Sur les bases orthonormales dans les espaces préhilbertiens.

Par J. DIXMIER à Dijon (France).

Soit H un espace préhilbertien réel ou complexe (c'est-à-dire un espace vectoriel réel ou complexe muni d'une forme sesquilinéaire hermitienne positive $\langle x, y\rangle$ telle que $\langle x, x\rangle = 0$ entraîne $x = 0$). Le complété de H est un espace hilbertien dont la dimension (au sens hilbertien) sera appelée la dimension hilbertienne de H et notée $\dim H$.

On appelle base orthonormale dans H un système orthonormal (x_α) tel que les combinaisons linéaires des x_α soient partout denses dans H. On sait qu'*il existe* des bases orthonormales lorsque l'une des conditions suivantes est remplie:

1) H est complet (on considère un système orthonormal maximal);

2) $\dim H \leqq \aleph_0$ (on utilise le procédé d'orthonormalisation de Schmidt).

Nous allons établir les résultats suivants ($\mathfrak{c}$ désigne la puissance du continu):

(a) *Pour tout cardinal* $\mathfrak{m} > \aleph_0$, *il existe un espace préhilbertien H tel que* $\dim H = \mathfrak{m}$ *et ne possédant aucune base orthonormale.*

(b) *Il existe un espace préhilbertien H tel que* $\dim H = \mathfrak{c}$ *et dans lequel tout système orthonormal est dénombrable.*

(c) *Dans un espace préhilbertien H tel que* $\dim H > \mathfrak{c}$, *tout système orthonormal maximal a une puissance* $> \mathfrak{c}$.

Soient K_1, K_2, K_3 trois espaces hilbertiens, avec $\dim K_1 = \mathfrak{p}_1$, $\aleph_1 \leqq \dim K_2 = \mathfrak{p}_2 \leqq \mathfrak{c}$, $\dim K_3 = \aleph_0$. On sait que la dimension *algébrique* de K_3 est $\mathfrak{c}$. Soit donc $(g_\beta)_{\beta \in B}$ un système algébriquement libre de vecteurs de K_3, l'ensemble d'indices B ayant pour puissance $\mathfrak{p}_2$. Soit $(f_\beta)_{\beta \in B}$ une base orthonormale de K_2. Enfin, soit $(e_\alpha)_{\alpha \in A}$ une base orthonormale de K_3, A étant dénombrable. Formons l'espace hilbertien $K = K_1 \oplus K_2 \oplus K_3$, et identifions K_1, K_2, K_3 à des sous-espaces vectoriels fermés deux à deux orthogonaux de K. Posons $h_\beta = f_\beta + g_\beta$ pour $\beta \in B$. Soit H le sous-espace vectoriel de K engendré *algébriquement* par K_1 et les h_β.

Considérons un système orthonormal $(k_\iota)_{\iota \in I}$ dont les éléments appartiennent à H. Pour $\alpha \in A$, e_α est orthogonal à tous les k_ι sauf à une infinité dénombrable d'entre eux. Comme A est dénombrable, K_3 est orthogonal à tous les k_ι sauf à une infinité dénombrable d'entre eux. On peut donc écrire $I = I_1 \cup I_2$, I_1 et I_2 étant disjoints, I_2 étant dénombrable, et K_3 étant orthogonal à k_ι pour $\iota \in I_1$.

Soit $\iota \in I_1$. On a $k_\iota = x + c_1 h_{\beta_1} + c_2 h_{\beta_2} + \cdots + c_n h_{\beta_n} = x + \sum_{i=1}^n c_i f_{\beta_i} + \sum_{i=1}^n c_i g_{\beta_i}$, avec $x \in K_1$. Comme k_ι est orthogonal à K_3, on a $\sum_{i=1}^n c_i g_{\beta_i} = 0$, donc $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$ puisque le système (g_β) est libre. Ainsi, $k_\iota = x \in K_1$.

Ceci établi, supposons d'abord $K_1 = 0$, $\mathfrak{p}_2 = \mathfrak{c}$. Alors I_1 est vide, de sorte que tout système orthonormal de H est dénombrable. D'autre part, la projection orthogonale de H sur K_2 contient les f_β, donc est partout dense dans K_2, de sorte que $\mathfrak{c} = \dim K_2 \leqq \dim H \leqq \dim K = \mathfrak{c} + \aleph_0 = \mathfrak{c}$. Ainsi, $\dim H = \mathfrak{c}$, et l'assertion (b) est démontrée.

Supposons maintenant $\mathfrak{p}_1 \geqq \aleph_1$, $\mathfrak{p}_2 = \aleph_1$. On a $\mathfrak{p}_1 = \dim K_1 \leqq \dim H \leqq \dim K = \mathfrak{p}_1 + \mathfrak{p}_2 + \aleph_0 = \mathfrak{p}_1$, donc $\dim H = \mathfrak{p}_1$. D'autre part, les seuls vecteurs k_ι qui puissent être non orthogonaux à K_2 sont ceux pour lesquels $\iota \in I_2$. La projection orthogonale sur K_2 du sous-espace engendré par les k_ι ne peut donc être partout dense dans K_2. Comme la projection orthogonale de H sur K_2 est partout dense dans K_2, on voit que H ne possède aucune base orthonormale, et l'assertion (a) est démontrée.

Enfin, changeant de notations, considérons un espace préhilbertien H tel que $\dim H > \mathfrak{c}$, et soit $(k_\iota)_{\iota \in I}$ un système orthonormal maximal dans H. Soit K le complété de H. Soient K_1 le sous-espace vectoriel fermé de K engendré par les k_ι, et K_2 le sous-espace orthogonal supplémentaire. Si la puissance de I est $\leqq \mathfrak{c}$, on sait qu'il en est de même de la puissance de l'ensemble K_1. La projection orthogonale de H sur K_1 n'est donc pas biunivoque, de sorte que $H \cap K_2 \neq 0$. Ceci contredit le fait que (k_ι) est maximal et établit la propriété (c).

(Reçu le 27 mars 1953)