Sur la structure des ensembles de niveau des fonctions réelles à deux variables.

Par ÁKOS CSÁSZÁR à Budapest.

1. Soit $f(x, y)$ une fonction réelle à deux variables réelles, définie et ayant de valeurs finies dans le plan entier (x, y). On considère en Analyse classique des types d'allure de cette fonction au voisinage d'un point (x_0, y_0) qui peuvent être caractérisés par la structure locale des ensembles de niveau

$$\underset{x,\,y}{E}[f(x,y)<f(x_0,y_0)],\quad \underset{x,\,y}{E}[f(x,y)\leqq f(x_0,y_0)],$$
$$\underset{x,\,y}{E}[f(x,y)>f(x_0,y_0)],\quad \underset{x,\,y}{E}[f(x,y)\geqq f(x_0,y_0)]$$

de cette fonction, comme p. ex. les maxima et minima (au sens strict ou au sens large). Nous allons étudier dans cet article deux séries de types d'allure qui sont caractérisés par la structure locale des ensembles de niveau en question dans un domaine angulaire issu du point (x_0, y_0). Le but de cette note est d'examiner les différentes combinaisons de ces types d'allure qui peuvent se présenter dans deux domaines angulaires issus d'un même point et d'établir une série de théorèmes qui prouvent que quelques-unes parmi ces combinaisons sont exceptionnelles en certain sens.

De problèmes analogues pour les fonctions à une variable ont été traités dans un autre article de l'auteur [1]. La généralisation des notions introduites et des résultats obtenus à des fonctions à plusieurs variables ne semble imposer que des difficultés peu essentielles et de nature géométrique.

2. On va employer dans ce qui suit, pour simplifier la notation, une seule variable complexe $z = x + iy$ au lieu des deux variables réelles x et y. On désignera par $S(z_0, r_0, \alpha, \beta)$ l'ensemble des points

$$z = z_0 + re^{i\varphi},\quad 0 < r < r_0,\quad \alpha < \varphi < \beta.$$

Considérons une famille $\mathfrak{N}$ de sous-ensembles du plan complexe qui satisfait aux conditions suivantes:

(2. 1) $\qquad$ si $A \in \mathfrak{N}$ et si $B \subset A$, on a $B \in \mathfrak{N}$;

(2. 2) $\qquad$ si $A_k \in \mathfrak{N}$ $(k = 1, 2, \ldots)$, on a $\sum_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathfrak{N}$.

On pourra donner le rôle de la famille $\mathfrak{N}$ p. ex. à la famille des ensembles dénombrables, à celle des ensembles de mesure (plane) nulle, à celle des ensembles de mesure linéaire nulle, à celle des ensembles qui peuvent être couverts avec une suite d'ensembles de mesure linéaire finie, à la famille qui ne contient que l'ensemble vide, etc.

Convenons des définitions suivantes:

a) la fonction $f(z)$ a la propriété $C_{\alpha\beta}(\mathfrak{N})$ au point z_0, si

$$\underset{z}{E}[f(z) \leqq f(z_0), z \in S(z_0, r, \alpha, \beta)] \in \mathfrak{N}$$

pour un nombre $r > 0$ convenable;

b) $f(z)$ a la propriété $C^*_{\alpha\beta}(\mathfrak{N})$ au point z_0, si

$$\underset{z}{E}[f(z) < f(z_0), \ z \in S(z_0, r, \alpha, \beta)] \in \mathfrak{N}$$

pour un nombre $r > 0$ convenable, mais on a pour tout $r > 0$

$$\underset{z}{E}[f(z) \leqq f(z_0), z \in S(z_0, r, \alpha, \beta)] \notin \mathfrak{N};$$

c) $f(z)$ a la propriété $O_{\alpha\beta}(\mathfrak{N})$ au point z_0, si l'on a pour tout nombre $r > 0$

$$\underset{z}{E}[f(z) < f(z_0), z \in S(z_0, r, \alpha, \beta)] \notin \mathfrak{N}$$

et

$$\underset{z}{E}[f(z) > f(z_0), z \in S(z_0, r, \alpha, \beta)] \notin \mathfrak{N}.$$

On définit les propriétés $D_{\alpha\beta}(\mathfrak{N})$ et $D^*_{\alpha\beta}(\mathfrak{N})$ en remplaçant dans les définitions *a*) et *b*) les inégalités $f(z) \leqq f(z_0)$ et $f(z) < f(z_0)$ par celles $f(z) \geqq f(z_0)$ et $f(z) > f(z_0)$ respectivement.

On s'appuyera dans ce qui suit sur le théorème suivant, faisant partie du théorème de KOLMOGOROFF et VERTCHENKO sur le contingent des ensembles plans [2]:

(2. 3) *Si à tout point z_0 d'un ensemble E correspondent des nombres $r > 0$ et $\alpha < \beta$ tels que $E \cdot S(z_0, r, \alpha, \beta) = 0$, l'ensemble E peut être recouvert avec une suite dénombrable d'arcs rectifiables.*

Le grand rôle qui sera joué par les ensembles plans qu'on peut recouvrir avec une suite dénombrable d'arcs rectifiables justifie l'introduction de la notation $\mathfrak{H}$ pour la famille de ces ensembles et de celle $\mathfrak{N}^*$ pour la famille des ensembles de la forme $N + H$, où $N \in \mathfrak{N}$ et $H \in \mathfrak{H}$. Ces deux familles satisfont évidemment à deux conditions analogues à (2. 1) et à (2. 2).

On démontre sans peine la généralisation suivante de (2. 3):

(2. 4) *Si à tout point z_0 d'un ensemble E correspondent des nombres $r > 0$ et $\alpha < \beta$ tels que $E \cdot S(z_0, r, \alpha, \beta) \in \mathfrak{N}$, on a $E \in \mathfrak{N}^*$.*

D é m o n s t r a t i o n. Désignons par E_{pqn} l'ensemble des points z_0 tels que

$$z_0 \in E, \tag{2.5}$$

$$E \cdot S\left(z_0, \frac{1}{n}, p, q\right) \in \mathfrak{N}. \tag{2.6}$$

On a évidemment

$$E = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\substack{p,\, q \in R \\ p < q}} E_{pqn}, \tag{2.7}$$

où R désigne l'ensemble des nombres rationnels (notation qui sera employée dans tout ce qui suit). D'après (2.3), les points z_0 de l'ensemble E_{pqn} tels que $E_{pqn} \cdot S\left(z_0, \frac{1}{n}, p+\pi, q+\pi\right) = 0$ forment un ensemble $E'_{pqn} \in \mathfrak{H}$. Mais si $z_0 \in E''_{pqn} = E_{pqn} - E'_{pqn}$, il existe un point $z_1 \in E_{pqn} \cdot S\left(z_0, \frac{1}{n}, p+\pi, q+\pi\right)$ et alors $S\left(z_1, \frac{1}{n}, p, q\right)$ contient un cercle convenable K_{z_0} ayant z_0 pour centre. En appliquant (2.6) pour z_1 au lieu de z_0, on obtient $E_{pqn} \cdot K_{z_0} \subset E \cdot S\left(z_1, \frac{1}{n}, p, q\right) \in \mathfrak{N}$. La réunion des cercles K_{z_0} contient l'ensemble E''_{pqn}, donc la réunion d'une suite dénombrable convenablement choisie de ces cercles contient E''_{pqn} elle aussi. On a donc $E''_{pqn} \in \mathfrak{N}$, d'où $E_{pqn} = E'_{pqn} + E''_{pqn}$ ce qui montre, d'après (2.7), la validité de la proposition.

Nous aurons besoin de la proposition suivante:

(2.8) *Si* $p < r < s < q \leqq p + \frac{\pi}{2}$ *et* $0 < R < R'$, *on a pour un nombre* $\varepsilon > 0$ *convenable*

$$S(z_0, R', r, s) - S(z_0, R, r, s) \subset S(z, R', p, q) \quad \textit{pour} \quad z \in S(z_0, \varepsilon, p, q).$$

On la démontre sans difficulté par un raisonnement de géométrie élémentaire.

3. Nous allons étudier dans ce point la question de trouver des combinaisons des types d'allure $C_{\alpha\beta}(\mathfrak{N}), \ldots, D^*_{\alpha\beta}(\mathfrak{N})$ qui ne se présentent dans deux domaines angulaires issus d'un même point qu'exceptionnellement (d'un certain point de vue).

Nous commençons par la démonstration d'un lemme:

(3.1) *Si à tout point d'un ensemble* E *correspondent des nombres* $\alpha < \beta$ *tels que* $f(z)$ *a la propriété* $C^*_{\alpha\beta}(\mathfrak{N})$ *(ou* $D^*_{\alpha\beta}(\mathfrak{N})$*) en ce point, on a* $E = N + K$, *où* $N \in \mathfrak{N}^*$ *et* $f(K)$ *est dénombrable.**)

D é m o n s t r a t i o n. Il suffit de considérer le cas de la propriété $C^*_{\alpha\beta}(\mathfrak{N})$. Désignons par E_n l'ensemble des points z_0 tels que les conditions suivantes sont remplies pour des nombres $\alpha < \beta$ (qui peuvent dépendre du choix du point z_0):

$$z_0 \in E, \tag{3.2}$$

---

*) Nous désignerons par $f(K)$ l'ensemble des valeurs $f(z)$, $z \in K$.

$$(3.3)\qquad \underset{z}{E}\left[f(z)<f(z_0),\, z\in S\left(z_0,\frac{1}{n},\alpha,\beta\right)\right]\in\mathfrak{N},$$

$$(3.4)\qquad \underset{z}{E}\left[f(z)\leqq f(z_0),\, z\in S\left(z_0,\frac{1}{n},\alpha,\beta\right)-S\left(z_0,\frac{1}{n+1},\alpha,\beta\right)\right]\notin\mathfrak{N}.$$

On a évidemment

$$(3.5)\qquad E=\sum_{n=1}^{\infty}E_n,$$

car, $f(z)$ ayant la propriété $C^*_{\alpha\beta}(\mathfrak{N})$ au point z_0 pour des nombres $\alpha<\beta$ convenables, on peut choisir un entier positif n_0 tel que (3.3) soit valable pour $n\geqq n_0$; on aura

$$\underset{z}{E}\left[f(z)\leqq f(z_0),\, z\in S\left(z_0,\frac{1}{n_0},\alpha,\beta\right)\right]\notin\mathfrak{N},$$

donc (3.4) sera valable pour au moins un entier $n\geqq n_0$.

Considérons maintenant l'ensemble E_{npqrs} des points z_0 tels que

$$(3.6)\qquad z_0\in E_n,$$

$$(3.7)\qquad \underset{z}{E}\left[f(z)<f(z_0),\, z\in S\left(z_0,\frac{1}{n},p,q\right)\right]\in\mathfrak{N},$$

$$(3.8)\qquad \underset{z}{E}\left[f(z)\leqq f(z_0),\, z\in S\left(z_0,\frac{1}{n},r,s\right)-S\left(z_0,\frac{1}{n+1},r,s\right)\right]\notin\mathfrak{N}.$$

On aura

$$(3.9)\qquad E=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{\substack{p,q,r,s\in R\\ p<r<s<q<p+\frac{\pi}{2}}}E_{npqrs}.$$

En effet, à tout point $z_0\in E_n$ correspondent des nombres rationnels r et s tels que $\alpha<r<s<\beta$, $s-r<\frac{\pi}{2}$ et que (3.8) soit valable, puisqu'autrement (3.4) ne pourrait être valable, l'intervalle $\alpha<\varphi<\beta$ étant la réunion d'une suite dénombrable d'intervalles $r<\varphi<s$ du type en question. En choisissant les nombres rationnels p et q tels que $\alpha<p<r<s<q<\beta$, $q<p+\frac{\pi}{2}$, (3.3) entraîne (3.7), on a donc $z_0\in E_{npqrs}$, de sorte que (3.9) est la conséquence de (3.5).

En posant $E_{npqrs}=A$ $\left(p<r<s<q<p+\frac{\pi}{2}\right)$, considérons un point $z_0\in A$. D'après (2.8), on peut choisir un nombre $0<\varepsilon<\frac{1}{n}$ tel que

$$S\left(z_0,\frac{1}{n},r,s\right)-S\left(z_0,\frac{1}{n+1},r,s\right)\subset S\left(z,\frac{1}{n},p,q\right)$$

pour $z \in S(z_0, \varepsilon, p, q)$. On a $f(z_1) \leqq f(z_0)$ pour $z_1 \in A \cdot S(z_0, \varepsilon, p, q)$; en effet, l'inégalité $f(z_1) > f(z_0)$ entraînerait

$$\underset{z}{E}\left[f(z) \leqq f(z_0),\ z \in S\left(z_0, \frac{1}{n}, r, s\right) - S\left(z_0, \frac{1}{n+1}, r, s\right)\right] \subset$$
$$\subset \underset{z}{E}\left[f(z) < f(z_1),\ z \in S\left(z_1, \frac{1}{n}, p, q\right)\right],$$

ce qui est impossible, le premier membre de la dernière relation n'appartenant pas, en vertu de (3. 8), à la famille $\mathfrak{N}$, quant au second membre, il appartient à $\mathfrak{N}$ d'après (3. 7) (appliqué pour z_1 au lieau de z_0). En vertu de (3. 7), $f(z)$ est donc constante sur $A \cdot S(z_0, \varepsilon, p, q)$, exception faite des points d'un ensemble qui appartient à $\mathfrak{N}$.

Désignons par A' le sous-ensemble de l'ensemble A qui contient les points z_0 tels que $A \cdot S(z_0, \varepsilon, p+\pi, q+\pi) \neq 0$. A tout point $z_0 \in A'$ correspond un cercle K_{z_0} ayant z_0 pour centre de façon que $f(z)$ est constante sur $A \cdot K_{z_0}$, exception faite des points d'un ensemble qui appartient à $\mathfrak{N}$. Pour le voir, on n'a qu'à choisir un point $z_1 \in A \cdot S(z_0, \varepsilon, p+\pi, q+\pi)$ et un cercle K_{z_0} ayant z_0 pour centre et tel que $K_{z_0} \subset S(z_1, \varepsilon, p, q)$. On peut recouvrir A' avec une suite dénombrable des cercles K_{z_0}; or, tout point de l'ensemble $A'' = A - A'$ est le sommet d'un secteur circulaire qui ne contient pas des points de A, donc, en vertu de (2. 3), $A'' \in \mathfrak{H}$, d'où on obtient, d'après (3. 9), la proposition.

On peut démontrer maintenant le théorème suivant:

(3. 10) *Si à tout point z_0 de l'ensemble E correspondent des nombres $\alpha < \beta$ et $\gamma < \delta$ tels que $f(z)$ a au point z_0 une des propriétés $C^*_{\alpha\beta}(\mathfrak{N})$ ou $D^*_{\alpha\beta}(\mathfrak{N})$ et en même temps une des propriétés $C_{\gamma\delta}(\mathfrak{N})$, $D_{\gamma\delta}(\mathfrak{N})$ ou $O_{\gamma\delta}(\mathfrak{N})$, on a $E \in \mathfrak{N}^*$.*

Démonstration. D'après (3. 1), on a la décomposition $E = N + \sum_{n=1}^{\infty} E_n$, où $N \in \mathfrak{N}^*$ et $f(z)$ est constante sur chacune des ensembles E_n. Soit E'_n l'ensemble des points $z_0 \in E_n$ dans lesquels $f(z)$ a une des propriétés $C_{\gamma\delta}(\mathfrak{N})$ ou $D_{\gamma\delta}(\mathfrak{N})$ pour des nombres $\gamma < \delta$ convenables. A tout point $z_0 \in E'_n$ correspondent donc des nombres $\gamma < \delta$ et $r > 0$ tels que $E'_n \cdot S(z_0, r, \gamma, \delta) \subset \subset \underset{z}{E}[f(z) = f(z_0), z \in S(z_0, r, \gamma, \delta)] \in \mathfrak{N}$, de sorte qu'on a en vertu de (2. 4) $E'_n \in \mathfrak{N}^*$.

A tout point $z \in E_n - E'_n = E''_n$ correspondent par contre des nombres $\gamma < \delta$ tels que $f(z)$ a la propriété $O_{\gamma\delta}(\mathfrak{N})$ au point z; or, z_0 étant un point de E''_n, supposons que $f(z)$ ait au point z_0 par exemple la propriété $C^*_{\alpha\beta}(\mathfrak{N})$ de sorte qu'on ait pour $r > 0$ convenable

$$\underset{z}{E}[f(z) < f(z_0), z \in S(z_0, r, \alpha, \beta)] \in \mathfrak{N}.$$

La relation $z_1 \in E''_n \cdot S(z_0, r, \alpha, \beta)$ entraînerait en vertu de l'égalité $f(z_1) = f(z_0)$ l'existence d'un cercle K_{z_1} ayant z_1 pour centre et tel que $\underset{z}{E}[f(z) < f(z_1), z \in K_{z_1}] \in \mathfrak{N}$, ce qui est impossible, $f(z)$ ayant la propriété $O_{\gamma\delta}(\mathfrak{N})$ au point z_1. Cette contradiction nous assure que l'ensemble $E_n''\cdot S(z_0, r, \alpha, \beta)$ est vide, donc, d'après (2. 3), $E_n''\in\mathfrak{H}$. Puisqu'on a la relation $E=N+\sum_{n=1}^{\infty}(E_n'+E_n'')$, la proposition du théorème s'ensuit aisément.

(3. 11) *Si à tout point de l'ensemble E correspondent des nombres $\alpha<\beta$ et $\gamma<\delta$ tels que $f(z)$ a en ce point les propriétés $C^*_{\alpha\beta}(\mathfrak{N})$ et $D^*_{\gamma\delta}(\mathfrak{N})$ en même temps, on a $E=N+L$, où $N\in\mathfrak{N}^*$ et on peut couvrir L avec une suite dénombrable de cercles de façon que $f(z)$ soit constante sur chacun d'eux, exception faite des points d'un ensemble qui appartient à la famille $\mathfrak{N}$.*

Démonstration. D'après le lemme (3. 1), on a la décomposition $E=N'+\sum_{n=1}^{\infty}E_n$, où $N'\in\mathfrak{N}^*$ et $f(z)$ est constante sur chacun des ensembles E_n. Soit E_{nmpqrs} l'ensemble des points z_0 tels que

(3. 12) $$z_0\in E_n,$$

(3. 13) $$\underset{z}{E}\left[f(z)<f(z_0),\ z\in S\left(z_0,\frac{1}{m},p,q\right)\right]\in\mathfrak{N},$$

(3. 14) $$\underset{z}{E}\left[f(z)>f(z_0),\ z\in S\left(z_0,\frac{1}{m},r,s\right)\right]\in\mathfrak{N}.$$

On a évidemment

(3. 15) $$E=N'+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{\substack{p,q,r,s\in R\\ p<q,\,r<s}}E_{nmpqrs}.$$

Considérons un quelconque parmi les ensembles E_{nmpqrs} qui figurent dans (3. 15) et désignons-le par A. D'après (2. 3), les points $z_0\in A$ tels que $A\cdot S\left(z_0,\frac{1}{m},r+\pi,s+\pi\right)=0$ forment un ensemble A' qui appartient à $\mathfrak{H}$. Soit donc z_0 un point de $A-A'$ et posons $z_1\in A\cdot S\left(z_0,\frac{1}{m},r+\pi,s+\pi\right)$; la relation $z_0\in S\left(z_1,\frac{1}{m},r,s\right)$ entraîne l'existence d'un nombre $0<\varepsilon<\frac{1}{m}$ tel que $S(z_0,\varepsilon,p,q)\subset S\left(z_1,\frac{1}{m},r,s\right)$, donc de (3. 13) et (3. 14) (en appliquant cette dernière relation pour z_1 au lieu de z_0), vu l'égalité $f(z_1)=f(z_0)$, on obtient

$$\underset{z}{E}[f(z)\neq f(z_0),\ z\in S(z_0,\varepsilon,p,q)]\in\mathfrak{N}.$$

Désignons par A_k l'ensemble des points z_0 tels que

(3. 16) $$z_0\in A-A',$$

(3. 17) $$\underset{z}{E}\left[f(z)\neq f(z_0),\ z\in S\left(z_0,\frac{1}{k},p,q\right)\right]\in\mathfrak{N}.$$

On voit d'après ce qui précède que

$$A - A' = \sum_{k=1}^{\infty} A_k. \tag{3.18}$$

En désignant par A_k' l'ensemble formé par les points $z_0 \in A_k$ tels que $A_k \cdot S\left(z_0, \frac{1}{k}, p+\pi, q+\pi\right) = 0$, on a d'après (2.3) la relation $A_k' \in \mathfrak{H}$. Soit donc $z_0 \in A_k - A_k'$ et posons $z_1 \in A_k \cdot S\left(z_0, \frac{1}{k}, p+\pi, q+\overset{\circ}{\pi}\right)$; la relation $z_0 \in S\left(z_1, \frac{1}{k}, p, q\right)$ entraîne l'existence d'un cercle K_{z_0} ayant z_0 pour centre et tel que $K_{z_0} \subset S\left(z_1, \frac{1}{k}, p, q\right)$, donc, en appliquant (3.17) pour z_1 au lieu de z_0, on a

$$\underset{z}{E}[f(z) \neq f(z_1), z \in K_{z_0}] \subset \underset{z}{E}\left[f(z) \neq f(z_1), z \in S\left(z_1, \frac{1}{k}, p, q\right)\right] \in \mathfrak{N}.$$

La fonction $f(z)$ est donc constante sur K_{z_0}, exception faite des points d'un ensemble qui appartient à $\mathfrak{N}$. On peut recouvrir naturellement $A_k - A_k'$ avec une suite dénombrable de ces cercles K_{z_0}, de sorte qu'on a en vertu de (3.18) la décomposition

$$A - A' = \sum_{k=1}^{\infty} A_k' + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k - A_k'),$$

où $\sum_{k=1}^{\infty} A_k' \in \mathfrak{H}$, et on peut recouvrir l'ensemble $\sum_{k=1}^{\infty} (A_k - A_k')$ avec des cercles du type indiqué dans le texte du théorème. Vu que $A' \in \mathfrak{H}$, on en obtient aisément la proposition.

Les théorèmes (3.10) et (3.11) qui précèdent montrent que quelques-unes parmi les combinaisons des propriétés $C_{\alpha\beta}(\mathfrak{N}), \ldots, D^*_{\alpha\beta}(\mathfrak{N})$ ne peuvent se présenter qu'exceptionnellement en deux domaines angulaires quelconques issus d'un même point. Par contre, dans le théorème (3.19) qui va suivre; il est essentiel de parler de deux domaines angulaires opposés par le sommet, puisqu'en les remplaçant par deux domaines angulaires quelconques issus d'un même point, la proposition serait évidemment fausse.

(3.19) *Si à tout point de l'ensemble E correspondent des nombres $\alpha < \beta$ tels que $f(z)$ a en ce point les propriétés $C_{\alpha\beta}(\mathfrak{N})$ et $C_{\alpha+\pi, \beta+\pi}(\mathfrak{N})$ en même temps, on a $E \in \mathfrak{N}^*$.*

Démonstration. Soit E_{npq} l'ensemble des points z_0 tels que

$$z_0 \in E, \tag{3.20}$$

$$\underset{z}{E}\left[f(z) \leqq f(z_0), z \in S\left(z_0, \frac{1}{n}, p, q\right) + S\left(z_0, \frac{1}{n}, p+\pi, q+\pi\right)\right] \in \mathfrak{N}. \tag{3.21}$$

On a évidemment

$$E=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{\substack{p,q\in R\\ p<q}} E_{npq}. \tag{3.22}$$

En désignant par E'_{npq} l'ensemble des points $z_0 \in E_{npq}$ tels que $f(z) \leqq f(z_0)$ pour $z \in E_{npq} \cdot S\left(z_0, \frac{1}{n}, p+\pi, q+\pi\right)$, on a en vertu de (3.21) $E_{npq} \cdot S\left(z_0, \frac{1}{n}, p+\pi, q+\pi\right) \in \mathfrak{N}$ pour $z_0 \in E'_{npq}$, donc, d'après (2.4), $E'_{npq} \in \mathfrak{N}^*$.

Soit maintenant $z_0 \in E_{npq} - E'_{npq} = E''_{npq}$ et posons

$$z_1 \in E_{npq} \cdot S\left(z_0, \frac{1}{n}, p+\pi, q+\pi\right), \qquad f(z_1) > f(z_0).$$

La relation $z_0 \in S\left(z_1, \frac{1}{n}, p, q\right)$ entraîne l'existence d'un cercle K_{z_0} ayant z_0 pour centre et tel que

$$\underset{z}{E}[f(z) \leqq f(z_0), z \in K_{z_0}] \subset \underset{z}{E}\left[f(z) \leqq f(z_1), z \in S\left(z_1, \frac{1}{n}, p, q\right)\right] \in \mathfrak{N}.$$

En désignant donc par E_{npqm} l'ensemble des points z_0 tels que

$$z_0 \in E''_{npq}, \tag{3.23}$$

$$\underset{z}{E}\left[f(z) \leqq f(z_0), |z-z_0| < \frac{1}{m}\right] \in \mathfrak{N}, \tag{3.24}$$

on aura

$$E''_{npq} = \sum_{m=1}^{\infty} E_{npqm}. \tag{3.25}$$

Considérons maintenant un quelconque parmi les ensembles E_{npqm} qui figurent dans (3.25) et désignons-le par A. Soit $z_0 \in A$ et posons

$$c = \sup_{\substack{z \in E_{npqm}\\ |z-z_0| < \frac{1}{2m}}} f(z).$$

S'il existe un point z_1 tel que $|z_1 - z_0| < \frac{1}{2m}$, $z_1 \in A, f(z_1) = c$, on conclut en appliquant (3.24) pour z_1 au lieu de z_0 que

$$\underset{z}{E}\left[|z-z_0| < \frac{1}{2m}, z \in A\right] \subset \underset{z}{E}\left[f(z) \leqq f(z_1), |z-z_1| < \frac{1}{m}\right] \in \mathfrak{N}.$$

Si par contre il n'y a pas de point jouissant des propriétés en question, soit $\{z_k\}$ une suite telle que

$$z_k \in A, \qquad |z_k - z_0| < \frac{1}{2m}, \qquad f(z_k) \to c;$$

on aura en ce cas

$$\underset{z}{E}\left[|z-z_0|<\frac{1}{2m}, z\in A\right]\subset\sum_{k=1}^{\infty}\underset{z}{E}\left[f(z)\leqq f(z_k), |z-z_k|<\frac{1}{m}\right],$$

d'où en appliquant (3. 24) pour z_k au lieu de z_0

$$\underset{z}{E}\left[|z-z_0|<\frac{1}{2m}, z\in A\right]\in\mathfrak{N}.$$

Cette relation dernière étant valable dans l'un et l'autre cas, on conclut, eu égard à ce que l'on peut recouvrir l'ensemble A avec une suite dénombrable des cercles $|z-z_0|<\frac{1}{2m}$, que $A=E_{npqm}\in\mathfrak{N}$, donc, d'après (3. 25), que $E''_{npq}\in\mathfrak{N}$. L'ensemble E'_{npq} appartenant à la famille $\mathfrak{N}^*$, on a donc $E_{npq}\in\mathfrak{N}^*$ et on en obtient la proposition en vertu de (3. 22).

4. Nous allons étudier dans ce qui suit la structure "approximative" des ensembles de niveau. Désignons à ce but par $|E|$ la mesure plane extérieure de Lebesgue de l'ensemble E et convenons des notations suivantes: les nombres $\alpha<\beta\leqq\alpha+2\pi$ étant donnés et E étant un ensemble plan quelconque, soit

$$\bar{D}(E, z_0, \alpha, \beta)=\overline{\lim_{r\to+0}}\frac{|E\cdot S(z_0, r, \alpha, \beta)|}{|S(z_0, r, \alpha, \beta)|}$$

et

$$\underline{D}(E, z_0, \alpha, \beta)=\underline{\lim_{r\to+0}}\frac{|E\cdot S(z_0, r, \alpha, \beta)|}{|S(z_0, r, \alpha, \beta)|}.$$

Si $\bar{D}(E, z_0, \alpha, \beta)=\underline{D}(E, z_0, \alpha, \beta)$, nous désignerons la valeur commune de ces deux limites par $D(E, z_0, \alpha, \beta)$. On voit aisément que le théorème de Lebesgue sur les points de densité*) s'applique aux limites que nous venons d'introduire, c'est-à-dire qu'on a le théorème suivant:

(4. 1) *E étant un ensemble plan quelconque, on a en presque tous les points de E l'égalité $D(E, z_0, \alpha, \beta)=1$ pour $\alpha<\beta\leqq\alpha+2\pi$ arbitraires.*

On a en outre les inégalités suivantes:

(4. 2) $$0\leqq\underline{D}(E, z_0, \alpha, \beta)\leqq\bar{D}(E, z_0, \alpha, \beta)\leqq 1$$

pour $\alpha<\beta\leqq\alpha+2\pi$ quelconques;

(4. 3) $$\underline{D}(E, z_0, \alpha', \beta')\leqq\frac{\beta'-\alpha'}{\beta-\alpha}\underline{D}(E, z_0, \alpha, \beta)$$

et

$$\bar{D}(E, z_0, \alpha', \beta')\leqq\frac{\beta'-\alpha'}{\beta-\alpha}\bar{D}(E, z_0, \alpha, \beta)$$

pour $\alpha\leqq\alpha'<\beta'\leqq\beta\leqq\alpha+2\pi$.

*) Voir p. ex. Saks [3], p. 117.

Les définitions suivantes correspondent à celles du nº 2:

a) La fonction $f(z)$ a la propriété $\Gamma_{\alpha\beta}$ au point z_0, si on a $D(E, z_0, \alpha, \beta) = 0$ pour l'ensemble $\underset{z}{E}[f(z) \leqq f(z_0)] = E$.

b) $f(z)$ a la propriété $\Gamma^*_{\alpha\beta}$ au point z_0, si on a $D(E', z_0, \alpha, \beta) = 0$ pour $E' = \underset{z}{E}[f(z) < f(z_0)]$, mais $\bar{D}(E, z, \alpha, \beta) > 0$ pour $E = \underset{z}{E}[f(z) \leqq f(z_0)]$.

c) $f(z)$ a la propriété $\Omega_{\alpha\beta}$ au point z_0, si on a $\bar{D}(E', z_0, \alpha, \beta) > 0$ et $\bar{D}(E'', z_0, \alpha, \beta) > 0$ pour $E' = \underset{z}{E}[f(z) < f(z_0)]$ et $E'' = \underset{z}{E}[f(z) > f(z_0)]$.

On obtient les définitions des propriétés $\Delta_{\alpha\beta}$ et $\Delta^*_{\alpha\beta}$ en remplaçant dans les définitions *a*) et *b*) les inégalités $f(z) \leqq f(z_0)$ et $f(z) < f(z_0)$ par celles $f(z) \geqq f(z_0)$ et $f(z) > f(z_0)$ respectivement.

5. Nous allons établir des théorèmes analogues à ceux du nº 3. Nous commençons par la démonstration du lemme suivant:

(5. 1) *Si à tout point z_0 de l'ensemble E correspondent des nombres $r_0 > 0$ et $\alpha < \beta \leqq \alpha + 2\pi$ tels que*

$$D(\underset{z}{E}[f(z) < f(z_0), z \in E], z_0, \alpha, \beta) = 0$$

et qu'on ait $f(z) \leqq f(z_0)$ pour $z \in E \cdot S(z_0, r_0, \alpha, \beta)$, on a $E = N + Q$, où $|N| = 0$ et $f(Q)$ est dénombrable.

Démonstration. Soit E_{npq} l'ensemble des points z_0 tels que

(5. 2) $$z_0 \in E,$$

(5. 3) $$f(z) \leqq f(z_0) \text{ pour } z \in E \cdot S\left(z_0, \frac{1}{n}, p, q\right),$$

(5. 4) $$D(\underset{z}{E}[f(z) < f(z_0), z \in E], z_0, p, q) = 0,$$

(5. 5) $$|\underset{z}{E}[f(z) < f(z_0), z \in E] \cdot S(z_0, r, p, q)| < \frac{1}{4} |S(z_0, r, p, q)| \text{ pour } 0 < r \leqq \frac{1}{n}.$$

Nous allons prouver que

(5. 6) $$E = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\substack{p,\, q \in R \\ p < q < p + \frac{\pi}{2}}} E_{npq}.$$

En effet, en déterminant pour $z_0 \in E$ donné les nombres r_0, α et β qui correspondent par hypothèse au point z_0, (5. 3) est valable lorsque $\frac{1}{n} \leqq r_0$ et $\alpha \leqq p < q \leqq \beta$, (5. 4) est vrai d'après (4. 2) et (4. 3) lorsque $\alpha \leqq p < q \leqq \beta$, et, après avoir fixé les nombres rationnels p et $q < p + \frac{\pi}{2}$ qui satisfont à cette dernière inégalité, (5. 5) est aussi valable pour n suffisamment grand.

En vertu de (5. 6), la proposition du lemme sera démontrée si on établit une décomposition

(5. 7) $$E_{npq} = N_{npq} + Q_{npq}$$

pour chacun des ensembles E_{npq} qui figurent dans (5. 6), où $|N_{npq}| = 0$ et $f(Q_{npq})$ est dénombrable.

Considérons donc un ensemble E_{npq} figurant dans (5. 6). Si $|E_{npq}| = 0$, (5. 7) est évidemment valable. Supposons donc que la mesure extérieure de l'ensemble $A = E_{npq}$ soit positive. Désignons alors par A_m l'ensemble des points z_0 tels que

(5. 8) $$z_0 \in A,$$

(5. 9) $$|A \cdot S(z_0, r, p, q)| > \frac{3}{4} |S(z_0, r, p, q)| \quad \text{pour} \quad 0 < r \leqq \frac{1}{m}.$$

On a d'après (4. 1)

(5. 10) $$A = B + \sum_{m=1}^{\infty} A_m,$$

où $|B| = 0$.

Soit $z_0 \in A_m$ et supposons qu'on puisse trouver une suite $\{z_k\}$ telle que, en posant $\delta = \min\left\{\frac{1}{n}, \frac{1}{m}\right\}$,

(5. 11) $$z_k \in A_m \cdot S(z_0, \delta, p, q), \quad z_k \to z_0, \quad f(z_k) < f(z_0).$$

Il s'ensuit de l'inégalité $q - p < \frac{\pi}{2}$ que

(5. 12) $$S(z_k, \delta_k, p, q) \subset S(z_0, \delta, p, q),$$

où on a posé $\delta_k = \delta - |z_k - z_0|$. Puisque $\delta_k \to \delta$, on a encore

(5. 13) $$|S(z_k, \delta_k, p, q)| \to |S(z_0, \delta, p, q)|.$$

δ_k étant moindre que $\delta \leqq \frac{1}{n}$, en appliquant (5. 3) pour z_k au lieu de z_0,

$$A \cdot S(z_k, \delta_k, p, q) \subset \underset{z}{E}[f(z) \leqq f(z_k), z \in E] \cdot S(z_k, \delta_k, p, q) \subset$$
$$\subset \underset{z}{E}[f(z) < f(z_0), z \in E] \cdot S(z_0, \delta, p, q),$$

eu égard à (5. 11) et (5. 12); donc, en vertu de (5. 5),

$$|A \cdot S(z_k, \delta_k, p, q)| < \frac{1}{4} |S(z_0, \delta, p, q)|,$$

ce qui entraîne d'après (5. 13) pour k suffisamment grand

$$|A \cdot S(z_k, \delta_k, p, q)| < \frac{1}{2} |S(z_k, \delta_k, p, q)|,$$

et ceci fournit en appliquant (5. 9) pour z_k au lieu de z_0, vu l'inégalité $\delta_k < \delta \leqq \frac{1}{m}$, une contradiction.

On voit donc qu'il n'y a pas de suite $\{z_k\}$ qui satisfait à (5. 11). A tout point $z_0 \in A_m$ correspond donc un ε, $0 < \varepsilon \leqq \delta$, tel que

$$z \in A_m \cdot S(z_0, \varepsilon, p, q) \quad \text{entraîne} \quad f(z) \geqq f(z_0),$$

d'où, vu (5. 3),

$$z \in A_m \cdot S(z_0, \varepsilon, p, q) \quad \text{entraîne} \quad f(z) = f(z_0).$$

En désignant donc par A_{ms} l'ensemble des points z_0 tels que

(5. 14) $$z_0 \in A_m$$

et que

(5. 15) $$z \in A_m \cdot S(z_0, \frac{1}{s}, p, q) \quad \text{entraîne} \quad f(z) = f(z_0),$$

on a

(5. 16) $$A_m = \sum_{s=1}^{\infty} A_{ms}.$$

Soit A'_{ms} l'ensemble des points $z_0 \in A_{ms}$ tels que

$$A_{ms} \cdot S(z_0, \frac{1}{s}, p+\pi, q+\pi) = 0.$$

En vertu de (2. 3), on a $A'_{ms} \in \mathfrak{H}$, donc $|A'_{ms}| = 0$. Si par contre $z_0 \in A_{ms} - A'_{ms}$, soit $z_1 \in A_{ms} \cdot S\left(z_0, \frac{1}{s}, p+\pi, q+\pi\right)$; on a alors $z_0 \in S\left(z_1, \frac{1}{s}, p, q\right)$, il existe donc un cercle K_{z_0} ayant z_0 pour centre et tel que $K_{z_0} \subset S\left(z_1, \frac{1}{s}, p, q\right)$. En appliquant (5. 15) pour z_1 au lieu de z_0, on conclut que $f(z) = f(z_1)$ pour $z \in A_{ms} \cdot K_{z_0}$. On peut recouvrir l'ensemble $A_{ms} - A'_{ms}$ avec une suite dénombrable des cercles K_{z_0}, ce qui nous assure que $f(A_{ms} - A'_{ms})$ est dénombrable. On a donc $A_{ms} = B_{ms} + C_{ms}$, où $|B_{ms}| = 0$ et $f(C_{ms})$ est dénombrable; eu égard à (5. 16) et à (5. 10), ceci entraîne (5. 7).

En s'appuyant sur (5. 1), on démontre le théorème suivant:

(5. 17) *Si à tout point de l'ensemble E correspondent des nombres $\alpha < \beta \leqq \alpha + 2\pi$ tels que $f(z)$ a la propriété $\Gamma^{*}_{\alpha\beta}$ en ce point, on a $E = N + Q$, où $|N| = 0$ et $f(Q)$ est dénombrable.*

Démonstration. Désignons par E_{nm} l'ensemble des points $z_0 \in E$ auxquels correspondent des nombres $\alpha < \beta \leqq \alpha + 2\pi$ tels que

(5. 18) $$\bar{D}(\underset{z}{E}[f(z) \leqq f(z_0)], z_0, \alpha, \beta) > \frac{1}{m},$$

(5. 19) $$D(\underset{z}{E}[f(z) < f(z_0)], z_0, \alpha, \beta) = 0,$$

(5. 20) $$|\underset{z}{E}[f(z) < f(z_0)] \cdot S(z_0, 2^{-n}, \alpha, \beta)| < \frac{1}{32m} |S(z_0, 2^{-n}, \alpha, \beta)|,$$

$$(5.21)\qquad |\underset{z}{E}[f(z)=f(z_0)]\cdot(S(z_0, 2^{-n}, \alpha, \beta)-S(z_0, 2^{-n-1}, \alpha, \beta))| >$$

$$> \frac{1}{4m}|S(z_0, 2^{-n}, \alpha, \beta)-S(z_0, 2^{-n-1}, \alpha, \beta)|.$$

Nous allons montrer que

$$(5.22)\qquad E=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} E_{nm}.$$

En effet, z_0 étant un point quelconque de l'ensemble E, (5. 19) est valable pour des nombres $\alpha<\beta\leqq\alpha+2\pi$ convenables et, pour les mêmes nombres α et β, (5. 18) a aussi lieu lorsque m et suffisamment grand. En fixant l'entier positiv m, on peut choisir un nombre naturel n_0 tel que (5. 20) soit valable pour $n\geqq n_0$. Si (5. 21) n'était vrai pour aucun entier $n\geqq n_0$, à tout nombre $0<r<2^{-n_0}$ correspondrait un nombre naturel n_1 tel que $2^{-n_1-1}\leqq r<2^{-n_1}$; on aurait donc $n_1\geqq n_0$ et

$$S(z_0, 2^{-n_1-1}, \alpha, \beta)\subset S(z_0, r, \alpha, \beta)\subset$$

$$\subset \sum_{n=n_1}^{\infty}[S(z_0, 2^{-n}, \alpha, \beta)-S(z_0, 2^{-n-1}, \alpha, \beta)],$$

donc

$$|\underset{z}{E}[f(z)=f(z_0)]\cdot S(z_0, r, \alpha, \beta)|\leqq$$

$$\leqq\sum_{n=n_1}^{\infty}|\underset{z}{E}[f(z)=f(z_0)]\cdot(S(z_0, 2^{-n}, \alpha, \beta)-S(z_0, 2^{-n-1}, \alpha, \beta))|\leqq$$

$$\leqq\sum_{n=n_1}^{\infty}\frac{1}{4m}|S(z_0, 2^{-n}, \alpha, \beta)-S(z_0, 2^{-n-1}, \alpha, \beta)|=$$

$$=\frac{1}{4m}|S(z_0, 2^{-n_1}, \alpha, \beta)|=\frac{1}{m}|S(z_0, 2^{-n_1-1}, \alpha, \beta)|\leqq\frac{1}{m}|S(z_0, r, \alpha, \beta)|.$$

Ceci entraîne que

$$\overline{D}(\underset{z}{E}[f(z)=f(z_0)], z_0, \alpha, \beta)\leqq\frac{1}{m},$$

donc, vu que

$$D(\underset{z}{E}[f(z)<f(z_0)], z_0, \alpha, \beta)=0,$$

l'inégalité (5. 18) est impossible. Cette contradiction montre que (5. 21) a lieu pour au moins un entier $n\geqq n_0$, donc que $z_0\in E_{nm}$.

Ceci établi, soit E_{nmpq} l'ensemble des points $z_0\in E_{nm}$ tels que l'on puisse choisir deux nombres γ et $\delta>\gamma$ de façon que l'on ait

$$(5.23)\qquad \gamma<p<q<\delta\leqq\gamma+\frac{\pi}{2},\quad q-p>\frac{2}{3}(\delta-\gamma),$$

$$(5.24)\qquad D(\underset{z}{E}[f(z)<f(z_0)], z_0, p, q)=0,$$

$$(5.25) \qquad \left|\underset{z}{E}[f(z) < f(z_0)] \cdot S(z_0, 2^{-n}, \gamma, \delta)\right| < \frac{1}{8m} \left|S(z_0, 2^{-n}, \gamma, \delta)\right|,$$

$$(5.26) \qquad \left|\underset{z}{E}[f(z) = f(z_0)] \cdot (S(z_0, 2^{-n}, p, q) - S(z_0, 2^{-n-1}, p, q))\right| >$$

$$> \frac{1}{4m} \left|S(z_0, 2^{-n}, p, q) - S(z_0, 2^{-n-1}, p, q)\right|.$$

Nous allons montrer que

$$(5.27) \qquad E_{nm} = \sum_{\substack{p, q \in R \\ p < q < p + \frac{\pi}{2}}} E_{nmpq}.$$

En effet, à tout point $z_0 \in E_{nm}$ correspondent des nombres $\alpha < \beta \leqq \alpha + 2\pi$ tels que (5.19), (5.20) et (5.21) soient valables. (5.21) entraîne qu'en partageant l'intervalle (α, β) en quatre intervalles égaux et en désignant l'un des intervalles obtenus par (γ, δ), on a

$$(5.28) \qquad \left|\underset{z}{E}[f(z) = f(z_0)] \cdot (S(z_0, 2^{-n}, \gamma, \delta) - S(z_0, 2^{-n-1}, \gamma, \delta))\right| >$$

$$> \frac{1}{4m} \left|S(z_0, 2^{-n}, \gamma, \delta) - S(z_0, 2^{-n-1}, \gamma, \delta)\right|.$$

Après avoir choisi les nombres γ et δ de sorte que (5.28) ait lieu, considérons deux suites $\{p_k\}$ et $\{q_k\}$ de nombres rationnels telles que

$$(5.29) \qquad \gamma < p_{k+1} < p_k < q_k < q_{k+1} < \delta, \quad q_k - p_k > \frac{2}{3}(\delta - \gamma)$$

et

$$p_k \to \gamma, \quad q_k \to \delta.$$

Puisque

$$\left|\underset{z}{E}[f(z) = f(z_0)] \cdot (S(z_0, 2^{-n}, p_k, q_k) - S(z_0, 2^{-n-1}, p_k, q_k))\right| \to$$

$$\to \left|\underset{z}{E}[f(z) = f(z_0)] \cdot (S(z_0, 2^{-n}, \gamma, \delta) - S(z_0, 2^{-n-1}, \gamma, \delta))\right|$$

et

$$\left|S(z_0, 2^{-n}, p_k, q_k) - S(z_0, 2^{-n-1}, p_k, q_k)\right| \to \left|S(z_0, 2^{-n}, \gamma, \delta) - S(z_0, 2^{-n-1}, \gamma, \delta)\right|,$$

en posant $p_k = p$ et $q_k = q$ pour un entier k suffisamment grand, (5.26) est valable en vertu de (5.28). En même temps, (5.23) aura lieu d'après (5.29), ainsi que (5.25), vu l'inégalité

$$\left|\underset{z}{E}[f(z) < f(z_0)] \cdot S(z_0, 2^{-n}, \gamma, \delta)\right| \leqq$$

$$\leqq \left|\underset{z}{E}[f(z) < f(z_0)] \cdot S(z_0, 2^{-n}, \alpha, \beta)\right| < \frac{1}{32m} \left|S(z_0, 2^{-n}, \alpha, \beta)\right| =$$

$$= \frac{1}{8m} \left|S(z_0, 2^{-n}, \gamma, \delta)\right|$$

qui découle de (5. 20). (5. 19) entraîne enfin, eu égard à (4. 2) et à (4. 3), la relation (5. 24), c'est-à-dire qu'on a $z \in E_{nmpq}$.

En posant $E_{nmpq} = A$, considérons un point $z_0 \in A$. Supposons qu'il existe une suite $\{z_k\}$ telle que

(5. 30) $$z_k \in A \cdot S(z_0, +\infty, p+\pi, q+\pi), \quad f(z_k) < f(z_0), \quad z_k \to z_0.$$

En vertu du lemme (2. 8), on a pour k suffisamment grand

$$S(z_k, 2^{-n}, p, q) - S(z_k, 2^{-n-1}, p, q) \subset S(z_0, 2^{-n}, \gamma, \delta),$$

de plus, d'après (5. 23),

$$|S(z_k, 2^{-n}, p, q) - S(z_k, 2^{-n-1}, p, q)| > \frac{1}{2} |S(z_0, 2^{-n}, \gamma, \delta)|.$$

En appliquant donc (5. 26) pour z_k au lieu de z_0 et d'après (5. 30), on a pour k suffisamment grand

$$\frac{1}{8m} |S(z_0, 2^{-n}, \gamma, \delta)| < \frac{1}{4m} |S(z_k, 2^{-n}, p, q) - S(z_k, 2^{-n-1}, p, q)| <$$

$$< |\underset{z}{E}[f(z) = f(z_k)] \cdot (S(z_k, 2^{-n}, p, q) - S(z_k, 2^{-n-1}, p, q))| \leqq$$

$$\leqq |\underset{z}{E}[f(z) < f(z_0)] \cdot S(z_0, 2^{-n}, \gamma, \delta)|,$$

ce qui est impossible en vertu de (5. 25). D'après ce qui précède, il n'existe pas de suite $\{z_k\}$ satisfaisant à (5. 30); en désignant donc par A_s l'ensemble des points $z_0 \in A$ tels que

(5. 31) $$f(z) \geqq f(z_0) \quad \text{pour} \quad z \in A \cdot S\left(z_0, \frac{1}{s}, p+\pi, q+\pi\right),$$

la décomposition

(5. 32) $$A = \sum_{s=1}^{\infty} A_s$$

aura lieu.

Ceci établi, considérons un point $z_0 \in A_s$. En choisissant un point $z_1 \in A_s \cdot S\left(z_0, \frac{1}{s}, p, q\right)$, on aura $z_0 \in A_s \cdot S\left(z_1, \frac{1}{s}, p+\pi, q+\pi\right)$, donc, en appliquant (5. 31) pour z_1 au lieu de z_0, on obtient $f(z_0) \geqq f(z_1)$. Ceci montre que

$$z \in A_s \cdot S\left(z_0, \frac{1}{s}, p, q\right) \quad \text{entraîne} \quad f(z) \leqq f(z_0).$$

L'égalité

$$D(\underset{z}{E}[f(z) < f(z_0), z \in A_s], z_0, p, q) = 0$$

ayant lieu d'après (5. 24), il s'ensuit du lemme (5. 1) que $A_s = B_s + C_s$, où $|B_s| = 0$ et l'ensemble $f(C_s)$ est dénombrable. En vertu de (5. 32), (5. 27) et (5. 22), la proposition en découle.

C'est clair que l'énoncé du théorème (5. 17) reste valable lorsqu'on remplace l'hypothèse que la fonction $f(z)$ a la propriété $\Gamma^*_{\alpha\beta}$ en tout point de E par celle que $f(z)$ jouit de la propriété $\Delta^*_{\alpha\beta}$ en tout point de cet ensemble. En faisant usage de ce théorème, nous démontrerons le théorème suivant:

(5. 33) *Si à tout point z_0 de l'ensemble E correspondent des nombres $\alpha < \beta \leqq \alpha + 2\pi$ et $\gamma < \delta \leqq \gamma + 2\pi$ tels que $f(z)$ a au point z_0 une des propriétés $\Gamma^*_{\alpha\beta}$ ou $\Delta^*_{\alpha\beta}$ et en même temps une des propriétés $\Gamma_{\gamma\delta}$, $\Delta_{\gamma\delta}$ ou $\Omega_{\gamma\delta}$, on a $|E| = 0$.*

Démonstration. En désignant par E' et par E'' respectivement les parties de l'ensemble E aux points desquelles $f(z)$ a la propriété $\Gamma^*_{\alpha\beta}$ ou $\Delta^*_{\alpha\beta}$ pour des nombres $\alpha < \beta \leqq \alpha + 2\pi$ convenables, on a d'après (5. 17) les décompositions

$$E' = N' + \sum_{n=1}^{\infty} Q'_n, \quad E'' = N'' + \sum_{n=1}^{\infty} Q''_n, \tag{5. 34}$$

où $|N'| = |N''| = 0$ et $f(z)$ est constante sur chacun des ensembles Q'_n et Q''_n. Si à un point $z_0 \in Q'_n$ correspondent des nombres $\gamma < \delta \leqq \gamma + 2\pi$ tels que $f(z)$ jouit de la propriété $\Gamma_{\gamma\delta}$ ou de celle $\Delta_{\gamma\delta}$ au point z_0, on a évidemment $D(Q'_n, z_0, \gamma, \delta) = 0$, donc, d'après (4. 1), l'ensemble de ces points est de mesure nulle.

Soit $A \subset Q'_n$ la partie de Q'_n qui contient les points z_0 auxquels correspondent des nombres $\gamma < \delta \leqq \gamma + 2\pi$ tels que $f(z)$ a la propriété $\Omega_{\gamma\delta}$ au point z_0. En désignant par A_m l'ensemble des points $z_0 \in A$ tels que

$$\overline{D}(\underset{z}{E}[f(z) < f(z_0)], z_0, \gamma, \delta) > \frac{1}{m} \tag{5. 35}$$

pour des nombres $\gamma < \delta \leqq \gamma + 2\pi$ convenables, on a évidemment

$$A = \sum_{m=1}^{\infty} A_m. \tag{5. 36}$$

Considérons un point $z_0 \in A_m$. On peut choisir deux nombres $\alpha < \beta \leqq \alpha + {}+ 2\pi$ tels que

$$D(\underset{z}{E}[f(z) < f(z_0)], z_0, \alpha, \beta) = 0,$$

il existe donc un nombre $\varepsilon > 0$ pour lequel on a

$$|\underset{z}{E}[f(z) < f(z_0)] \cdot S(z_0, r, \alpha, \beta)| < \frac{1}{2m} |S(z_0, r, \alpha, \beta)| \text{ pour } 0 < r \leqq \varepsilon. \tag{5. 37}$$

En fixant un nombre $0 < r \leqq \varepsilon$ et en considérant un point $z_1 \in \overline{A_m} \cdot S(z_0, r, \alpha, \beta)$, on peut construire en appliquant (5. 35) pour z_1 au lieu de z_0 une suite $\{r_k\}$ et on peut trouver des nombres $\gamma < \delta \leqq \gamma + 2\pi$ tels que

$$r_k > 0, \quad r_k \to 0, \tag{5. 38}$$

$$S(z_1, r_k, \gamma, \delta) \subset S(z_0, r, \alpha, \beta), \tag{5. 39}$$

$$|\underset{z}{E}[f(z) < f(z_0)] \cdot S(z_1, r_k, \gamma, \delta)| > \frac{1}{m} |S(z_1, r_k, \gamma, \delta)|, \tag{5. 40}$$

eu égard à ce que $f(z_1)=f(z_0), f(z)$ étant constante sur A. En vertu du théorème de VITALI*), il existe une suite $\{S_p\}$ des ensembles $S(z_1, r_k, \gamma, \delta)$ telle que $S_{p_1}\cdot S_{p_2}=0$ pour $p_1 \neq p_2$ et

$$A_m\cdot S(z_0, r, \alpha, \beta) \subset B+\sum_{p=1}^{\infty} S_p,$$

où $|B|=0$. On aura donc d'après (5. 40), (5. 39) et (5. 37)

$$|A_m\cdot S(z_0, r, \alpha, \beta)| \leqq \sum_{p=1}^{\infty}|S_p| < m\sum_{p=1}^{\infty}|\underset{z}{E}[f(z)<f(z_0)]\cdot S_p| =$$

$$= m\left|\underset{z}{E}[f(z)<f(z_0)]\cdot\left(\sum_{p=1}^{\infty} S_p\right)\right| \leqq$$

$$\leqq m\,|\underset{z}{E}[f(z)<f(z_0)]\cdot S(z_0, r, \alpha, \beta)| < \frac{1}{2}|S(z_0, r, \alpha, \beta)|.$$

Ceci étant valable pour $0<r\leqq\varepsilon$, on a $\overline{D}(A_m, z_0, \alpha, \beta)\leqq\frac{1}{2}$. Puisque z_0 était un point quelconque de A_m, on a d'après (4. 1) $|A_m|=0$ et, vu (5. 36), $|A|=0$, ce qui entraîne $|Q'_n|=0$. On démontre par un raisonnement analogue que $|Q''_n|=0$, d'où découle d'après (5. 34) la proposition.

Tandis que (5. 17) et (5. 33) sont analogues à (3. 1) et à (3. 10) respectivement, le théorème suivant correspond à (3. 19):

(5. 41) *Si à tout point de l'ensemble E correspondent des nombres α, β $(\alpha<\beta\leqq\alpha+2\pi)$ tels que $f(z)$ a la propriété $\Gamma_{\alpha\beta}$ et celle $\Gamma_{\alpha+\pi, \beta+\pi}$ en ce point, on a $|E|=0$.*

Démonstration. Désignons par E_{pq} l'ensemble des points z_0 tels que

(5. 42) $$z_0\in E,$$

(5. 43) $$D(\underset{z}{E}[f(z)\leqq f(z_0)], z_0, p, q)=D(\underset{z}{E}[f(z)\leqq f(z_0)], z_0, p+\pi, q+\pi)=0.$$

On voit aisément que

(5. 44) $$E=\sum_{\substack{p, q\in R\\ p<q<p+\frac{\pi}{2}}} E_{pq}.$$

En effet, à tout point $z_0\in E$ correspondent d'après (4. 2) et (4. 3) des nombres rationnels p et $q<p+\frac{\pi}{2}$ tels que $\alpha<p<q<\beta$, donc $z_0\in E_{pq}$.

En désignant par $K(z_0, r)$ le cercle $|z-z_0|<r$, considérons pour $n=1, 2, \ldots$ l'ensemble E_{pqn} des points $z_0\in E_{pq}$ tels que

(5. 45) $$\overline{\lim_{r\to+0}}\frac{|\underset{z}{E}[f(z)\leqq f(z_0)]\cdot K(z_0, r)|}{|K(z_0, r)|}>\frac{1}{n}.$$

*) Voir p. ex. SAKS [3], p. 109.

Soit ε un nombre positif moindre que l'unité et désignons par E_{pqnm} l'ensemble des points $z_0 \in E_{pqn}$ tels que

$$(5.46)\quad \begin{cases} 0 < r \leqq \dfrac{1}{m} \text{ entraîne} \\ \left|\underset{z}{E}[f(z) \leqq f(z_0)] \cdot S(z_0, r, p, q)\right| < \dfrac{2\pi}{n\left(\dfrac{4}{\varepsilon\omega}+1\right)^2 \omega} |S(z_0, r, p, q)|, \end{cases}$$

où on a posé $\omega = q - p$. On a d'après (5.43)

$$(5.47)\qquad E_{pqn} = \sum_{m=1}^{\infty} E_{pqnm}.$$

En posant $E_{pqnm} = A$, considérons un point $z_0 \in A$. En vertu de (5.45), on peut construire une suite $\{r_k\}$ telle que

$$(5.48)\qquad 0 < r_k < \frac{1}{m\left(\dfrac{4}{\varepsilon\omega}+1\right)}, \quad r_k \to 0,$$

$$(5.49)\qquad \left|\underset{z}{E}[f(z) \leqq f(z_0)] \cdot K(z_0, r_k)\right| > \frac{1}{n} |K(z_0, r_k)| = \frac{1}{n} r_k^2 \pi.$$

Posons en outre

$$(5.50)\qquad l_k = \frac{4}{\varepsilon\omega} r_k, \quad S_k = S(z_0, l_k, p+\pi, q+\pi),$$

$$(5.51)\qquad T_k = S(z_0, l_k, p+\pi, q+\pi) - S\left(z_0 - \frac{r_k}{\sin\dfrac{\omega}{2}} e^{i\frac{p+q}{2}}, +\infty, p+\pi, q+\pi\right).$$

On voit aisément que pour tout point $z_1 \in A \cdot T_k$

$$S(z_1, l_k + r_k, p, q) \supset K(z_0, r_k),$$

donc que, d'après (5.49),

$$(5.52)\qquad \left|\underset{z}{E}[f(z) \leqq f(z_0)] \cdot S(z_1, l_k + r_k, p, q)\right| >$$

$$> \frac{1}{n} r_k^2 \pi = \frac{2\pi}{n\left(\dfrac{4}{\varepsilon\omega}+1\right)^2 \omega} |S(z_1, l_k + r_k, p, q)|,$$

eu égard à ce que, d'après (5.50),

$$|S(z_1, l_k + r_k, p, q)| = (l_k + r_k)^2 \frac{\omega}{2} = r_k^2 \left(\frac{4}{\varepsilon\omega}+1\right)^2 \frac{\omega}{2}.$$

Vu que d'après (5.48) $l_k + r_k = \left(\dfrac{4}{\varepsilon\omega}+1\right) r_k < \dfrac{1}{m}$, on obtient en appliquant (5.46) pour z_1 au lieu de z_0 l'inégalité

$$\left|\underset{z}{E}[f(z) \leqq f(z_1)] \cdot S(z_1, l_k + r_k, p, q)\right| < \frac{2\pi}{n\left(\dfrac{4}{\varepsilon\omega}+1\right)^2 \omega} |S(z_1, l_k + r_k, p, q)|,$$

ce qui entraîne en vertu de (5. 52) que $f(z_1) < f(z_0)$. En résumant notre raisonnement, on a donc

(5. 53) $$f(z) < f(z_0) \quad \text{pour} \quad z \in A \cdot T_k.$$

Puisqu'on a encore

$$|A \cdot (S_k - T_k)| \leqq |S_k - T_k| < 2 l_k r_k = 2 l_k^2 \frac{\omega}{4} \varepsilon = l_k^2 \frac{\omega}{2} \varepsilon = \varepsilon |S_k|,$$

on conclut en s'appuyant sur (5. 53) que

$$|A \cdot S_k| \leqq \varepsilon |S_k| + |\underset{z}{E}[f(z) < f(z_0)] \cdot S_k|.$$

D'après (5. 50) et (5. 48), $l_k \to 0$ lorsque $k \to \infty$, donc (5. 43) entraîne que

$$\frac{|\underset{z}{E}[f(z) < f(z_0)] \cdot S_k|}{|S_k|} \to 0,$$

d'où

$$\underline{\lim} \frac{|A \cdot S_k|}{|S_k|} \leqq \varepsilon < 1$$

et

$$\underline{D}(A, z_0, p + \pi, q + \pi) < 1.$$

Ceci étant valable pour tout point $z_0 \in A$, on a d'après (4. 1) $|A| = 0$, donc vu (5. 47), $|E_{pqn}| = 0$. Cela veut dire en vertu de (5. 45) que l'on a pour presque tous les points z_0 de l'ensemble E_{pq} la relation

(5. 54) $$\lim_{r \to +0} \frac{|\underset{z}{E}[f(z) \leqq f(z_0)] \cdot K(z_0, r)|}{|K(z_0, r)|} = 0.$$

En désignant donc par B_s l'ensemble des points z_0 tels que

(5. 55) $$z_0 \in E_{pq},$$

(5. 56) $$|\underset{z}{E}[f(z) \leqq f(z_0)] \cdot K(z_0, r)| < \frac{1}{8} |K(z_0, r)| \quad \text{pour} \quad 0 < r \leqq \frac{1}{s},$$

(5. 54) entraîne la décomposition

(5. 57) $$E_{pq} = C + \sum_{s=1}^{\infty} B_s,$$

où $|C| = 0$.

Considérons maintenant un point $z_0 \in B_s$. Soit K un cercle de rayon $\leqq \frac{1}{2s}$ qui contient z_0 et désignons par K_0 le plus petit cercle ayant z_0 pour centre et contenant K. C'est évident que le rayon de K_0 ne dépasse pas $\frac{1}{s}$ et que $|K_0| \leqq 4|K|$. On a donc d'après (5. 56)

(5. 58) $$|\underset{z}{E}[f(z) \leqq f(z_0)] \cdot K| \leqq |\underset{z}{E}[f(z) \leqq f(z_0)] \cdot K_0| < \frac{1}{8} |K_0| \leqq \frac{1}{2} |K|.$$

Soit $0 < r < \frac{1}{2s}$ et posons

$$M = \sup_{z \in B_s \cdot K(z_0, r)} f(z).$$

Choisissons une suite $\{z_k\}$ telle que

$$z_k \in B_s \cdot K(z_0, r), \quad f(z_k) \leqq f(z_{k+1}), \quad f(z_k) \to M,$$

en particulier, si $f(z)$ prend la valeur M sur l'ensemble $B_s \cdot K(z_0, r)$, soit $f(z_k) = M$. En posant

$$D_k = \underset{z}{E}[f(z) \leqq f(z_k)] \cdot B_s \cdot K(z_0, r),$$

on a donc

(5.59) $$D_k \subset D_{k+1} \quad \text{et} \quad B_s \cdot K(z_0; r) = \sum_{k=1}^{\infty} D_k,$$

de plus, en appliquant (5.58) pour z_k au lieu de z_0 et pour $K(z_0, r)$ au lieu de K, il s'ensuit que

$$|D_k| \leqq \frac{1}{2} |K(z_0, r)|.$$

On conclut donc que, d'après (5.59), l'inégalité

$$|B_s \cdot K(z_0, r)| = \lim |D_k| \leqq \frac{1}{2} |K(z_0, r)|$$

a lieu pour $0 < r < \frac{1}{2s}$, ce qui entraîne en vertu de (4.1) que $|B_s| = 0$. Ceci prouve en faisant usage de (5.57) et de (5.44) que $|E| = 0$, ce qu'il fallait démontrer.

Remarquons encore que le théorème (5.17) devient presque évident si l'on ne considère que des fonctions $f(z)$ mesurables. En ce cas, on peut même l'énoncer sous la forme suivante plus précise:

(5.60) *Si à tout point de l'ensemble E correspondent des nombres α, β ($\alpha < \beta \leqq \alpha + 2\pi$) tels que la fonction mesurable $f(z)$ a la propriété $\Gamma^*_{\alpha\beta}$ en ce point, l'ensemble $f(E)$ est dénombrable.*

En effet, on a par hypothèse

$$|\underset{z}{E}[f(z) = f(z_0)]| > 0 \quad \text{pour} \quad z_0 \in E,$$

ce qui entraîne, $f(z)$ étant mesurable, la proposition.

Ouvrages cités.

[1] Á. Császár, Sur la structure des ensembles de niveau des fonctions réelles à une variable. (A paraître dans *Colloquium Math.*)

[2] A. Kolmogoroff et J. Vertchenko, Über Unstetigkeitspunkte von Funktionen zweier Veränderlichen, *C. R. Acad. Sci. URSS*, **1** (1934), 1—3, 105—107; Weitere Untersuchungen über Unstetigkeitspunkte von Funktionen zweier Veränderlichen, *ibid.* **4** (1934), 361—364.

[3] S. Saks, *Theory of the integral* (Warszawa—Lwów, 1937).

(Reçu le 19 janvier 1954)