Über ein spezielles Rédeisches schiefes Produkt in der Gruppentheorie.

Von F. RÜHS in Rostock.

1. In einer großen Arbeit ([1]) zeigt RÉDEI, welche Rolle das schiefe Produkt in der Gruppentheorie spielt und behandelt insbesondere ausführlich das Schreiersche schiefe Produkt $G \circ_1 \Gamma$ und das Zappa—Szép-Produkt $G \circ_2 \Gamma$, definiert durch die Multiplikationsgesetze (vgl. auch [3])

$$G \circ_1 \Gamma: \qquad (a, \alpha)(b, \beta) = (ab, a^b \alpha^b \beta)$$

und

$$G \circ_2 \Gamma: \qquad (a, \alpha)(b, \beta) = (ab^\alpha, \alpha^b \beta),$$

Zugleich sagt RÉDEI, daß es wünschenswert sei, einen Vorrat an schiefen Produkten zu haben, mit deren Hilfe möglichst viele Gruppen mit befriedigender Einfachheit dargestellt werden können. So haben insbesondere auch L. RÉDEI und A. STÖHR folgendes Produkt untersucht ([2]):

$$G \circ_{2'} \Gamma: \qquad (a, \alpha)(b, \beta) = (a^\beta b, \alpha^b \beta).$$

Dabei zeigt sich, daß die Gruppen $G \circ_{2'} \Gamma$ eine echte Teilmenge der Gruppen $G \circ_2 \Gamma$ bilden. Vergleicht man den Bau der Multiplikationsgesetze, so ist $G \circ_{2'} \Gamma$ symmetrischer als $G \circ_2 \Gamma$. Wir zeigen, daß eine nochmalige Symmetrisierung die Gruppenbildungen noch weiter einengt, indem wir das in ([1]) unerledigt gelassene schiefe Produkt

$$(1) \qquad G \odot G: \qquad (a, \alpha)(b, \beta) = (a^\beta b^\alpha, \alpha^b \beta^a)$$

untersuchen. Unser Resultat ist der

Satz. *Das schiefe Produkt* (1) *liefert im wesentlichen*[1]) *nur das direkte Produkt der Gruppen G und Γ, läßt also im wesentlichen nur die triviale Lösung $a^\alpha = a$, $\alpha^a = \alpha$ zu.*

Wir beweisen unseren Satz auf zwei Arten, einmal indirekt, indem wir nachweisen, daß (1) zwei zu G und Γ isomorphe Normalteiler besitzt, deren Durchschnitt das Einselement ist (und die miteinander vertauschbar sind), zum anderen direkt, indem wir (1) transformieren.

---

[1]) D. h. bis auf Transformationen Π; ich verdanke diese scharfe Formulierung des Satzes Herrn L. RÉDEI.

2. Es sei $\mathfrak{g} = G \odot \Gamma$ erklärt durch

(1) $$(a, \alpha)(b, \beta) = (a^\beta b^\alpha, \alpha^b \beta^a). \quad (a, b, a^\beta, b^\alpha \in G, \quad \alpha, \beta, \alpha^b \beta^\alpha \in \Gamma).$$

Ferner seien e und ε die Einselemente von G resp. Γ. Wir zeigen zunächst:

Jede Gruppe $G \odot \Gamma$ ist zu einer solchen Gruppe $G \odot \Gamma$ isomorph, die (e, ε) zum Einselement hat.

Beweis. Sei Π die Permutation

$$\Pi: \qquad (a, \alpha) \to (g^{-1}ah, \gamma^{-1}\alpha\eta) \qquad (g, h \in G, \gamma, \eta \in \Gamma);$$

dann ist

$$\Pi^{-1}: \qquad (a, \alpha) \to (gah^{-1}, \gamma\alpha\eta^{-1}).$$

Definiert man nach RÉDEI ([1]) in der Menge der Paare (a, α) eine neue Multiplikation durch

$$\begin{aligned}(a, \alpha) \times (b, \beta) &= \Pi(\Pi^{-1}(a, \alpha) \cdot \Pi^{-1}(b, \beta)) \\ &= \Pi((gah^{-1}, \gamma\alpha\eta^{-1}) \cdot (gbh^{-1}, \gamma\beta\eta^{-1})) \\ &= \Pi((gah^{-1})^{\gamma\beta\eta^{-1}} (gbh^{-1})^{\gamma\alpha\eta^{-1}}, (\gamma\alpha\eta^{-1})^{gbh^{-1}} (\gamma\beta\eta^{-1})^{gah^{-1}}) \\ &= (g^{-1}(gah^{-1})^{\gamma\beta\eta^{-1}} (gbh^{-1})^{\gamma\alpha\eta^{-1}} h, \gamma^{-1}(\gamma\alpha\eta^{-1})^{gbh^{-1}} (\gamma\beta\eta^{-1})^{gah^{-1}} \eta),\end{aligned}$$

dann entsteht eine zu $\mathfrak{g}$ isomorphe Gruppe $\mathfrak{g}_1$. Auf der rechten Seite steht (1), nur daß statt $a^\beta b^\alpha$ daß ähnlich gebaute Funktionenpaar $g^{-1}(gah^{-1})^{\gamma\beta\eta^{-1}} \cdot (gbh^{-1})^{\gamma\alpha\eta^{-1}} h$ steht; entspr. für $\alpha^b \beta^a$. Ist nun (u, λ) die Einheit von (1), so lassen sich $g, h \in G$, $\gamma, \eta \in \Gamma$ (auf mehrere Art) so bestimmen, daß $g^{-1}uh = e$, $\gamma^{-1}\lambda\eta = \varepsilon$ ist. Dann hat $\mathfrak{g}_1$ wegen des Isomorphismus $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{g}_1$ das Einselement (e, ε).

Aus $(a, \alpha)(e, \varepsilon) = (a^\varepsilon e^\alpha, \alpha^e \varepsilon^a) = (e, \varepsilon)(a, \alpha) = (e^\alpha a^\varepsilon, \varepsilon^a \alpha^e) = (a, \alpha)$ folgt nun

(2) $$a^\varepsilon e^\alpha = e^\alpha a^\varepsilon = a, \quad \alpha^e \varepsilon^a = \varepsilon^a \alpha^e = \alpha$$

für alle $a \in G$ und alle $\alpha \in \Gamma$; d. h. es muß sein: $e^\alpha = r$ für alle $a \in G$ sowie $\varepsilon^a = \varrho$ für alle $a \in G$. Dabei sind r und ϱ feste Elemente aus G resp. Γ. Insbesondere folgt aus

$$(e, \varepsilon)(e, \varepsilon) = (r^2, \varrho^2) = (e, \varepsilon):$$

$r^2 = e$, $\varrho^2 = \varepsilon$; d. h. r und ϱ haben die Ordnung zwei.

Nun sind in (1) die vier Funktionen $a^\beta, b^\alpha, \alpha^b, \beta^a$ nicht eindeutig bestimmt, sondern lassen sich durch resp. $a^\beta u$, $u^{-1}b^\alpha$, $\alpha^b\lambda, \lambda^{-1}\beta^a$ ersetzen; wählt man insbesondere $u = r$, $\lambda = \varrho$, so wird $e^\alpha = r$ durch $r^2 = e$ und $\varepsilon^a = \varrho$ durch $\varrho^2 = \varepsilon$ ersetzt. Wir können uns also auf den Fall beschränken, daß

(3. 1) $$e^\alpha = e, \quad \varepsilon^a = \varepsilon$$

für alle $a \in G$, $\alpha \in \Gamma$ ist. Dann liefert (2) ferner für alle $a \in G$, $\alpha \in \Gamma$:

(3. 2) $$a^\varepsilon = a, \quad \alpha^e = \alpha.$$

Die Assoziativität bedeutet nach (1) das Bestehen der Gleichungen

$$(4)\qquad (a^\beta b^\alpha)^\gamma c^{\alpha^b \beta^a} = a^{\beta^c \gamma^b} (b^\gamma c^\beta)^\alpha, \quad (\alpha^b \beta^a)^c \gamma^{a^\beta b^\alpha} = \alpha^{b^\gamma c^\beta} (\beta^c \gamma^b)^a.$$

Wegen der vollkommenen Symmetrie der Formeln werden wir in Zukunft nur die den Elementen aus G entsprechende ableiten. (4) ergibt für $a = c = e$ unter Benutzung von (3), sowie für $a = b = e$ und b statt c geschrieben:

$$(5)\qquad (b^\alpha)^\gamma = (b^\gamma)^\alpha = b^{\alpha\gamma} = b^{\gamma\alpha}, \qquad (\beta^a)^c = (\beta^c)^a = \beta^{ac} = \beta^{ca}.$$

Für $\alpha = \gamma = \varepsilon$ und $b = e$ liefert (4)

$$(6)\qquad a^\beta c^{\beta^a} = a^{\beta^c} c^\beta, \qquad \alpha^b \gamma^{b^\alpha} = \alpha^{b^\gamma} \gamma^b.$$

Hieraus und aus (4) folgt nun für $c = e$, $\alpha = \beta = \varepsilon$:

$$(7)\qquad (ab)^\gamma = a^{\gamma^b} b^\gamma = a^\gamma b^{\gamma^a}, \qquad (\alpha\beta)^c = \alpha^{c^\beta} \beta^c = \alpha^c \beta^{c^\alpha}.$$

Setzt man schließlich in (4): $a = e$ und $\beta = \varepsilon$, so erhält man bei Benutzung von (7):

$$b^{\alpha\gamma} c^{\alpha^b} = (b^\gamma c)^\alpha = b^{\alpha\gamma} c^{\alpha^{b^\gamma}}$$

d. h.

$$(8)\qquad \begin{cases} c^{\alpha^b} = c^{\alpha^{b^\gamma}} & \text{für alle } \gamma \in \Gamma, \\ \gamma^{a^\beta} = \gamma^{a^{\beta^c}} & \text{für alle } c \in G. \end{cases}$$

Daraus folgt insbesondere

$$(9)\qquad c^{\alpha^b} \gamma^b = c^{\alpha^{b^\gamma}} \gamma^b = c^{(\alpha\gamma)^b}, \qquad \gamma^{a^\beta b^\beta} = \gamma^{(ab)^\beta},$$

sowie aus der sogleich abzuleitenden Formel (11):

$$(10)\qquad c^{(\alpha^{-1})^b} = c^{(\alpha^{-1})^{b^\alpha}} = c^{(\alpha^b)^{-1}}, \qquad \gamma^{(a^{-1})^\beta} = \gamma^{(a^\beta)^{-1}}.$$

Nach (7) ist $(b^{-1})^{\alpha^b} b^\alpha = (b^{-1}b)^\alpha = e^\alpha = e$ sowie $b^\alpha (b^{-1})^{\alpha^b} = b^{\alpha^{b^{-1}}} (b^{-1})^\alpha = (bb^{-1})^\alpha = e^\alpha = e$. Es existiert also ein zu b inverses Element:

$$(11)\qquad (b^\alpha)^{-1} = (b^{-1})^{\alpha^b}, \qquad (\beta^a)^{-1} = (\beta^{-1})^{a^\beta}.$$

Um das zu (a, α) inverse Element zu bestimmen, setzen wir

$$(a, \alpha) = (b, \varepsilon)(e, \beta) = (b^\beta, \beta^b).$$

Dann folgt aus $a = b^\beta$, $\alpha = \beta^b$ nach (11)

$$a^{-1} = (b^\beta)^{-1} = (b^{-1})^{\beta^b} = (b^{-1})^\alpha, \qquad \alpha^{-1} = (\beta^{-1})^{b^\beta} = (\beta^{-1})^a,$$

und daraus nach (5):

$$b^{-1} = (a^{-1})^{\alpha^{-1}}, \qquad \beta^{-1} = (\alpha^{-1})^{a^{-1}},$$

und wieder nach (11):

$$b = a^{(\alpha^{-1})^{a^{-1}}}, \qquad \beta = \alpha^{(a^{-1})^{\alpha^{-1}}}.$$

(a, α) läßt sich also eindeutig in zwei Faktoren spalten:

$$(a, \alpha) = (a^{(\alpha^{-1})^{a^{-1}}}, \varepsilon)\,(e, \alpha^{(a^{-1})^{\alpha^{-1}}}). \tag{12}$$

Setzt man etwa $a^{(\alpha^{-1})^{a^{-1}}} = r$, $\alpha^{(a^{-1})^{\alpha^{-1}}} = \varrho$, so bilden die Paare (r, ε) und (e, ϱ) für sich Untergruppen von $\mathfrak{g}$, die zu G resp. Γ isomorph. sind: Nach (1) ist nämlich

$$(r, \varepsilon)\,(s, \varepsilon) = (rs, \varepsilon) \qquad (e, \varrho)\,(e, \sigma) = (e, \varrho\sigma);$$

daraus folgt, daß

$$(r, \varepsilon)^{-1} = (r^{-1}, \varepsilon), \qquad (e, \varrho)^{-1} = (e, \varrho^{-1}).$$

Daher ist nach (12) das zu (a, α) inverse Element:

$$(a, \alpha)^{-1} = (e, (\alpha^{-1})^{a^{-1}})\,((a^{-1})^{\alpha^{-1}}, \varepsilon). \tag{13}$$

Die Darstellung (12) zeigt, daß jedes Element $\mathfrak{r} \in \mathfrak{g}$ darstellbar ist durch $\mathfrak{r} = g \cdot \gamma$, $g \in G$, $\gamma \in \Gamma$.

Um zu zeigen, daß $\mathfrak{g}$ das direkte Produkt aus G und Γ ist, genügt es noch nachzuweisen, daß die Elemente der beiden Untergruppen G und Γ miteinander vertauschbar sind. In der Tat ist

$$(a, \varepsilon)\,(e, \alpha) = (e, \alpha)\,(a, \varepsilon) = (a^{\alpha}, \alpha^{a}). \tag{14}$$

Ebenso einfach zeigt man, daß G und Γ Normalteiler von $\mathfrak{g}$ sind. Benutzen wir die obige Darstellung

$$(a, \alpha) = (b, \varepsilon)\,(e, \beta), \qquad (a, \alpha)^{-1} = (e, \beta^{-1})\,(b^{-1}, \varepsilon),$$

wobei $b^{-1} = (a^{-1})^{\alpha^{-1}}$, $\beta^{-1} = (\alpha^{-1})^{a^{-1}}$ ist, so erhält man wegen $(e, \beta)\,(c, \varepsilon)\,(e, \beta^{-1}) = (c, \varepsilon)$:

$$(a, \alpha)\,(c, \varepsilon)\,(a, \alpha)^{-1} = (bcb^{-1}, \varepsilon).$$

Dasselbe gilt für Γ.

Damit ist unser Satz bewiesen.

Um nun unseren Satz direkt zu beweisen, müssen wir eine passende Transformation finden. Die Struktur von (14) legt folgende Permutation nahe: Es sei

$$\Pi^{-1}\colon \quad (a, \alpha) \to (a^{\alpha}, \alpha^{a}),$$

dann ist

$$\Pi\colon \quad (a, \alpha) \to (a^{(\alpha^{-1})^{a^{-1}}}, \alpha^{(a^{-1})^{\alpha^{-1}}}).$$

Dann wird jetzt

$$(a, \alpha) \times (b, \beta) = \Pi(\Pi^{-1}(a, \alpha) \cdot \Pi^{-1}(b, \beta)) = \Pi(a^{\alpha\beta^{b}}\, b^{\beta\alpha^{a}},\ \alpha^{ab^{\beta}}\, \beta^{ba^{\alpha}}) =$$
$$= (a^{\beta^{-1}\beta^{b}}\, b^{\beta(\beta^{-1})^{a}},\ \alpha^{b^{-1}b^{\beta}}\, \beta^{b(b^{-1})^{\alpha}}).$$

Wir beweisen dies etwa wieder für die Elemente aus G. Wegen (8) kann man nach dem zweiten Exponenten abbrechen und erhält nach (9) und (11):

$$(a^{\alpha\beta^b} b^{\beta\alpha^a})^{\{(\beta^{-1})^{b^{\beta}a^{\alpha\beta}}(\alpha^{-1})^{a^{\alpha}b^{\alpha\beta}}\}a^{-1}b^{-1}} = (a^{\alpha\beta^b} b^{\beta\alpha^a})^{\beta^{-1}\alpha^{-1}} = a^{\beta^{-1}\beta^b} (b^{\beta\alpha^a})^{(\beta^{-1}\alpha^{-1})^a} =$$
$$= a^{\beta^{-1}\beta^b} b^{\beta(\beta^{-1})^a}.$$

Damit haben wir eine zu $G \odot \Gamma$ isomorphe Gruppe $\mathfrak{g}_1$ gewonnen mit dem Multiplikationsgesetz

$$\mathfrak{g}_1: \quad (a, \alpha)(b, \beta) = (a^{\beta^{-1}\beta^b} b^{\beta(\beta^{-1})^a}, \alpha^{b^{-1}b^\beta} \beta^{b(b^{-1})^\alpha}).$$

Das Einselement (e, ε) bleibt nach (3. 1) bei der Transformation Π erhalten. Beschränkt man sich wieder wie oben auf den Fall, daß $e^\alpha = e$, $\varepsilon^a = \varepsilon$, so erhält man auch (3. 2): $a^\varepsilon = a$, $\alpha^e = \alpha$.

Dagegen liefert die Assoziativität die sehr unbequeme Beziehung

$$(a^{\beta^{-1}\beta^b} b^{\beta(\beta^{-1})^a})^{\gamma^{-1}\gamma^c} c^{\gamma(\gamma^{-1})^{a^{\beta^{-1}\beta^b}b^{\beta(\beta^{-1})^a}}} = a^{\lambda^{-1}\lambda^v} v^{\lambda(\lambda^{-1})^a};$$

in der

$$\lambda = \beta^{c^{-1}c^\gamma} \gamma^{c(c^{-1})^\beta}, \qquad v = b^{\gamma^{-1}\gamma^c} c^{\gamma(\gamma^{-1})^b},$$

die sich aber für $c = e$ wegen (3. 1) und (3. 2) sofort auf die Gleichung

$$a^{\beta^{-1}\beta^b} b^{\beta(\beta^{-1})^a} = a^{(\beta\gamma)^{-1}(\beta\gamma)^b} \cdot b^{(\beta\gamma)[(\beta\gamma)^{-1}]^a}$$

reduziert. $\gamma = \beta^{-1}$ liefert schließlich

$$a^{\beta^{-1}\beta^b} b^{\beta(\beta^{-1})^a} = ab;$$

die linke Seite ist aber gerade der Ausdruck, der im Multiplikationsgesetz steht. Berufung auf die Symmetrie oder direkte Ausrechnung ergibt für den Γ-Anteil dasselbe; somit ist

$$\mathfrak{g}_1: \quad (a, \alpha)(b, \beta) = (ab, \alpha\beta)$$

und damit $G \odot \Gamma \cong \mathfrak{g}_1$ das direkte Produkt der Gruppen G und Γ.

Literaturverzeichnis.

[1] L. Rédei, Die Anwendung des schiefen Produktes in der Gruppentheorie, *Journal f. d. reine u. angew. Math.*, **188** (1950), 201—227.

[2] L. Rédei—A. Stöhr, Über ein spezielles schiefes Produkt in der Gruppentheorie, *diese Acta*, **15** (1953), 7—11.

[3] R. Kochendörffer, Zur Theorie der Rédeischen schiefen Produkte, *Journal f. d. reine u. angew. Math.*, **192** (1953), 96—101.

(*Eingegangen am 4. September 1955.*)