mathfrak{N}_1$ erklärt ist und jedem $M \in \mathfrak{N}_1$ ein in M/K normales Element zuordnet.

Wir wollen jetzt zeigen, daß die erweiterte Funktion Γ_M die Gleichung (2. 3) für $M, N \in \mathfrak{N}_1$ erfüllt. Da dies laut Voraussetzung für $M, N \in \mathfrak{N}_0$ gilt, genügt es folgende drei Fälle zu betrachten:

Fall I. $M = M_{s+h}$, $N \in \mathfrak{N}_0$ $(h = 1, 2, \ldots, t)$. Da $\sigma_{M_{s+i}/N} = \sigma_{M_{s+i}/M_{s+i} \cap N}$, liefert die Definition von $\Gamma_{M_{s+h}}$

$$\sigma_{M/N}(\Gamma_M) = \sigma_{M_{s+h}/M_{s+h} \cap N}\, \sigma_{M_0/M_{s+h}}(\Gamma_{M_0}), \tag{2. 5}$$

also nach (2. 2)

$$\sigma_{M/N}(\Gamma_M) = \sigma_{M_0/M_{s+h} \cap N}(\Gamma_{M_0}).$$

Nun ist aber $M_{s+h} \cap N$ ein Unterkörper von N, also ein Element von $\mathfrak{N}_0$, das in M_0 enthalten ist. Es gibt also ein $j \leqq s$, für welches $M_{s+h} \cap N = M_j$. Wir erhalten also

$$\sigma_{M/N}(\Gamma_M) = \sigma_{M_0/M_j}(\Gamma_{M_0}) = \sigma_j(\Gamma_{M_0}) = \sigma_j a b_0 = a_j b_0 = \Gamma_{M_j} = \Gamma_{M \cap N}.$$

Fall II. $M \in \mathfrak{N}_0, N = M_{s+h}$ $(h = 1, 2, \ldots, t)$. Da $\sigma_{M/N} = \sigma_{M/M \cap N} = \sigma_{M/M_{s+h} \cap M}$ und da $M_{s+h} \cap M \in \mathfrak{N}_0$ ist, so erhalten wir aus der Voraussetzung, daß (2. 3) für $M, N \in \mathfrak{N}_0$ gilt, die Formel

$$\sigma_{M/N}(\Gamma_M) = \sigma_{M/M_{s+h}}(\Gamma_M) = \sigma_{M/M_{s+h} \cap M}(\Gamma_M) = \Gamma_{M \cap (M_{s+h} \cap M)} = \Gamma_{M \cap M_{s+h}} = \Gamma_{M \cap N}.$$

Fall III. $M = M_{s+h}$, $N = M_{s+j}$ $(h, j = 1, 2, \ldots, t)$. In diesem Fall gilt die Formel (2. 5) mit $N = M_{s+j}$ und wir erhalten nach (2. 2)

$$\sigma_{M/N}(\Gamma_M) = \sigma_{M_0/M_{s+h} \cap M_{s+j}}(\Gamma_{M_0}).$$

Falls nun $M_{s+h} \cap M_{s+j} \in \mathfrak{N}_0$, so haben wir $M_{s+h} \cap M_{s+j} = M_k$ für ein $k \leqq s$ und folglich

$$\sigma_{M/N}(\Gamma_M) = \sigma_{M_0/M_k}(\Gamma_{M_0}) = \sigma_k a b_0 = a_k b_0 = \Gamma_{M_k} = \Gamma_{M_{s+h} \cap M_{s+j}} = \Gamma_{M \cap N}.$$

Falls $M_{s+h} \cap M_{s+j}$ non $\in \mathfrak{N}_0$, so gibt es ein $i \leqq t$, so daß $M_{s+h} \cap M_{s+j} = M_{s+i}$ und folglich

$$\sigma_{M/N}(\Gamma_M) = \sigma_{M_0/M_{s+i}}(\Gamma_{M_0}) = \Gamma_{M_{s+i}} = \Gamma_{M_{s+h} \cap M_{s+j}} = \Gamma_{M \cap N}.$$

Dies schließt ab den Beweis von (2. 4).

3. Es sei wie zuvor L eine normale algebraische Erweiterung von K. Wir bezeichnen mit $G(L/K)$ die Galois-Gruppe von L nach K, betrachtet als eine topologische Gruppe. Wir führen in K die diskrete Topologie ein und bezeichnen mit $\mathfrak{M}$ den K-Modul bestehend aus allen stetigen Funktionen, die $G(L/K)$ in K abbilden. Für jedes $f \in \mathfrak{M}$ gibt es also einen Körper $M \in \mathfrak{N}$, so daß für beliebige $\gamma_1, \gamma_2 \in G(L/K)$

$$\gamma_1|M = \gamma_2|M \Longrightarrow f(\gamma_1) = f(\gamma_2).\text{[2]} \tag{3.1}$$

Wir bezeichnen weiter mit D die Darstellung von $G(L/K)$ in $\mathfrak{M}$ definiert durch die Formel

$$[D_\gamma f = g] \Longleftrightarrow [g(\xi) = f(\gamma^{-1}\xi) \quad \text{für jedes} \quad \xi \in G(L/K)]$$

und mit Δ die Darstellung von $G(L/K)$ in L definiert durch die Gleichung

$$\Delta_\gamma(a) = \gamma(a) \quad \text{für jedes} \quad a \in L.$$

Satz (3.2). *Die Darstellungen D und Δ sind äquivalent.*

Beweis. Es sei $f \in \mathfrak{M}$. Wir wählen einen Körper $M \in \mathfrak{N}$ für welchen (3. 1) gilt. Jeden Automorphismus $\gamma \in G(M/K)$ erweitern wir beliebig zu einem Automorphismus $\bar\gamma \in G(L/K)$ und setzen

$$T(f) = \frac{1}{(M/K)} \sum_{\gamma \in G(M/K)} f(\bar\gamma)\, \gamma(\Gamma_M),$$

wo Γ eine beliebige aber ein für allemal fest gewählte konsistente Auswahlfunktion bedeutet. Nach (3. 1) ist $T(f)$ von der Art, wie γ zu $\bar\gamma$ erweitert wurde, unabhängig.

Wir zeigen jetzt, daß $T(f)$ auch von M unabhängig ist. Nehmen wir zu diesem Zweck an, daß M_1 ein anderer Körper ist, der (3. 1) erfüllt und bezeichnen mit N das Kompositum von M und M_1. Ferner setzen wir

$$T'(f) = \frac{1}{(N/K)} \sum_{\delta \in G(N/K)} f(\bar\delta)\, \delta(\Gamma_M) \tag{3.3}$$

und zerlegen $G(N/K)$ in Nebenklassen nach der Gruppe $G(N/M)$:

$$G(N/K) = \bigcup_{\xi \in I} \xi G(N/M).$$

Fassen wir in (3. 3) alle Glieder zusammen, für die $\delta \in \xi G(N/M)$ mit einem festen $\xi \in I$ gilt, so erhalten wir

$$T'(f) = \frac{1}{(N/K)} \sum_{\xi \in I} \sum_{\omega \in G(N/M)} f(\overline{\xi\omega})\, \xi\omega(\Gamma_N).$$

Wegen (3. 1) und $M \subset N$ gilt $f(\overline{\xi\omega}) = f(\bar\xi)$ für $\xi \in I$ und $\omega \in G(N/M)$. Also kommt

$$T'(f) = \frac{1}{(N/K)} \sum_{\xi \in I} f(\bar\xi)\, \xi\Big(\sum_{\omega \in G(N/M)} \omega(\Gamma_N)\Big) =$$

$$= \frac{1}{(N/K)} \sum_{\xi \in I} [f(\bar\xi) \cdot (N/M)\, \xi\sigma_{N/M}(\Gamma_N)] = \frac{1}{(M/K)} \sum_{\xi \in I} f(\bar\xi)\, \xi(\Gamma_M).$$

---

[2]) Das Symbol $\gamma|M$ bezeichnet die auf M beschränkte Funktion γ, d. h. eine Funktion, die auf M mit γ übereinstimmt und außerhalb von M nicht definiert ist.

Jedes $\gamma \in G(M/K)$ läßt sich zu einem und nur einem $\xi \in I$ erweitern und sowohl $f(\xi)$ als auch $\xi(\Gamma_M)$ hängen nur von $\xi|M$ ab. Aus der zuletzt gegebenen Gleichung folgt also $T(f) = T'(f)$. In dieser Gleichung kann man nun M überall durch M_1 ersetzen und kommt so zu der gewünschten Unabhängigkeit von $T(f)$ von M.

Jedes $b \in M$ hat die Gestalt $\frac{1}{(M/K)} \sum_{\gamma \in G(M/K)} a_\gamma \gamma(\Gamma_M)$, wo $a_\gamma \in K$. Setzt man $f(\xi) = a_{\xi|M}$, so erhält man eine Funktion, die auf $G(L/K)$ definiert ist und die Formeln (3. 1) sowie auch $T(f) = b$ erfüllt. Also bildet T den Modul $\mathfrak{M}$ auf ganz L linear ab und diese Abbildung ist eineindeutig, da aus $T(f) = 0$ folgt $f(\bar{\gamma}) = 0$ für $\gamma \in G(M/K)$, also wegen (3. 1) $f = 0$. Um den Satz zu beweisen, brauchen wir also noch die Gleichung $TD = \Delta T$ zu beweisen.

Es sei also $f \in \mathfrak{M}$, $\xi \in G(L/K)$ und es sei M ein Körper, der (3. 1) für die Funktion f erfüllt. M erfüllt dann (3. 1) auch für die Funktion $D_\xi f$, da aus $\gamma_1|M = \gamma_2|M$ offenbar $(\xi^{-1}\gamma_1)|M = (\xi^{-1}\gamma_2)|M$ und folglich $f(\xi^{-1}\gamma_1) = f(\xi^{-1}\gamma_2)$, d. h. $D_\xi f(\gamma_1) = D_\xi f(\gamma_2)$ folgt. Also ist

$$TD_\xi(f) = \frac{1}{(M/K)} \sum_{\gamma \in G(M/K)} D_\xi f(\bar{\gamma})\, \gamma(\Gamma_M) =$$

$$= \frac{1}{(M/K)} \sum_{\gamma \in G(M/K)} f(\xi^{-1}\bar{\gamma})\gamma(\Gamma_M) = \frac{1}{(M/K)}\, \xi_1 \left(\sum_{\gamma \in G(M/K)} f(\xi^{-1}\bar{\gamma})\, \xi_1^{-1} \gamma(\Gamma_M) \right),$$

wo $\xi_1 = \xi|M$ gesetzt ist. Bezeichnen wir mit δ das Element $\xi_1^{-1}\gamma$, so läuft δ zusammen mit γ über ganz $G(M/K)$. Da $\xi^{-1}\bar{\gamma}$ eine Erweiterung von δ auf $G(L/K)$ ist, können wir $\xi^{-1}\bar{\gamma} = \bar{\delta}$ setzen. Auf diese Weise erhalten wir $TD_\xi(f) = \xi_1 T(f) = \Delta_\xi(Tf)$, w. z. b. w.

4. Der Modul $\mathfrak{M}$ kann in einen Ring umgewandelt werden, indem man den Mittelwert von f als

$$S(f) = S_\xi f(\xi) = \frac{1}{(M/K)} \sum_{\gamma \in G(M/K)} f(\bar{\gamma}) \tag{4. 1}$$

definiert und die Multiplikation $f \times g = h$ durch die Formel

$$h(\alpha) = S_\xi f(\xi)\, g(\xi^{-1}\alpha) \tag{4. 2}$$

erklärt. M bedeutet dabei einen Körper, der die Bedingung (3. 1) für die Funktion f erfüllt. Man zeigt leicht (ähnlich wie im § 3), daß (4. 1) von der Wahl von M nicht abhängt. Der von Deuring[3]) festgestellte Zusammenhang zwischen den Körpern L' mit $K \subset L' \subset L$ und rechtsseitigen Idealen von $\mathfrak{M}$ besteht auch im unendlichen Fall. Denn ist L' ein Zwischenkörper, so setzen wir

$\mathfrak{P}$ = Menge aller $f \in \mathfrak{M}$, für welche $\gamma \in G(L/L') \Longrightarrow D_\gamma f = f$.

---

[3]) M. Deuring, a. a. O., Satz 2, S. 142.

$\mathfrak{P}$ ist natürlich ein Modul. Die Idealeigenschaft von $\mathfrak{P}$ ergibt sich wie folgt: Ist $f \in \mathfrak{P}$, $g \in \mathfrak{M}$, $\gamma \in G(L/L')$ und $h = f \times g$, so haben wir nach (4. 1) und (4. 2)

$$D_\gamma h(\alpha) = h(\gamma^{-1}\alpha) = S_\xi f(\xi) g(\xi^{-1}\gamma^{-1}\alpha) = S_\eta f(\gamma^{-1}\eta) g(\eta^{-1}\alpha) = S_\eta f(\eta) g(\eta^{-1}\alpha) = h(\alpha),$$

wobei wir die Gleichungen $S_\xi f(\xi) = S_\eta f(\xi\eta)$ und $D_\gamma f = f$ benutzt haben. $\mathfrak{P}$ ist gleich der Menge aller f für welche $T(f) \in L'$, denn

$$(4.3) \qquad [T(f) \in L'] \Longleftrightarrow [\gamma \in G(L/L') \Longrightarrow \gamma T(f) = T(f)] \Longleftrightarrow [\gamma \in G(L/L') \Longrightarrow TD_\gamma(f) = T(f)] \Longleftrightarrow [\gamma \in G(L/L') \Longrightarrow D_\gamma(f) = f] \Longleftrightarrow f \in \mathfrak{P}.$$

Auf diese Weise ist jedem Zwischenkörper ein Rechtsideal eineindeutig zugeordnet. Ist umgekehrt $\mathfrak{P}$ ein Rechtsideal, so bezeichnen wir mit G die Gruppe der γ, für welche $f \in \mathfrak{P} \Longrightarrow D_\gamma(f) = f$. Diese Gruppe ist im Raume $G(L/K)$ abgeschlossen. Denn ist $D_\gamma f(\xi_0) \neq f(\xi_0)$, d. h. $f(\gamma^{-1}\xi_0) \neq f(\xi_0)$, und erfüllt M die Bedingung (3. 1), so folgt aus $\gamma | M = \gamma_0 | M$, daß $f(\gamma^{-1}\xi_0) = f(\gamma_0^{-1}\xi_0)$ also $D_{\gamma_0} f \neq f$. Die Gruppe G bestimmt also einen Körper L', für welchen die Formel $G(L/L') = G$ gilt. Aus (4. 3) folgt nun, daß $\mathfrak{P}$ das durch T vermittelte Bild von L' ist.

Wir bemerken zum Schluß, daß, genau so wie im endlichen Fall [4]), die Darstellung D beschränkt auf $\mathfrak{P}$ (d. i. die Darstellung $D|\mathfrak{P}$) äquivalent der durch die identische Darstellung von $G(L/L')$ induzierten Darstellung von $G(L/K)$ ist. Der Beweis folgt sofort aus der Definition der induzierten Darstellung. [5])

(Eingengangen am 19. Juni 1955.)

---

4) M. Deuring, a. a. O., Satz 2, S. 142.

5) Vgl. G. W. Mackey, On induced representations of groups, *American Journal of Math.*, 73 (1951), 576.