Ein Satz über Parallelverschiebungen konvexer Körper.

Von BÉLA SZ.-NAGY in Szeged.

Dem Andenken meines Vaters Gyula Sz.-Nagy gewidmet.

1. Einleitung.

Die Untersuchung, über die hier berichtet wird, wurde durch einen Aufsatz von L. NACHBIN[1]) angeregt, der eine Verallgemeinerung des Hahn—Banachschen Satzes über die Fortsetzung linearer Operationen betrachtet. Der Hahn—Banachsche Satz behauptet bekanntlich folgendes: Ist $f(x)$ eine im Unterraum F des Banachschen Raumes E[1a]) definierte (reellwertige) lineare Operation mit der Norm

$$\|f\|_F = \sup_{x \in F} \frac{|f(x)|}{\|x\|},$$

so läßt sich $f(x)$ zu einer in ganz E definierten linearen Operation $g(x)$ fortsetzen derart, daß die Norm debei nicht vergrößert wird:

$$\|g\|_E = \|f\|_F.$$

Das Problem von NACHBIN ist, diesen Satz auf lineare Operationen auszudehnen, deren Wertbereich nicht die reellen Zahlen, sondern ein beliebig gegebener Banachscher Raum B ist. Er beweist den folgenden Satz. Damit der Hahn—Banachsche Satz für alle linearen Operationen gilt, deren Definitionsbereich in einem beliebigen Banachschen Raume E und deren Wertbereich im festen Banachschen Raume B liegen, ist notwendig und hinreichend, daß B die folgende Eigenschaft besitzt: Wenn in einem System von Kugeln in B jedes Paar von Kugeln gemeinsame Punkte besitzt, so haben alle Kugeln des Systems einen gemeinsamen Punkt.

Ist der Raum B endlichdimensional, so zeigt weiter NACHBIN, daß B die obige Eigenschaft dann und nur dann besitzt, wenn man in B eine solche Basis $e_1, e_2, \ldots, e_n$ einführen kann, daß die Norm $\|x\|$ eines beliebigen Vektors

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots + x_n e_n \in B$$

---

1) L. NACHBIN, A theorem of Hahn—Banach type for linear transformations, *Transactions American Math. Soc.*, **68** (1950), 28—46.

1a) Es werden im folgenden nur *reelle* Banachsche Räume betrachtet.

in der Form

$$\|x\| = \max\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|\}$$

sich ausdrücken läßt.

Da jeder n-dimensionale Banachsche Raum B aus dem n-dimensionalen Euklidischen Raume R_n dadurch entsteht, daß man in diesem eine Minkowskische Metrik mit Hilfe eines zentralsymmetrischen konvexen Eichkörpers einführt, so kann das letzte Ergebnis rein geometrisch auch folgendermaßen formuliert werden:

Ist $\mathfrak{K}$ ein zentralsymmetrischer konvexer Körper[2]) *in R_n, der kein Parallelepipedon ist* ($n \geqq 2$)[3]), *so gibt es in R_n ein System von Körpern, die alle homothetische Bilder von $\mathfrak{K}$ sind, paarweise gemeinsame Punkte besitzen, und die alle doch keinen gemeinsamen Punkt haben. Für ein Parallelepipedon gilt das nicht mehr.*

Die letzte Behauptung ist in R_1 klar, da ja ein System von paarweise nichtfremden Intervallen bekanntlich einen gemeinsamen Punkt besitzt; für R_n ($n \geqq 2$) folgt daraus die Behauptung, indem man die Projektionen auf die Achsen eines solchen Koordinatensystems betrachtet, dessen Achsen zu den Kanten des Parallelepipeds parallel sind.

Der Beweis, den NACHBIN für den obigen Satz gibt, benutzt wesentlich die Zentralsymmetrie von $\mathfrak{K}$, und daß auch vergrößerte und verkleinerte Bilder von $\mathfrak{K}$ zugelassen sind.

Der folgende Satz, den wir auf rein geometrischem Wege beweisen werden, bietet in beiden angedeuteten Richtungen eine Verallgemeinerung des obigen: es wird keine Symmetrie vorausgesetzt, und man wird mit homothetischen Bildern einfachster Art, nämlich mit Parallelverschiebungen auskommen[4]). Außerdem wird eine obere Schranke für die Anzahl der notwendigen Parallelverschiebungen angegeben. Ob diese Schranke $n+1$ eine genaue ist, wird hier offen gelassen.

Satz. *Jeden konvexen Körper $\mathfrak{K}$ in R_n ($n \geqq 2$), der kein Parallelepipedon ist, kann man durch Parallelverschiebungen in $n+1$ oder eventuell weniger Stellungen $\mathfrak{K}_i$ bringen derart, daß die Körper $\mathfrak{K}_i$ sich paarweise schneiden, aber sie alle keinen gemeinsamen Punkt besitzen. Für ein Parallelepipedon gilt das nicht mehr.*

---

[2]) Ein konvexer Körper ist eine beschränkte, abgeschlossene, konvexe Punktmenge mit nichtleerem Inneren.

[3]) Wir benützen die für $n=3$ gebräuchlichen Benennungen, obwohl n auch gleich 2 oder größer als 3 sein kann. Für $n=1$ ist der Satz trivial, da in R_1 jeder „konvexe Körper" ein Intervall und folglich ein „eindimensionales Parallelepipedon" ist.

[4]) NACHBIN (a. a. O., S. 43, Fußnote) vermutet, sein obiger Satz gelte auch dann, wenn man die Rolle des konvexen Körpers einer beliebigen kompakten Punktmenge C in R_n übergibt und wenn man nur Parallelverschiebungen von C betrachtet. Doch gibt er dafür keinen Beweis.

Die letzte Behauptung folgt wie oben.

Herrn L. Rédei, dem ich diesen Satz noch als Vermutung mitgeteilt habe, verdanke ich den folgenden Beweisansatz[5]). Man wähle reguläre Randpunkte auf $\mathfrak{K}$ (die Definition siehe weiter unten) und man bringe diese durch Parallelverschiebungen des Körpers in eine zusammenfallende Lage O. Aus der Regularität von O als Randpunkt eines jeden der verschobenen Körper folgt, daß diese Körper sich paarweise schneiden auch dann, wenn man sie noch, etwa in der Richtung der inneren Normalen in O, je einer weiteren kleinen Parallelverschiebung unterwirft. Wenn aber die regulären Randpunkte geeignet gewählt sind, kann man erwarten, daß die Körper nach diesen kleinen Verschiebungen keinen gemeinsamen Punkt mehr besitzen.

Dieser Ansatz kann, wie es gezeigt wird, wirklich zu einem Beweis ausgebaut werden. Dazu haben wir einige Hilfssätze nötig, die wir im folgenden Paragraphen beweisen werden.

Von Herrn G. Hajós stammt die folgende äquivalente Fassung unseres Satzes:

Unter den konvexen Körpern $\mathfrak{K}$ *in* R_n $(n \geqq 2)$ *sind es nur die Parallelepipeda, die die folgende Eigenschaft besitzen: Jeder solche (eventuell entartete) Simplex* $[Q_1 Q_2 \ldots Q_{n+1}]$, *dessen Seiten* $[Q_i Q_j]$ *einzeln durch geeignete Parallelverschiebungen von* $\mathfrak{K}$ *gedeckt werden können, kann selbst durch eine Parallelverschiebung von* $\mathfrak{K}$ *gedeckt werden.*

Zum Beweis der Äquivalenz braucht man nur zu bemerken, daß ein System von Punkten $Q_1, Q_2, \ldots, Q_m$ dann und nur dann durch eine Parallelverschiebung von $\mathfrak{K}$ gedeckt werden kann, wenn die Körper

$$\mathfrak{K}_i = \mathfrak{K} + \overrightarrow{Q_i O} \qquad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

einen gemeinsamen Punkt besitzen (dabei ist O ein beliebiger fester Punkt in R_n).

2. Die Hilfssätze.

Zuerst führen wir einige Bezeichnungen ein. Ist P ein Randpunkt des konvexen Körpers $\mathfrak{K}$, so bezeichnen wir mit $S(P)$ eine durch P gehende Stützebene an $\mathfrak{K}$, und mit $H(P)$ denjenigen durch $S(P)$ begrenzten abgeschlossenen Halbraum, welcher den Körper $\mathfrak{K}$ enthält. Endlich soll $\mathfrak{n}(P)$ denjenigen normalen Einheitvektor von $S(P)$ bedeuten, der nach dem Inneren von $H(P)$ weist.

Ein Randpunkt P von $\mathfrak{K}$ heißt *regulär*[6]), falls es in P nur eine einzige

[5]) Ihm bin ich auch für eine Besprechung des Hilfssatzes 1 verpflichtet, die mir in der endgültigen Fassung des Beweises dieses Hilfssatzes nützlich war.

[6]) Vgl. T. Bonnesen—W. Fenchel, *Theorie der konvexen Körper* (Berlin, 1934), insbesondere S. 13. Im dreidimensionalen Falle bezeichnet H. Minkowski einen solchen Punkt als „Flächenpunkt", s. *Gesammelte Abhandlungen* (Leipzig und Berlin, 1911), Bd. 2, S. 163.

Stützeben an $\mathfrak{K}$ gibt; $S(P)$, $H(P)$ und $\mathfrak{n}(P)$ sind dann also eindeutig durch P bestimmt.

Ist O ein innerer Punkt von $\mathfrak{K}$, so treffen bekanntlich *fast alle* Halbstrahlen aus O den Rand von $\mathfrak{K}$ in regulären Randpunkten (d. h. die übrigen Halbstrahlen schneiden die Oberfläche der Einheitskugel um den Mittelpunkt O in einer Punktmenge vom Lebesgueschen Maß Null)[7]. Hieraus ist es leicht darauf zu schließen, daß die regulären Randpunkte auf dem Rand von $\mathfrak{K}$ *überall dicht* liegen. In der Tat, sei $\mathfrak{K}_0$ eine beliebig kleine (Voll-)Kugel um einen Randpunkt P_0 von $\mathfrak{K}$, und es sei D der Durchschnitt von $\mathfrak{K}_0$ mit einer Stützebene $S(P_0)$ an $\mathfrak{K}$; ferner sei O ein innerer Punkt von $\mathfrak{K}$, der auch im inneren von $\mathfrak{K}_0$ liegt. Die Halbstrahlen von O aus zu den Punkten von D bilden offenbar eine Strahlenmenge positiven Maßes, folglich gibt es unter diesen Halbstrahlen gewiß einen solchen, der $\mathfrak{K}$ in einem regulären Randpunkt R trifft. Da R innerer Punkt einer solchen Strecke ist, die den Punkt O mit einem Punkte von D verbindet, so liegt R gewiß in $\mathfrak{K}_0$, und damit ist die Existenz eines regulären Randpunktes im Inneren von $\mathfrak{K}_0$ gezeigt worden.

Hilfssatz 1. *Ist Q ein Punkt außerhalb des konvexen Körpers $\mathfrak{K}$, so gibt es einen regulären Randpunkt R von $\mathfrak{K}$ derart, daß $S(R)$ den Punkt Q vom Inneren des Körpers $\mathfrak{K}$ trennt.*

Beweis. Es sei $\mathfrak{K}_0$ eine Kugel im Inneren von $\mathfrak{K}$ und mit dem Mittelpunkte P_0. Die Strecke QP_0 hat einen inneren Punkt P_1, der am Rande von $\mathfrak{K}$ liegt. Sei $\mathfrak{K}_1$ diejenige Kugel mit dem Mittelpunkt P_1, die inbezug auf den Ähnlichkeitspunkt Q zu $\mathfrak{K}_0$ homothetisch ist. In $\mathfrak{K}_1$ gibt es einen regulären Randpunkt R_1 von $\mathfrak{K}_0$; R_0 sei der zu R_1 homologe Punkt in $\mathfrak{K}_0$. R_1 ist dann ein innerer Punkt der Strecke QR_0; folglich wird der Punkt Q vom Punkte R_0 durch $S(R_1)$ getrennt. Mit R_0 liegen dann aber auch alle anderen inneren Punkte von $\mathfrak{K}$ auf der einen Seite von $S(R_1)$, und Q auf der anderen Seite, womit die Behauptung bewiesen ist.

Hilfssatz 2. *Auf jedem konvexen Körper $\mathfrak{K}$ in R_n $(n \geqq 2)$ kann man endlich viele regulären Randpunkte $P_1, \ldots, P_m$ finden derart, daß*

$$\Pi = \bigcap_{i=1}^{m} H(P_i)$$

eine beschränkte Punktmenge und folglich ein ($\mathfrak{K}$ enthaltender) Polyeder ist. Ist $\mathfrak{K}$ kein Parallelepipedon, so kann man verlangen, daß auch Π kein Parallelepipedon ist.

Beweis. G sei eine den Körper $\mathfrak{K}$ umschließende Kugeloberfläche. Zu jedem Punkte Q von G gibt es, laut Hilfssatz 1, einen regulären Randpunkt

[7]) Siehe Bonnesen—Fenchel, a. a. O.[6]).

P von $\mathfrak{K}$ so, daß $S(P)$ den Punkt Q vom Inneren des Körpers $\mathfrak{K}$ trennt. $S(P)$ trennt dann aber auch eine Umgebung von Q vom Inneren von $\mathfrak{K}$. Die Anwendung des Heine—Borelschen Überdeckungssatzes ergibt, daß es endlich viele reguläre Randpunkte P_i $(i = 1, \ldots, m)$ von $\mathfrak{K}$ gibt derart, daß jeder Punkt von G durch mindestens ein $S(P_i)$ vom Inneren von $\mathfrak{K}$ getrennt wird. Dann ist

$$\Pi = \bigcap_{i=1}^{m} H(P_i)$$

im Inneren von G enthalten, folglich ein Polyeder.

Ist $\mathfrak{K}$ ein Parallelepipedon, so ist notwendigerweise $\Pi = \mathfrak{K}$. Wenn $\mathfrak{K}$ kein Parallelepipedon, aber Π ein Parallelepipedon ist, so folgt aus $\mathfrak{K} \subset \Pi$, $\mathfrak{K} \neq \Pi$, daß es einen Eckpunkt von Π gibt, der nicht in $\mathfrak{K}$ enthalten ist. Dann gibt es, laut Hilfssatz 1, einen regulären Randpunkt P_{m+1} von $\mathfrak{K}$ so, daß dieser Eckpunkt durch $S(P_{m+1})$ vom Inneren von $\mathfrak{K}$ getrennt wird. Dann ist

$$\Pi' = \Pi \cap H(P_{m+1}) = \bigcap_{i=1}^{m+1} H(P_i)$$

kein Parallelepipedon und hat alle im Hilfssatze geforderten Eigenschaften.

H i l f s s a t z 3. *Ist $\mathfrak{K}$ ein konvexer Körper in R_n $(n \geqq 2)$, der kein Parallelepipedon ist, so gibt est reguläre Randpunkte $P_1, \ldots, P_\nu$ von $\mathfrak{K}$ in einer Anzahl ν mit $3 \leqq \nu \leqq n+1$, so daß* a) *keine zwei der Stützebenen $S(P_i)$ parallel sind,* b) *zwischen den normalen Einheitsvektoren $\mathfrak{n}(P_i)$ eine lineare Relation*

$$\sum_{i=1}^{\nu} a_i\, \mathfrak{n}(P_i) = 0$$

mit positiven Koeffizienten a_i besteht.

B e w e i s. Nach Hilfssatz 2 gibt es (verschiedene) reguläre Randpunkte $P_1, \ldots, P_m$ von $\mathfrak{K}$ derart, daß

$$\Pi = \bigcap_{i=1}^{m} H(P_i)$$

ein Polyeder, aber kein Parallelepipedon ist. Bedeutet t_i den Inhalt der auf $S(P_i)$ liegenden Seite von Π, so gilt bekanntlich die Relation

$$\sum_{i=1}^{m} t_i\, \mathfrak{n}(P_i) = 0. \tag{1}$$ [8])

Zu jedem P_i kann es offenbar höchstens einen Punkt P_j $(j \neq i)$ geben so, daß $S(P_i)$ und $S(P_j)$ parallel sind; ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann $t_i \geqq t_j$ angenommen werden. Man hat

$$t_i\, \mathfrak{n}(P_i) + t_j\, \mathfrak{n}(P_j) = (t_i - t_j)\, \mathfrak{n}(P_i).$$

---

[8]) Vgl. H. MINKOWSKI, Allgemeine Lehrsätze über die konvexen Polyeder, *Gesammelte Abhandlungen*, Bd. 2, insbesondere S. 104.

Im Falle $t_i = t_j$ ändert sich also die Summe in (1) nicht, wenn man das i-te und das j-te Glied streicht; und auch im Falle $t_i > t_j$ ändert sie sich nicht, wenn man das j-te Glied streicht und das i-te durch $\tau_i \mathfrak{n}(P_i)$ ersetzt mit $\tau_i = t_i - t_j > 0$.

Führt man diese Operation an der Summe in (1) für jedes Paar von Punkten mit parallelen Stützebenen aus, so werden endlich entweder alle Glieder gestrichen (Fall A), ober aber es bleiben noch Glieder übrig (Fall B). Fall A tritt dann auf, wenn es zu jeder Seite des Polyeders Π eine inhaltsgleiche parallele Seite gibt[9]).

Zuerst wollen wir den Fall B untersuchen. In diesem Falle hat man also, nach passender Umnumerierung der Punkte P_i, eine Relation

$$\sum_{i=1}^{r} \tau_i \mathfrak{n}(P_i) = 0 \quad \text{mit} \quad \tau_i > 0, \tag{2}$$

wobei keine der $\mathfrak{n}(P_i)$ parallel sind; notwendigerweise ist dann $r \geqq 3$.

Ist $r \leqq n+1$, so haben wir schon die gewünschte Relation vor uns.

Ist aber $r \geqq n+2$, so machen wir von einem Verfahren Gebrauch, welches uns gestattet, die Relation (2) durch eine analoge, aber weniger Glieder enthaltende zu ersetzen.

Da $n+1$ Vektoren in R_n linear abhängig sind, hat man eine Beziehung

$$\sum_{i=1}^{n+1} \sigma_i \mathfrak{n}(P_i) = 0 \tag{3}$$

mit Koeffizienten σ_i, unter denen mindestens der eine *positiv* ist.

Nun sei λ der kleinste unter den Werten

$$\frac{\tau_i}{\sigma_i},$$

wobei nur diejenigen Indizes i beachtet werden ($1 \leqq i \leqq n+1$), für welche $\sigma_i > 0$ ist. Aus (2) und (3) folgt die Beziehung

$$\sum_{i=1}^{n+1} \tau_i' \mathfrak{n}(P_i) + \sum_{i=n+2}^{r} \tau_i \mathfrak{n}(P_i) = 0$$

mit $\tau_i' = \tau_i - \lambda\sigma_i$ ($1 \leqq i \leqq n+1$); man hat offenbar $\tau_i' \geqq 0$ und für mindestens ein i ist $\tau_i' = 0$. Wenn man also die Glieder mit $\tau_i' = 0$ streicht, dann erhält man wirklich eine Relation von der Art (2), aber mit weniger Gliedern. Ist die Anzahl der übriggebliebenen Glieder in der Summe schon $\leqq n+1$, so sind wir am Ziele. Jedenfalls genügt es, dieses Verfahren endlich vielmal anzuwenden, um schließlich zu einer Relation von der Art (2), aber links mit höchstens $n+1$ (und mindestens 3) Gliedern zu gelangen.

Hiermit ist der Beweis im Falle B fertig.

---

[9]) Dann ist Π zentralsymmetrisch, vgl. H. Minkowski, a. a. O. [7]), S. 118. Wir werden aber diese Tatsache nicht gebrauchen.

Im Falle A hat Π lauter paarweise parallele Seiten gleichen Flächeninhalts. Da Π kein Parallelepipedon ist, ist die Anzahl der parallelen Seitenpaare mindestens gleich $n+1$. Die Punkte P_i können dann folgendermaßen angeordnet werden:

$$P_1', P_1'', P_2', P_2'', \ldots, P_s', P_s'' \qquad (s \geqq n+1),$$

wobei Punkte mit parallelen Stützebenen mit dem gleichen Index bezeichnet sind. Man hat also

$$\text{(4)} \qquad \mathfrak{n}(P_k') = -\mathfrak{n}(P_k'') \qquad (k = 1, 2, \ldots, s).$$

Die $n+1$ Vektoren

$$\mathfrak{n}(P_1'), \mathfrak{n}(P_2'), \ldots, \mathfrak{n}(P_{n+1}')$$

sind linear abhängig, d. h. es besteht eine Gleichung

$$\sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k \, \mathfrak{n}(P_k') = 0$$

mit Koeffizienten α_k, die nicht alle verschwinden. Man schreibe diese Gleichung, unter Beachtung von (4), in der folgenden Form an:

$$\sum{}' \alpha_k \, \mathfrak{n}(P_k') + \sum{}'' (-\alpha_k) \, \mathfrak{n}(P_k'') = 0,$$

wobei die Summen Σ', Σ'' auf diejenigen Indizes k zu erstrecken sind, für welche $\alpha_k > 0$, bzw. $\alpha_k < 0$ ist. Wenn man also von den Punkten

$$P_1', P_2', \ldots, P_{n+1}'$$

einen Punkt P_k' beibehält, wegläßt, oder mit P_k'' ersetzt je nachdem $\alpha_k > 0$, $\alpha_k = 0$, oder $\alpha_k < 0$ ist, so bekommt man ein System von regulären Randpunkten von $\mathfrak{K}$ mit der im Hilfssatz 3 gewünschten Eigenschaft.

Damit ist dieser Hilfssatz vollständig bewiesen.

Hilfssatz 4. *$\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$ seien zwei konvexe Körper in $R_n (n \geqq 2)$ mit einem gemeinsamen Randpunkte O, der in Bezug auf beide Körper regulär ist. Wir nehmen ferner an, daß die entsprechenden Stützebenen $S_1(O)$, $S_2(O)$ nicht zusammenfallen. Dann haben $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$ gemeinsame innere Punkte.*

Beweis. Wir bedienen uns der folgenden Tatsache, deren Beweis bei Minkowski (wenn auch in impliziter Form und nur für $n = 3$ dargestellt) zu finden ist[10]): Ist O ein regulärer Randpunkt eines konvexen Körpers $\mathfrak{K}$, und ist h ein beliebiger, von O ausgehender und sonst im Inneren von $H(O)$ verlaufender Halbstrahl, so liegt auf h mindestens ein innerer Punkt von $\mathfrak{K}$.

[10]) H. Minkowski, a. a. O.[5]), § 13, beweist die folgenden Behauptungen: Ist O ein beliebiger Randpunkt des konvexen Körpers $\mathfrak{K}$, so ziehe man aus O alle Halbstrahlen, die durch mindestens einen inneren Punkt von $\mathfrak{K}$ gehen: die Vereinigungsmenge der Punkte aller dieser Halbstrahlen sei mit $\mathfrak{N}'$, und ihre abgeschlossene Hülle mit $\mathfrak{N}$ bezeichnet. Dann gilt: a) Jeder innere Punkt von $\mathfrak{N}$ ist schon in $\mathfrak{N}'$ enthalten, b) im Falle eines regulären Randpunktes O fällt $\mathfrak{N}$ mit dem Halbraum $H(O)$ zusammen.

Nun seien $H_1(O)$ und $H_2(O)$ die Halbräume, die den Körpern $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{K}_2$ und dem gemeinsamen Randpunkte O entsprechen. Da $S_1(O)$ und $S_2(O)$ voraussetzungsgemäß nicht zusammenfallen, so haben diese Halbräume einen gemeinsamen inneren Punkt P. Der Halbstrahl $\overrightarrow{OP}$ enthält dann einen inneren Punkt P_1 von $\mathfrak{K}_1$ und einen inneren Punkt P_2 von $\mathfrak{K}_2$. Ist $\overline{OP_1} \leqq OP_2$ (was ohne Beschränkung der Allgemeinheit angenommen werden kann), so ist P_1 ein innerer Punkt sowohl von $\mathfrak{K}_1$, wie auch von $\mathfrak{K}_2$.

3. Beweis des Satzes.

Laut Hilfssatz 3 kann man auf $\mathfrak{K}$ die regulären Randpunkte

$$P_1, P_2, \ldots, P_\nu \qquad (3 \leqq \nu \leqq n+1)$$

derart wählen, daß keine zwei der Stützebenen $S(P_i)$ parallel sind und eine Gleichung

$$\sum_{i=1}^{\nu} a_i\, \mathfrak{n}(P_i) = 0 \tag{5}$$

mit positiven Koeffizienten a_i besteht. Ist O der Anfangspunkt in R_n und bezeichnet $\mathfrak{r}_i$ den Vektor $\overrightarrow{OP_i}$, so betrachten wir die Körper

$$\mathfrak{K}_i = \mathfrak{K} - \mathfrak{r}_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, \nu);$$

$\mathfrak{K}_i$ entsteht also aus $\mathfrak{K}$ durch Parallelverschiebung so, daß der Punkt P_i in den Anfangspunkt O fällt. Bedeuten S_i, H_i, $\mathfrak{n}_i$ die dem Körper $\mathfrak{K}_i$ entsprechenden Gebilde, so ist also

$$S_i(O) \parallel S(P_i), \quad \mathfrak{n}_i(O) = \mathfrak{n}(P_i) \qquad (i = 1, 2, \ldots, \nu).$$

Wir wollen jetzt den Durchschnitt

$$\Delta = \bigcap_{i=1}^{\nu} H_i(O)$$

bestimmen. Der Punkt Q liegt offenbar dann und nur dann in Δ, wenn der Vektor $\mathfrak{q} = \overrightarrow{OQ}$ den Ungleichungen

$$(\mathfrak{q}, \mathfrak{n}_i(O)) = (\mathfrak{q}, \mathfrak{n}(P_i)) \geqq 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, \nu) \tag{6}$$

genügt. Da wegen (5) die Beziehung

$$\sum_{i=1}^{\nu} a_i (\mathfrak{q}, \mathfrak{n}(P_i)) = 0 \qquad (a_i > 0)$$

besteht, so können die Ungleichungen (6) dann und nur dann bestehen, wenn

$$(\mathfrak{q}, \mathfrak{n}(P_i)) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, \nu)$$

ist; dies bedeutet aber, daß Q auf $S_i(O)$ liegt ($i = 1, 2, \ldots, \nu$). Folglich ist

$$\Delta = \bigcap_{i=1}^{\nu} H_i(O) = \bigcap_{i=1}^{\nu} S_i(O).$$

Da keine zwei der Stützebenen $S_i(O)$ parallel sind, so haben die Körper $\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2, \ldots, \mathfrak{K}_\nu$ paarweise innere Punkte gemeinsam (vgl. Hilfssatz 4). Dasselbe gilt offenbar auch dann, wenn man $\mathfrak{K}_1$ genügend wenig parallel verschiebt, etwa in der Richtung von $\mathfrak{n}_1(O)$. Sei $\mathfrak{K}_1'$ die verschobene Stellung von $\mathfrak{K}_1$, und O' die verschobene Stellung von O. Wir behaupten, daß die Körper $\mathfrak{K}_1', \mathfrak{K}_2, \ldots, \mathfrak{K}_\nu$ keinen gemeinsamen Punkt besitzen. In der Tat, es gilt $H_1'(O') \subset H_1(O)$ und folglich ist

$$\begin{aligned}\mathfrak{K}_1' \cap \mathfrak{K}_2 \cap \ldots \cap \mathfrak{K}_\nu \subset H_1'(O') \cap H_2(O) \cap \ldots \cap H_\nu(O) &= \\ = H_1'(O') \cap H_1(O) \cap H_2(O) \cap \ldots \cap H_\nu(O) &= \\ = H_1'(O') \cap S_1(O) \cap S_2(O) \cap \ldots \cap S_\nu(O) &= \text{leer},\end{aligned}$$

da ja der Halbraum $H_1'(O')$ im Inneren des Halbraumes $H_1(O)$ liegt und so keinen gemeinsamen Punkt mit $S_1(O)$ hat.

Damit ist der Beweis des Satzes fertig.

(Eingegangen am 1. März 1954.)