Sur une généralisation de la notion de dérivée.

Par ÁKOS CSÁSZÁR à Budapest.

1. Il s'agira dans cette note d'une généralisation de la notion de dérivée qui se rattache à la notion de continuité sous négligence des ensembles appartenant à une famille $\mathfrak{N}$ d'ensembles, famille qui doit remplir quelques conditions simples. Cet ordre d'idées de négliger les ensembles $\mathfrak{N}$, déjà classique et dû à R. BAIRE, m'a conduit à m'occuper dans deux ouvrages antérieurs [1, 2] des fonctions localement monotones sous négligence des ensembles en question; dans la note présente, j'appliquerai les mêmes idées à définir une sorte de nombres dérivés sous négligence des ensembles $\mathfrak{N}$ et à examiner les propriétés de ces nombres dérivés généralisés et des fonctions qui sont dérivables sous négligence des ensembles $\mathfrak{N}$.

Après avoir défini les notions en question, je m'occuperai dans le § 3 d'une généralisation aux nombres dérivés généralisés du théorème bien connu de DENJOY, traitant des nombres dérivés de DINI. La voie la plus commode qui nous conduit à cette généralisation, c'est d'établir d'abord une généralisation analogue du théorème de KOLMOGOROFF et de VERTCHENKO sur le contingent des ensembles plans, d'où on parvient, par une légère modification du raisonnement qui fournit le théorème de DENJOY à partir du théorème de KOLMOGOROFF et VERTCHENKO, à la généralisation en question, tandis que la généralisation mentionnée du théorème de KOLMOGOROFF et VERTCHENKO se démontre comme conséquence immédiate du même théorème.

Les résultats du § 3 nous permettent au § 4 de donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction soit dérivable sous négligence des ensembles $\mathfrak{N}$ en tous les points d'un ensemble donné E, excepté ceux d'un ensemble $\mathfrak{N}$ et d'un ensemble de mesure nulle. Cette condition consiste en ce que la fonction doit être de variation bornée généralisée sous négligence des ensembles $\mathfrak{N}$ sur un ensemble qui ne diffère de l'ensemble E qu'en un ensemble qui est la réunion d'un ensemble $\mathfrak{N}$ et d'un ensemble de mesure nulle. Dans le même ordre d'idées, nous examinerons les propriétés des fonctions à variation bornée généralisée sous négligence des ensembles $\mathfrak{N}$.

Dans § 5, nous nous occuperons enfin d'une généralisation du théorème de HASLAM-JONES sur les différentielles extrêmes d'une fonction à deux variables, généralisation qui se rattache à une généralisation parallèle du théorème de F. ROGER sur le contingent des ensembles dans l'espace; tout cela s'obtient par une modification des méthodes dues à S. SAKS de la même façon que les résultats du § 3.

2. Considérons une famille héréditaire et σ-additive d'ensembles linéaires, c'est-à-dire une famille $\mathfrak{N}$ de sous-ensembles de la droite $R_1 = \underset{x}{E}[-\infty < x < +\infty]$, famille qui remplit les conditions suivantes:

(2. 1) Si $A \in \mathfrak{N}$ et si $B \subset A$, on a $B \in \mathfrak{N}$;

(2. 2) Si $A_i \in \mathfrak{N}$ $(i = 1, 2, \ldots)$, on a $\sum_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathfrak{N}$.

Désignons par $U_{\mathfrak{N}}$ l'ensemble composé des points $x_0 \in R_1$ tels qu'on a $(x_0, x_0 + \delta) \notin \mathfrak{N}$ et $(x_0 - \delta, x_0) \notin \mathfrak{N}$ pour tous les nombres $\delta > 0$. On démontre par un raisonnement facile[1]) la proposition suivante:

(2. 3) *On a $R_1 - U_{\mathfrak{N}} = N + D$, où $N \in \mathfrak{N}$ et l'ensemble D est dénombrable.*

Un ensemble $E \subset R_1$ et une fonction $f(x)$ réelle et finie, définie pour $x \in R_1$, étant donnés, désignons par $\underset{x \in E}{\sup_{\mathfrak{N}}} f(x)$ la borne inférieure (finie ou infinie) des valeurs y telles que

(2. 4) $$\underset{x}{E}[f(x) > y, x \in E] \in \mathfrak{N},$$

et par $\underset{x \in E}{\inf_{\mathfrak{N}}} f(x)$ la borne supérieure des valeurs y telles que

(2. 5) $$\underset{x}{E}[f(x) < y, x \in E] \in \mathfrak{N}.$$

On constate en utilisant les conditions (2. 1) et (2. 2) que l'ensemble des y satisfaisant à (2. 4) est identique à l'intervalle $[M, +\infty]$, et que celui des y satisfaisant à (2. 5) est identique à l'intervalle $[-\infty, m]$, où $M = \underset{x \in E}{\sup_{\mathfrak{N}}} f(x)$, $m = \underset{x \in E}{\inf_{\mathfrak{N}}} f(x)$. Au cas où $\mathfrak{N}$ ne contient que l'ensemble vide, $\underset{x \in E}{\sup_{\mathfrak{N}}} f(x)$ et $\underset{x \in E}{\inf_{\mathfrak{N}}} f(x)$ coïncident respectivement avec les bornes supérieure et inférieure au sens classique de la fonction $f(x)$ sur l'ensemble E, tandis que si $\mathfrak{N}$ désigne la famille des ensembles de mesure nulle, on parvient à vrai $\underset{x \in E}{\max} f(x)$ et vrai $\underset{x \in E}{\min} f(x)$.

On a pour $E' \subset E$, en vertu de (2. 1),

(2. 6) $$\underset{x \in E'}{\sup_{\mathfrak{N}}} f(x) \leqq \underset{x \in E}{\sup_{\mathfrak{N}}} f(x), \quad \underset{x \in E'}{\inf_{\mathfrak{N}}} f(x) \geqq \underset{x \in E}{\inf_{\mathfrak{N}}} f(x).$$

$\mathfrak{N}'$ étant une autre famille héréditaire et σ-additive, la relation $\mathfrak{N}' \subset \mathfrak{N}$ entraîne évidemment que

(2. 7) $$\underset{x \in E}{\sup_{\mathfrak{N}}} f(x) \leqq \underset{x \in E}{\sup_{\mathfrak{N}'}} f(x), \quad \underset{x \in E}{\inf_{\mathfrak{N}}} f(x) \geqq \underset{x \in E}{\inf_{\mathfrak{N}'}} f(x).$$

---

[1]) Cf. [2], th. (3. 1).

(2.8) *Si* $E \in \mathfrak{N}$, *on a* $\sup_{x \in E}^{\mathfrak{N}} f(x) = -\infty$, $\inf_{x \in E}^{\mathfrak{N}} f(x) = +\infty$. *Si* $E \notin \mathfrak{N}$, *on a*

$$+\infty \neq \inf_{x \in E}^{\mathfrak{N}} f(x) \leqq \sup_{x \in E}^{\mathfrak{N}} f(x) \neq -\infty.$$

Démonstration. La première assertion s'ensuit de ce que, pour $E \in \mathfrak{N}$, tout y réel satisfait à (2.4) et à (2.5). Réciproquement $\sup_{x \in E}^{\mathfrak{N}} f(x) = -\infty$ entraîne

$$\underset{x}{E}[f(x) > -n, x \in E] \in \mathfrak{N} \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

donc, en vertu de (2.2), $E \in \mathfrak{N}$. Un raisonnement analogue s'applique au cas où $\inf_{x \in E}^{\mathfrak{N}} f(x) = +\infty$. Enfin, si l'on avait

$$M = \sup_{x \in E}^{\mathfrak{N}} f(x) < \inf_{x \in E}^{\mathfrak{N}} f(x) = m,$$

on aurait pour $M < y_1 < y_2 < m$

$$\underset{x}{E}[f(x) > y_1, x \in E] \in \mathfrak{N} \text{ et } \underset{x}{E}[f(x) < y_2, x \in E] \in \mathfrak{N},$$

donc, d'après (2.2), $E \in \mathfrak{N}$.

On a évidemment d'après (2.1) et (2.2)

$$\sup_{x \in E}^{\mathfrak{N}}[f(x) + g(x)] \leqq \sup_{x \in E}^{\mathfrak{N}} f(x) + \sup_{x \in E}^{\mathfrak{N}} g(x), \tag{2.9}$$

$$\inf_{x \in E}^{\mathfrak{N}}[f(x) + g(x)] \geqq \inf_{x \in E}^{\mathfrak{N}} f(x) + \inf_{x \in E}^{\mathfrak{N}} g(x), \tag{2.10}$$

$$\sup_{x \in E}^{\mathfrak{N}}[c \cdot f(x)] = c \cdot \sup_{x \in E}^{\mathfrak{N}} f(x), \quad \inf_{x \in E}^{\mathfrak{N}}[c \cdot f(x)] = c \cdot \inf_{x \in E}^{\mathfrak{N}} f(x) \qquad (c > 0) \tag{2.11}$$

et

$$\sup_{x \in E}^{\mathfrak{N}}[-f(x)] = -\inf_{x \in E}^{\mathfrak{N}} f(x). \tag{2.12}$$

Comme généralisations des limites extrêmes unilatérales ordinaires, introduisons les notations suivantes:

$$\overline{\lim_{x \to x_0+}}^{\mathfrak{N}} f(x) = \lim_{h \to 0+} \sup_{x_0 < x < x_0 + h}^{\mathfrak{N}} f(x), \tag{2.13}$$

$$\underline{\lim_{x \to x_0+}}^{\mathfrak{N}} f(x) = \lim_{h \to 0+} \inf_{x_0 < x < x_0 + h}^{\mathfrak{N}} f(x); \tag{2.14}$$

les limites en question (finies ou infinies) existent puisque, d'après (2.6), $\sup_{x_0 < x < x_0+h}^{\mathfrak{N}} f(x)$ est une fonction non-décroissante, et $\inf_{x_0 < x < x_0+h}^{\mathfrak{N}} f(x)$ une fonction non-croissante, de la variable h. On définit de façon analogue les limites extrêmes généralisées du côté gauche. Si les quatre limites extrêmes unilatérales généralisées sont égales, on désignera leur valeur commune par $\lim_{x \to x_0}^{\mathfrak{N}} f(x)$. Au cas où la famille $\mathfrak{N}$ ne contient que l'ensemble vide, on retrouve évidemment les limites extrêmes unilatérales ordinaires.

Les propositions suivantes découlent de celles (2. 7) à (2. 12):

(2. 15) *Si* $\mathfrak{N}' \subset \mathfrak{N}$, *on a*

$$\overline{\lim_{x\to x_0\pm}}{}_{\mathfrak{N}} f(x) \leqq \overline{\lim_{x\to x_0\pm}}{}_{\mathfrak{N}'} f(x), \quad \underline{\lim_{x\to x_0\pm}}{}_{\mathfrak{N}} f(x) \geqq \underline{\lim_{x\to x_0\pm}}{}_{\mathfrak{N}'} f(x).$$

En particulier, en posant $\mathfrak{N}' = \{0\}$,

$$\overline{\lim_{x\to x_0\pm}}{}_{\mathfrak{N}} f(x) \leqq \overline{\lim_{x\to x_0\pm}} f(x), \quad \underline{\lim_{x\to x_0\pm}}{}_{\mathfrak{N}} f(x) \geqq \underline{\lim_{x\to x_0\pm}} f(x). \tag{2. 16}$$

(2. 17) *On a pour* $x_0 \in U_{\mathfrak{N}}$

$$\underline{\lim_{x\to x_0\pm}}{}_{\mathfrak{N}} f(x) \leqq \overline{\lim_{x\to x_0\pm}}{}_{\mathfrak{N}} f(x).$$

(2. 18) *On a*

$$\overline{\lim_{x\to x_0\pm}}{}_{\mathfrak{N}} [f(x)+g(x)] \leqq \overline{\lim_{x\to x_0\pm}}{}_{\mathfrak{N}} f(x) + \overline{\lim_{x\to x_0\pm}}{}_{\mathfrak{N}} g(x),$$

$$\underline{\lim_{x\to x_0\pm}}{}_{\mathfrak{N}} [f(x)+g(x)] \geqq \underline{\lim_{x\to x_0\pm}}{}_{\mathfrak{N}} f(x) + \underline{\lim_{x\to x_0\pm}}{}_{\mathfrak{N}} g(x),$$

pourvu que les termes des seconds membres ne soient pas infinis de signes contraires.

(2. 19) *On a pour* $c > 0$

$$\overline{\lim_{x\to x_0\pm}}{}_{\mathfrak{N}} [c\cdot f(x)] = c\cdot \overline{\lim_{x\to x_0\pm}}{}_{\mathfrak{N}} f(x), \quad \underline{\lim_{x\to x_0\pm}}{}_{\mathfrak{N}} [c\cdot f(x)] = c\cdot \underline{\lim_{x\to x_0\pm}}{}_{\mathfrak{N}} f(x).$$

(2. 20) *On a*

$$\overline{\lim_{x\to x_0\pm}}{}_{\mathfrak{N}} [-f(x)] = - \underline{\lim_{x\to x_0\pm}}{}_{\mathfrak{N}} f(x).$$

A l'aide des limites extrêmes unilatérales généralisées, nous définissons les nombres dérivés généralisés par les formules

$$\overline{f}_{\mathfrak{N}}^{+}(x_0) = \overline{\lim_{x\to x_0+}}{}_{\mathfrak{N}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}, \quad \underline{f}_{\mathfrak{N}}^{+}(x_0) = \underline{\lim_{x\to x_0+}}{}_{\mathfrak{N}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0},$$

$$\overline{f}_{\mathfrak{N}}^{-}(x_0) = \overline{\lim_{x\to x_0-}}{}_{\mathfrak{N}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}, \quad \underline{f}_{\mathfrak{N}}^{-}(x_0) = \underline{\lim_{x\to x_0-}}{}_{\mathfrak{N}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

Si ces quatre nombres dérivés sont égaux, on désigne leur valeur commune par $f'_{\mathfrak{N}}(x_0)$. Au cas où la famille $\mathfrak{N}$ ne contient que l'ensemble vide, on revient aux nombres dérivés de DINI. On déduit des propositions (2. 15) à (2. 20) des propriétés analogues des nombres dérivés généralisés.

3. Nous allons démontrer qu'une généralisation du théorème classique de DENJOY sur les nombres dérivés d'une fonction quelconque, s'applique aux nombres dérivés généralisés. Comme nous l'avons dit plus haut, nous déduirons ce théorème d'une généralisation parallèle du théorème de KOLMOGOROFF et VERTCHENKO, concernant le contingent des ensembles plans, par une modification de la méthode due à HASLAM-JONES et SAKS[2]). Pour pouvoir formuler la généralisation mentionnée du théorème sur le contingent, convenons des définitions qui vont suivre.

Considérons une famille $\mathfrak{M}$ héréditaire et σ-additive des sous-ensembles du plan R_2. Une demi-droite fermée L, issue du point $z \in R_2$, sera nommée demi-droite tangente généralisée à un ensemble $E \subset R_2$, si l'on a pour tous les secteurs circulaires ouverts S, ayant z pour sommet et dont L passe par l'intérieur, $ES \notin \mathfrak{M}$. La réunion des demi-droites tangentes généralisées à E, issues du point z, sera appelée le contingent généralisé de E au point z, et on le désignera par $\operatorname{contg}_{\mathfrak{M}}(z, E)$. Au cas où $\mathfrak{M} = \{0\}$, on parvient à la notion du contingent ordinaire $\operatorname{contg}(z, E)$. On connaît que cette notion possède les propriétés exprimées par la proposition suivante, dont la première partie coïncide avec le théorème de KOLMOGOROFF et VERTCHENKO, la seconde avec un théorème de HASLAM-JONES et SAKS[3]).

(3. 1) *Pour tout ensemble $E \subset R_2$, on a une décomposition $E = E_1 + E_2 + E_3 + H$, où $\operatorname{contg}(z, E) = R_2$ pour $z \in E_1$, $\operatorname{contg}(z, E)$ égale un demi-plan fermé pour $z \in E_2$, $\operatorname{contg}(z, E)$ se compose d'une droite pour $z \in E_3$, et on peut couvrir l'ensemble $E - E_1$ avec une suite dénombrable de courbes rectifiables, tandis que pour couvrir l'ensemble H, on peut choisir ces courbes de façon que la somme de leurs longueurs soit aussi petite que l'on veut. Si, pour tous les points z d'un ensemble $P \subset E$, $\operatorname{contg}(z, E)$ n'a aucun point commun avec un demi-plan ouvert, délimité par une droite parallèle à une droite donnée D, la projection orthogonale de P sur une droite D', perpendiculaire à D, est de mesure linéaire nulle.*

Nous allons démontrer le théorème suivant sur les contingents généralisés:

(3. 2) *Pour tout ensemble $E \subset R_2$, on a une décomposition $E = E_1 + E_2 + E_3 + H + M$, où $\operatorname{contg}_{\mathfrak{M}}(z, E) = R_2$ pour $z \in E_1$, $\operatorname{contg}_{\mathfrak{M}}(z, E)$ égale un demi-plan fermé pour $z \in E_2$, $\operatorname{contg}_{\mathfrak{M}}(z, E)$ se compose d'une droite pour $z \in E_3$, on peut couvrir l'ensemble $E_2 + E_3 + H$ avec une suite dénombrable de courbes rectifiables, tandis que pour couvrir l'ensemble H, on peut choisir ces courbes de façon que la somme de leurs longueurs soit aussi petite que l'on veut, et on a $M \in \mathfrak{M}$. Si, pour tous les points z d'un ensemble $P \subset E$, $\operatorname{contg}_{\mathfrak{M}}(z, E)$ n'a aucun point commun avec un demi-plan ouvert, délimité par une droite parallèle à une droite donnée D, on a $P = P_1 + M_1$, où $M_1 \in \mathfrak{M}$ et la projection orthogonale de P_1 sur une droite D', perpendiculaire à D, est de mesure linéaire nulle.*

Pour démontrer (3. 2), considérons l'ensemble $E_{\mathfrak{M}}$ composé des points $z \in R_2$ tels que, pour tout cercle ouvert C ayant z pour centre, on a $CE \notin \mathfrak{M}$.

---

[2]) Cf. [3], [4] et [5], pp. 269 à 271.

[3]) Cf. [6], [3], [4] et [5], pp. 266 et 267.

On a

$$(3.3) \qquad E - E_{\mathfrak{M}} \in \mathfrak{M},$$

puisque tout point $z \in E - E_{\mathfrak{M}}$ est centre d'un cercle C_z tel que $E \cdot C_z \in \mathfrak{M}$, et qu'un système dénombrable de ces cercles couvre, d'après le théorème de Lindelöf, l'ensemble $E - E_{\mathfrak{M}}$. On voit aisément que

$$(3.4) \qquad \operatorname{contg}_{\mathfrak{M}}(z, E) = \operatorname{contg}(z, E_{\mathfrak{M}}).$$

En effet, si l'on a pour une demi-droite L, issue de z, $L \subset \operatorname{contg}(z, E_{\mathfrak{M}})$, cela veut dire qu'à l'intérieur S de tout secteur circulaire, ayant z pour sommet et dont L passe par l'intérieur, se trouve au moins un point de $E_{\mathfrak{M}}$, et on a alors évidemment $SE \notin \mathfrak{M}$, donc $L \subset \operatorname{contg}_{\mathfrak{M}}(z, E)$. Réciproquement si $L \subset \operatorname{contg}_{\mathfrak{M}}(z, E)$, on a pour tout secteur circulaire S du type envisagé $SE \notin \mathfrak{M}$. La relation (3.3) a pour conséquence que $SE_{\mathfrak{M}} \neq 0$, donc que $L \subset \operatorname{contg}(z, E_{\mathfrak{M}})$. Or, en vertu de (3.3) et (3.4), (3.2) découle immédiatement de (3.1).

Pour passer à la généralisation du théorème de Denjoy, considérons une fonction réelle et finie, $f(x)$, et une famille $\mathfrak{N}$ héréditaire et σ-additive des sous-ensembles de la droite R_1. Nous démontrons d'abord la proposition suivante, généralisation d'un théorème bien connu[4]:

(3.5) *Si l'on a pour tous les points x_0 d'un ensemble E ou bien $\overline{\lim}_{\mathfrak{N}, x \to x_0+} f(x) \neq \overline{\lim}_{\mathfrak{N}, x \to x_0-} f(x)$, ou bien $\underline{\lim}_{\mathfrak{N}, x \to x_0+} f(x) \neq \underline{\lim}_{\mathfrak{N}, x \to x_0-} f(x)$, l'ensemble E est dénombrable.*

Démonstration. Considérons par exemple l'ensemble E' des points $x_0 \in E$ où $\overline{\lim}_{\mathfrak{N}, x \to x_0-} f(x) < \overline{\lim}_{\mathfrak{N}, x \to x_0+} f(x)$, et, en outre, celui des points $x_0 \in E$ où l'on a $\overline{\lim}_{\mathfrak{N}, x \to x_0-} f(x) < r < \overline{\lim}_{\mathfrak{N}, x \to x_0+} f(x)$ pour un nombre rationnel r donné. En désignant cet ensemble par E'_r, on a évidemment $E' = \sum_r E'_r$. Or, pour $x_0 \in E'_r$, on a pour un $\delta > 0$ convenable

$$\underset{x}{E}[f(x) > r, x_0 - \delta < x < x_0] \in \mathfrak{N},$$

donc, pour $x_0 - \delta < x_1 < x_0$,

$$\underset{x}{E}[f(x) > r, x_1 < x < x_0] \in \mathfrak{N},$$

d'où il s'ensuit que $\overline{\lim}_{\mathfrak{N}, x \to x_1+} f(x) \leqq r$, donc que $x_1 \notin E'_r$. Aucun point de E'_r n'étant point d'accumulation bilatéral de E'_r, cet ensemble est dénombrable, ce qui implique la dénombrabilité de E'.

---

[4]) Cf. [5], p. 261.

Pour pouvoir appliquer le théorème (3.2), considérons dans le plan (x, y) l'image de la fonction $f(x)$, c'est-à-dire l'ensemble

$$B = \underset{(x, y)}{E} [y = f(x)],$$

et désignons par $\mathfrak{M}$ la famille des sous-ensembles de B dont la projection orthogonale sur l'axe des x appartient à la famille $\mathfrak{N}$. La famille $\mathfrak{N}$ étant héréditaire et σ-additive, celle $\mathfrak{M}$ jouit évidemment des mêmes propriétés. On peut alors démontrer la proposition suivante:

(3.6) *Si le nombre dérivé généralisé $\bar{f}_{\mathfrak{N}}^{+}(x)$ est fini en tous les points x d'un ensemble E, on a une décomposition $E = E_0 + N + Z$, où l'on a $\underline{f}_{\mathfrak{N}}^{-}(x) = \bar{f}_{\mathfrak{N}}^{+}(x)$ pour $x \in E_0$, on a $N \in \mathfrak{N}$ et l'ensemble $B_z = \underset{(x, y)}{E} [x \in Z, y = f(x)]$ peut être couvert avec une suite de courbes rectifiables dont les longueurs ont une somme aussi petite que l'on veut.*

Désignons par $L_m^+(x_0)$ et par $L_m^-(x_0)$ respectivement les demi-droites

$$L_m^+(x_0) = \underset{(x, y)}{E} [y - f(x_0) = m(x - x_0), x \geqq x_0]$$

et

$$L_m^-(x_0) = \underset{(x, y)}{E} [y - f(x_0) = m(x - x_0), x \leqq x_0],$$

et posons encore

$$L_{+\infty}^+(x_0) = L_{-\infty}^-(x_0) = \underset{(x, y)}{E} [x = x_0, y \geqq f(x_0)],$$

$$L_{-\infty}^+(x_0) = L_{+\infty}^-(x_0) = \underset{(x, y)}{E} [x = x_0, y \leqq f(x_0)].$$

Nous commençons par la démonstration de deux lemmes.

(3.7) *L'égalité $\bar{f}_{\mathfrak{N}}^{+}(x_0) = m_0 < +\infty$ entraîne les propositions*

a) $\overline{\lim}_{\mathfrak{N}}\, {}_{x \to x_0+} f(x) \leqq f(x_0)$,

b) $\mathrm{contg}_{\mathfrak{M}}(z_0, B)$ *(où $z_0 = (x_0, f(x_0))$) ne contient pas $L_m^+(x_0)$ pour $m_0 < m < +\infty$,*

c) $L_{m_0}^+(x_0) \subset \mathrm{contg}_{\mathfrak{M}}(z_0, B)$, *si m_0 est fini.*

De même, $\underline{f}_{\mathfrak{N}}^{-}(x_0) = m_0 > -\infty$ entraîne

a') $\overline{\lim}_{\mathfrak{N}}\, {}_{x \to x_0-} f(x) \leqq f(x_0)$,

b') $\mathrm{contg}_{\mathfrak{M}}(z_0, B)$ *ne contient pas $L_m^-(x_0)$ pour $-\infty < m < m_0$,*

c') $L_{m_0}^-(x_0) \subset \mathrm{contg}_{\mathfrak{M}}(z_0, B)$, *si m_0 est fini.*

Il suffit de démontrer la première partie de l'énoncé. Or, $\bar{f}_{\mathfrak{N}}^{+}(x_0)$ étant égal à m_0, à un m' $(m_0 < m' < +\infty)$ quelconque correspond un $\delta_0 > 0$ tel que, pour $0 < \delta < \delta_0$,

(3.8) $$\underset{x}{E}[f(x) - f(x_0) > m'(x - x_0), x_0 < x < x_0 + \delta] \in \mathfrak{N};$$

en posant $\delta' = \delta$ pour $m' \leqq 0$ et $\delta' = \min\left(\delta, \frac{\varepsilon}{m'}\right)$ pour $m' > 0$, on a la relation

$$\underset{x}{E}[f(x) - f(x_0) > \varepsilon,\ x_0 < x < x_0 + \delta'] \subset$$
$$\subset \underset{x}{E}[f(x) - f(x_0) > m'(x - x_0),\ x_0 < x < x_0 + \delta] \in \mathfrak{N},$$

donc $\overline{\lim}_{\mathfrak{N}}{}_{x \to x_0+} f(x) \leqq f(x_0) + \varepsilon$ et, $\varepsilon > 0$ étant arbitraire, on a la proposition a).

La relation (3. 8) étant équivalente à celle

$$(3.\ 9)\qquad B \cdot \underset{(x,\,y)}{E}[x_0 < x < x_0 + \delta,\ y > f(x_0) + m'(x - x_0)] \in \mathfrak{M},$$

on voit sans peine que $L_m^+(x_0)$ n'appartient pas à $\text{contg}_{\mathfrak{M}}(z_0, B)$ pour $m' < m < +\infty$, d'où s'ensuit la proposition b).

Enfin, m_0 étant fini, si $L_{m_0}^+(x_0)$ ne faisait pas partie de $\text{contg}_{\mathfrak{M}}(z_0, B)$, on pourrait trouver des nombres $\varepsilon > 0$ et $\delta_1 > 0$ tels que

$$B \cdot \underset{(x,\,y)}{E}[x_0 < x < x_0 + \delta,\ f(x_0) + (m_0 - \varepsilon)(x - x_0) \leqq y \leqq f(x_0) + (m_0 + \varepsilon)(x - x_0)] \in \mathfrak{M}$$

soit valable pour $0 < \delta < \delta_1$. En tenant compte de (3. 9), valable pour $m' = m_0 + \varepsilon$, il s'ensuivrait pour $0 < \delta < \min(\delta_0, \delta_1)$

$$B \cdot \underset{(x,\,y)}{E}[x_0 < x < x_0 + \delta,\ y > f(x_0) + (m_0 - \varepsilon)(x - x_0)] \in \mathfrak{M},$$

donc

$$\underset{x}{E}[f(x) - f(x_0) > (m_0 - \varepsilon)(x - x_0),\ x_0 < x < x_0 + \delta] \in \mathfrak{N},$$

d'où découlerait $\bar{f}_{\mathfrak{N}}^+(x_0) \leqq m_0 - \varepsilon$. Cette contradiction montre que la proposition c) est, elle aussi, valable.

(3. 10) *m_0 étant fini, les hypothèses*

α) $\overline{\lim}_{\mathfrak{N}}{}_{x \to x_0+} f(x) \leqq f(x_0)$,

β) $\text{contg}_{\mathfrak{M}}(z_0, B)$ *ne contient pas* $L_m^+(x_0)$ *pour* $m_0 < m \leqq +\infty$,

γ) $L_{m_0}^+(x_0) \subset \text{contg}_{\mathfrak{M}}(z_0, B)$

impliquent $\bar{f}_{\mathfrak{N}}^+(x_0) = m_0$. *De même, les hypothèses*

α') $\overline{\lim}_{\mathfrak{N}}{}_{x \to x_0-} f(x) \leqq f(x_0)$,

β') $\text{contg}_{\mathfrak{M}}(z_0, B)$ *ne contient pas* $L_m^-(x_0)$ *pour* $-\infty \leqq m < m_0$,

γ') $L_{m_0}^-(x_0) \subset \text{contg}_{\mathfrak{M}}(z_0, B)$

impliquent $\underline{f}_{\mathfrak{N}}^-(x_0) = m_0$.

En se bornant à la démonstration de la première partie de l'énoncé, on voit d'abord que, en vertu de (3. 7), β) exclue la possibilité de l'égalité $\bar{f}_{\mathfrak{N}}^+(x_0) = m$ pour $m_0 < m < +\infty$ et que γ) rend impossible la même égalité pour $-\infty \leqq m < m_0$. Or, $L_{+\infty}^+(x_0)$ ne faisant pas partie de $\text{contg}_{\mathfrak{M}}(z_0, B)$, on peut trouver des nombres finis $m' > 0$ et $\varepsilon > 0$ tels que

$$B \cdot \underset{(x,y)}{E}[x > x_0, f(x_0) + m'(x - x_0) < y < f(x_0) + \varepsilon] \in \mathfrak{M},$$

donc que

$$\underset{x}{E}[x > x_0, m'(x - x_0) < f(x) - f(x_0) < \varepsilon] \in \mathfrak{N}.$$

En choisissant à cet ε, d'après α), un $\delta > 0$ tel que

$$\underset{x}{E}[f(x) - f(x_0) \geqq \varepsilon, x_0 < x < x_0 + \delta] \in \mathfrak{N},$$

on a

$$\underset{x}{E}[f(x) - f(x_0) > m'(x - x_0), x_0 < x < x_0 + \delta] \in \mathfrak{N},$$

ce qui montre l'impossibilité de $\bar{f}^+_{\mathfrak{N}}(x_0) = +\infty$, ce qu'il fallait encore démontrer.

Passons à la démonstration de (3. 6). Il s'ensuit de (3. 7) que pour $x_0 \in E$, $\mathrm{contg}_{\mathfrak{M}}(z_0, B)$ n'est pas le plan entier, donc, en vertu du théorème (3. 2), la partie B' de B dont la projection orthogonale sur l'axe des x coïncide avec E, se décompose en un ensemble B_1 en tout point z duquel $\mathrm{contg}_{\mathfrak{M}}(z, B)$ est ou bien un demi-plan fermé, ou bien une droite, en un ensemble $M \in \mathfrak{M}$ et en un ensemble H qu'on peut couvrir avec une suite de courbes rectifiables de longueur totale aussi petite que l'on veut. Désignons par E_1 la projection de B_1 sur l'axe des x, et par E_0 la partie de E_1 composée des points x_0 où $\overline{\lim}_{\mathfrak{N}}{}_{x \to x_0+} f(x) = \overline{\lim}_{\mathfrak{N}}{}_{x \to x_0-} f(x)$. D'après (3. 5), l'ensemble $E_1 - E_0$ est dénombrable.

Considérons un point $x_0 \in E_0$ et soit $\bar{f}^+_{\mathfrak{N}}(x_0) = m_0$ (fini). En vertu de (3. 7), $\mathrm{contg}_{\mathfrak{M}}(z_0, B)$ est ou bien la droite $y - f(x_0) = m_0(x - x_0)$, ou bien le demi-plan fermé

$$\underset{(x,y)}{E}[y - f(x_0) \leqq m_0(x - x_0)]$$

délimité par cette droite. Dans l'un et l'autre cas, $L^-_{m_0}(x_0)$ appartient à $\mathrm{contg}_{\mathfrak{M}}(z_0, B)$, mais $L^-_m(x_0)$ n'en fait pas partie pour $-\infty \leqq m < m_0$. Comme d'ailleurs $\overline{\lim}_{\mathfrak{N}}{}_{x \to x_0-} f(x) = \overline{\lim}_{\mathfrak{N}}{}_{x \to x_0+} f(x) \leqq f(x_0)$ d'après (3. 7), il découle de (3.10) que $\underline{f}^-_{\mathfrak{N}}(x_0) = m_0 = \bar{f}^+_{\mathfrak{N}}(x_0)$.

En désignant par N la projection sur l'axe des x de l'ensemble M et par Z la réunion de $E_1 - E_0$ et de la projection de H, on parvient donc à la décomposition dont l'existence a été affirmée en (3. 6).

(3. 11) *Si l'on a en tous les points x_0 d'un ensemble E*

(3. 12) $$\overline{\lim_{x \to x_0+}}{}_{\mathfrak{N}} \left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right| = +\infty,$$

on a $E = N + Z$, où $N \in \mathfrak{N}$ et $|Z| = 0$.

Démonstration. Avec les notations de la démonstration précédente, on a pour $0 < m' < +\infty$ et $x_0 \in E$

$$\underset{x}{E}\left[\left|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right| > m',\, x_0 < x < x_0+\delta\right] \in \mathfrak{N}$$

pour un $\delta > 0$ convenable, donc la demi-droite $L^+_m(x_0)$ n'appartient pas à $\mathrm{contg}_{\mathfrak{M}}(z_0, B)$ pour $|m| < m'$. Par conséquent $\mathrm{contg}_{\mathfrak{M}}(z_0, B)$ n'a aucun point commun avec le demi-plan $x > x_0$. D'après (3. 2), la partie de B dont la projection sur l'axe des x coïncide avec E, est de la forme $M+H$, où $M \in \mathfrak{M}$ et la projection de H est de mesure nulle. En désignant par Z cette projection et par N celle de M, on obtient la proposition à démontrer.

En résumant nos conclusions, nous parvenons à la généralisation suivante du théorème de Denjoy sur les nombres dérivés:

(3. 13) *Excepté les points d'un ensemble $\mathfrak{N}$ et d'un ensemble de mesure nulle, les nombres dérivés généralisés d'une fonction $f(x)$ quelconque remplissent an moins une des conditions suivantes:*

1°) $\overline{f}^+_{\mathfrak{N}}(x)=\underline{f}^+_{\mathfrak{N}}(x)=\overline{f}^-_{\mathfrak{N}}(x)=\underline{f}^-_{\mathfrak{N}}(x)=fini,$

2°) $\overline{f}^+_{\mathfrak{N}}(x)=\underline{f}^-_{\mathfrak{N}}(x)=fini,\ \overline{f}^-_{\mathfrak{N}}(x)=+\infty,\ \underline{f}^+_{\mathfrak{N}}(x)=-\infty,$

3°) $\overline{f}^-_{\mathfrak{N}}(x)=\underline{f}^+_{\mathfrak{N}}(x)=fini,\ \overline{f}^+_{\mathfrak{N}}(x)=+\infty,\ \underline{f}^-_{\mathfrak{N}}(x)=-\infty,$

4°) $\overline{f}^+_{\mathfrak{N}}(x)=\overline{f}^-_{\mathfrak{N}}(x)=+\infty,\ \underline{f}^+_{\mathfrak{N}}(x)=\underline{f}^-_{\mathfrak{N}}(x)=-\infty.$

Démonstration. Puisque $\overline{f}^+_{\mathfrak{N}}(x_0)=-\infty$ ou $\underline{f}^+_{\mathfrak{N}}(x_0)=+\infty$ implique l'égalité (3. 12), on a d'après (3. 11) $\overline{f}^+_{\mathfrak{N}}(x_0)>-\infty$ et $\underline{f}^+_{\mathfrak{N}}(x_0)<+\infty$, excepté les points d'un ensemble du type envisagé dans l'énoncé. Par raison de symétrie, on a encore $\overline{f}^-_{\mathfrak{N}}(x_0)>-\infty$ et $\underline{f}^-_{\mathfrak{N}}(x_0)<+\infty$, l'ensemble exceptionnel étant du même type. En faisant toujours abstraction d'un ensemble exceptionnel du type en question, $\overline{f}^+_{\mathfrak{N}}(x_0)<+\infty$ implique donc, en vertu de (3. 6), $\underline{f}^-_{\mathfrak{N}}(x_0)=$ $=\overline{f}^+_{\mathfrak{N}}(x_0)$, et par raison de symétrie, la même égalité s'ensuit de $\underline{f}^-_{\mathfrak{N}}(x_0)>-\infty$, tandis que $\overline{f}^-_{\mathfrak{N}}(x_0)<+\infty$ ou $\underline{f}^+_{\mathfrak{N}}(x_0)>-\infty$ entraîne $\overline{f}^-_{\mathfrak{N}}(x_0)=\underline{f}^+_{\mathfrak{N}}(x_0)$. On peut encore supposer d'après (2. 3) que $x_0 \in U_{\mathfrak{N}}$, et alors, au cas où tous les quatre nombres dérivés généralisés sont finis, on a en vertu de (2. 17)

$$\overline{f}^+_{\mathfrak{N}}(x_0)=\underline{f}^-_{\mathfrak{N}}(x_0)\leqq\overline{f}^-_{\mathfrak{N}}(x_0)=\underline{f}^+_{\mathfrak{N}}(x_0)\leqq\overline{f}^+_{\mathfrak{N}}(x_0),$$

ce qui termine la démonstration.

Il faut avouer que, pour certains choix de la famille $\mathfrak{N}$, il peut arriver que le théorème (3. 13) n'affirme rien; c'est le cas notamment si la droite R_1 se laisse décomposer en réunion d'un ensemble $\mathfrak{N}$ et d'un ensemble de mesure nulle. Considérons par exemple un ensemble N de première catégorie dont l'ensemble complémentaire Z est de mesure nulle, soit $g(x)$ une fonction monotone croissante dont la dérivée (ordinaire) égale $+\infty$ en tous les points de Z, soit $a \in Z, b = g(a)$ et posons

$$f(x) = \begin{cases} g(x) & \text{pour } x \in Z, \\ b & \text{pour } x \in N. \end{cases}$$

On voit sans peine qu'en désignant par $\mathfrak{N}$ la famille des ensembles de première catégorie, on a $\underline{f}^+_{\mathfrak{N}}(x) = +\infty$ pour $x \in Z$ et pour $x \in N$, $x > a$, et $\overline{f}^+_{\mathfrak{N}}(x) = -\infty$ pour $x \in N$, $x < a$, de sorte qu'aucune des conditions 1°) à 4°) de (3. 13) n'est remplie en aucun point. Il faut remarquer encore que, dans notre exemple, l'ensemble $U_{\mathfrak{N}}$ coïncide avec la droite entière.

4. Il s'agira dans ce paragraphe des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une fonction soit dérivable au sens généralisé en tous les points d'un ensemble donné, abstraction faite d'un ensemble exceptionnel convenable. Une généralisation des fonctions à variation bornée jouera un grand rôle dans ces conditions.

Convenons d'abord des notations suivantes:

$$\sup\nolimits^*_{\mathfrak{N}}(f; \alpha, \beta) = \max\,[f(\alpha),\ f(\beta),\ \sup_{\mathfrak{N}\atop \alpha<x<\beta} f(x)], \tag{4. 1}$$

$$\inf\nolimits^*_{\mathfrak{N}}(f; \alpha, \beta) = \min\,[f(\alpha),\ f(\beta),\ \inf_{\mathfrak{N}\atop \alpha<x<\beta} f(x)], \tag{4. 2}$$

$$\omega_{\mathfrak{N}}(f; \alpha, \beta) = \sup\nolimits^*_{\mathfrak{N}}(f; \alpha, \beta) - \inf\nolimits^*_{\mathfrak{N}}(f; \alpha, \beta). \tag{4. 3}$$

Il faut remarquer que la différence dans (4. 3) existe toujours, puisque, d'après (4. 1) et (4. 2), on a toujours

$$\sup\nolimits^*_{\mathfrak{N}}(f; \alpha, \beta) > -\infty, \quad \inf\nolimits^*_{\mathfrak{N}}(f; \alpha, \beta) < +\infty.$$

En posant $[\alpha, \beta] = I$, nous écrirons quelquefois $\sup^*_{\mathfrak{N}}(f; I)$, $\inf^*_{\mathfrak{N}}(f; I)$ et $\omega_{\mathfrak{N}}(f; I)$. On constate immédiatement d'après les définitions que les inégalités suivantes sont valables:

$$\inf\nolimits^*_{\mathfrak{N}}(f; \alpha, \beta) \leqq f(\alpha), f(\beta) \leqq \sup\nolimits^*_{\mathfrak{N}}(f; \alpha, \beta), \tag{4. 4}$$

donc

$$\omega_{\mathfrak{N}}(f; \alpha, \beta) \geqq |f(\beta) - f(\alpha)| \geqq 0. \tag{4. 5}$$

Nous dirons que la fonction $f(x)$ est à variation bornée sous négligence des ensembles $\mathfrak{N}$ sur l'ensemble E, ou brièvement qu'elle est $(VB_{\mathfrak{N}})$ sur E, si une constante K existe telle que l'on a

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_{\mathfrak{N}}(f; I_i) \leqq K,$$

toutefois que les intervalles I_i n'empiètent pas les uns sur les autres et que leurs extrémités appartiennent à E. On dira que $f(x)$ est à variation bornée généralisée sous négligence des ensembles $\mathfrak{N}$ sur E, ou qu'elle est $(VBG_{\mathfrak{N}})$ sur E, si l'on a une décomposition $E = \sum_{i=1}^{\infty} E_i$ telle que $f(x)$ est $(VB_{\mathfrak{N}})$ sur chacun des ensembles E_i.

Il est évident que si la famille $\mathfrak{N}$ ne contient que l'ensemble vide, $\sup^*_{\mathfrak{N}}(f; I)$, $\inf^*_{\mathfrak{N}}(f; I)$ et $\omega_{\mathfrak{N}}(f; I)$ coïncident respectivement avec les bornes supérieure et inférieure et l'oscillation (au sens classique) de la fonction $f(x)$ dans l'intervalle fermé I, tandis que les fonctions $(VB_{\mathfrak{N}})$ ou $(VBG_{\mathfrak{N}})$ sur un ensemble E sont identiques aux fonctions (VB_*) ou (VBG_*) selon le cas[5]).

Les inégalités (2. 7) entraînent évidemment que, si $\mathfrak{N}' \subset \mathfrak{N}$ est une seconde famille héréditaire et σ-additive, on a

$$\sup^*_{\mathfrak{N}}(f; I) \leqq \sup^*_{\mathfrak{N}'}(f; I), \quad \inf^*_{\mathfrak{N}}(f; I) \geqq \inf^*_{\mathfrak{N}'}(f; I), \tag{4.6}$$

donc

$$\omega_{\mathfrak{N}}(f; I) \leqq \omega_{\mathfrak{N}'}(f; I). \tag{4.7}$$

On conclut des relations (2.9) à (2. 12) que

$$\sup^*_{\mathfrak{N}}(f+g; I) \leqq \sup^*_{\mathfrak{N}}(f; I) + \sup^*_{\mathfrak{N}}(g; I), \tag{4.8}$$

$$\inf^*_{\mathfrak{N}}(f+g; I) \geqq \inf^*_{\mathfrak{N}}(f; I) + \inf^*_{\mathfrak{N}}(g; I), \tag{4.9}$$

$$\omega_{\mathfrak{N}}(f+g; I) \leqq \omega_{\mathfrak{N}}(f; I) + \omega_{\mathfrak{N}}(g; I), \tag{4.10}$$

$$\sup^*_{\mathfrak{N}}(cf; I) = c\cdot\sup^*_{\mathfrak{N}}(f; I), \quad \inf^*_{\mathfrak{N}}(cf; I) = c\cdot\inf^*_{\mathfrak{N}}(f; I) \tag{4.11}$$

pour $c > 0$,

$$\sup^*_{\mathfrak{N}}(-f; I) = -\inf^*_{\mathfrak{N}}(f; I), \tag{4.12}$$

$$\omega_{\mathfrak{N}}(cf; I) = |c|\cdot\omega_{\mathfrak{N}}(f; I). \tag{4.13}$$

Il s'ensuit de la définition que, $f(x)$ étant $(VB_{\mathfrak{N}})$ ou $(VBG_{\mathfrak{N}})$ sur E, elle l'est sur tout ensemble $E' \subset E$. L'inégalité (4. 7) a pour conséquence que, si $f(x)$ est $(VB_{\mathfrak{N}'})$ ou $(VBG_{\mathfrak{N}'})$ sur E et si l'on a $\mathfrak{N}' \subset \mathfrak{N}$, $f(x)$ est $(VB_{\mathfrak{N}})$ ou $(VBG_{\mathfrak{N}})$ sur E, selon le cas. (4. 10) et (4. 13) entraînent enfin que, $f(x)$ et $g(x)$ étant $(VB_{\mathfrak{N}})$ ou $(VBG_{\mathfrak{N}})$ sur E, $c_1 f(x) + c_2 g(x)$ l'est aussi.

Nous allons démontrer la généralisation suivante du théorème de DENJOY—LUSIN sur la dérivabilité presque partout des fonctions (VBG_*)[6]):

(4. 14) *Si la fonction $f(x)$ est $(VBG_{\mathfrak{N}})$ sur l'ensemble E, on a une décomposition $E = E_0 + N + Z$, où $N \in \mathfrak{N}$, $|Z| = 0$ et $f'_{\mathfrak{N}}(x)$ existe et est fini en tous les points de E_0.*

Démonstration. On peut évidemment supposer que l'ensemble E est borné: $E \subset [a, b]$, et que $f(x)$ est $(VB_{\mathfrak{N}})$ sur E. Posons alors

$$M(x) = \sup \sum_{i=1}^{n} \omega_{\mathfrak{N}}(f; I_i),$$

en considérant toutes les suites finies d'intervalles I_i non empiétants et dont les extrémités appartiennent à $E\cdot[a, x]$. La fonction $M(x)$ est finie et mono-

---

5) Cf. [5], p. 228.

6) Cf. [5], p. 230.

tone non-décroissante dans l'intervalle $[a, b]$, et on a pour $\alpha, \beta \in E$

$$\omega_{\mathfrak{N}}(f; \alpha, \beta) \leqq M(\beta) - M(\alpha), \tag{4.15}$$

puisqu'on peut ajouter le terme $\omega_{\mathfrak{N}}(f; \alpha, \beta)$ à toute somme figurant dans la définition de $M(\alpha)$, pour en obtenir une somme figurant dans la définition de $M(\beta)$.

Désignons par E^* l'ensemble des points de E qui appartiennent à $U_{\mathfrak{N}}$, qui sont points de densité extérieure de E et en lesquels la fonction $M(x)$ est dérivable. D'après (2.3) et en vertu des théorèmes classiques, on a $E = E^* + N_1 + Z_1$, $N_1 \in \mathfrak{N}$, $|Z_1| = 0$.

Considérons un point quelconque $x_0 \in E^*$ et choisissons un nombre $\delta > 0$ tel que l'inégalité $x_0 < x < x_0 + \delta$ implique l'existence d'un $\xi \in E$ situé entre x et $x + \frac{1}{2}(x - x_0)$ et que celle $x_0 < x < x_0 + 2\delta$ entraîne

$$M(x) - M(x_0) < (M'(x_0) + 1)(x - x_0) = C(x - x_0). \tag{4.16}$$

x_0 étant point de densité extérieure de E et $M(x)$ étant dérivable en x_0, un $\delta > 0$ de ce type existe toujours. Posons

$$\alpha_n = x_0 + \frac{\delta}{2^n} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots), \quad \alpha_n < \xi_n < \alpha_n + \frac{\delta}{2^{n+1}} < x_0 + 2\delta, \quad \xi_n \in E.$$

On aura

$$M(\xi_n) - M(x_0) < C(\xi_n - x_0) < C\frac{\delta}{2^{n-1}},$$

donc, x_0 et ξ_n appartenant à E, d'après (4.15)

$$\omega_{\mathfrak{N}}(f; x_0, \xi_n) < C\frac{\delta}{2^{n-1}}. \tag{4.17}$$

La relation $x_0 \in E^* \subset U_{\mathfrak{N}}$ entraîne encore $(x_0, \xi_n) \notin \mathfrak{N}$, on a par conséquent en vertu de (2.8) et (4.1) à (4.4)

$$\begin{aligned} f(x_0) - \omega_{\mathfrak{N}}(f; x_0, \xi_n) &\leqq \inf{}^*_{\mathfrak{N}}(f; x_0, \xi_n) \leqq \inf_{\mathfrak{N}\, x_0 < x < \xi_n} f(x) \leqq \\ &\leqq \sup_{\mathfrak{N}\, x_0 < x < \xi_n} f(x) \leqq \sup{}^*_{\mathfrak{N}}(f; x_0, \xi_n) \leqq f(x_0) + \omega_{\mathfrak{N}}(f; x_0, \xi_n). \end{aligned}$$

En tenant compte de (4.17), on en tire

$$\underset{x}{E}\left[f(x) - f(x_0) > C\frac{\delta}{2^{n-1}},\ x_0 < x < \xi_n\right] \in \mathfrak{N},$$

$$\underset{x}{E}\left[f(x) - f(x_0) < -C\frac{\delta}{2^{n-1}},\ x_0 < x < \xi_n\right] \in \mathfrak{N},$$

donc

$$\underset{x}{E}\left[|f(x) - f(x_0)| > C\frac{\delta}{2^{n-1}},\ x_0 < x < \xi_n\right] \in \mathfrak{N}.$$

A plus forte raison, on aura pour $n=0,1,2,\ldots$

$$\underset{x}{E}\left[\left|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right|>4C,\ \alpha_{n+1}\leqq x<\alpha_n\right]\subset$$

$$\subset\underset{x}{E}\left[|f(x)-f(x_0)|>4C\frac{\delta}{2^{n+1}},\ \alpha_{n+1}<x<\alpha_n\right]\subset$$

$$\subset\underset{x}{E}\left[|f(x)-f(x_0)|>C\frac{\delta}{2^{n-1}},\ x_0<x<\xi_n\right]\in\mathfrak{N},$$

et par conséquent, eu égard à (2. 2),

$$\underset{x}{E}\left[\left|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right|>4C,\ x_0<x<x_0+\delta\right]\in\mathfrak{N}.$$

On a donc

$$|\bar{f}_{\mathfrak{N}}^{+}(x_0)|\leqq 4C,\ |\underline{f}_{\mathfrak{N}}^{+}(x_0)|\leqq 4C.$$

x_0 étant un point quelconque de E^*, on en conclut d'après le théorème (3. 13) que $E^*=E_0+N_2+Z_2$, où $N_2\in\mathfrak{N}$, $|Z_2|=0$ et $f'_{\mathfrak{N}}(x)$ existe et est fini en tous les points de E_0. En posant $N=N_1+N_2$, $Z=Z_1+Z_2$, on obtient la proposition à démontrer.

Les deux théorèmes qui vont suivre généralisent des théorèmes connus sur les nombres dérivés ordinaires[7]).

(4. 18) *Si on a* $\bar{f}_{\mathfrak{N}}^{+}(x)<+\infty$, $\bar{f}_{\mathfrak{N}}^{-}(x)<+\infty$ *pour* $x\in E\subset U_{\mathfrak{N}}$, *la fonction* $f(x)$ *est* $(VBG_{\mathfrak{N}})$ *sur* E.

Démonstration. Soit E_n $(n=1,2,3,\ldots)$ l'ensemble des $x\in E$ tels que $\bar{f}_{\mathfrak{N}}^{+}(x)<n$, $\bar{f}_{\mathfrak{N}}^{-}(x)<n$; soit E_{nm} $(m=1,2,3,\ldots)$ l'ensemble des $x\in E_n$ tels que

$$\underset{x}{E}\left[\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}>n,\ 0<|x-x_0|<\frac{1}{m}\right]\in\mathfrak{N};$$

et posons

$$E_{nmp}=E_{nm}\cdot\left[\frac{p}{m+1},\ \frac{p+1}{m+1}\right].$$

On a évidemment

$$E=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{p=-\infty}^{\infty}E_{nmp}.$$

Considérons deux points $\alpha\in E_{nmp}$ et $\beta\in E_{nmp}$, $\alpha<\beta$. On a

(4. 19) $$\underset{x}{E}[f(x)>f(\alpha)+n(x-\alpha),\ \alpha<x<\beta]\in\mathfrak{N},$$

(4. 20) $$\underset{x}{E}[f(x)<f(\beta)-n(\beta-x),\ \alpha<x<\beta]\in\mathfrak{N}.$$

D'après les relations $\alpha\in E_{nmp}\subset E\subset U_{\mathfrak{N}}$, on a $(\alpha,\beta)\notin\mathfrak{N}$, il existe donc un x_1

---

[7]) Cf. [5] pp. 234 et 235.

situé entre α et β pour lequel aucune des relations (4. 19) ni (4. 20) n'est remplie, c'est-à-dire que

$$f(x_1) \leqq f(\alpha) + n(x_1 - \alpha), \; f(x_1) \geqq f(\beta) - n(\beta - x_1),$$

d'où

$$f(\beta) \leqq f(\alpha) + n(\beta - \alpha), \; f(\alpha) \geqq f(\beta) - n(\beta - \alpha).$$

(4. 19) et (4. 20) ont encore pour conséquence que

$$\sup_{\substack{\mathfrak{N} \\ \alpha < x < \beta}} f(x) \leqq f(\alpha) + n(\beta - \alpha), \quad \inf_{\substack{\mathfrak{N} \\ \alpha < x < \beta}} f(x) \geqq f(\beta) - n(\beta - \alpha).$$

On a donc

$$\sup^*_{\mathfrak{N}}(f; \alpha, \beta) = \max [f(\alpha), f(\beta), \sup_{\substack{\mathfrak{N} \\ \alpha < x < \beta}} f(x)] \leqq f(\alpha) + n(\beta - \alpha),$$

$$\inf^*_{\mathfrak{N}}(f; \alpha, \beta) = \min [f(\alpha), f(\beta), \inf_{\substack{\mathfrak{N} \\ \alpha < x < \beta}} f(x)] \geqq f(\beta) - n(\beta - \alpha)$$

et

$$\omega_{\mathfrak{N}}(f; \alpha, \beta) \leqq f(\alpha) - f(\beta) + 2n(\beta - \alpha).$$

En prenant deux points $a \in E_{nmp}$, $b \in E_{nmp}$, $a < b$, on a pour $a = \alpha_0 < \alpha_1 < < \alpha_2 < \cdots < \alpha_n = b$, $\alpha_i \in E_{nmp}$

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_{\mathfrak{N}}(f; \alpha_{i-1}, \alpha_i) \leqq \sum_{i=1}^{n} [f(\alpha_{i-1}) - f(\alpha_i) + 2n(\alpha_i - \alpha_{i-1})] = f(a) - f(b) + 2n(b - a),$$

de sorte que $f(x)$ est $(VB_{\mathfrak{N}})$ sur l'ensemble $E_{nmp} \cdot [a, b]$ et $(VBG_{\mathfrak{N}})$ sur l'ensemble E_{nmp}, ce qui montre qu'elle l'est sur l'ensemble entier E.

(4. 20) *Si l'on a* $-\infty < \underline{f}^+_{\mathfrak{N}}(x) \leqq \bar{f}^+_{\mathfrak{N}}(x) < +\infty$ *pour* $x \in E$, *la fonction* $f(x)$ *est* $(VBG_{\mathfrak{N}})$ *sur* E.

Démonstration. L'hypothèse implique d'après (2. 8) que $E \subset U_{\mathfrak{N}}$. Soit E_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ l'ensemble des points $x \in E$ pour lesquels

$$-n < \underline{f}^+_{\mathfrak{N}}(x) \leqq \bar{f}^+_{\mathfrak{N}}(x) < n,$$

soit E_{nm} $(m = 1, 2, 3, \ldots)$ l'ensemble des points $x \in E_n$ tels que

$$\underset{x}{E}\left[\left|\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\right| > n, \; x_0 < x < x_0 + \frac{1}{m}\right] \in \mathfrak{N},$$

et posons $E_{nmp} = E_{nm} \cdot \left[\frac{p}{2m+1}, \frac{p+1}{2m+1}\right]$. On a évidemment

$$E = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{p=-\infty}^{\infty} E_{nmp}.$$

Considérons deux points $\alpha \in E_{nmp}$, $\beta \in E_{nmp}$, $\alpha < \beta$. On aura

$$\underset{x}{E}[|f(x) - f(\alpha)| > n(x - \alpha), \; \beta < x < \beta + (\beta - \alpha)] \subset \tag{4. 21}$$

$$\subset \underset{x}{E}[|f(x) - f(\alpha)| > n(x - \alpha), \; \alpha < x < 2\beta - \alpha] \in \mathfrak{N},$$

puisque $(2\beta-\alpha)-\alpha=2(\beta-\alpha)\leqq\frac{2}{2m+1}<\frac{1}{m}$; on aura pareillement

$$\underset{x}{E}[|f(x)-f(\beta)|>n(x-\beta),\ \beta<x<\beta+(\beta-\alpha)]\in\mathfrak{N}.$$

Les relations $\beta\in E_{nmp}\subset E\subset U_{\mathfrak{N}}$ impliquent $(\beta,2\beta-\alpha)\notin\mathfrak{N}$, il existe donc un x_1 situé entre β et $2\beta-\alpha$ et tel que

$$|f(x_1)-f(\alpha)|\leqq n(x_1-\alpha),\ |f(x_1)-f(\beta)|\leqq n(x_1-\beta),$$

par conséquent que

$$|f(\beta)-f(\alpha)|\leqq n[(x_1-\alpha)+(x_1-\beta)]<n[2(\beta-\alpha)+(\beta-\alpha)]=3n(\beta-\alpha).$$

(4. 21) entraîne encore que

$$\sup_{\mathfrak{N}\atop \alpha<x<\beta} f(x)\leqq f(\alpha)+n(\beta-\alpha),\quad \inf_{\mathfrak{N}\atop \alpha<x<\beta} f(x)\geqq f(\alpha)-n(\beta-\alpha),$$

donc que

$$\sup{}^*_{\mathfrak{N}}(f;\alpha,\beta)\leqq f(\alpha)+3n(\beta-\alpha),$$
$$\inf{}^*_{\mathfrak{N}}(f;\alpha,\beta)\geqq f(\alpha)-3n(\beta-\alpha)$$

et que

$$\omega_{\mathfrak{N}}(f;\alpha,\beta)\leqq 6n(\beta-\alpha).$$

Cette inégalité a pour conséquence que $f(x)$ est $(VB_{\mathfrak{N}})$ sur E_{nmp}, donc qu'elle est $(VBG_{\mathfrak{N}})$ sur E, ce qu'il fallait démontrer[8]).

Le théorème suivant est la conséquence de (4. 14) et de (4. 20):

(4. 22) *Les deux propositions suivantes sont équivalentes:*

a) $E=E_0+N_0+Z_0$, *où* $N_0\in\mathfrak{N}$, $|Z_0|=0$ *et* $f'_{\mathfrak{N}}(x)$ *existe et est fini en tous les points de* E_0;

b) $E=E_1+N_1+Z_1$, *où* $N_1\in\mathfrak{N}$, $|Z_1|=0$ *et* $f(x)$ *est* $(VBG_{\mathfrak{N}})$ *sur* E_1.

Tout comme nous l'avons remarqué à propos du théorème (3. 13), pour certains choix de la famille $\mathfrak{N}$, les théorèmes (4. 14) et (4. 20) peuvent devenir banaux, les ensembles exceptionnels qui y figurent pouvant coïncider avec la droite entière. Les propositions qui vont suivre ont pour but d'éliminer cet inconvénient en réduisant l'ensemble exceptionnel en un ensemle de mesure nulle, en faisant naturellement quelques restrictions dans les hypothèses.

---

[8]) Nous avons démontré un peu plus que (4. 20), à savoir que les hypothèses de (4. 20) impliquent l'existence d'une décomposition $E=\sum_{i=1}^{\infty}E_i$ telle que $f(x)$ satisfait sur chacun des ensembles E_i à une condition de Lipschitz généralisée, c'est-à-dire qu'on a $\omega_{\mathfrak{N}}(f;\alpha,\beta)\leqq L_i(\beta-\alpha)$ pour $\alpha,\beta\in E_i$ et pour une constante L_i. Ce n'est que cette proposition plus précise qui généralise le théorème cité sous [7]).

(4. 23) *Si $f(x)$ est $(VB_{\mathfrak{N}})$ sur l'ensemble fermé $E \subset U_{\mathfrak{N}}$, la dérivée généralisée $f'_{\mathfrak{N}}(x)$ existe et est finie presque partout sur l'ensemble E.*

Démonstration. Soient $I_k = (a_k, b_k)$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ les intervalles contigus à E et posons

$$M_k = \sup_{x \in I_k}{}_{\mathfrak{N}} f(x), \quad m_k = \inf_{x \in I_k}{}_{\mathfrak{N}} f(x).$$

Considérons les fonctions $M(x)$ et $m(x)$, définies sur le plus petit intervalle I (fini ou infini, mais toujours fermé) contenant E, par les formules

$$M(x) = \begin{cases} f(x) & \text{pour } x \in E, \\ M_k & \text{pour } x \in I_k, \end{cases} \qquad m(x) = \begin{cases} f(x) & \text{pour } x \in E, \\ m_k & \text{pour } x \in I_k. \end{cases}$$

Les fonctions $M(x)$ et $m(x)$ sont à variation bornée sur I. Considérons en effet une suite finie d'intervalles (α_i, β_i) $(i = 1, \ldots, n)$ tels que $\alpha_i \in I$, $\beta_i \in I$, $\beta_i \leqq \alpha_{i+1}$, et évaluons par exemple la somme $\sum_{i=1}^{n} |M(\beta_i) - M(\alpha_i)|$. Si α_i et β_i font partie d'un même intervalle I_k, on a $M(\beta_i) - M(\alpha_i) = 0$. Si l'on a $\alpha_i \in E$, $\beta_i \in E$, il s'ensuit

$$|M(\beta_i) - M(\alpha_i)| = |f(\beta_i) - f(\alpha_i)| \leqq \omega_{\mathfrak{N}}(f; \alpha_i, \beta_i).$$

Si l'un des points α_i et β_i appartient à E et l'autre à $I - E$, disons, si $\alpha_i \in E$ et $\beta_i \in I_k$, on a

$$\begin{aligned} |M(\beta_i) - M(\alpha_i)| = \Big| \sup_{x \in I_k}{}_{\mathfrak{N}} f(x) - f(\alpha_i) \Big| \leqq |f(a_k) - f(\alpha_i)| + \\ + \omega_{\mathfrak{N}}(f; a_k, b_k) \leqq \omega_{\mathfrak{N}}(f; \alpha_i, a_k) + \omega_{\mathfrak{N}}(f; a_k, b_k). \end{aligned}$$

Enfin, si l'on a $\alpha_i \in I_k$, $\beta_i \in I_l$, $k \neq l$, on trouve

$$\begin{aligned} |M(\beta_i) - M(\alpha_i)| \leqq |f(a_l) - f(b_k)| + \omega_{\mathfrak{N}}(f; a_k, b_k) + \omega_{\mathfrak{N}}(f; a_l, b_l) \leqq \\ \leqq \omega_{\mathfrak{N}}(f; a_k, b_k) + \omega_{\mathfrak{N}}(f; b_k, a_l) + \omega_{\mathfrak{N}}(f; a_l, b_l). \end{aligned}$$

En additionnant toutes ces inégalités, on obtient une inégalité de la forme

$$\sum_{i=1}^{n} |M(\beta_i) - M(\alpha_i)| \leqq \sum_{l=1}^{m} p_l \, \omega_{\mathfrak{N}}(f; I_l),$$

où les intervalles I_l n'empiètent pas les uns sur les autres, leurs extrémités appartiennent à E et le coefficient p_l ne peut prendre que les valeurs 1 ou 2. La fonction $f(x)$ étant $(VB_{\mathfrak{N}})$ sur E, le second membre reste borné, ce qui démontre la proposition.

Ceci établi, on en conclut que $M(x)$ et $m(x)$ sont dérivables (au sens ordinaire) presque partout sur E. Soit E_0 l'ensemble des points de E où $M'(x)$ et $m'(x)$ existent et sont finis et qui sont points d'accumulation de E; on a $|E - E_0| = 0$. Considérons un point $x_0 \in E_0$. On a pour $y > M'(x_0)$ et pour des $\delta > 0$ suffisamment petits, vu l'égalité $M(x_0) = f(x_0)$,

$$\underset{x}{E}\left[\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} > y,\, x_0 < x < x_0+\delta\right] \subset$$

$$\subset \underset{x}{E}[M(x)-M(x_0) > y(x-x_0),\, x_0 < x < x_0+\delta] +$$

$$+ \underset{x}{E}[f(x) > M(x),\, x_0 < x < x_0+\delta] =$$

$$= \underset{x}{E}[M(x)-M(x_0) > y(x-x_0),\, x_0 < x < x_0+\delta] + \tag{4.24}$$

$$+ \sum_k [f(x) - M_k,\, x \in I_k \cdot (x_0, x_0+\delta)] \in \mathfrak{N}, \tag{4.25}$$

car l'ensemble (4. 24) est vide et les termes de (4. 25) appartiennent à $\mathfrak{N}$ par définition de M_k. Il s'ensuit que $\overline{f}_{\mathfrak{N}}^+(x_0) \leqq y$ et, $y > M'(x_0)$ étant arbitraire, que $\overline{f}_{\mathfrak{N}}^+(x_0) \leqq M'(x_0)$. Un raisonnement analogue fournit $\underline{f}_{\mathfrak{N}}^+(x_0) \geqq m'(x_0)$. Le point x_0 étant point d'accumulation de E et $M(x)$ coïncidant avec $m(x)$ sur E, on a $M'(x_0) = m'(x_0)$. D'après $x_0 \in E \subset U_{\mathfrak{N}}$, on a encore l'inégalité $\underline{f}_{\mathfrak{N}}^+(x_0) \leqq \overline{f}_{\mathfrak{N}}^+(x_0)$, de sorte que

$$\underline{f}_{\mathfrak{N}}^+(x_0) = \overline{f}_{\mathfrak{N}}^+(x_0) = M'(x_0) = m'(x_0).$$

On parvient de la même façon à l'égalité

$$\underline{f}_{\mathfrak{N}}^-(x_0) = \overline{f}_{\mathfrak{N}}^-(x_0) = M'(x_0) = m'(x_0),$$

ce qui démontre l'énoncé.

(4. 26) *Si $f(x)$ est $(VB_{\mathfrak{N}})$ sur l'ensemble mesurable $E \subset U_{\mathfrak{N}}$, $f'_{\mathfrak{N}}(x)$ existe et est fini presque partout sur E.*

Démonstration. On peut poser $E = Z + \sum_{i=1}^{\infty} E_i$, où $|Z| = 0$ et chacun des ensembles E_i est fermé, et appliquer (4. 23) à E_i.

(4. 27) *Si $f(x)$ est mesurable et $(VBG_{\mathfrak{N}})$ sur l'ensemble mesurable $E \subset U_{\mathfrak{N}}$, $f'_{\mathfrak{N}}(x)$ existe et est fini presque partout sur E.*

Démonstration. Posons $E = \sum_{i=1}^{\infty} E_i$, où $f(x)$ est $(VB_{\mathfrak{N}})$ sur chacun des ensembles E_i. D'après (4. 5), elle est alors (VB) sur E_i, il existe donc une fonction $f_i(x)$ qui est à variation bornée sur toute la droite et qui coïncide avec $f(x)$ sur E_i[9]). Désignons par E_i' l'ensemble formé par les point d'accumulation bilatéraux de E_i et par E_i'' l'ensemble $\underset{x}{E}[f(x) = f_i(x),\, x \in E]$. L'ensemble E_i' étant mesurable (puisqu'il ne diffère de la fermeture de E_i qu'en un ensemble dénombrable) et E_i'' l'étant évidemment, il en est de même pour l'ensemble $S_i' = E_i' E_i''$. D'après $E_i \subset E_i''$ et puisque $E_i - E_i'$ est dénombrable,

[9]) Cf. [5], p. 221.

l'ensemble $E_i - S_i' = (E_i - E_i') + (E_i - E_i'') = E_i - E_i'$ est dénombrable, donc $S_i = E_i + S_i' = (E_i - S_i') + S_i'$ est mesurable. On a évidemment $E = \sum_{i=1}^{\infty} S_i$, de sorte que (4. 26) pourra être appliqué à S_i et fournira l'énoncé dès que nous pouvons démontrer que $f(x)$ est $(VB_{\mathfrak{R}})$ sur S_i.

Considérons à ce but une suite finie (a_k, b_k) $(k = 1, \ldots, n)$ d'intervalles non empiétants et ayant des extrémités qui appartiennent à S_i, et choisissons des points $\alpha_k, \beta_k \in E_i$ de façon à ce que $\alpha_k \leqq a_k < b_k \leqq \beta_k$ et que ni les intervalles (α_k, β_k) correspondant aux indices k pairs, ni ceux correspondant aux indices k impairs, n'empiètent les uns sur les autres, ce qui est possible d'après $S_i \subset E_i + E_i'$. On a alors

$$\sup_{a_k < x < b_k}{}_{\mathfrak{R}} f(x) \leqq \sup_{\alpha_k < x < \beta_k}{}_{\mathfrak{R}} f(x) \leqq f(\alpha_k) + \omega_{\mathfrak{R}}(f; \alpha_k, \beta_k),$$

$$f(a_k) \leqq f(\alpha_k) + |f(a_k) - f(\alpha_k)|,$$

$$f(b_k) \leqq f(\alpha_k) + |f(b_k) - f(\alpha_k)|,$$

d'où

$$\sup\nolimits_{\mathfrak{R}}^{*}(f; a_k, b_k) \leqq f(\alpha_k) + \omega_{\mathfrak{R}}(f; \alpha_k, \beta_k) + |f(a_k) - f(\alpha_k)| + |f(b_k) - f(\alpha_k)|.$$

Un raisonnement analogue fournit

$$\inf\nolimits_{\mathfrak{R}}^{*}(f; a_k, b_k) \geqq f(\alpha_k) - \omega_{\mathfrak{R}}(f; \alpha_k, \beta_k) - |f(a_k) - f(\alpha_k)| - |f(b_k) - f(\alpha_k)|,$$

donc

$$(4.\,28) \quad \omega_{\mathfrak{R}}(f; a_k, b_k) \leqq 2\omega_{\mathfrak{R}}(f; \alpha_k, \beta_k) + 2|f(a_k) - f(\alpha_k)| + |f(b_k) - f(\alpha_k)|.$$

En additionnant les inégalités (4. 28) pour les indices k pairs et pour ceux impairs séparément, et en tenant compte de ce que $f(x)$ est $(VB_{\mathfrak{R}})$ sur E_i et (VB) sur $S_i \subset E_i''$, on constate que la somme $\sum_{k=1}^{n} \omega_{\mathfrak{R}}(f; a_k, b_k)$ demeure bornée, ce qui termine la démonstration.

Une conséquence immédiate de (4. 18) (ou de (4. 20)) et de (4. 27) se formule comme suit:

(4. 29) *$f(x)$ étant mesurable sur l'ensemble mesurable $E \subset U_{\mathfrak{R}}$, les deux propositions suivantes sont équivalentes:*

a) *$E = E_0 + Z$, où $|Z| = 0$ et $f(x)$ est $(VBG_{\mathfrak{R}})$ sur E_0;*

b) *$E = E_0' + Z'$, où $|Z'| = 0$ et $f_{\mathfrak{R}}'(x)$ existe et est fini partout sur E_0'.*

Remarquons encore qu'une analyse des démonstrations de (4. 23), (4. 26) et (4. 27) montre que, $f(x)$ étant mesurable et $(VBG_{\mathfrak{R}})$ sur $E \subset U_{\mathfrak{R}}$, on a une décomposition $E = Z + \sum_{i=1}^{\infty} E_i$, où $|Z| = 0$ et chacun des ensembles E_i est mesurable et tel que $f_{\mathfrak{R}}'(x)$ est égal, partout sur E_i, à la dérivée (ordinaire) de $f(x)$ relative à E_i. De là, on conclut en vertu de (4. 29) que

(4. 30) *$f(x)$ étant mesurable sur l'ensemble mesurable $E \subset U_{\mathfrak{N}}$, si $f'_{\mathfrak{N}}(x)$ existe et est fini presque partout sur E, on a presque partout sur E l'égalité $f'_{\mathfrak{N}}(x) = f'_{ap}(x)$.*

5. Dans ce dernier paragraphe, nous allons reprendre les idées et les méthodes de § 3, pour généraliser le théoréme de ROGER sur le contingent des ensembles dans l'espace, tout comme nous avons généralisé le théorème de KOLMOGOROFF et VERTCHENKO sur le contingent des ensembles plans, et pour en déduire par une modification de la méthode de SAKS une généralisation du théorème de HASLAM-JONES sur les différentielles extrêmes.

En conséquence des analogies entre les raisonnements du présent paragraphe et ceux de § 3, nous pouvons nous borner à énumérer les notions nécessaires et à énoncer les résultats qui s'y rattachent.

Considérons une famille $\mathfrak{M}$ héréditaire et σ-additive d'ensembles dans l'espace R_3. La demi-droite fermée L, issue du point $u \in R_3$, est appelée demi-droite tangente généralisée à un ensemble $E \subset R_3$, si l'on a pour tous les secteurs sphériques ouverts S, ayant u pour sommet et dont L passe par l'intérieur, $ES \notin \mathfrak{M}$. A l'aide de ces demi-droites tangentes généralisées, on définit $\text{contg}_{\mathfrak{M}}(u, E)$ de façon analogue que dans le plan.

En partant du théorème de ROGER[10]), on parvient par les mêmes méthodes que nous avons employées pour démontrer (3. 2), au théorème suivant:

(5. 1) *Pour tout ensemble $E \subset R_3$, on a une décomposition $E = E_1 + E_2 + E_3 + H + M$, où $\text{contg}_{\mathfrak{M}}(u, E) = R_3$ pour $u \in E_1$, $\text{contg}_{\mathfrak{M}}(u, E)$ égale un demi-espace fermé pour $u \in E_2$, $\text{contg}_{\mathfrak{M}}(u, E)$ se compose d'un plan pour $u \in E_3$, l'ensemble $E_2 + E_3 + H$ est la réunion d'une suite dénombrable d'ensembles de mesure 2-dimensionnelle de Hausdorff finie, l'ensemble H est de mesure 2-dimensionnelle de Hausdorff nulle, et on a $M \in \mathfrak{M}$. Si, pour tous les points u d'un ensemble $P \subset E$, $\text{contg}_{\mathfrak{M}}(u, E)$ n'a aucun point commun avec un demi-espace ouvert, délimité par un plan parallèle à une droite donnée D, on a $P = P_1 + M_1$, où $M_1 \in \mathfrak{M}$ et la projection orthogonale de P_1 sur un plan perpendiculaire à D est de mesure plane nulle.*

Considérons ensuite une famille $\mathfrak{N}$ héréditaire et σ-additive d'ensembles du plan R_2, désignons les points de R_2 par $(x, y) = t$, et la distance des points t et t' par $|t - t'|$.

Nous définissons l'ensemble $U_{\mathfrak{N}}$ comme l'ensemble des points $t \in R_2$ tels que, pour tout secteur circulaire ouvert S ayant t pour sommet, on ait $S \notin \mathfrak{N}$. En s'appuyant sur le théorème (3. 2), on trouve le théorème suivant[11]):

(5. 2) *Si à tout point t d'un ensemble $E \subset R_2$ correspond un secteur circulaire ouvert S_t, ayant t pour sommet et tel que $ES_t \in \mathfrak{N}$, on a $E = N + K$,*

---

10) Cf. [7] et [5], pp. 304 à 309.

11) Cf. [8], th. (2. 4).

où $N \in \mathfrak{N}$ *et l'ensemble* K *peut être couvert avec une suite dénombrable de courbes rectifiables.*

D'où l'on parvient à l'analogue suivant de (2. 3):

(5. 3) *On a* $R_2 - U_{\mathfrak{N}} = N + K$, *où* $N \in \mathfrak{N}$ *et l'ensemble* K *peut être couvert avec une suite dénombrable de courbes rectifiables.*

Un ensemble $E \subset R_2$ et une fonction $f(x, y) = f(t)$, définie pour $t \in R_2$, étant donnés, on définit, comme les notions analogues dans § 2, $\sup_{\mathfrak{N}, t \in E} f(t)$ et $\inf_{\mathfrak{N}, t \in E} f(t)$ et on constate qu'elles jouissent des propriétés analogues à celles (2. 6) à (2. 12).

Considérons ensuite un domaine angulaire ouvert $A \subset R_2$, délimité par deux demi-droites issues du point t_0, désignons par A_h le secteur circulaire ouvert $\underset{t}{E}[t \in A, 0 < |t - t_0| < h]$ et introduisons les notations suivantes:

$$\overline{\lim_{\mathfrak{N}}}_{\substack{t \to t_0 \\ t \in A}} f(t) = \lim_{h \to 0+} \sup_{\mathfrak{N}, t \in A_h} f(t),$$

$$\underline{\lim_{\mathfrak{N}}}_{\substack{t \to t_0 \\ t \in A}} f(t) = \lim_{h \to 0+} \inf_{\mathfrak{N}, t \in A_h} f(t);$$

les mêmes limites correspondant à $A = R_2 - \{t_0\}$ seront désignées par $\overline{\lim_{\mathfrak{N}}}_{t \to t_0} f(t)$ et $\underline{\lim_{\mathfrak{N}}}_{t \to t_0} f(t)$. Si ces deux limites extrêmes sont égales, on désigne leur valeur commune par $\lim_{\mathfrak{N}, \substack{t \to t_0 \\ t \in A}} f(t)$ ou $\lim_{\mathfrak{N}, t \to t_0} f(t)$ selon le cas. On établit sans peine des propositions analogues à celles (2. 15) à (2. 20).

On démontre la proposition suivante, analogue à (3. 5), par un raisonnement semblable à la démonstration de (3. 5) et en s'appuyant sur le théorème (3. 1) de KOLMOGOROFF et VERTCHENKO[12]):

(5. 4) *Si à tout point* t_0 *d'un ensemble* $E \subset R_2$ *correspond un domaine angulaire ouvert* A_{t_0}, *ayant* t_0 *pour sommet et tel que*

$$\overline{\lim_{\mathfrak{N}}}_{\substack{t \to t_0 \\ t \in A_{t_0}}} f(t) \neq \overline{\lim_{\mathfrak{N}}}_{t \to t_0} f(t) \quad \text{ou} \quad \underline{\lim_{\mathfrak{N}}}_{\substack{t \to t_0 \\ t \in A_{t_0}}} f(t) \neq \underline{\lim_{\mathfrak{N}}}_{t \to t_0} f(t),$$

on peut couvrir l'ensemble E *avec une suite dénombrable de courbes rectifiables.*

Désignons par B l'image de la fonction $f(x, y)$, c'est-à-dire posons

$$B = \underset{(x, y, z)}{E} [z = f(x, y)],$$

et désignons par $\mathfrak{M}$ la famille (évidemment héréditaire et σ-additive) des sous-ensembles de B dont la projection sur le plan (x, y) appartient à $\mathfrak{N}$.

[12]) Cf. [5], p. 310.

Appelons le couple de nombres finis $\{A, B\}$ différentielle supérieure généralisée[13]) au point $t_0 = (x_0, y_0)$ de la fonction $f(x, y)$, si, en posant $z_0 = f(x_0, y_0)$ et $u_0 = (x_0, y_0, z_0)$, le plan

(5. 5) $$z - z_0 = A(x - x_0) + B(y - y_0)$$

appartient à $\mathrm{contg}_{\mathfrak{M}}(u_0, B)$ et si

$$\overline{\lim_{t \to t_0}}{}_{\mathfrak{N}} \frac{f(x, y) - f(x_0, y_0) - A(x - x_0) - B(y - y_0)}{|t - t_0|} \leqq 0.$$

Un raisonnement semblable à celui des démonstrations de (3. 7) et (3. 10) montre que ces deux conditions sont équivalentes aux suivantes:

a) $\overline{\lim_{t \to t_0}}{}_{\mathfrak{N}} f(t) \leqq f(t_0)$,

b) $\mathrm{contg}_{\mathfrak{M}}(u_0, B)$ n'a aucun point commun avec le demi-espace ouvert $z - z_0 > A(x - x_0) + B(y - y_0)$,

c) le plan (5. 5) appartient à $\mathrm{contg}_{\mathfrak{M}}(u_0, B)$.

La définition d'une différentielle inférieure généralisée étant semblable, on constate que si $f(x, y)$ possède au point $t_0 \in U_{\mathfrak{N}}$ en même temps une différentielle supérieure et une différentielle inférieure généralisées, ces deux différentielles extrêmes généralisées sont égales et elles fournissent une différentielle généralisée à $f(x, y)$ au point t_0, c'est-à-dire qu'on a

$$\lim_{t \to t_0}{}_{\mathfrak{N}} \frac{f(x, y) - f(x_0, y_0) - A(x - x_0) - B(y - y_0)}{|t - t_0|} = 0.$$

En s'appuyant sur les résultats énumérés, on déduit du théorème (5. 1), par une modification légère de la méthode due à S. SAKS[14]), la généralisation suivante du théorème de HASLAM-JONES[15]):

(5. 6) *Si à tout point $t_0 \in E$ correspond un domaine angulaire ouvert A_{t_0} ayant t_0 pour sommet et tel que*

$$\underline{\lim_{\substack{t \to t_0 \\ t \in A_{t_0}}}}{}_{\mathfrak{N}} \frac{|f(t) - f(t_0)|}{|t - t_0|} = +\infty,$$

on a $E = N + Z$, où $N \in \mathfrak{N}$ et $|Z| = 0$. Si à tout point $t_0 \in E'$ correspond un A_{t_0} ayant t_0 pour sommet et tel que

$$\overline{\lim_{\substack{t \to t_0 \\ t \in A_{t_0}}}}{}_{\mathfrak{N}} \frac{f(t) - f(t_0)}{|t - t_0|} < +\infty,$$

on a $E' = E_1' + N' + Z'$, où $N' \in \mathfrak{N}$, $|Z'| = 0$ et $f(x, y)$ possède une différentielle supérieure généralisée en tous les points de E_1'. Si à tout point $t_0 \in E''$ cor-

---

[13]) Cf. [9] et [5], p. 309.

[14]) Cf. [5], pp. 311 et 312.

[15]) Cf. [9].

respondent deux domaines angulaires ouverts A_{t_0} et A'_{t_0}, ayant t_0 pour sommet et tels que

$$\overline{\lim_{\substack{t\to t_0\\ t\in A_{t_0}}}}{}_{\mathfrak{N}} \frac{f(t)-f(t_0)}{|t-t_0|} < +\infty, \qquad \underline{\lim_{\substack{t\to t_0\\ t\in A'_{t_0}}}}{}_{\mathfrak{N}} \frac{f(t)-f(t_0)}{|t-t_0|} > -\infty,$$

on a $E''=E_1''+N''+Z''$, où $N''\in\mathfrak{N}$, $|Z''|=0$ et $f(x,y)$ possède une différentielle généralisée en tous les points de E_1''.

Ouvrages cités.

[1] Á. Császár, Sur la structure des ensembles de niveau des fonctions réelles à une variable, *Colloquium Math.* (à paraître).

[2] Á. Császár, Sur les fonctions localement monotones au sens généralisé, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* (à paraître).

[3] U. S. Haslam-Jones, Tangential properties of a plane set of points, *Quarterly Journal of Math., Oxford Ser.*, **7** (1936), 116—123.

[4] S. Saks, Sur quelques propriétés métriques d'ensembles, *Fundamenta Math.*, **26** (1936), 234—240.

[5] S. Saks, *Theory of the Integral* (Warszawa—Lwów, 1937).

[6] A. Kolmogoroff et J. Vertchenko, Über Unstetigkeitspunkte von Funktionen zweier Veränderlichen, *C. R. Acad. Sci. URSS*, **1** (1934), 1—3, 105—107; Weitere Untersuchungen über Unstetigkeitspunkte von Funktionen zweier Veränderlichen, *ibid.*, **4** (1934), 361—364.

[7] F. Roger, Sur la relation entre les propriétés tangentielles et métriques des ensembles cartésiens, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **201** (1935), 871—873.

[8] Á. Császár, Sur la structure des ensembles de niveau des fonctions réelles à deux variables, *ces Acta*, **15** (1954), 183—202.

[9] U. S. Haslam-Jones, Derivate planes and tangent planes of a measurable function, *Quarterly Journal of Math., Oxford Ser.*, **3** (1932), 120—132.

(Reçu le 30 avril 1955)