Produit complet des groupes de permutations et problème d'extension de groupes. II.*)

Par MARC KRASNER et LÉO KALOUJNINE à Paris.

§ 3. Produit complet des groupes abstraits.

G étant un groupe abstrait, on va l'identifier à un groupe de permutations par la méthode bien connue, c'est-à-dire au moyen de sa représentation régulière; autrement dit on ne distinguera pas l'élément $a \in G$ de la permutation $x \to ax$ de l'ensemble G. De cette manière, un groupe abstrait G est envisagé comme un groupe transitif de permutations de l'ensemble G.

Ceci étant, soient $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_s$ des groupes abstraits. On appellera *produit complet* de ces groupes le produit complet de leurs représentations régulières. Ce produit complet, qui est un groupe de permutations de l'ensemble produit $\Gamma = \Gamma_1 \times \Gamma_2 \times \ldots \times \Gamma_s$, sera toujours noté par le même symbole:

$$\mathfrak{G} = \Gamma_1 \circ \Gamma_2 \circ \cdots \circ \Gamma_s$$

que le produit complet des groupes de permutations.

Quelquefois on aura à considérer ce groupe comme un groupe abstrait. Dans ce cas, il sera noté

$$\mathfrak{G}_{\mathrm{abs}} = (\Gamma_1 \circ \Gamma_2 \circ \cdots \circ \Gamma_s)_{\mathrm{abs}}.$$

Dans le cas envisagé, en vertu de l'identification indiquée plus haut, M_i coïncide avec Γ_i. Ainsi,

$$A = [a(x^0), a(x^1), \ldots, a(x^{s-1})]$$

étant un tableau de $\mathfrak{G}$, l'argument x^{i-1} de $a(x^{i-1})$ parcourt $\Gamma^{i-1} = \Gamma_1 \times \Gamma_2 \times \ldots \times \Gamma_{i-1}$. D'autre part, puisque $a(x^{i-1})$ est une permutation de l'ensemble Γ_i, appartenant à la représentation régulière du groupe Γ_i, en vertu de la même identification, $a(x^{i-1})$ peut être considéré comme un élément du groupe abstrait Γ_i. Alors, pour tout $x_i \in \Gamma_i$, le transformé $a(x^{i-1}) \cdot x_i$ de x_i par la permutation $a(x^{i-1})$ est égal au composé $a(x^{i-1})x_i$ de $a(x^{i-1})$ et de x_i dans

*) La première communication, comprenant l'introduction, les notations et les §§ 1—2, a paru dans *ces Acta*, 13 (1950), p. 208—230. La dernière communication paraîtra prochainement.

Γ_i. Ainsi, dans ce cas particulier, on peut supprimer le signe $\cdot$ dans les formules, et on a

$$[a(x^0), a(x^1), \ldots, a(x^{s-1})] \cdot (x_1, x_2, \ldots, x_s) = (a(x^0)x_1, a(x^1)x_2, \ldots, a(x^{s-1})x_s)$$

et

$$[a, a(x_1), a(x_1, x_2), \ldots, a(x_1, x_2, \ldots, x_{s-1})][b, b(x_1), b(x_1, x_2), \ldots, b(x_1, x_2, \ldots, x_{s-1})] =$$
$$= [ab, a(bx_1)\, b(x_1), a(bx_1, b(x_1)\, x_2)\, b(x_1, x_2), \ldots, a(bx_1, b(x_1)x_2, \ldots,$$
$$b(x_1, x_2 \ldots x_{s-2})x_{s-1})\; b\,(x_1, x_2, \ldots, x_{s-1})].$$

D'ailleurs, sans parler du produit complet de groupes de permutations, on pourrait définir directement le produit complet des groupes abstraits, comme le groupe des tableaux

$$[a, a(x_1), \ldots, a(x_1, x_2, \ldots, x_{s-1})] \quad (x_i \in \Gamma_i,\ a(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}) \in \Gamma_i)$$

avec la loi de composition qu'on vient d'écrire.

Soient $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_s$ des groupes abstraits (dont aucun ne se réduit à son unité e_i) d'ordres finis $n_1, n_2, \ldots, n_s$. Comme, pour la représentation régulière, e degré de Γ_i est égal à son ordre n_i, l'ordre de $\mathfrak{G} = \Gamma_1 \circ \Gamma_2 \circ \cdots \circ \Gamma_s$ est

$$n_1 n_2^{n_1} n_3^{n_1 n_2} \ldots n_s^{n_1 n_2 \ldots n_{s-1}}.$$

Il est à remarquer, que si $s>1$, cet ordre est plus grand que le degré $n_1 n_2 \ldots n_s$ de $\mathfrak{G}$.

Ceci montre que si $i>1$, $(\mathfrak{G}^i)_{\text{abs}} \circ ({}^i\mathfrak{G})_{\text{abs}}$ n'est pas en général isomorphe à $\mathfrak{G}_{\text{abs}}$ (contrairement à ce qui se passe pour les groupes de permutations). En effet, si $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_s$ sont d'ordre fini, on a

$$\text{ordre}\,((\mathfrak{G}_i)_{\text{abs}} \circ ({}^i\mathfrak{G})_{\text{abs}}) = \text{ordre}\,(\mathfrak{G}^i)_{\text{abs}}\,(\text{ordre}\,({}^i\mathfrak{G})_{\text{abs}})^{\text{degré}\,(\mathfrak{G}^i)\,\text{abs}} =$$
$$= \text{ordre}\ \mathfrak{G}^i\ (\text{ordre}\ {}^i\mathfrak{G})^{\text{ordre}\,\mathfrak{G}^i}$$

car

$$\text{degré}\ (\mathfrak{G}^i)_{\text{abs}} = \text{ordre}\ \mathfrak{G}^i,$$

tandis que

$$\text{ordre}\ \mathfrak{G}_{\text{abs}} = \text{ordre}\ \mathfrak{G} = \text{ordre}\ \mathfrak{G}^i\ (\text{ordre}\ {}^i\mathfrak{G})^{\text{degré}\ \mathfrak{G}^i}$$

et, par suite,

$$\text{ordre}\ \mathfrak{G}_{\text{abs}} < \text{ordre}\ ((\mathfrak{G}^i)_{\text{abs}} \circ ({}^i\mathfrak{G})_{\text{abs}}).$$

Par contre, si $i=1$, $(\mathfrak{G}^1)_{\text{abs}} \circ ({}^1\mathfrak{G})_{\text{abs}}$ et $\mathfrak{G}_{\text{abs}}$ sont isomorphes. En effet, dans ce cas, $(\mathfrak{G}^1)_{\text{abs}} = \Gamma_1$ et, par conséquent $(\mathfrak{G}^1)_{\text{abs}} \circ ({}^1\mathfrak{G})_{\text{abs}} = \Gamma_1 \circ ({}^1\mathfrak{G})_{\text{abs}}$. D'autre part (en vertu du § 2), $\mathfrak{G}_{\text{abs}} = (\Gamma_1 \circ {}^1\mathfrak{G})_{\text{abs}} \cong \Gamma_1 \circ {}^1\mathfrak{G}$. Or, $\Gamma_1 \circ ({}^1\mathfrak{G})_{\text{abs}}$ et $\Gamma_1 \circ {}^1\mathfrak{G}$ sont les produits complets de Γ_1 et du groupe ${}^1\mathfrak{G}$, considéré dans le premier cas comme un groupe de permutations de soi-même et dans le second comme un groupe de permutations de ${}^1M = {}^1\Gamma = \Gamma_2 \times \Gamma_3 \times \cdots \times \Gamma_s$. Mais, d'une manière générale, le produit complet $\Gamma_1 \circ \Gamma_2$ de deux groupes de permutations d'ensembles $M_1 \circ M_2$ ne dépend, à une isomorphie près, que des Γ_1, M_1 et Γ_2. En effet, l'ensemble des tableaux $A = [a(x^0), a(x^1)] = [a, a(x_1)] \in \Gamma_1 \circ \Gamma_2$ ne dépend que des Γ_1, M_1 et Γ_2 en tant qu'ensembles, tandis que la loi de composition de ces tableaux ne dépend que de Γ_1, en tant que groupe de permutations de M_1, et de la loi de composition de Γ_2. On a donc bien

$$\mathfrak{G}_{abs} = (\Gamma_1 \circ {}^1\mathfrak{G})_{abs} \simeq \Gamma_1 \circ {}^1\mathfrak{G}_{abs} \simeq \Gamma_1 \circ ({}^1\mathfrak{G})_{abs} = (\mathfrak{G}^1)_{abs} \circ ({}^1\mathfrak{G})_{abs}$$

et par suite,

$$\mathfrak{G}_{abs} = (\Gamma_1 \circ \Gamma_2 \circ \cdots \circ \Gamma_s)_{abs} \simeq (\Gamma_1 \circ (\Gamma_2 \circ \cdots \circ \Gamma_s)_{abs})_{abs} \simeq (\Gamma_1 \circ (\Gamma_2 \circ (\Gamma_3 \circ \cdots)_{abs})_{abs})_{abs}.$$

En particulier, comme $\mathfrak{G}_{abs} \simeq (\Gamma_1 \circ (\Gamma_2 \circ \Gamma_3)_{abs})_{abs}$ n'est pas, en général, isomorphe à $((\mathfrak{G}^2)_{abs} \circ ({}^2\mathfrak{G})_{abs})_{abs} = ((\Gamma_1 \circ \Gamma_2)_{abs} \circ \Gamma_3)_{abs}$, l'opération $(\Gamma_1 \circ \Gamma_2)_{abs}$ n'est pas, en général, associative.

Le fait qu'un produit complet de groupes abstraits est un produit complet de groupes transitifs et *réguliers* de permutations, permet de préciser dans ce cas certaines propriétés des produits complets étudiées au § 2.

Supposons que $\mathfrak{G} = \Gamma_1 \circ \Gamma_2 \circ \cdots \circ \Gamma_s$ est le produit complet des groupes transitifs et *réguliers* $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_s$ de permutations des ensembles $M_1, M_2, \ldots, M_s$.

Soit [1]) $A = [a(x^0), a(x^1), \ldots, a(x^{s-1})]$ un tableau de $\mathfrak{G}$; Γ_j $(j = 1, 2, \ldots, s)$ étant régulier, on ne peut avoir $a(m^{j-1}).m_j = m_j$ que si $a(m^{j-1})$ est l'unité e_j de Γ_j. Par suite, $\mathfrak{G}_i\langle m\rangle$ $(m \in M)$ est le groupe des tableaux

$$A = [a(x^0), a(x^1), \ldots, a(x^{s-1})]$$

tels que, pour tout $j \leq i$, on ait $a(m^{j-1}) = e_j$. Donc, tout $\sigma \in \mathfrak{G}_i\langle m\rangle$ conserve mod D_i tout élément de la forme $(m_1, m_2, \ldots, m_{i-1}, x_i, *, *, \ldots, *)$. Si $\sigma \in \mathfrak{G}_{i-1}\langle m\rangle$, $\sigma \cdot m$ est de cette forme; donc tout $\tau \in \mathfrak{G}_i\langle m\rangle$ conserve $\sigma \cdot m$ (mod D_i) et on a $\sigma^{-1}\tau\sigma \cdot m \equiv \sigma^{-1}\cdot(\tau\sigma\cdot m) \equiv \sigma^{-1}\cdot(\sigma\cdot m) \equiv m \pmod{D_i}$, d'où $\sigma^{-1}\mathfrak{G}_i\langle m\rangle \sigma = \mathfrak{G}_i\langle m\rangle$. Ainsi, $\mathfrak{G}_i\langle m\rangle$ est invariant dans $\mathfrak{G}_{i-1}\langle m\rangle$, et on a $\mathfrak{G}_i\langle m\rangle = \mathfrak{G}_i^*\langle m\rangle$. Par conséquent,

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{G}_0\langle m\rangle \supset \mathfrak{G}_1\langle m\rangle \supset \cdots \supset \mathfrak{G}_s\langle m\rangle$$

est une suite de composition (incomplète) de $\mathfrak{G}$ *telle que, pour tout* $i = 1, 2, \ldots, s$, $\mathfrak{G}_{i-1}\langle m\rangle / \mathfrak{G}_i\langle m\rangle$ *soit isomorphe à* Γ_i (l'isomorphie étant réalisée par $\sigma \longrightarrow \sigma_i(m^{i-1})$).

Soit [2]) G un sous-groupe de $\mathfrak{G}$. Le groupe $G_i\langle m\rangle = G \cap \mathfrak{G}_i\langle m\rangle$ est alors invariant dans $G_{i-1}\langle m\rangle$. Ainsi,

$$G = G_0\langle m\rangle \supset G_1\langle m\rangle \supset \cdots \supset G_s\langle m\rangle$$

est une suite de composition (incomplète) de G *et* $\sigma \longrightarrow \sigma_i(m^{i-1})$ *réalise une isomorphie de* $G_{i-1}\langle m\rangle / G_i\langle m\rangle$ *sur le sous-groupe* $\bar{\Gamma}_i$ *de* Γ_i (défini au § 2, alinéa 4).

En particulier ces deux énoncés s'appliquent au cas du produit complet des groupes abstraits.

Quand les Γ_i sont des groupes abstraits, il existe dans $M = \Gamma = \Gamma_1 \times \Gamma_2 \times \cdots \times \Gamma_s$ *un élément canonique,* à savoir l'élément

$$e = (e_1, e_2, \ldots, e_s),$$

---

[1]) Voir § 2, alinéa 3.

[2]) Voir § 2, alinéa 4.

qui n'est autre chose, quand on considère Γ comme le produit direct des groupes Γ_i, que l'unité de Γ. On notera $G_i<e>$ simplement G_i, et la suite canonique

$$G = G_0 \supset G_1 \supset \cdots \supset G_s$$

de G associée à e en sera dite *la suite canonique* tout court.

Nous avons défini au § 2 (alinéa 4) deux m-identifications: une m-identification de $G_{i-1}<m>/G_i<m>$ avec un sous-ensemble $\overline{M}_i$ de M_i, qui identifie $x_i \in \overline{M}_i$ avec l'ensemble des $\sigma \in G_{i-1}<m>$ tels que $(\sigma.m)_i = x_i$, et une m-identification de $G_{i-1}<m>/G_i^*<m>$ avec un sous-groupe $\overline{\Gamma}_i$ de Γ_i, qui identifie un $\sigma_i \in \Gamma_i$ avec l'ensemble des $\sigma \in G_{i-1}<m>$ tels que $\sigma_i(m^{i-1}) = \sigma_i$. La seconde identification prolongeait la première en ce sens que si $X_i \in G_{i-1}<m>/G_i<m>$ et $\Sigma_i \in G_{i-1}<m>/G_i^*<m>$ sont identifiés respectivement avec $x_i \in M_i$ et $\sigma_i \in \Gamma_i$, $\Sigma_i X_i$ l'est avec $\sigma_i \cdot x_i$.

Dans le cas du produit complet des groupes abstraits, on a $M_i = \Gamma_i$ et $G_i^*<m> = G_i<m>$. Ainsi, toutes les deux m-identifications considérées sont des identifications de $G_{i-1}<m>/G_i<m>$ avec des sous-ensembles de Γ_i. Soient $\overline{X}_i, \overline{\overline{X}}_i$ les éléments de Γ_i avec lesquels un $X_i \in G_{i-1}<m>/G_i<m>$ s'identifie dans la première et dans la seconde m-identification; par définition, si $\sigma \in X_i$, on a $\overline{X}_i = \sigma_i(m^{i-1}) \cdot m_i = \sigma_i(m^{i-1}) m_i$, et, en vertu de ce qui précède, pour tous les $X_i, Y_i \in G_{i-1}<m>/G_i<m>$ on a

$$\overline{X_i Y_i} = \overline{\overline{X}}_i \cdot \overline{Y}_i = \overline{\overline{X}}_i \overline{Y}_i.$$

En particulier, si l'on pose dans cette égalité $Y_i = G_i<m>$, on a $X_i Y_i = X_i$ et, puisque l'unité de G appartient à $G_i<m> = Y_i$, on a $\overline{Y}_i = e_i(m^{i-1}) m_i = e_i m_i = m_i$; donc la formule précédente devient

$$\overline{X}_i = \overline{\overline{X}}_i m_i.$$

Ainsi en général $\overline{X}_i \neq \overline{\overline{X}}_i$, autrement dit, après l'identification habituelle de Γ_i avec sa représentation régulière, les deux m-identifications deviennent en général différentes. Toutefois, elles coïncident si $m_i = e_i$, et dans ce cas seulement. Par conséquent, les deux m-identifications de $G_{i-1}<m>/G_i<m>$ avec deux sous-ensembles de Γ_i coïncident, pour tous les $i = 1, 2, \ldots, s$, si, et seulement si, m est l'élément canonique $e = (e_1, e_2, \ldots, e_s)$ de $\Gamma = \Gamma_1 \times \Gamma_2 \times \cdots \times \Gamma_s$. Ainsi, si $m = e$, on a $\overline{M}_i = \overline{\Gamma}_i$, et il n'y a qu'une seule e-identification de G_{i-1}/G_i avec $\overline{\Gamma}_i$, qui sera dite *l'identification canonique de G_{i-1}/G_i avec $\overline{\Gamma}_i$*. Dorénavant, on n'emploiera pour les sous-groupes du produit complet des groupes abstraits que la suite canonique (associée à e).

Nous avons vu (§ 2, alinéa 4), que G est un sous-groupe transitif de $\mathfrak{G}$ si, et seulement si $\overline{\Gamma}_i$ est, pour $i = 1, 2, \ldots, s$, un sous-groupe transitif de Γ_i. Or, Γ_i étant supposé régulier, aucun sous-groupe propre de Γ_i n'est transitif, d'où il résulte que G est transitif si, et seulement si $\overline{\Gamma}_i = \Gamma_i$ $(i = 1, 2, \ldots, s)$. Ainsi, *les sous-groupes transitifs G du produit complet $\mathfrak{G} = \Gamma_1 \circ \Gamma_2 \circ \cdots \circ \Gamma_s$ des groupes abstraits $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_s$ sont caractérisés par* *le fait que, pour tout* $i=1,2,\ldots,s$, *l'homomorphisme* $\sigma\longrightarrow\sigma_i(e^{i-1})$ *applique sur* Γ_i *le terme* G_{i-1} *de la suite canonique*

$$G=G_0\supset G_1\supset\cdots\supset G_s$$

de G.

§. 4. Théorèmes d'immersion.

1. Soient G et F deux groupes abstraits, et soient

$$G=G_0\supset G_1\supset\ldots\supset G_s,\quad F=F_0\supset F_1\supset\ldots\supset F_s$$

deux suites de sous-groupes de G et de F. Supposons que les ensembles des classes à droite G_{i-1}/G_i et F_{i-1}/F_i $(i=1,2,\ldots,s)$ soient identifiés d'une manière bien déterminée avec un même ensemble abstrait M_i. On notera m_i (resp. m'_i) l'élément de M_i identifié avec la classe G_i (resp. la classe F_i).

A tout élément $\sigma\in G_{i-1}$ correspond dans la représentation de G_{i-1} à l'aide de G_i une certaine permutation de l'ensemble G_{i-1}/G_i et, par suite, en vertu de l'identification de G_{i-1}/G_i avec M_i, une certaine permutation σ_i^* de M_i. De même, à tout $\tau\in F_{i-1}$ correspond, de la même manière, une permutation τ_i^* de M_i. On désignera par Γ_i (resp. Φ_i) le groupe des permutations de M_i, qui correspondent aux éléments de G_{i-1} (resp. F_{i-1}).

Ces identifications étant posées, *un homomorphisme* $\sigma\rightarrow\bar\sigma$ *de* G *dans* F *sera dit un* $(M_1, M_2,\ldots,M_s)$*-homomorphisme, si, pour* $i=1,2,\ldots,s$,

a) l'image $\overline{G}_i$ *de* G_i *est un sous-groupe de* F_i (l'image d'une classe X_i dans G_{i-1} suivant G_i est alors contenue dans une certaine classe dans F_{i-1} suivant F_i, qui sera dite sa *classe correspondante* et qui sera désignée par $(\overline{X}_i)$);

b) toute classe $X_i\in G_{i-1}/G_i$ *et sa classe correspondante* $(\overline{X}_i)\in F_{i-1}/F_i$ *sont identifiées avec un même élément de* M_i;

c) Pour tout $\sigma\in G_{i-1}$, *la permutation* σ_i^* *de* M_i *qui lui correspond est la même que celle* $\bar\sigma_i^*$ *qui correspond à son image* $\bar\sigma$.

Il résulte de la définition précédente que s'il existe un $(M_1, M_2,\ldots, M_s)$-homomorphisme de G dans F, Γ_i est un sous-groupe de Φ_i $(i=1,2,\ldots,s)$ et $m=m'$.

2. Soit G un groupe abstrait, et soit

$$G=G_0\supset G_1\supset\ldots\supset G_s$$

une suite de sous-groupes de G. Pour tout $i=1,2,\ldots,s$, choisissons, dans toute classe $X_i\in G_{i-1}/G_i$, un représentant $r(X_i)\in G_{i-1}$. (rX_i) sera dit une *fonction représentative des* G_{i-1}/G_i *dans* G.

L e m m e 1. *Toute classe* $X\in G/G_s$ *s'écrit, et d'une seule manière, sous la forme*

$$X=r(X_1)\,r(X_2)\ldots r(X_s)\,G_s,$$

où les X_i *sont des éléments convenables des* G_{i-1}/G_i *correspondants.*

D é m o n s t r a t i o n. Démontrons ce lemme par induction par rapport à s. Supposons que chaque classe Y suivant G_{s-1} puisse être écrite, et d'une seule manière, sous la forme

$$Y = r(X_1)\, r(X_2) \ldots r(X_{s-1})\, G_{s-1}.$$

En particulier, ceci est vrai pour $Y = XG_{s-1}$; donc il existe des $X_i \in G_{i-1}/G_i$ $(i = 1, 2, \ldots, s-1)$ tels que $XG_{s-1} = r(X_1)\, r(X_2) \ldots r(X_{s-1})\, G_{s-1}$ et, si $XG_{s-1} = r(X'_1)\, r(X'_2) \ldots r(X'_{s-1})\, G_{s-1}$, on a $X'_i = X_i$ pour $i = 1, 2, \ldots, s-1$. Donc, la classe $[r(X_1)\, r(X_2) \ldots r(X_{s-1})]^{-1} X$ suivant G_s est contenue dans G_{s-1}, et cette classe est un élément $X_s = r(X_s)\, G_s$ de G_{s-1}/G_s; par suite, on a

$$X = r(X_1)\, r(X_2) \ldots r(X_{s-1})\, X_s = r(X_1)\, r(X_2) \ldots r(X_{s-1})\, r(X_s)\, G_s.$$

Si
$$X = r(X_1)\, r(X_2) \ldots r(X_{s-1})\, r(X'_s)\, G_s,$$
on a
$$X'_s = r(X'_s)\, G_s = [r(X_1)\, r(X_2) \ldots r(X_{s-1})]^{-1} X = X_s, \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

x_i étant un élément de M_i, on désignera par $\varrho(x_i)$ le représentant $r(X_i)$ de la classe $X_i \in G_{i-1}/G_i$ identifiée avec x_i. $\varrho(x_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, s;\ x_i \in M_i)$ sera dit une *fonction représentative des* M_i *dans* G. En vertu du lemme précédent, toute classe $X \in G/G_s$ se met, et d'une seule manière, sous la forme

$$X = \varrho(x_1)\, \varrho(x_2) \ldots \varrho(x_s)\, G_s.$$

On appellera les x_i *les coordonnées de* X. M étant l'ensemble produit $M_1 \times M_2 \times \times \ldots \times M_s$ des M_i, la correspondance $X \to \theta \cdot X = (x_1, x_2, \ldots, x_s)$ est une application biunivoque de G/G_s sur M. Il est à remarquer que θ dépend de la fonction représentative $\varrho(x_i)$. D'autre part, la fonction représentative détermine θ univoquement. Par suite, quand on aura à considérer plusieurs fonctions représentatives $\varrho(x_i)$, $\varrho'(x_i)$, $\varrho''(x_i), \ldots$, on notera les applications θ qui leur correspondent par $\theta_\varrho, \theta_{\varrho'}, \theta_{\varrho''}, \ldots$. On omettra l'indice quand il n'y aura pas de confusion possible. L'image $(\theta \cdot X)^i = (x_1, x_2, \ldots x_i) \in M^i$ de $\theta \cdot X$ par $x \to x^i$ ne dépend évidemment que de XG_i, et inversement, car $XG_i = = \varrho(x_1)\, \varrho(x_2) \ldots \varrho(x_i)\, G_i$.

Considérons la représentation de G à l'aide de son sous-groupe G_s. A la permutation $X \to \sigma X$ $(\sigma \in G,\ X \in G/G_s)$ de G/G_s, image de σ par cette représentation, correspond, par l'application θ, la permutation $\bar{\sigma} = \theta \sigma \theta^{-1} = = \{\theta \cdot X \to \theta \cdot \sigma X\} = \{(x_1, x_2, \ldots, x_s) \to ((\theta \cdot \sigma X)_1,\ (\theta \cdot \sigma X)_2, \ldots, (\theta \cdot \sigma X)_s)\}$ de M. Montrons que $\bar{\sigma}$ *est une permutation de* M *satisfaisant aux conditions* 1 *et* 2 *du* § 1 *relativement aux groupes de permutations* $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_s$ *des ensembles* $M_1, M_2, \ldots, M_s$, et que, par conséquent, $\bar{\sigma}$ *est un élément du produit complet* $\mathfrak{G} = \Gamma_1 \circ \Gamma_2 \circ \ldots \circ \Gamma_s$.

En effet, $(\sigma X)G_i$ ne dépend, pour σ fixe, que de XG_i $(i = 1, 2, \ldots, s)$ et, par suite, $(\theta \cdot \sigma X)^i$ ne dépend que de $(\theta \cdot X)^i$, ce qui montre que la condition 1 est remplie.

Considérons tous les $X \in G/G_s$, tels que $(\theta \cdot X)^{i-1}$ soit un élément fixe $t^{i-1} = (t_1, t_2, \ldots, t_{i-1})$ de M^{i-1}. Pour tout X de cette famille, XG_i a la forme

$$XG_i = \varrho(t_1)\,\varrho(t_2)\ldots\varrho(t_{i-1})\,X_i$$

où $X_i = \varrho(x_i)G_i$ est un élément de G_{i-1}/G_i. Donc x_i est l'élément de M_i identifié avec X_i. Il existe, en vertu du lemme précédent, un élément $(t'_1, t'_2, \ldots, t'_{i-1})$ de M^{i-1} (ne dépendant, pour un σ fixe, que de $t^{i-1} = (t_1, t_2, \ldots, t_{i-1})$), tel qu'on ait

$$\sigma\varrho(t_1)\,\varrho(t_2)\ldots\varrho(t_{i-1})\,G_{i-1} = \varrho(t'_1)\,\varrho(t'_2)\ldots\varrho(t'_{i-1})\,G_{i-1},$$

d'où

$$\sigma\varrho(t_1)\,\varrho(t_2)\ldots\varrho(t_{i-1}) = \varrho(t'_1)\,\varrho(t'_2)\ldots\varrho(t'_{i-1})\,\sigma_i(t^{i-1}),$$

où $\sigma_i(t^{i-1})$ est un élément de G_{i-1}, ne dépendant que de σ et de t^{i-1}. On a

$$\sigma XG_i = \varrho(t'_1)\,\varrho(t'_2)\ldots\varrho(t'_{i-1})\,\sigma_i(t^{i-1})\,X_i,$$

et $\sigma_i(t^{i-1})\,X_i$ est un élément de G_{i-1}/G_i. Ainsi,

$$(\theta\cdot\sigma X)^i = (t'_1, t'_2, \ldots, t'_{i-1}, x'_i)$$

où x'_i est l'élément de M_i identifié avec $\sigma_i(t^{i-1})X_i$; visiblement $\bar{\sigma}_i(t^{i-1})$, c'est-à-dire la permutation induite par σ de la i-ième coordonnée des $x \in M$ tels que $x^{i-1} = t^{i-1}$, est précisément $x_i \to x'_i$. Mais c'est la permutation $(\sigma_i(t^{i-1}))^*$ de M_i qui correspond à la permutation $X_i \to \sigma_i(t^{i-1})\,X_i$ $(X_i \in G_{i-1}/G_i)$ de G_{i-1}/G_i induite dans G_{i-1}/G_i par $\sigma_i(t^{i-1}) \in G_{i-1}$. $(\sigma_i(t^{i-1}))^* = \bar{\sigma}_i(t^{i-1})$ est donc un élément de Γ_i ne dépendant que de t^{i-1}, ce qui montre que $\bar{\sigma}$ satisfait à la condition 2.

Ainsi, étant donné, pour tout i, une identification fixe de G_{i-1}/G_i avec l'ensemble M_i (ce qui définit, pour chaque i, un groupe de permutations Γ_i de M_i), *le choix d'une fonction représentative des M_i dans G détermine univoquement un homomorphisme*

$$\sigma \to \bar{\sigma} = \theta\,\{X \to \sigma X\}\,\theta^{-1} \qquad (X \in G/G_s)$$

de G dans le produit complet

$$\mathfrak{G} = \Gamma_1 \circ \Gamma_2 \circ \cdots \circ \Gamma_s$$

de ces groupes Γ_i. Cet homomorphisme sera dit le ϱ-homomorphisme de G dans $\mathfrak{G}$.

Le noyau de cet homomorphisme est le plus grand sous-groupe $G^*_{s,0}$ de G_s invariant dans G. *C'est donc un isomorphisme si, et seulement si G_s est anti-invariant dans G.*

L'image $\bar{G}$ de G par un ϱ-homomorphisme est un sous-groupe *transitif* de $\mathfrak{G} = \Gamma_1 \circ \Gamma_2 \circ \cdots \circ \Gamma_s$.

3. Une fonction représentative sera dite *normée*, si, pour $i = 1, 2, \ldots, s$, le représentant $\varrho(m_i)$ de l'élément $m_i \in M_i$ identifié avec G_i est l'unité de G. Si $\varrho(x_i)$ est une fonction représentative normée des M_i dans G, le ϱ-homomorphisme de G dans $\mathfrak{G}$ sera aussi dit *normé*.

Considérons l'élément $m = (m_1, m_2, \ldots, m_s)$ de M, et appelons le *l'élément distingué de M*. Au §2 nous avons défini une suite

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{G}_0\langle m\rangle \supset \mathfrak{G}_1\langle m\rangle \supset \cdots \supset \mathfrak{G}_s\langle m\rangle$$

de sous-groupes de $\mathfrak{G} = \Gamma_1 \circ \Gamma_2 \circ \cdots \circ \Gamma_s$, associée à m, ainsi qu'une identification, dite m-identification, de $\mathfrak{G}_{i-1}\langle m\rangle/\mathfrak{G}_i\langle m\rangle$ avec M_i $(i = 1, 2, \ldots, s)$.

Ces identifications étant posées, montrons que, *si ϱ est une fonction représentative normée, le ϱ-homomorphisme de G dans $\mathfrak{G}$ est un $(M_1, M_2, \ldots, M_s)$-homomorphisme.*

a) pour $i = 1, 2, \ldots, s$, on a $\bar{G}_i = \mathfrak{G}_i\langle m\rangle \cap \bar{G} = \bar{G}_i\langle m\rangle$ (où $\bar{G}_i$ est l'image de G_i par le ϱ-homomorphisme), donc en particulier $\bar{G}_i \subset \mathfrak{G}_i\langle m\rangle$.

En effet, on a

$$G_i = \varrho(m_1)\,\varrho(m_2)\cdots\varrho(m_i)\,G_i$$

car, pour tout i, $\varrho(m_i)$ est l'unité de G.

Ainsi, on a $(\theta\cdot X)^i = m^i$ si, et seulement si $X \in G/G_s$ est contenu dans G_i. On a $\theta\cdot G_s = m$. D'autre part, comme pour tout $X \in G/G_s$ on a $\bar{\sigma}\cdot(\theta\cdot X) = \theta\cdot(\sigma X)$, on voit que $(\bar{\sigma}\cdot m)^i = (\theta\cdot\sigma G_s)^i$. Ainsi, on a $(\bar{\sigma}\cdot m)^i = m^i$ si, et seulement si $\sigma G_s \subset G_i$, c'est-à-dire $\sigma \in G_i$. Comme, par definition de $\mathfrak{G}_i\langle m\rangle$, on a $\bar{\sigma} \in \mathfrak{G}_i\langle m\rangle$ si, et seulement si $(\bar{\sigma}\cdot m)^i = m^i$, on voit que $\bar{G}_i\langle m\rangle = \mathfrak{G}_i\langle m\rangle \cap \bar{G}$ est l'image $\bar{G}_i$ de G_i par l'homomorphisme $\sigma \longrightarrow \bar{\sigma}$.

b) L'image $\bar{X}_i$ d'une classe $X_i \in G_{i-1}/G_i$ identifiée avec un $x_i \in M_i$ est contenue dans la classe dans $\mathfrak{G}_{i-1}\langle m\rangle$ suivant $\mathfrak{G}_i\langle m\rangle$, identifiée avec le même élément x_i.

En effet, soit $\sigma \in X_i$ et soit $X = \sigma G_s$. x_i étant l'élément de M_i identifié avec X_i, on a

$$X_i = \varrho(x_i)\,G_i = \varrho(m_1)\,\varrho(m_2)\cdots\varrho(m_{i-1})\,\varrho(x_i)\,G_i$$

(car tous les $\varrho(m_i)$ coïncident avec l'unité de G), d'où $\theta\cdot X = (m_1, m_2, \cdots, m_{i-1}, x_i, *, *, \ldots, *)$ et $(\theta\cdot X)_i = x_i$. De $\bar{\sigma}\cdot m = \theta\cdot\sigma G_s = \theta\cdot X$ il résulte que $(\bar{\sigma}\cdot m)_i = (\theta\cdot X)_i = x_i$. Par suite, en vertu de la définition de la m-identification, $\bar{\sigma}$ se trouve dans une classe suivant $\mathfrak{G}_i\langle m\rangle$ identifiée avec x_i, ce qui prouve l'affirmation.

c) Si $\sigma \in G_{i-1}$, les permutations σ_i^* et $\bar{\sigma}_i^*$ de M_i qui correspondent aux σ, $\bar{\sigma}$, coïncident.

En effet, la permutation σ_i^* de M_i correspondant à un $\sigma \in G_{i-1}$ est visiblement $(\theta\cdot X)_i \longrightarrow (\theta\cdot\sigma X)_i = (\bar{\sigma}\cdot(\theta\cdot X))_i$, où X parcourt G_{i-1}/G_s.

D'autre part, la permutation $\bar{\sigma}_i^*$ de M_i qui correspond à $\bar{\sigma}$ (on a déjà montré que $\bar{\sigma}$ appartient à $\mathfrak{G}_{i-1}\langle m\rangle$) est, par définition, $x_i \longrightarrow (\bar{\sigma}\cdot x)_i$, où x parcourt l'ensemble des éléments de M, tels que $x^{i-1} = m^{i-1}$. Or, si $X \in G/G_s$, on a $(\theta\cdot X)^{i-1} = m^{i-1}$ si, et seulement si $X \in G_{i-1}/G_s$, ce qui montre que $\sigma_i^* = \bar{\sigma}_i^*$ [3]).

[3]) Ainsi, la condition: "la fonction représentative $\varrho(x_i)$ des M_i dans G est normée" est une condition suffisante pour que le ϱ-homomorpisme de G dans $\mathfrak{G}$ soit un $(M_1, M_2, \ldots, M_s)$-homomorphisme.

Elle n'est pas nécessaire. La condition nécessaire et suffisante à laquelle doit satisfaire $\varrho(x_i)$ pour que le ϱ-homomorphisme soit un $(M_1, M_2, \ldots, M_s)$-homomorphisme est la suivante: "pour tout $i = 1, 2, \ldots, s$, l'élément $\varrho(m_1)\,\varrho(m_2)\ldots\varrho(m_{i-1})$ de G appartient au plus grand sous-groupe de G_i invariant dans G_{i-1}".

D'autre part, si la fonction représentative $\varrho(x_i)$ est quelconque on peut montrer que le ϱ-homomorphisme ne diffère d'un $(M_1, M_2, \ldots, M_s)$-homomorphisme que par un automorphisme intérieur convenable de $\bar{G}$.

4. Soit $\tilde{\Gamma}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, s)$ un groupe de permutations de M_i contenant Γ_i. On a vu au § 1 que $\tilde{\mathfrak{G}} = \tilde{\Gamma}_1 \circ \tilde{\Gamma}_2 \circ \cdots \circ \tilde{\Gamma}_s$ est un sur-groupe de $\mathfrak{G} = \Gamma_1 \circ \Gamma_2 \circ \cdots \circ \Gamma_s$. ϱ étant une fonction représentative des M_i dans G, le ϱ-homomorphisme de G dans $\mathfrak{G}$ est donc aussi un homomorphisme de G dans $\tilde{\mathfrak{G}}$, et l'image $\bar{G}$ de G par cet homomorphisme est un sous-groupe transitif de $\tilde{\mathfrak{G}}$. Si ϱ est une fonction représentative normée, c'est visiblement aussi un $(M_1, M_2, \ldots, M_s)$-homomorphisme de G dans $\tilde{\mathfrak{G}}$.

Résumant les résultats du § 2, alinéas 3 et 4, et ceux qu'on vient de développer dans le présent paragraphe, nous pouvons énoncer le théorème suivant:

Théorème 1. *Tout sous-groupe transitif G du produit complet*

$$\mathfrak{G} = \Gamma_1 \circ \Gamma_2 \circ \cdots \circ \Gamma_s$$

des groupes de permutations $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_s$ des ensembles $M_1, M_2, \ldots, M_s$ possède une suite de sous-groupes

$$G = G_0 \supset G_1 \supset G_2 \supset \cdots \supset G_s,$$

telle que 1) *G_s est anti-invariant dans G,* 2) *la représentation de G_{i-1} à l'aide de son sous-groupe G_i est, après une identification canonique convenable de G_{i-1}/G_i avec M_i, un sous-groupe transitif $\bar{\Gamma}_i$ de Γ_i $(i = 1, 2, \ldots, s)$.*

Inversement, si H est un groupe abstrait possédant une suite de sous-groupes

$$H = H_0 \supset H_1 \supset H_2 \supset \cdots \supset H_s$$

telle que 1) *H_s est anti-invariant dans H,* 2) *pour tout i, la représentation de H_{i-1} à l'aide de son sous-groupe H_i peut être identifiée, par une identification de H_{i-1}/H_i avec M_i, avec un sous-groupe de Γ_i, alors H est, $(M_1, M_2, \ldots, M_s)$-isomorphe à un sous-groupe transitif du produit complet $\mathfrak{G} = \Gamma_1 \circ \Gamma_2 \circ \cdots \circ \Gamma_s$.*

Remarque I. Le théorème montre que $\mathfrak{G}$ est, en quelque sorte, un *groupe universel* pour les groupes possédant les propriétés 1 et 2 (énoncées dans le théorème).

Remarque II. Si le groupe H_s n'est pas anti-invariant dans H, H est $(M_1, M_2, \ldots, M_s)$-homomorphe à un sous-groupe transitif de $\mathfrak{G}$, et le noyau de cet homomorphisme est le plus grand sous-groupe $H^*_{s,0}$ de H_s invariant dans H.[4])

---

[4]) O. Ore a démontré dans son travail "Theory of monomial groups", *Transactions Amer. Math. Soc.*, 51 (1942), p. 15-64, que si $G \supset M \supset N$ est une suite de sous-groupes d'un groupe G, telle que N soit invariant dans M, il existe un homomorphisme de G dans un groupe qui n'est autre chose, (si l'on emploie notre terminologie) que le produit complet du groupe $S_{G/M}$ de toutes les permutations de G/M et de la représentation régulière du groupe abstrait M/N.

Ce résultat est un cas particulier du nôtre, quand on pose $s = 2, H_1 = M, H_2 = N$, $M_1 = G/M$, $\Gamma_1 = S_{G/M}$, $M_2 = M/N$, $\Gamma_2 =$ la représentation régulière de M/N.

D'ailleurs, la démonstration de O. Ore n'est pas, au fond, différente, dans ce cas particulier, de la nôtre, et, $\bar{\Gamma}_1$ étant la représentation de G à l'aide de M, elle montre implicitement que G est homomorphe avec un sous-groupe de $\bar{\Gamma}_1 \circ \Gamma_2$.

Remarque III. Les alinéas 3 et 4 du présent paragraphe montrent que si l'on choisit une fonction représentative ϱ des M_i dans H, l'homomorphisme de H dans $\mathfrak{G}$ (qui est une *immersion* quand H_s est anti-invariant dans H) peut être effectué d'une manière canonique.

Remarque IV. Les groupes $\overline{\Gamma}_i$ peuvent être définis pour n'importe quel sous-groupe G de $\mathfrak{G}$, et leur transitivité pour tout i, est la condition nécéssaire et suffisante pour la transitivité de G.

5. Soit G un groupe abstrait et soit

$$G = G_0 \supset G_1 \supset \ldots \supset G_s$$

une suite de composition (incomplète) de G. Identifions, d'une manière bien déterminée, chaque groupe G_{i-1}/G_i $(i = 1, 2, \ldots, s)$ avec un groupe abstrait Γ_i. De cette manière, en particulier, l'ensemble G_{i-1}/G_i est identifié avec l'ensemble Γ_i, et si l'on prolonge cette identification aux permutations de ces ensembles, la représentation régulière de G_{i-1}/G_i est identifiée avec celle de Γ_i.

On peut donc considérer cette identification comme un cas particulier de l'alinéa 1 du présent paragraphe, en prenant comme M_i l'ensemble Γ_i. Alors le groupe Γ_i de l'alinéa 1 n'est autre chose que la représentation régulière du groupe qu'on a désigné ici par la même lettre. Ainsi, la permutation σ_i^* de Γ_i qui correspond à un $\sigma \in G_{i-1}$ coïncide, dans ce cas, avec l'élément de la représentation régulière de Γ_i identifié avec σG_i.

Toutefois, l'identification de G_{i-1}/G_i avec l'ensemble $M_i = \Gamma_i$ n'est pas quelconque, comme c'était le cas dans l'alinéa 1, car l'élément m_i de $M_i = \Gamma_i$ identifié avec G_i n'est pas arbitraire mais est l'unité e_i de Γ_i.

Soit

$$F = F_0 \supset F_1 \supset \ldots \supset F_s$$

une suite de composition (incomplète) d'un autre groupe abstrait F, telle que le groupe F_{i-1}/F_i $(i=1, 2, \ldots, s)$ soit isomorphe avec Γ_i et soit identifié, d'une manière bien déterminée, avec ce groupe, Alors, comme on a vu, l'ensemble F_{i-1}/F_i est identifié, d'une manière bien déterminée, avec l'ensemble $M_i = \Gamma_i$.

Cela étant, un homomorphisme $\sigma \to \bar{\sigma}$ de G dans F sera dit un $(\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_s)$-homomorphisme, si, avec de tels M_i, il est un $(M_1, M_2, \ldots, M_s)$-homomorphisme. Plus précisément, $\sigma \to \bar{\sigma}$ est un $(\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_s)$-homomorphisme si:

a) l'image $\overline{G}_i$ de G_i est un sous-groupe de F_i $(i = 1, 2, \ldots, s)$,

b) une classe X_i dans G_{i-1} suivant G_i et la classe $(\overline{X}_i)$ dans F_{i-1} suivant F_i, qui contient l'image $\overline{X}_i$ de X_i, sont identifiées avec le même élément de Γ_i.

La condition qui, dans notre cas, correspond à la condition *c*) de l'alinéa 1, est une conséquence de la condition *b*). En effet si l'on pose $X_i = \sigma G_i$ et $(\overline{X}_i) = \bar{\sigma} F_i$, σ_i^* et $\bar{\sigma}_i^*$ sont les représentations régulières des éléments de Γ_i identifiés avec X_i et $(\overline{X}_i)$, c'est-à-dire avec le même élément de Γ_i.

$\varrho(x_i)$ $(i=1,2,\ldots,s;\ x\in\Gamma_i)$ étant une fonction représentative des Γ_i dans G, il résulte du Théorème 1 qu'il existe un homomorphisme, dit ϱ-homomorphisme, de G dans le produit complet $\mathfrak{G}=\Gamma_1\circ\Gamma_2\circ\cdots\circ\Gamma_s$ des groupes *abstraits* $\Gamma_1,\Gamma_2,\ldots,\Gamma_s$. Si ϱ est une fonction représentative normée et si

$$\mathfrak{G}=\mathfrak{G}_0\supset\mathfrak{G}_1\supset\ldots\supset\mathfrak{G}_s$$

est la suite canonique de $\mathfrak{G}$, le ϱ-homomorphisme est un $(\Gamma_1,\Gamma_2,\ldots,\Gamma_s)$-homomorphisme de G dans $\mathfrak{G}$ (considéré avec sa suite et ses identifications canoniques).

Si G_s est anti-invariant dans G, le ϱ-homomorphisme est, comme on a vu, un ϱ-isomorphisme.

Résumons les résultats du § 3 et celui qu'on vient d'obtenir dans le théorème suivant.

Théorème 2. *Tout sous-groupe transitif G du produit complet*

$$\mathfrak{G}=\Gamma_1\circ\Gamma_2\circ\cdots\circ\Gamma_s$$

des groupes abstraits $\Gamma_1,\Gamma_2,\ldots,\Gamma_s$ possède une suite de composition (incomplète)

$$G=G_0\supset G_1\supset G_2\supset\ldots\supset G_s$$

(à savoir sa suite canonique définie au § 3) telle que

1) G_s est anti-invariant dans G,

2) G_{i-1}/G_i devient, après l'identification canonique (définie au § 3), le groupe (Γ_i $i=1,2,\ldots,s$).

Inversement, si H est un groupe abstrait possèdant une suite de composition (incomplète)

$$H=H_0\supset H_1\supset H_2\supset\ldots\supset H_s$$

telle que

1) H_s soit anti-invariant dans H,

2) H_{i-1}/H_i soit isomorphe à un groupe abstrait Γ_i $(i=1,2,\ldots,s)$, alors H est isomorphe à un sous-groupe transitif du produit complet $\mathfrak{G}=\Gamma_1,\Gamma_2,\ldots.\Gamma_s$ des groupes abstraits $\Gamma_1,\Gamma_2,\ldots,\Gamma_s$.

Si l'on identifie, d'une manière bien déterminée, H_{i-1}/H_i avec Γ_i, il existe des isomorphismes de H avec des sous-groupes transitifs de $\mathfrak{G}$ qui sont des $(\Gamma_1,\Gamma_2,\ldots,\Gamma_s)$-isomorphismes.

Remarque 1. Le théorème montre que $\mathfrak{G}$ est, en quelque sorte, un *groupe universel pour les groupes possédant les propriétés* 1 *et* 2 (du théorème).

Si pour tout $i=1,2,\ldots,s$, le groupe quotient H_{i-1}/H_i est d'ordre fini n_i, l'ordre d'un tel groupe H divise $n_1 n_2^{n_1} n_3^{n_1 n_2}\cdots n_s^{n_1 n_2\cdots n_{s-1}}$ et il existe parmi ces groupes un, et un seul groupe, à savoir le groupe $\mathfrak{G}_{\text{abs}}$, dont l'ordre est égal à $n_1 n_2^{n_1} n_3^{n_1 n_2}\cdots n_s^{n_1 n_2\cdots n_{s-1}}$.

Remarque II. Si le groupe H_s n'est pas anti-invariant dans H, H est $(\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_s)$-homomorphe à un sous-groupe transitif de $\mathfrak{G}$, et le plus grand sous-groupe $H^*_{s,0}$ de H_s invariant dans H est le noyau de cet homomorphisme.

Remarque III. Si l'on choisit une fonction représentative ϱ des Γ_i dans G, l'homomorphisme (respectivement l'isomorphisme) de H dans $\mathfrak{G}$ peut être effectué d'une manière canonique.

Remarque IV. Les groupes $\bar{\Gamma}_i$ peuvent être définis pour n'importe quel sous-groupe G de $\mathfrak{G}$, et $\bar{\Gamma}_i = \Gamma_i$ est la condition nécessaire et suffisante pour la transitivité de G.

Remarque V. *Si $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_s$ sont des groupes simples, $\mathfrak{G} = \Gamma_1 \circ \Gamma_2 \circ \cdots \circ \Gamma_s$ est le groupe universel pour les groupes ayant une suite de composition (complète) dont la suite des groupes quotients commence par $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_s$, et dont le s-ième terme est anti-invariant.*

Remarque VI. En particulier, sous les mêmes hypothèses que dans la remarque V, tout groupe H ayant une suite de composition de longueur s, dont la suite des groupes quotients soit $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_s$, est isomorphe à un sous-groupe transitif $\bar{H}$ de $\mathfrak{G}$, et ceci de la manière que la suite de composition considérée de H soit appliquée sur la suite canonique de $\bar{H}$.

§ 5. **Théorèmes de transformation.**

Étant donné une suite

$$G = G_0 \supset G_1 \supset \cdots \supset G_s$$

de sous-groupes G_i d'un groupe abstrait G, identifions les ensembles G_{i-1}/G_i avec des ensembles abstraits M_i et les représentations de G_{i-1} à l'aide de G_i avec des groupes de permutations Γ_i des ensembles M_i, comme cela a été expliqué au § 4, alinéa 1.

Nous supposerons en outre que G_s soit anti-invariant dans G. Nous avons montré au § 4 qu'il est possible, à l'aide d'une fonction représentative $\varrho(x_i)$ des M_i dans G, d'immerger G dans le produit complet $\mathfrak{G} = \Gamma_1 \circ \Gamma_2 \circ \cdots \circ \Gamma_s$, et ceci par un procédé que nous avons appelé le ϱ-isomorphisme. Quand $\varrho(x_i)$ est une fonction représentative normée, ce ϱ-isomorphisme est un $(M_1, M_2, \ldots, M_s)$-isomorphisme par rapport à la suite

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{G}_0\langle m\rangle \supset \mathfrak{G}_1\langle m\rangle \supset \cdots \supset \mathfrak{G}_s\langle m\rangle,$$

associée à l'élément distingué m de M, et aux m-identifications de $\mathfrak{G}_{i-1}\langle m\rangle / \mathfrak{G}_i\langle m\rangle$ correspondantes [5]).

---

[5]) D'ailleurs, au cours de ce paragraphe, cet élément $m = (m_1, m_2, \ldots, m_s)$ sera supposé fixé une fois pour toutes. Ainsi, quand on parlera d'un $(M_1, M_2, \ldots, M_s)$-isomorphisme d'un groupe G dans $\mathfrak{G}$, on supposera toujours, sans l'indiquer explicitement que:

Dans le présent paragraphe nous indiquerons d'une part les relations entre les ϱ-isomorphismes pour des fonctions représentatives normées différentes, d'autre part nous déterminerons l'ensemble de tous les $(M_1, M_2, \ldots, M_s)$-isomorphismes de G dans $\mathfrak{G}$.

1. $\varrho(x_i)$ et $\tau(x_i)$ étant deux fonctions représentatives des M_i dans G, soient $\eta_\varrho = \{\sigma \to \bar{\sigma}\}$ et $\eta_\tau = \{\sigma \to \bar{\bar{\sigma}}\}$ le ϱ-et le τ-homomorphismes de G dans $\mathfrak{G} = \Gamma_1 \circ \Gamma_1 \circ \cdots \circ \Gamma_s$. Montrons que η_ϱ *ne diffère de* η_τ *que par un automorpisme intérieur de* $\mathfrak{G}$, c'est-à-dire qu'il existe un élément $\lambda \in \mathfrak{G}$ tel que, pour tout $\sigma \in G$ on ait $\lambda \bar{\sigma} \lambda^{-1} = \bar{\bar{\sigma}}$.

En effet, soient θ_ϱ et θ_τ les applications de G/G_s sur $M = M_1 \times M_2 \times \cdots \times M$, définies respectivement par les fonctions représentatives $\varrho(x_i)$ et $\tau(x_i)$. θ_ϱ ne diffère de θ_τ que par une permutation λ de l'ensemble M ($\theta_\tau = \lambda \theta_\varrho$, autrement dit, pour tout $X \in G/G_s$, on a $\theta_\tau \cdot X = \lambda \cdot (\theta_\varrho \cdot X)$). Il est bien connu qu'alors pour tout $\sigma \in G$ on a $\bar{\bar{\sigma}} = \lambda \bar{\sigma} \lambda^{-1}$. Montrons que λ *satisfait aux conditions* 1 *et* 2 *du* § 1 relativement aux groupes $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_s$, et que, par suite, λ appartient à $\mathfrak{G} = \Gamma_1 \circ \Gamma_2 \circ \ldots \circ \Gamma_s$.

On a vu que, pour tout $i = 1, 2, \ldots, s$ et pour tout $X \in G/G_i$, $(\theta_\varrho \cdot X)^i$ et $(\theta_\tau \cdot X)^i$ ne dépendent que de XG_i, et inversement. Par suite, $(\lambda \cdot (\theta_\varrho X))^i = (\theta_\tau \cdot X)^i$ ne dépend que de $(\theta_\varrho \cdot X)^i$, donc λ satisfait à la condition 1.

D'autre part, soit X un élément arbitraire de G/G_s tel que $(\theta_\varrho \cdot X)^{i-1}$ soit un élément fixe $t^{i-1} = (t_1, t_2, \ldots, t_{i-1})$ de M^{i-1}. Alors, en vertu de la condition 1, $(\theta_\tau \cdot X)^{i-1}$ est un élément fixe $(t')^{i-1} = (t'_1, t'_2, \ldots, t'_{i-1})$ de M^{i-1}, ne dépendant que de t^{i-1}. Soient

$\theta_\varrho \cdot X = (t_1, t_2, \ldots, t_{i-1}, x_i, *, *, \ldots, *)$ et $\theta_\tau \cdot X = (t'_1, t'_2, \ldots, t'_{i-1}, x'_i, *, *, \ldots, *)$.
On a

$$XG_{i-1} = \varrho(t_1)\, \varrho(t_2) \ldots \varrho(t_{i-1})\, G_{i-1} = \tau(t'_1)\, \tau(t'_2) \ldots \tau(t'_{i-1})\, G_{i-1},$$

d'où

$$\varrho(t_1)\, \varrho(t_2) \ldots \varrho(t_{i-1}) = \tau(t'_1)\, \tau(t'_2) \ldots \tau(t'_{i-1})\, \Lambda_i(t^{i-1}),$$

où $\Lambda_i(t^{i-1})$ est un élément de G_{i-1} ne dépendant que de t^{i-1}.

Soient X_i et X'_i les classes dans G_{i-1} suivant G_i identifiées avec x_i et x'_i. On a d'une part

---

a) G possède une suite $G = G_0 \supset G_1 \supset \ldots \supset G_s$ de sous-groupes et G_{i-1}/G_i $(i = 1, 2, \ldots, s)$ est identifié avec M_i de façon que G_i soit identifié avec m_i. (m sera dit l'élément distingué dans cette chaîne d'identifications),

b) il s'agit, d'un $(M_1, M_2, \ldots, M_s)$-isomorphisme relatif à cette suite de sous-groupes de G, avec les identifications considérées des G_{i-1}/G_i avec les M_i correspondants, et à la suite canonique associée à m de l'image $\bar{G}$ de G, les identifications des $\bar{G}_{i-1} < m > / \bar{G} < m >$ étant les m-identifications.

c) Quand on suppose en plus que G est un sous-groupe de $\mathfrak{G}$, on supposera que la suite $G_0 \supset G_1 \supset \ldots \supset G_s$ coïncide avec la suite canonique de G associée à m, et que les identifications des G_{i-1}/G_i avec les M_i correspondants sont les m-identifications.

$$XG_i = \varrho(t_1)\varrho(t_2)\dots\varrho(t_{i-1})X_i = \tau(t'_1)\tau(t'_2)\dots\tau(t'_i)\Lambda(t^{i-1})X_i,$$

d'autre part

$$XG_i = \tau(t'_1)\tau(t'_2)\dots\tau(t'_{i-1})X'_i;$$

d'où l'on conclut que x'_i est l'élément de M_i identifié avec $\Lambda(t^{i-1})X_i$ et que la permutation $x_i \to x'_i$ de M_i est celle qui correspond à la permutation

$$X_i \to \Lambda(t^{i-1})X_i$$

de G_{i-1}/G_i. Elle est donc un élément de Γ_i ne dépendant que de t^{i-1}. Ainsi, la condition 2 est remplie.

Soient maintenant $\varrho(x_i)$ et $\tau(x_i)$ deux fonctions représentatives normées, et soit $m = (m_1, m_2, \dots, m_s)$ l'élément distingué de M, c'est-à-dire l'élément dont les coordonnées m_i sont identifiées avec les $G_i \in G_{i-1}/G_i$ correspondants. Alors, pour tout $i = 1, 2, \dots, s$ et pour tout $x_i \in M_i$, la classe $X_i \in G_{i-1}/G_i$ s'écrit sous chacune des formes

$$X_i = \varrho(m_1)\varrho(m_2)\dots\varrho(m_{i-1})X_i = \tau(m_1)\tau(m_2)\dots\tau(m_{i-1})X_i.$$

Si $X \in G/G_s$ est tel que $XG_i = X_i \in G_{i-1}/G_i$, on a

$$(\theta_\varrho \cdot X)^i = (\theta_\tau \cdot X)^i = (m_1, m_2, \dots, m_{i-1}, x_i).$$

Par suite, dans le cas des fonctions $\varrho(x_i)$ et $\tau(x_i)$ normées, la permutation $\lambda = \theta_\tau \theta_\varrho^{-1}$ de M, dont on sait déjà qu'elle appartient à $\mathfrak{G}$, conserve mod D_i tout élément de la forme $(m_1, m_2, \dots, m_{i-1}, x_i, *, *, \dots, *)$ et, en vertu du § 3 (alinéa 5), λ appartient à $\mathfrak{G}_i^*\langle m\rangle$ (le plus grand sous-groupe de $G_i\langle m\rangle$ invariant dans $G_{i-1}\langle m\rangle$). Comme ceci doit avoir lieu pour $i = 1, 2, \dots, s$, on a $\lambda \in \bigcap_{i=1}^{s} \mathfrak{G}_i^*\langle m\rangle$.

Posons la définition suivante: Si $\mathfrak{G}$ est le produit complet $\Gamma_1 \circ \Gamma_2 \circ \dots \circ \Gamma_s$ des groupes de permutations $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_s$ des ensembles $M_1, M_2, \dots, M_s$, et si m est un élément de $M = M_1 \times M_2 \times \dots \times M_s$, l'automorphisme intérieur $\{\sigma \to \lambda\sigma\lambda^{-1}\}$ de $\mathfrak{G}$ réalisé par un élément $\lambda \in \bigcap_{i=1}^{s} \mathfrak{G}_i^*\langle m\rangle$ sera dit *propre* par rapport à m.

Deux sous-groupes H et H' de $\mathfrak{G}$ seront dits *proprement conjugués* par rapport à m, s'il existe un automorphisme intérieur propre par rapport à m qui applique H sur H'.

Si $\mathfrak{G}$ est un produit complet de groupes abstraits, $\bigcap_{i=1}^{s} \mathfrak{G}_i^*\langle m\rangle = \bigcap_{i=1}^{s} \mathfrak{G}_i\langle m\rangle$ coïncide avec $\mathfrak{G}_s\langle m\rangle$. D'autre part, en se bornant dans ce cas à l'élément canonique $m = e$ (voir § 3), on parlera *d'automorphismes intérieurs propres* tout court, quand il s'agira d'automorphismes intérieurs propres par rapport à e (ce sont des automorphismes intérieurs réalisés par des éléments λ appartenant à $\mathfrak{G}_s$).

Ceci posé, nous pouvons formuler de la manière suivante les résultats qu'on vient de démontrer:

Théorème 3. *Quand ϱ parcourt l'ensemble des fonctions représentatives normées des M_i dans G, les ϱ-isomorphismes de G dans $\mathfrak{G}$ ne diffèrent que par des automorphismes intérieurs propres de $\mathfrak{G}$ par rapport à l'élément distingué m.*

Remarque I. En particulier, *les images de G par ces ϱ-isomorphismes sont des sous-groupes de $\mathfrak{G}$ proprement conjugués par rapport à m.*

Remarque II. Si, la suite $G = G_0 \supset G_1 \supset \cdots \supset G_s$ est une suite de composition (incomplète) de G, les ϱ-isomorphismes normés de G dans le produit complet $\mathfrak{G}$ des groupes abstraits $\Gamma_i \simeq G_{i-1}/G_i$ ne diffèrent que par des automorphismes propres de $\mathfrak{G}$, et les images de G dans $\mathfrak{G}$ sont des sous-groupes proprement conjugués de $\mathfrak{G}$.

2. $\varrho(x_i)$ et $\varrho'(x_i)$ étant deux fonctions représentatives normées des M_i dans G, on a, pour $i = 1, 2, \ldots, s$ et pour tout $x_i \in M_i$,

$$\varrho'(x_i) = \varrho(x_i)\,\mu_{x_i} \quad \text{où} \quad \mu_{x_i} \in G_i,$$

et, en particulier, μ_{m_i} est l'unité de G, car ϱ et ϱ' ont été supposées normées. Montrons qu'on a le

Lemme 2: *Pour que le ϱ-isomorphisme de G dans $\mathfrak{G}$ coïncide avec le ϱ'-isomorphisme, il est nécessaire et suffisant que, pour tout $i = 1, 2, \ldots, s$ et pour tout $x_i \in M_i$, $\mu_{x_i} = \varrho(x_i)^{-1}\varrho'(x_i)$ appartienne au plus grand sous-groupe $\mathfrak{G}^*_{s,i}$ de $\mathfrak{G}_s$ invariant dans $\mathfrak{G}_i$.*

En effet, pour que les deux isomorphismes coïncident, il faut et il suffit que pour tout $X \in G/G_s$ on ait $\theta_\varrho . X = \theta_{\varrho'} . X$. Or, soient $\theta_\varrho . X = (x_1, x_2, \ldots, x_s)$ et $\theta_{\varrho'} . X = (x'_1, x'_2, \ldots, x'_s)$. On a donc

$$X = \varrho(x_1)\,\varrho(x_2) \cdots \varrho(x_s)\,G_s \quad \text{et} \quad X = \varrho'(x'_1)\,\varrho'(x'_2) \cdots \varrho'(x'_s)\,G_s,$$

d'où

$$X = \varrho(x'_1)\,\mu_{x'_1}\,\varrho(x'_2)\,\mu_{x'_2} \cdots \varrho(x'_s)\,\mu_{x'_s}\,G_s.$$

Pour $i = 1, 2, \ldots, s$

$$\mu_{x'_i}\,\varrho(x'_{i+1})\mu_{x'_{i+1}} \cdots \varrho(x'_s)\,\mu_{x'_s}\,G_s$$

appartient à G_i/G_s, et, si $\mu_{x'_i}$ appartient au plus grand sous-groupe de G_s invariant das G_i, on a

$$\mu_{x'_i}[\varrho(x'_{i+1})\,M_{x'_{i+1}} \cdots \varrho(x'_s)\,\mu_{x'_s}]\,G_s = \varrho(x'_{i+1})\,M_{x_{i+1}} \cdots \varrho(x'_s)\,\mu_{x'_s}\,G_s.$$

On en conclut que, si la condition énoncée est remplie, on a

$$X = \varrho(x'_1)\,\varrho(x'_2) \cdots \varrho(x'_s)\,G_s,$$

d'où $$(x'_1, x'_2, \ldots, x'_s) = (x_1, x_2, \ldots, x_s) \qquad \text{(Lemme 1)}.$$

La condition est donc suffisante. D'ailleurs il est visible que si notre condition (μ_{x_i} appartient au plus grand sous-groupe de G_s invariant dans G_i) est satisfaite seulement pour les $i > j$, on a (ϱ et ϱ étant supposées normées) $\theta_\varrho . X = \theta_{\varrho'} . X$ pour tout $X \in G_j/G_s$.

Inversement, supposons que la condition énoncée ne soit pas remplie, et soit j le plus grand des indices $i = 1, 2, \ldots, s-1$ (μ_{x_s} remplit la condition automatiquement) tel qu'il existe un $z_j \in M_j$ pour lequel μ_{z_j} ne se trouve pas dans le plus grand sous-groupe de G_s invariant dans G_j. Par suite, il existe un $Y \in G_j/G_s$ tel que $\mu_{z_j} Y \neq Y$. Il est à remarquer qu'en vertu de notre hypothèse sur j, on a $\theta_\varrho . Y = \theta_{\varrho'} . Y$, c'est-à-dire que, si

$$Y = \varrho(x_{j+1}) \cdots \varrho(x_s) G_s, \text{ on a aussi } Y = \varrho'(x_{j+1}) \cdots \varrho'(x_s) G_s.$$

Soit $Z \in G/G_s$ la classe $\varrho(z_j) Y$. On a

$$Z = \varrho(m_1) \varrho(m_2) \cdots \varrho(m_{j-1}) \varrho(z_j) Y$$

et

$$\theta_\varrho . Z = (m_1, m_2, \ldots, m_{j-1}, z_j, x_{j+1}, x_{j+2}, \ldots, x_s).$$

Supposons qu'on ait $\theta_\varrho . Z = \theta_{\varrho'} . Z$; nous allons montrer que cette hypothèse conduit à une contradiction.

En effet, on aurait

$$Z = \varrho'(m_1) \varrho'(m_2) \cdots \varrho'(m_{j-1}) \varrho'(z_j) \varrho'(x_{j+1}) \cdots \varrho'(x_s) G_s =$$
$$= \varrho(m_1) \varrho(m_2) \cdots \varrho(m_{j-1}) \varrho(z_j) \mu_{z_j} Y.$$

Ainsi, on a $\varrho(m_1) \varrho(m_2) \cdots \varrho(m_{j-1}) \varrho(z_j) Y = \varrho(m_1) \varrho(m_2) \cdots \varrho(m_{j-1}) \varrho(z_j) \mu_{z_j} Y$ et par suite $\mu_{z_j} Y = Y$, contrairement à l'hypothèse $\mu_{z_j} Y \neq Y$. Ainsi $\theta_\varrho . Z \neq \theta_{\varrho'} . Z$, et la condition énoncée est nécessaire.

3. Soit F un autre groupe et soit

$$F = F_0 \supset F_1 \supset \cdots \supset F_s$$

une suite de sous-groupes de F telle qui F_s soit anti-invariant dans F et que F_{i-1}/F_i soit identifié avec M_i. Ceci posé, supposons que F est $(M_1, M_2, \ldots, M_s)$-isomorphe avec G, et soit η un $(M_1, M_2, \ldots, M_s)$-isomorphisme de G sur F. η permet d'établir une correspondance biunivoque entre les fonctions représentatives des M_i dans G et celles des M_i dans F. Il suffit pour cela d'associer à une fonction représentative $\varrho(x_i)$ ($i = 1, 2, \ldots, s$; $x_i \in M_i$) des M_i dans G, la fonction

$$\varrho^*(x_i) = \varrho^\eta(x_i) = \eta \cdot \varrho(x_i),$$

qui est bien une fonction représentative des M_i dans F. Évidemment $\varrho^*(x_i)$ est normée si, et seulement si $\varrho(x_i)$ l'est.

Soient η_ϱ le ϱ-isomorphisme de G et η_{ϱ^*} le ϱ^*-isomorphisme de F dans $\mathfrak{G} = \Gamma_1 \circ \Gamma_2 \circ \cdots \circ \Gamma_s$. Montrons qu'on a $\eta_\varrho = \eta_{\varrho^*} \eta$, ou, autrement dit:

Lemme 3. *Quel que soit $\sigma \in G$, son image $\eta_\varrho \cdot \sigma$ par η_ϱ est le même que l'image $\eta_{\varrho^*}(\eta \cdot \sigma)$ de $\eta \cdot \sigma$ par η_{ϱ^*}.*

Démonstration. Soit $X \in G/G_s$, et soit $X^* = \eta \cdot X$. Comme $\eta \cdot G_s = F_s$, X^* parcourt F/F_s quand X parcourt G/G_s, et $X \longrightarrow X^*$ est une correspondance biunivoque.

Si $\theta_\varrho \cdot X = (x_1, x_2, \ldots, x_s)$, on a $X = \varrho(x_1) \varrho(x_2) \cdots \varrho(x_s) G_s$, d'où

$$X^* = \eta \cdot X = [\eta \cdot \varrho(x_1)] [\eta \cdot \varrho(x_2)] \cdots [\eta \cdot \varrho(x_s)] [\eta \cdot G_s] = \varrho^*(x_1) \varrho^*(x_2) \cdots \varrho^*(x_s) F_s$$
et
$$\theta_{\varrho^*} \cdot X^* = (x_1, x_2, \ldots, x_s) = \theta_\varrho \cdot X.$$

Si $\sigma \in G$ et si l'on pose $\sigma^* = \eta \cdot \sigma$, on a $\sigma^* X^* = [\eta \cdot \sigma] [\eta \cdot X] = \eta \cdot \sigma X = (\sigma X)^*$, d'où $\theta_{\varrho^*} \cdot \sigma^* X^* = \theta_\varrho \cdot \sigma X$. Or, $\eta_\varrho \cdot \sigma$ est la permutation $\theta_\varrho \cdot X \rightarrow \theta_\varrho \cdot \sigma X$ de M, et $\eta_{\varrho^*} \cdot \sigma^*$ est la permutation $\theta_{\varrho^*} \cdot X^* \rightarrow \theta_{\varrho^*} \cdot \sigma^* X^*$ du même ensemble. En vertu de ce qui précède, ces deux permutations de M coïncident, et on a bien
$$\eta_{\varrho^*} \eta = \eta_\varrho. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Ce lemme nous sera fort utile dans la suite.

Un sous-groupe transitif $\bar{G}$ de $\mathfrak{G} = \Gamma_1 \circ \Gamma_2 \circ \cdots \circ \Gamma_s$ sera dit représentatif s'il est l'image par le ϱ-isomorphisme d'un groupe G à l'aide d'une fonction représentative normée $\varrho(x_i)$.

Soit donc $\bar{G}$ un sous-groupe représentatif de $\mathfrak{G} = \Gamma_1 \circ \Gamma_2 \circ \cdots \circ \Gamma_s$ et soit η_ϱ le ϱ-isomorphisme normé d'un groupe G sur $\bar{G}$. Nous savons que η_ϱ est un $(M_1, M_2, \ldots, M_s)$-isomorphisme de G sur $\bar{G}$.

Soit $\bar{\varrho}(x_i)$ la fonction représentative des M_i dans $\bar{G}$, qui correspond à $\varrho(x_i)$ par l'application η_ϱ ($\bar{\varrho}(x_i) = \eta_\varrho \cdot \varrho(x_i)$ pour $i = 1, 2, \ldots, s$ et pour tout $x_i \in M_i$). Considérons le $\bar{\varrho}$-isomorphisme $\eta_{\bar{\varrho}}$ de $\bar{G}$ dans $\mathfrak{G}$. En vertu du Lemme 3, pour tout $\sigma \in G$ on a $\eta_\varrho \cdot \sigma = \eta_{\bar{\varrho}} \cdot (\eta_\varrho \cdot \sigma)$, c'est-à-dire que si $\bar{\sigma} = \eta_\varrho \cdot \sigma$, on a $\bar{\sigma} = \eta_{\bar{\varrho}} \cdot \bar{\sigma}$, et ceci pour tout $\bar{\sigma} \in \bar{G}$.

Nous voyons par conséquent que *le $\bar{\varrho}$-isomorphisme de $\bar{G}$ dans $\mathfrak{G}$*, défini à l'aide de la fonction représentative normée $\bar{\varrho}(x_i)$, *est l'isomorphisme identique*[6]). Ainsi, dans tout sous-groupe représentatif $\bar{G}$ de $\mathfrak{G}$, on peut définir une fonction représentative normée $\bar{\varrho}(x_i)$ des M_i dans $\bar{G}$, telle que le $\bar{\varrho}$-isomorphisme de $\bar{G}$ dans $\mathfrak{G}$ soit l'isomorphisme identique. Une telle fonction représentative normée sera dite une *fonction superposante*. Par abus de langage, on dira que $\bar{G}$ *contient* une fonction superposante. Inversement, si un sous-groupe transitif $\bar{G}$ de $\mathfrak{G}$ contient une fonction superposante $\bar{\varrho}(x_i)$, $\bar{G}$ est représentatif, puisqu'il est sa propre image par le $\bar{\varrho}$-isomorphisme. Par suite, on a le

Lemme 4. *Un sous-groupe transitif $\bar{G}$ de $\mathfrak{G} = \Gamma_1 \circ \Gamma_2 \circ \cdots \circ \Gamma_s$ est représentatif si, et seulement s'il contient une fonction superposante.*

Soit $\bar{G}$ un sous-groupe représentatif de $\mathfrak{G}$. Une classe $\bar{X} \in \bar{G}/\bar{G}_s\langle m\rangle$ est l'ensemble $\sigma \bar{G}_s\langle m\rangle$ de tous les $\sigma \in \bar{G}$, tels que $\sigma \cdot m = \sigma \cdot (m_1, m_2, \ldots, m_s)$ soit un même élément $x = (x_1, x_2, \ldots, x_s)$ de $M = M_1 \times M_2 \times \cdots \times M_s$, qui sera dit *l'élément correspondant* de $\bar{X}$.

$\bar{\varrho}(x_i)$ étant une fonction représentative normée des M_i dans $\bar{G}$, montrons que $\bar{\varrho}(x_i)$ *est une fonction superposante si, et seulement si pour tout*

[6]) Par suite, en un certain sens, les ϱ-isomorphismes normés de G sont des "projections" de G dans $\mathfrak{G}$.

$\bar{X} \in \bar{G}/\bar{G}_s\langle m\rangle$, $\theta_{\bar{\varrho}} \cdot \bar{X}$ coïncide avec l'élément $x = (x_1, x_2, \ldots, x_s)$ correspondant à X.

En effet, l'image σ' d'un élément σ de $\bar{G}$ par le $\bar{\varrho}$-isomorphisme est, par définition, la permutation $\sigma' = \{\theta_{\bar{\varrho}} \cdot \bar{Y} \to \theta_{\bar{\varrho}} \cdot \sigma \bar{Y}\}$ $(\bar{Y} \in \bar{G}/\bar{G}_s\langle m\rangle)$ de M.

Soit en particulier $\bar{Y} = \bar{G}_s\langle m\rangle$. On a $\theta_{\bar{\varrho}} \cdot \bar{G}_s\langle m\rangle = (m_1, m_2, \ldots, m_s)$, car $\bar{\varrho}$ a été supposée normée. Par suite, σ' applique $(m_1, m_2, \ldots, m_s)$ sur $\theta_{\bar{\varrho}} \cdot \sigma \bar{G}_s\langle m\rangle$. Si $\bar{\varrho}(x_i)$ est une fonction superposante, σ' coïncide avec σ et, par suite, $\theta_{\bar{\varrho}} \cdot \sigma \bar{G}_s\langle m\rangle$ coïncide avec $\sigma \cdot m = \sigma \cdot (m_1, m_2, \ldots, m_s)$. Mais $\sigma \cdot m$ est l'élément x correspondant à la classe $\sigma \bar{G}_s\langle m\rangle = \bar{X}$. La condition énoncée est donc nécessaire.

Inversement, supposons que cette condition soit remplie. Soit $y = (y_1, y_2, \ldots, y_s)$ un élément quelconque de M, et soit $\bar{Y} \in \bar{G}/\bar{G}_s\langle m\rangle$ la classe de $\bar{G}$ suivant $\bar{G}_s\langle m\rangle$ à laquelle correspond y. Visiblement, $\sigma \cdot y$ $(\sigma \in \bar{G})$ correspond à la classe $\sigma \bar{Y}$. (Ceci résulte du fait classique, indiqué au début de l'introduction, que $y \to \bar{Y}$ réalise la similitude de $\bar{G}$ avec sa représentation à l'aide de $\bar{G}_s\langle m\rangle$). La condition énoncée étant supposée remplie, on a $\theta_{\bar{\varrho}} \cdot \bar{Y} = y$ et $\theta_{\bar{\varrho}} \cdot \sigma \bar{Y} = \sigma \cdot y$, et par suite,

$$\sigma' = \{\theta_{\bar{\varrho}} \cdot \bar{Y} \to \theta_{\bar{\varrho}} \cdot \sigma \bar{Y}\} = \{y \to \sigma \cdot y\},$$

où y parcourt M. Donc $\sigma' = \sigma$, et $\bar{\varrho}(x_i)$ est une fonction superposante. La condition est donc suffisante. C. Q. F. D.

$\bar{G}$ étant un sous-groupe transitif de $\mathfrak{G} = \Gamma_1 \circ \Gamma_2 \circ \cdots \circ \Gamma_s$ et $\bar{\bar{G}}$ étant un sur-groupe de $\bar{G}$ ($\bar{\bar{G}}$ est donc également transitif), $\bar{G}_{i-1}\langle m\rangle/\bar{G}_i\langle m\rangle$ et $\bar{\bar{G}}_{i-1}\langle m\rangle/\bar{\bar{G}}_i\langle m\rangle$ sont m-identifiés avec l'ensemble M_i tout entier $(i = 1, 2, \ldots, s)$. Par conséquent, toute fonction représentative $\bar{\varrho}(x_i)$ des M_i dans $\bar{G}$ est automatiquement une fonction représentative des M_i dans $\bar{\bar{G}}$. En particulier, c'est une fonction représentative du groupe $\mathfrak{G}$ tout entier.

Soit $\bar{X}$ une classe suivant $\bar{G}_s\langle m\rangle$ dans $\bar{G}$, et soit $\bar{\bar{X}} = \bar{X}\bar{\bar{G}}_s\langle m\rangle$ la classe suivant $\bar{\bar{G}}_s\langle m\rangle$, qui la contient. Alors, d'une part, tous les $\sigma \in \bar{\bar{X}}$ transforment m en un même élément $\bar{\bar{x}}$ de M, qui est égal, en particulier, au transformé $\bar{x}$ de m par les $\sigma \in \bar{X}$. D'autre part, si $\theta_{\bar{\varrho}} \cdot \bar{X} = (x_1, x_2, \ldots, x_s)$, on a

$$\bar{X} = \bar{\varrho}(x_1)\bar{\varrho}(x_2) \ldots \bar{\varrho}(x_s)\ \bar{G}_s\langle m\rangle,$$

d'où résulte

$$\bar{\bar{X}} = \bar{\varrho}(x_1)\bar{\varrho}(x_2) \ldots \bar{\varrho}(x_s)\ \bar{G}_s\langle m\rangle \bar{\bar{G}}_s\langle m\rangle = \bar{\varrho}(x_1)\bar{\varrho}(x_2) \ldots \bar{\varrho}(x_s)\bar{\bar{G}}_s\langle m\rangle,$$

et on a

$$\theta_{\bar{\varrho}} \cdot \bar{\bar{X}} = (x_1, x_2, \ldots, x_s) = \theta_{\bar{\varrho}} \cdot \bar{X}.$$

Si $\bar{\varrho}(x_i)$ est une fonction superposante de $\bar{G}$, on a, pour tout $\bar{X} \in \bar{G}/\bar{G}_s\langle m\rangle$, $\theta_{\bar{\varrho}} \cdot \bar{X} = \bar{x}$; d'où, puisque $\bar{\bar{X}} = \bar{X}\bar{\bar{G}}_s\langle m\rangle$ parcourt $\bar{\bar{G}}/\bar{\bar{G}}_s\langle m\rangle$ quand $\bar{X}$ parcourt $\bar{G}/\bar{G}_s\langle m\rangle$, et puisque on a $\bar{\bar{x}} = \bar{x}$ et $\theta_{\bar{\varrho}} \cdot \bar{\bar{X}} = \theta_{\bar{\varrho}} \cdot \bar{X}$, il résulte, pour tout $\bar{\bar{X}} \in \bar{\bar{G}}/\bar{\bar{G}}_s\langle m\rangle$, l'égalité $\theta_{\bar{\varrho}} \cdot \bar{\bar{X}} = \bar{\bar{x}}$. En vertu du critère précédent, ceci montre que $\bar{\varrho}(x_i)$ est aussi une fonction superposante de $\bar{\bar{G}}$, et $\bar{\bar{G}}$ est représentatif.

Nous voyons donc que *tout sur-groupe d'un groupe représentatif est également représentatif.* En particulier, $\mathfrak{G} = \Gamma_1 \circ \Gamma_2 \circ \cdots \circ \Gamma_s$ *est représentatif, et toute fonction superposante d'un sous-groupe représentatif* $\bar{G}$ *de* $\mathfrak{G}$ *est une fonction superposante de* $\mathfrak{G}$. Pour déterminer les sous-groupes représentatifs de $\mathfrak{G}$, il suffit donc de déterminer toutes les fonctions superposantes de $\mathfrak{G}$.

Lemme 5. *Pour qu'une fonction représentative normée* $\varrho(x_i)$ *des* M_i *dans* $\mathfrak{G}$ *soit une fonction superposante, il faut et il suffit que pour* $i=1, 2,\dots, s$, *et pour tout* $x_i \in M_i$, $\varrho(x_i)$ *soit une permutation de* M, *telle qu'on ait, pour tout* $(z_{i+1}, z_{i+2}, \dots, z_s) \in {}^iM$,

$$\varrho(x_i)\cdot(m_1, \dots, m_{i-1}, m_i, z_{i+1}, z_{i+2}, \dots, z_s) = (m_1,\dots, m_{i-1}, x_i, z_{i+1}, z_{i+2},\dots, z_s).$$

Démonstration. Supposons que la condition énoncée soit remplie.

Soit $x = (x_1, x_2, \dots, x_s)$ un élément quelconque de M. En vertu de la condition énoncée, on a

$$\varrho(x_1)\,\varrho(x_2),\dots, \varrho(x_s)\cdot(m_1, m_2,\dots, m_s) = \varrho(x_1)\,\varrho(x_2)\dots\varrho(x_{s-1})\cdot(m_1, m_2,\dots, m_{s-1}, x_s) =$$
$$= \varrho(x_1)\,\varrho(x_2)\dots\varrho(x_{s-2})\cdot(m_1, m_2, \dots, m_{s-2}, x_{s-1}, x_s) = \dots$$
$$= \varrho(x_1)\cdot(m_1, x_2, \dots, x_s) = (x_1, x_2, \dots, x_s) = x,$$

et, par conséquent, l'élément de M correspondant à la classe $X = \varrho(x_1)\,\varrho(x_2)\dots\varrho(x_s)\,G_s\langle m\rangle$ est x. D'autre part, on a également $\theta_\varrho\cdot X = (x_1, x_2,\dots, x_s) = x$, et, par suite, $\varrho(x_i)$ est une fonction superposante. Ainsi, la condition énoncée est suffisante.

Inversement, supposons que $\varrho(x_i)$ soit une fonction superposante. Comme, pour tout $i = 1, 2, \dots, s$ et pour tout $x_i \in M_i$, $\varrho(x_i)$ est sa propre image par le ϱ-isomorphisme, on a

$$\varrho(x_i) = \{\theta_\varrho\cdot X \longrightarrow \theta_\varrho\cdot\varrho(x_i)X\} \quad (X \in G/G_s\langle m\rangle).$$

En particulier, ceci est vrai pour les classes Z contenues dans $G_i\langle m\rangle$. Donc

$$\theta_\varrho\cdot\varrho(x_i)Z = \varrho(x_i)\cdot(\theta_\varrho\cdot Z).$$

$\varrho(x_i)$ étant supposée normée, on a, pour tout $Z \in G_i\langle m\rangle/G_s\langle m\rangle$,

$$\theta_\varrho\cdot Z = (m_1, m_2, \dots, m_{i-1}, m_i, z_{i+1}, z_{i+2}, \dots, z_s),$$

où $(z_{i+1}, z_{i+2}, \dots, z_s)$ parcourt ${}^iM$ quand Z parcourt $\mathfrak{G}_i\langle m\rangle/\mathfrak{G}_s\langle m\rangle$; on a

$$Z = \varrho(m_1)\,\varrho(m_2)\cdots\varrho(m_i)\,\varrho(z_{i+1})\cdots\varrho(z_s)\,\mathfrak{G}_s\langle m\rangle.$$

Comme tout $\varrho(m_i)$ coïncide avec l'unité de $\mathfrak{G}$, on a

$$\varrho(x_i)\,Z = \varrho(x_i)\,\varrho(m_1)\,\varrho(m_2)\cdots\varrho(m_i)\,\varrho(z_{i+1})\cdots\varrho(z_s)\,\mathfrak{G}_s\langle m\rangle =$$
$$= \varrho(m_1)\,\varrho(m_2)\cdots\varrho(m_i)\,\varrho(x_i)\,\varrho(z_{i+1})\cdots\varrho(z_s)\,\mathfrak{G}_s\langle m\rangle,$$

d'où

$$\theta_\varrho\cdot\varrho(x_i)\,Z = (m_1, m_2, \dots, m_{i-1}, x_i, z_{i+1}, \dots, z_s),$$

ce qui montre que

$$\varrho(x_i)\cdot(m_1, m_2, \ldots, m_{i-1}, m_i, z_{i+1}, \ldots, z_s) = (m_1, m_2, \ldots, m_{i-1}, x_i, z_{i+1}, \ldots, z_s).$$

C. Q. F. D.

Nous dirons qu'une permutation $\sigma \in \mathfrak{G}_{i-1}<m>$ est *normale* par rapport à m, si ${}^i\sigma(m^i)$ est la permutation identique de ${}^iM$ (ceci équivaut précisément à la condition que, pour tout $(z_{i+1}, z_{i+2}, \ldots, z_s) \in {}^iM$,

$$\sigma(m_1, \ldots, m_{i-1}, m_i, z_{i+1}, \ldots, z_s) = (m_1, \ldots, m_{i-1}, x_i, z_{i+1}, \ldots, z\ ).[7])$$

Avec cette convention, nous pouvons formuler le résultat du présent alinéa sous la forme du théorème suivant:

Théorème 4. *Un sous-groupe transitif G du produit complet $\mathfrak{G} = \Gamma_1 \circ \Gamma_2 \circ \cdots \circ \Gamma_s$ est représentatif si, et seulement si, pour $i = 1, 2, \ldots, s$, toute classe de $G_{i-1}<m>$ suivant $G_i<m>$ possède une permutation normale (par rapport à m).*

4. Nous savons que, pour une fonction représentative normée, le ϱ-isomorphisme d'un groupe G dans $\mathfrak{G}$ est un $(M_1, M_2, \ldots, M_s)$-isomorphisme. Dans l'alinéa 1 du présent paragraphe nous avons montré que, pour deux fonctions représentatives normées $\varrho(x_i)$ et $\tau(x_i)$, les images de G dans $\mathfrak{G}$ par le ϱ-isomorphisme et par le τ-isomorphisme ne diffèrent que par un automorphisme intérieur propre de $\mathfrak{G}$.

Nous allons montrer plus généralement qu'*on obtient toujours des $(M_1, M_2, \ldots, M_s)$-isomorphismes de G dans $\mathfrak{G}$ en effectuant d'abord un $(M_1, M_2, \ldots, M_s)$-isomorphisme fixe de G dans $\mathfrak{G}$* (l'existence d'un tel $(M_1, M_2, \ldots, M_s)$-isomorphisme est assurée, en vertu du théorème de l'immersion, par un ϱ-isomorphisme relatif à une fonction représentative normée $\varrho(x_i)$ des M_i dans G), *et en effectuant ensuite un automorphisme intérieur propre de $\mathfrak{G}$, et que de cette manière on les obtient tous.*[8])

Si l'on passe à l'image $\bar{G}$ de G par un $(M_1, M_2, \ldots, M_s)$-isomorphisme de G dans $\mathfrak{G}$, il est visible que le résultat à démontrer équivaut au théorème suivant.

Théorème 5. I. *Si $\bar{G}$ est un sous-groupe transitif du produit complet $\mathfrak{G}$, et si $\lambda \in \mathfrak{G}$ appartient à $\bigcap_{i=1}^{s} \mathfrak{G}_i^*<m>$, l'application $\bar{\sigma} \to \lambda\bar{\sigma}\lambda^{-1}$ $(\bar{\sigma} \in \bar{G})$ est un $(M_1, M_2, \ldots, M_s)$-isomorphisme de $\bar{G}$ sur $\lambda\bar{G}\lambda^{-1}$.*

II. *Si $\bar{G}$ et $\bar{\bar{G}}$ sont deux sous-groupes transitifs de $\mathfrak{G}$, et si $\eta = \{\bar{\sigma} \to \bar{\bar{\sigma}}\}$*

---

[7]) Remarquons que cette condition est automatiquement remplie par les $\sigma \in \mathfrak{G}_{s-1}<m>$.

[8]) Nous tenons à souligner qu'il *n'est pas en général vrai* que tous les $(M_1, M_2, \ldots, M_s)$-isomorphismes de G dans $\mathfrak{G}$ peuvent être obtenus par des ϱ-isomorphismes pour des choix convenables des fonctions représentatives normées $\varrho(x_i)$. Les ϱ-isomorphismes ne constituent qu'une classe particulièrement importante des $(M_1, M_2, \ldots, M_s)$-isomorphismes de G dans $\mathfrak{G}$. On le verra dans l'alinéa suivant.

$(\bar\sigma \in \bar G;\ \bar{\bar\sigma} \in \bar{\bar G})$ est un $(M_1, M_2, \dots, M_s)$-isomorphisme de $\bar G$ sur $\bar{\bar G}$, il existe un $\lambda \in \bigcap\limits_{i=1}^{s} \mathfrak{G}_i^* <m>$, tel que l'isomorphisme η soit réalisé par l'automorphisme intérieur de $\mathfrak{G}$ correspondant à λ (c'est-à-dire que pour to t $\bar\sigma \in \bar G$ on ait $\bar{\bar\sigma} = \lambda\bar\sigma\lambda^{-1}$).

Démonstration. I. Soit $(\lambda) = \{\sigma \dashrightarrow \lambda\sigma\lambda^{-1}\}$ un automorphisme intérieur propre de $\mathfrak{G}$. Montrons que (λ) est un $(M_1, M_2, \dots, M_s)$-isomorphisme. Il est visible qu'alors (λ) induit un $(M_1, M_2, \dots, M_s)$-isomorphisme de $\bar G$ sur $\bar{\bar G} = \lambda \bar G \lambda^{-1}$.

Puisque λ appartient à $\mathfrak{G}_i^* <m>$ pour $i = 1, 2, \dots, s$, on a

$$\lambda \cdot (m_1, m_2, \dots, m_{i-1}, x_i, *, *, \dots, *) = (m_1, m_2, \dots, m_{i-1}, x_i, *, *, \dots, *).$$

Ainsi, si X_i est la classe dans $\mathfrak{G}_{i-1}<m>$ suivant $\mathfrak{G}_i<m>$ m-identifiée avec x_i, la classe $(\lambda) \cdot X_i = \lambda X_i \lambda^{-1} = \lambda X_i$ est m-identifiée avec le même élément x_i, et coïncide, par suite, avec X_i. Donc, (λ) satisfait aux conditions *a*) (pour $X_i = \mathfrak{G}_i<m>$) et *b*) de la définition des $(M_1, M_2, \dots, M_s)$-isomorphismes.

En outre, si $\sigma \in \mathfrak{G}_{i-1}<m>$, on a

$$[(\lambda) \cdot \sigma]\, X_i = [(\lambda) \cdot \sigma]\, [(\lambda) \cdot X_i] = (\lambda) \cdot \sigma X_i = \sigma X_i$$

(car $(\lambda) \cdot X_i = X_i$ et $\sigma X_i \in \mathfrak{G}_{i-1}<m>$ $\mathfrak{G}_i<m>$), donc la permutation de M_i qui correspond à $(\lambda) \cdot \sigma$ est la même que celle qui correspond à σ, et (λ) satisfait également à la condition *c*) de la définition des $(M_1, M_2, \dots, M_s)$-isomorphismes.

II. Choisissons une fonction représentative normée $\bar\varrho(x_i)$ des M_i dans $\bar G$, et soit $\bar{\bar\varrho}(x_i) = \eta \cdot \bar\varrho(x_i)$ la fonction représentative normée des M_i dans $\bar{\bar G}$, image de $\varrho(x_i)$ par un $(M_1, M_2, \dots, M_s)$-isomorphisme η de $\bar G$ sur $\bar{\bar G}$. En vertu du Lemme 3, les images de $\bar G$ dans $\mathfrak{G}$ par le $\bar\varrho$-isomorphisme $\eta_{\bar\varrho}$ et de $\bar{\bar G}$, dans $\mathfrak{G}$ par le $\bar{\bar\varrho}$-isomorphisme $\eta_{\bar{\bar\varrho}}$ coïncident. (Cette image commune est un certain sous-groupes $\bar{\bar{\bar G}}$ de $\mathfrak{G}$) et, plus généralement, on a $\eta = \eta_{\bar{\bar\varrho}}^{-1}\, \eta_{\bar\varrho}$; il suffit donc de démontrer que les isomorphismes $\eta_{\bar\varrho}$ et $\eta_{\bar{\bar\varrho}}$ sont induits par des automorphismes intérieurs propres de $\mathfrak{G}$.

Comme $\mathfrak{G}$ est un groupe représentatif, il contient une fonction superposante $\tau(x_i)$. Le τ-isomorphisme η_τ de $\mathfrak{G}$ est l'isomorphisme identique de $\mathfrak{G}$ sur lui-même et induit, par conséquent, l'isomorphisme identique sur $\bar G$. Par suite, pour tout $\bar{} \in \bar G$ on a $\eta_\tau \cdot \bar\sigma = \bar\sigma$.

Nous avons vu que $\bar\varrho(x_i)$ est également une fonction représentative normée de $\mathfrak{G}$. Soit $\tilde\eta_{\bar\varrho}$ le $\bar\varrho$-isomorphisme de $\mathfrak{G}$ dans lui-même. Sa restriction à $\bar G$ est $\eta_{\bar\varrho}$. En vertu du résultat de l'alinéa 1 du présent paragraphe, η_τ ne diffère de $\tilde\eta_\varrho$ que par un automorphisme intérieur propre (λ_1) de $\mathfrak{G}$. On a donc $\tilde\eta_\varrho = (\lambda_1)\, \eta_\tau$ et, pour tout $\bar\sigma \in \bar G$,

$$\eta_{\bar\varrho} \cdot \bar\sigma = \tilde\eta_{\bar\varrho} \cdot \bar\sigma = (\lambda_1)\, \eta_\tau \cdot \bar\sigma = (\lambda_1) \cdot (\eta_\tau \cdot \bar\sigma) = (\lambda_1) \cdot \bar\sigma.$$

On démontre de la même manière l'existence d'un automorphisme intérieur propre (λ_2) de $\mathfrak{G}$, tel que pour tout $\bar{\bar{\sigma}} \in \bar{\bar{G}}$ on ait $\tau_{\bar{\bar{\sigma}}} \cdot \bar{\bar{\sigma}} = (\lambda_2) \cdot \bar{\bar{\sigma}}$. Il en résulte que $\eta = (\lambda_2)^{-1}(\lambda_1) = (\lambda_2^{-1}\lambda_1)$. C. Q. F. D.

Considérons les groupes satisfaisant (pour $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_s$ et pour $m \in M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_s$ fixe) aux conditions du présent paragraphe. Soit C^* une classe de tels groupes $(M_1, M_2, \ldots, M_s)$-isomorphes. Si C est l'ensemble des groupes de cette classe C^* qui sont des sous-groupes de $\mathfrak{G} = \Gamma_1 \circ \Gamma_2 \circ \ldots \circ \Gamma_s$, en vertu du théorème précédent, C est une classe des sous-groupes proprement conjugués (relativement à m) de $\mathfrak{G}$, car deux sous-groupes transitifs de $\mathfrak{G}$ sont $(M_1, M_2, \ldots M_s)$-isomorphes si, et seulement s'ils sont proprement conjugués.

Ainsi, $C^* \to C$ établit une correspondance biunivoque entre l'ensemble $Q^*(\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_s; m)$ des classes de tels groupes $(M_1, M_2, \ldots, M_s)$-isomorphes et l'ensemble $Q(\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_s; m)$ des classes de sous-groupes transitifs proprement conjugués (relativement à m) de $\mathfrak{G} = \Gamma_1 \circ \Gamma_2 \circ \ldots \circ \Gamma_s$. D'ailleurs, si G est un groupe appartenant à une classe C^*, et si $\varrho(x_i)$ est une fonction représentative normée des M_i dans G, l'image de G par le ϱ-isomorphisme, qui est $(M_1, M_2, \ldots, M_s)$-isomorphe à G, se trouve dans la classe C de sous-groupes de $\mathfrak{G}$ proprement conjugués qui correspond à C^*. En particulier, les images des $G \in C$ par leurs ϱ-isomorphismes normés appartiennent à C.

5. Montrons qu'il existe des sous-groupes du produit complet qui ne sont pas représentatifs.

Considérons le produit complet $\mathfrak{P}_3$ de trois groupes cycliques $\Gamma_1 = \Gamma_2 = \Gamma_3$ de p éléments. Soit G le groupe des tableaux $A = [a, a(x_1), a(x_1, x_2)]$ tels que $a(x_1)$ et $a(x_1, x_2)$ soient des constantes $b \in \Gamma_2$ et $c \in \Gamma_3$ (G est le groupe qui a été identifié au § 2 avec $\Gamma_1 \times \Gamma_2 \times \Gamma_3$). Le nombre des groupes représentatifs parmi les groupes proprement conjugués de G ne dépasse pas celui des fonctions représentatives normées des $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ dans G. Or, remarquons que l'ordre de G_1 est p^2, celui de G_2 est p, et celui de G_3 est 1. Ainsi, si $\varrho(x_i)$ parcourt l'ensemble des fonctions représentatives normées des Γ_i dans G, $\varrho(e_i)$ prend une seule valeur (unité e de G), et si $x_i \neq e_i$, $\varrho(x_i)$ prend p^{3-i} valeurs. Par suite, le nombre de ces fonctions est

$$(p^2)^{p-1} p^{p-1} 1^{p-1} = (p^3)^{p-1} = p^{3(p-1)}.$$

D'autre part, un $\lambda = [l, l(x_1), l(x_1, x_2)]$ induit un automorphisme intérieur propre de $\mathfrak{P}_3$ si, et seulement si

$$l = e_1, \, l(e_1) = e_2, \, l(e_1, e_2) = e_3.$$

Le nombre de tels λ est donc

$$p^{p-1} p^{p^2-1} = p^{p^2+p-2}.$$

Le nombre des groupes proprement conjugués distincts de G est le quotient de ce nombre par celui des $\lambda \in \mathfrak{G}_3$ qui sont dans le normalisateur $N(G)$ de G. Or, un

$$\lambda = [l, l(x_1), l(x_1, x_2)]$$

est dans $N(G)$ si, et seulement si, pour tout $\sigma=[a,b,c]\in G$, il existe un $\sigma'=[a',b',c']\in G$, tel que $\lambda\sigma=\sigma'\lambda$, et inversement.

Or, on a, vu la commutativité des Γ_i,

$$\lambda\sigma=[l,l(x_1),l(x_1,x_2)]\,[a,b,c]=[la,l(ax_1)\,b,l(ax_1,bx_2)\,c],$$
$$\sigma'\lambda=[a',b',c']\,[l,l(x_1),l(x_1,x_2)]=[la',l(x_1)\,b',l(x_1,x_2)\,c'].$$

Donc il faut et il suffit que pour tout $(x_1,x_2)\in\Gamma_1\times\Gamma_2$ on ait

$$la=la',\quad l(ax_1)\,b=l(x_1)\,b',\quad l(ax_1,bx_2)\,c=l(x_1,x_2)\,c'.$$

Donc on a $a'=a$; si $a=e_1$, on n'a qu'à prendre $b'=b$; si $a\neq e_1$, a est un élément générateur de Γ_1, et $l(ax_1)\,l(x_1)^{-1}$ doit être la constante $\bar{b}=b'\,b^{-1}$ indépendante de x_1. Par suite, si $\bar{b}$ est la puissance a^j $(j=1,2,\ldots,p)$ de a, on a, si $x_1=a^t$,

$$l(x_1)=l(a^t)=\bar{b}\,l(a^{t-1})=\bar{b}^2\,l(a^{t-2})=\ldots=\bar{b}^t\,l(e_1)=\bar{b}^t=a^{jt}=x_1^j.$$

Ceci étant satisfait, il suffit de prendre $b'=ba^j$, pour satisfaire à la seconde égalité. Enfin, la troisième égalité entraîne, a,b étant des éléments générateurs des Γ_1,Γ_2, que $l(ax_1,x_2)\,l(x_1,x_2)^{-1}$ et $l(x_1,bx_2)\,l(x_1,x_2)^{-1}$ doivent être deux constantes τ et $\bar{\tau}$, appartenant à Γ_3; indépendantes de x_1,x_2. Par suite, si $\tau=a^{j_1}$, et si $\bar{\tau}=b^{j_2}$, on a comme précédemment, en posant $x_1=a^{t_1}$, $x_2=b^{t_2}$,

$$l(x_1,x_2)=l(a^{t_1},x_2)=\tau^{t_1}\,l(e_1,x_2)=\tau^{t_1}\,l(e_1,b^{t_2})=$$
$$=\tau^{t_1}\,\bar{\tau}^{t_2}\,l(e_1,e_2)=\tau^{t_1}\,\bar{\tau}^{t_2}=a^{j_1t_1}\,b^{j_2t_2}=x_1^{j_1}x_2^{j_2}.$$

Inversement, ceci étant, il suffit pour satisfaire à la troisième égalité de prendre $c'=a^{j_1}b^{j_2}c$.

Ainsi, l'ordre cherché de $\mathfrak{G}_3\cap N(G)$ est p^3, et ainsi, le nombre des groupes proprement conjugués de G est

$$p^{p^2+p-2}:p^3=p^{p^2+p-5};$$

si $p\geqq 3$, on a

$$p^2+p-5\geqq 4p-5\geqq 3p-2>3(p-1)$$

et p^{p^2+p-5} est plus grand que le nombre des groupes représentatifs proprement conjugués de G. Il existe donc bien des groupes qui ne sont pas représentatifs.

6. Soit G un groupe abstrait es $\tau(x_i)$ une fonction représentative normée fixe des M_i dans G, et soit $\bar{G}$ l'image de G dans $\mathfrak{G}=\Gamma_1\circ\Gamma_2\circ\cdots\circ\Gamma_s$ par le τ-isomorphisme η_τ. $\varrho(x_i)$ étant une autre fonction représentative normée des M_i dans G, nous savons que η_ϱ ne diffère de η_τ que par un automorphisme intérieur propre $(\lambda)=\{\sigma\to\lambda\sigma\lambda^{-1}\}$ de G.

Dans le présent alinéa nous allons déterminer explicitement, à partir de l'image $\bar{G}$ de G dans $\mathfrak{G}$, l'ensemble Λ des $\lambda\in\bigcap_{i=1}^{s}\mathfrak{G}^*\langle m\rangle$ provenant du passage de $\tau(x_i)$ *à toutes* les fonctions représentatives normées $\varrho(x_i)$ des M_i dans G.

A cet effet, introduisons tout d'abord quelques groupes dont on aura besoin dans la suite et démontrons à leurs propos un lemme.

$\varrho(x_i)$ étant une fonction représentative normée, soit G' l'image de G dans $\mathfrak{G}$ par le ϱ-isomorphisme. Considérons, pour tout $i=1,2,\ldots,s$, le groupe $G'_i<m>$. L'image de ce groupe $G'_i<m>$ par l'application[9])

$$\sigma' \longrightarrow {}^i\sigma'(m^i) \qquad (\sigma' \in G'_i<m>)\ ^{10})$$

qui est un sous-groupe de ${}^i\mathfrak{G}=\Gamma_{i+1}\circ\Gamma_{i+2}\circ\cdots\circ\Gamma_s$ homomorphe à $G'_i<m>$ (car tout $\sigma'\in G'_i<m>$ conserve m^i) sera désignée par $P_i(G')$.[11])

L e m m e 6. *$\varrho'(x_i)$, $\varrho''(x_i)$ étant deux fonctions représentatives normées des M_i dans G, et G', G'' étant les images de G dans $\mathfrak{G}$ par le ϱ'-isomorphisme $\eta_{\varrho'}$ et par le ϱ''-isomorphisme $\eta_{\varrho''}$, si pour tout $j>l$ et pour tout $x_j\in M_j$ on a $\varrho'(x_j)=\varrho''(x_j)$, alors $P_l(G')=P_l(G'')$.*[12])

D é m o n s t r a t i o n. Si σ' est un élément de $G'_l<m>$, on a par définition

$$\sigma'\cdot(m^l,{}^lx)=(m^l,\ {}^l\sigma'(m^l)\cdot{}^lx).$$

Par conséquent, si σ' (resp. σ'') sont les images d'un $\sigma\in G_l$ par le ϱ'-isomorphisme (resp. par le ϱ''-isomorphisme), on a ${}^l\sigma'(m^l)={}^l\sigma''(m^l)$, si σ' et σ'' induisent une même application sur la classe m^l (mod D_l) dans M. Or, il suffit pour cela, puisque on a $\sigma'=\theta_{\varrho'}\{X\longrightarrow\sigma X\}\theta_{\varrho'}^{-1}$ et $\sigma''=\theta_{\varrho''}\{X\longrightarrow X\}\theta_{\varrho''}^{-1}$ $(X\in G/G_s)$, que les images réciproques de m^l par $\theta_{\varrho'}$ et $\theta_{\varrho''}$ coïncident, et que $\theta_{\varrho'}$ et $\theta_{\varrho''}$ induisent une même application de cette image réciproque. Mais, puisque $\varrho'(x_i)$ et $\varrho''(x_i)$ sont normées, les images réciproques de m^l par $\theta_{\varrho'}$ et par $\theta_{\varrho''}$ coïncident toutes les deux avec G_l/G_s. D'autre part, on a vu que dans ces conditions, si $X\in G_l/G_s$, $\theta_{\varrho'}\cdot X$ et $\theta_{\varrho''}\cdot X$ ne dépendent que de $\varrho'(x_j)$ (resp. de $\varrho''(x_j)$) pour $j>l$; car alors, si

$$\theta_{\varrho'}\cdot X=(m_1,m_2,\ldots,m_l,\ x_{l+1},\ldots,x_s),$$

on a

$$X=\varrho'(m_1)\,\varrho'(m_2)\ldots\varrho'(m_l)\,\varrho'(x_{l+1})\ldots\varrho'(x_s)\,G_s=\varrho'(x_{l+1})\ldots\varrho'(x_s)\,G_s.$$

Comme pour tout $j>l$, $\varrho''(x_j)=\varrho'(x_j)$, on a pour tout $X\in G_l/G_s$, $\theta_{\varrho'}\cdot X=\theta_{\varrho''}\cdot X$, ce qui démontre le lemme.

Nous dirons que deux fonctions représentatives normées $\bar\varrho(x_i)$ et $\bar{\bar\varrho}(x_i)$ des M_i dans G sont *contigües à l'étage j* si leurs valeurs ne sont différentes que sur M_j, c'est-à-dire que si $\bar\varrho(x_i)=\bar{\bar\varrho}(x_i)$ pour $i\neq j$.

Il est visible, que deux fonctions représentatives normées $\varrho(x_i)$ et $\varrho'(x_i)$ quelconques peuvent être reliées par une chaîne

$$\varrho(x_i)=\varrho_0(x_i),\ \varrho_1(x_i),\ldots,\varrho_s(x_i)=\varrho'(x_i)$$

---

9) Voir §1, p. 218.

10) Si, dans la notation par les tableaux, on a $\sigma'=[a,a(x_1),\ldots,a(x_1,x_2,\ldots,x_{s-1})]$, ${}^i\sigma'(m^i)$ est le tableau

$$[a(m_1,m_2,\ldots,m_i),a(m_1,m_2,\ldots,m_i,x_{i+1}),a(m_1,m_2,\ldots,m_i,x_{i+1}\ldots x_{s+1})]\in{}^i\mathfrak{G}.$$

11) Il est à remarquer que $P_s(G')$ se réduit toujours à l'élément unité.

12) Si l'on considère la fonction représentative $\nu(x_k)=\varrho(x_k)$ $(k=i+1,i+2,\ldots,s)$ des M_k, $k>i$, dans G_i, on remarque sans peine que $P_i(G')$ est tout simplement l'image de G_i dans ${}^i\mathfrak{G}=\Gamma_{i+1}\circ\Gamma_{i+1}\circ\ldots\circ\Gamma_s$ par le ν-isomorphisme.

de fonctions représentatives normées $\varrho_j(x)$, telle que $\varrho_{j-1}(x_i)$ et $\varrho_j(x_i)$ soient contigües à l'étage j pour $j=1,2,\ldots,s$, et que cette chaîne est univoquement déterminée.

Si λ_j est la permutation $\theta_{\varrho_{j-1}}\cdot X \to \theta_{\varrho_j}\cdot X$ ($X\in G/G_s$) de M, qui provient du passage de $\varrho_{j-1}(x_i)$ à $\varrho_j(x_i)$, la permutation $\theta_\varrho\cdot X \to \theta_{\varrho'}\cdot X$ qui provient du passage de $\varrho(x_i)$ à $\varrho'(x_i)$ est évidemment $\lambda_s\lambda_{s-1}\ldots\lambda_2\lambda_1$.

Déterminons chacun des λ_j. Soient $\vartheta(x_i)$ et $\vartheta'(x_i)$ deux fonctions représentatives normées des M_i dans G, contigües à l'étage j. On a donc $\vartheta(x_i)=\vartheta'(x_i)$ pour $i\neq j$ et $\vartheta(x_j)=\vartheta'(x_j)\,\mu_{x_j}$.

μ_{x_j} appartient à G_j et, puisque $\vartheta(x_i)$ et $\vartheta'(x_i)$ sont normées, μ_{m_j} est l'unité de G. λ étant l'élément de $\bigcap_{i=1}^{s}\mathfrak{G}_i^*<m>$ provenant du passage de $\vartheta(x_i)$ à $\vartheta'(x_i)$, on a vu que $\theta_{\vartheta'}\cdot X=\lambda\cdot(\theta_\vartheta\cdot X)$. Ainsi, pour déterminer λ, il suffit d'examiner la relation entre les applications θ_ϑ et $\theta_{\vartheta'}$ de G/G_s sur M.

Soit $X\in G/G_s$, et soient

$$\theta_\vartheta\cdot X=(x_1,x_2,\ldots,x_s),\quad \theta_{\vartheta'}\cdot X=(x_1',x_2',\ldots x_s').$$

On a alors d'une part

$$X=\vartheta'(x_1')\,\vartheta'(x_2')\ldots\vartheta'(x_s')\,G_s=$$
$$=\vartheta(x_1')\,\vartheta(x_2')\ldots\vartheta(x_{j-1}')\,\vartheta(x_j')\,\mu_{x_j'}^{-1}\,\vartheta(x_{j+1}')\ldots\vartheta(x_s')\,G_s$$

et d'autre part

$$X=\vartheta(x_1)\,\vartheta(x_2)\ldots\vartheta(x_{j-1})\,\vartheta(x_j)\,\vartheta(x_{j+1})\ldots\vartheta(x_s)\,G_s.$$

Nous voyons donc que

$$x_1'=x_1,\ x_2'=x_2,\ \ldots,\ x_j'=x_j$$

et que

$$\vartheta(x_{j+1})\,\vartheta(x_{j+2})\ldots\vartheta(x_s)\,G_s=\mu_{x_j}^{-1}\vartheta(x_{j+1}')\,\vartheta(x_{j+2}')\ldots\vartheta(x_s')\,G_s,$$

ou

$$\mu_{x_j}\vartheta(x_{j+1})\,\vartheta(x_{j+2})\ldots\vartheta(x_s)\,G_s=\vartheta(x_{j+1}')\,\vartheta(x_{j+2}')\ldots\vartheta(x_s')\,G_s.$$

$\vartheta(x_i)$ étant normée, la dernière égalité équivaut à

$$\vartheta(m_1)\ldots\vartheta(m_j)\,\vartheta(x_{j+1}')\ldots\vartheta(x_s')\,G_s=\mu_{x_j}\vartheta(m_1)\ldots\vartheta(m_j)\,\vartheta(x_{j+1})\ldots\vartheta(x_s)G_s.$$

Ainsi, si $\bar\mu_{x_j}\in\mathfrak{G}$ est l'image de μ_{x_j} par le ϑ-isomorphisme η_ϑ de G dans $\mathfrak{G}$, on a

$$(m_1,m_2,\ldots,m_j,x_{j+1}',\ldots,x_s')=\bar\mu_{x_j}\cdot(m_1,m_2,\ldots m_j,x_{j+1},\ldots,x_s)$$

et

$${}^j(x')=(x_{j+1}',x_{j+2}',\ldots,x_s')={}^j\bar\mu_{x_j}(m^j)\cdot(x_{j+1},x_{j+2},\ldots,x_s)={}^j\bar\mu_{x_j}(m^j)\cdot{}^jx.$$

Par suite, pour tout $x=(x_1,x_2,\ldots,x_s)=(x^j,{}^jx)\in M$ on a

$$\lambda\cdot x=\lambda\cdot(x^j,{}^jx)=\lambda\,(x_1,x_2,\ldots,x_j,{}^jx)=(x_1,x_2,\ldots,x_j,{}^j\bar\mu_{x_j}(m^j)\cdot{}^jx),$$

ce qui détermine la permutation $\lambda=\theta_{\vartheta'}\theta_\vartheta^{-1}$ cherchée.

Remarquons que comme, pour $x_j=m_j$, μ_{m_j} est l'unité de G, $\bar\mu_{m_j}$ est la permutation identique de M. On a donc $\lambda\cdot(x_1,x_2,\ldots,x_{j-1},m_j,x_{j+1},\ldots,x_s)=$

$=(x_1, x_2, \ldots, x_{j-1}, m_j, x_{j+1}, \ldots, x_s)$. D'autre part, puisque pour tout $x_j \in M_j$, μ_{x_j} appartient à G_j, $\bar{\mu}_{x_j}(m_j)$ est un élément de $P_j(G')$ (en désignant par G' l'image de G dans $\mathfrak{G}$ par le ϑ-isomorphisme η_ϑ).

Nous pouvons formuler ce résultat intermédiaire comme suit :

La permutation λ de M qui provient du passage d'une fonction représentative normée $\vartheta(x_i)$ contigüe à $\vartheta'(x_i)$ à l'étage j, possède les propriétés suivantes :

1. λ *conserve* mod D_j *tout* $x \in M$ (λ appartient donc à ${}^j\Delta$).

2. *Pour tout* $z^j \in M^j$ *tel que* $(z^j)_j = x_j$ (c'est-à-dire tel que les éléments z de z^j, considérés comme une classe mod D_j dans M, soient de la forme $(z_1, z_2, \ldots, z_{j-1}, x_j, y_{j+1}, y_{j+2}, \ldots, y_s)$), *$\lambda$ induit dans la classe z^j une même permutation des j-restes ${}^jz = (y_{j+1}, y_{j+2}, \ldots, y_s)$ de $z \in z^j$. Cette permutation induite est un élément de $P_j(G')$, à savoir c'est la permutation* ${}^j\bar{\mu}_{x_j}(n^j)$. (Rappelons que ${}^j\bar{\mu}_{x_j}$ est la restriction à la classe m^j (mod D_j dans M) de l'image $\bar{\mu}_{x_j}$ de l'élément $\mu_{xj} = \vartheta'(x_j)^{-1}\vartheta(x_j)$ de G).

3. *λ induit la permutation identique dans toute classe z^j, telle que* $(z^j)_j = m_j$.

Ainsi, la permutation $\lambda = \{\theta_\vartheta \cdot X \rightarrow \theta_{\vartheta'} \cdot X\}$ de M, si on la considère, en vertu des identifications du § 2 (alinéa 1), comme un élément de $\mathfrak{G}^j \circ {}^j\mathfrak{G}$, est représentée par un tableau $[d, d(x^j)]$ tel que $d \cdot x^j = x^j$, donc d est l'unité $e^j = (e_1, e_2, \ldots, e_j)$ de $\mathfrak{G}^j$, et que $d(x^j) \cdot {}^jx = d(x_1, x_2, \ldots, x_j) \cdot {}^jx = {}^j\bar{\mu}_{x_j} \cdot {}^jx$, ce qui est une permutation de ${}^jM$ appartenant à $P_j(G')$ dépendant de x^j, mais ne dépendant *effectivement* que de la j-ième coordonnée x_j de x^j. En outre, $d(x_1, x_2, \ldots, x_{j-1}, m_j)$ est, comme on a vu, la permutation identique de ${}^jM$.

Si $\vartheta(x_i)$ est une fonction représentative normée fixe et si $\vartheta'(x_i)$ parcourt l'ensemble des fonctions représentatives normées contigües à $\vartheta(x_i)$ à l'étage j, les permutations λ parcourent l'ensemble des éléments de $\mathfrak{G}$ possédant les propriétés énumérées ci-dessus. L'ensemble de ces éléments constitue un sous-groupe de $\mathfrak{G}$ qu'on désignera par $\Delta_j^\vartheta(G)$. D'ailleurs, comme G et ϑ n'interviennent dans les conditions énumérées que par l'intermédiaire de $G' = \eta_\vartheta \cdot G$, on notera le même groupe aussi par $\Delta_j(G')$.

On peut formuler les propriétés qui caractérisent les éléments de $\Delta_j^\vartheta(G)$ également sous la forme équivalente suivante:

a) *λ conserve tout $x \in M$* mod D_j et, pour tout $x_j \in M_s$, ${}^j\lambda(x^j)$ appartient à $P_j(G')$ (condition 1 et une partie de la condition 2),

b) ${}^{j-1}\lambda(x^{j-1})$ est un élément de ${}^{j-1}\mathfrak{G}$ indépendant de x^{j-1} (condition 2),

c) ${}^j\lambda(m^j)$ est la permutation identique de ${}^jM$ (condition 3).

Par suite, $\Delta_j^\vartheta(G)$ est l'intersection des groupes des $\lambda \in \mathfrak{G}$ satisfaisant séparément aux conditions *a*), *b*) et *c*).

Les $\lambda \in \mathfrak{G}$ satisfaisant à la condition *a*) sont les $\lambda \in {}^j\Delta$ tels que, pour tout $x^j \in M^j$, on ait ${}^j\lambda(x^j) \in P_j(G')$. Ces éléments constituent le groupe qu'on a désigné au § 2 par

$$({}^j\mathfrak{J};\, P_j(G'))$$

et qu'on y a appelé le prolongement de $P_j(G')$ dans ${}^j\mathfrak{J}$.

Les $\lambda \in \mathfrak{G}$ satisfaisant à la condition *b*) sont ceux qui, considérés de la manière indiquée au § 2 comme éléments de $\mathfrak{G}^{j-1} \circ {}^{j-1}\mathfrak{G}$, donc représentées par les tableaux $\lambda = [\lambda^{j-1}, {}^{j-1}\lambda(x^{j-1})]$, ont leurs secondes composantes dans ce tableau indépendantes de x^{j-1}. Ils forment donc, le sous-groupe de ce groupe qu'on a identifié au § 2 avec le produit direct $\mathfrak{G}^{j-1} \times {}^{j-1}\mathfrak{G}$ des groupes $\mathfrak{G}^{j-1}, {}^{j-1}\mathfrak{G}$.

Enfin, la condition *c*), qu'on a déjà rencontré au cours du présent paragraphe, signifie que λ appartient au plus grand sous-groupe $\mathfrak{G}^{\cdot}_{s,j}<m>$ de $\mathfrak{G}_j<m>$ invariant dans $\mathfrak{G}_j<m>$. Ainsi,

$$\Delta_j(G') = \Delta_j^{\varrho}(G) = ({}^j\mathfrak{J};\, P_j(G')) \cap (\mathfrak{G}^{j-1} \times {}^{j-1}\mathfrak{G}) \cap \mathfrak{G}^{\cdot}_{s,j}<m>.$$

Revenons à notre passage $\varrho(x_i) \longrightarrow \varrho'(x_i)$, où $\varrho'(x_i)$ est une fonction représentative normée quelconque. La chaîne

$$\varrho(x_i) = \varrho_0(x_i), \varrho_1(x_i), \ldots, \varrho_s(x_i) = \varrho'(x_i)$$

étant celle définie précédemment (c'est-à-dire $\varrho_{j-1}(x_i)$ et $\varrho_j(x_i)$ étant contigües à l'étage j), remarquons qu'on obtient tous les $\varrho'(x_i)$ possibles, en faisant parcourir (pour $j = 1, 2, \ldots, s$) à $\varrho_j(x_i)$, pour $\varrho_{j-1}(x_i)$ déjà construit, l'ensemble des fonctions représentatives contigües à l'étage j avec $\varrho_{j-1}(x_i)$. $\varrho'(x_i)$ (et, par suite, aussi les $\varrho_j(x_i)$) étant fixés, soit $\overline{G}^{(j)}$ ($\overline{G}^{(0)} = \overline{G}$) l'image de G dans $\mathfrak{G} = \Gamma_1 \circ \Gamma_2 \circ \ldots \circ \Gamma_s$ par le ϱ_j-isomorphisme η_{ϱ_j}. Comme, pour tout $i > j$ et pour tout $x_i \in M_i$, on a $\varrho_j(x_i) = \varrho(x_i)$, on a, en vertu du Lemme 5, $P_j(\overline{G}^{(j)}) = P_j(G)$, d'où il resulte que

$$\Delta_j^{\varrho_j}(G) = \Delta_j(G^{(j)}) = \Delta_j(G).$$

Ainsi, λ_j étant l'élément de $\mathfrak{G}$ qui provient du passage $\varrho_{j-1}(x_i) \longrightarrow \varrho_j(x_i)$, quand $\varrho_j(x_i)$ parcourt l'ensemble des fonctions représentatives normées contigües à l'étage j avec $\varrho_{j-1}(x_i)$, quel que soit $\varrho_{j-1}(x_i)$, λ_j parcourt le même ensemble $\Delta_j(G)$. Par suite, *quand* $\varrho'(x_i)$ *parcourt l'ensemble des fonctions représentatives normées,* $\lambda = \{\theta_\varrho . X \longrightarrow \theta_{\varrho'} . X\}$ $(X \in G/G_s)$ *parcourt l'ensemble*

$$\Delta(\overline{G}) = \Delta_s(G)\, \Delta_{s-1}(G) \cdots \Delta_2(G)\, \Delta_1(\overline{G})$$

(où, d'ailleurs, $\Delta_s(\overline{G})$ se réduit à l'unité).

En particulier, soit G un sous-groupe représentatif de $\mathfrak{G}$ et soit $\tau(x_i)$ une fonction superposante des M_i dans G. Le η_τ-isomorphisme de G dans $\mathfrak{G}$ est l'identité, et on a $\overline{G} = G$. Soit $\varrho(x_i)$ une fonction représentative normée quelconque des M_i dans G, et soit λ la permutation de M qui provient du passage de $\tau(x_i)$ à $\varrho(x_i)$. L'automorphisme intérieur $(\lambda) = \{\sigma \longrightarrow \lambda\sigma\lambda^{-1}\}$ induit alors, puisque on a $\eta_r . \sigma = \sigma$ $(\sigma \in G)$, précisément le ϱ-isomorphisme de G sur $\lambda G \lambda^{-1}$. Nous avons donc le théorème suivant:

Théorème 6. *L'ensemble des ϱ-isomorphismes normés d'un sous-groupe représentatif G de $\mathfrak{G}$ est celui des isomorphismes de G induits par les automorphismes intérieurs $(\lambda) = \{\sigma \to \lambda \sigma \lambda^{-1}\}$ de $\mathfrak{G}$ engendrés par les éléments λ du sous-ensemble suivant de $\mathfrak{G}$:*

$$\Lambda(G) = \Lambda_s(G)\, \Lambda_{s-1}(G) \cdots \Lambda_2(G)\, \Lambda_1(G).$$

7. Dans le paragraphe suivant nous nous servirons des résultats exposés dans le présent paragraphe pour le cas de $s = 2$. Dans ce cas particulier, ces résultats se présentent sous une forme beaucoup plus simple.

Supposons donc tout d'abord, que $\mathfrak{G}$ soit le produit complet de deux groupes de permutations Γ_1, Γ_2, et soit G un sous-groupe représentatif de $\mathfrak{G}$, image d'un groupe G par un ϱ-isomorphisme de G dans $\mathfrak{G}$. Alors, $\overline{G}_1 < m >$ est l'ensemble des éléments de $\overline{G}$ qui, écrits sous la forme de tableaux $A = [a, a(x_1)]$ sont tels que $a \cdot m_1 = m_1$. $a(m_1)$ est la permutation de M_2 qui correspond à A par la m-identification et, par définition, quand A parcourt $\overline{G}_1 < m >$, cette permutation parcourt $\overline{\Gamma}_2$. Donc $P_1(\overline{G}) = \overline{\Gamma}_2$, $\Lambda_1(\overline{G})$ est l'ensemble des tableaux $[l, l(x_1)]$ tels que $l = e_1$, $l(m_1) = e_2$ et, pour tout $x_1 \in M_1$, $l(x_1) \in \overline{\Gamma}_2$.

Ainsi, *dans ce cas $\Lambda(\overline{G}) = \Lambda_1(\overline{G})$ est un groupe.*

En particulier, si Γ_1 et Γ_2 sont des groupes abstraits, on a $\overline{\Gamma}_2 = \Gamma_2$ et $\Lambda = \Lambda_1(\overline{G})$ *coïncide* visiblement *avec* $\mathfrak{G}_2$. *Ce groupe ne dépend donc pas du choix du groupe* G. Ainsi, si G est un sous-groupe transitif du produit complet $\mathfrak{G} = \Gamma_1 \circ \Gamma_2$ de deux groupes abstraits $\Gamma_1 \circ \Gamma_2$, et si $\varrho(x_i)$ est une fonction représentative normée des Γ_1, Γ_2 dans G, on sait que le ϱ-isomorphisme de G dans $\mathfrak{G}$ est induit par un automorphisme intérieur $\sigma \to \lambda_0 \sigma \lambda_0^{-1}$ de $\mathfrak{G}$, où $\lambda_0 \in \mathfrak{G}_2$.

Par suite, quand $\varrho'(x_i)$ parcourt l'ensemble des fonctions représentatives normées, les éléments de $\mathfrak{G}$ qui les induisent, parcourent $\Lambda(\overline{G})\lambda_0 = \mathfrak{G}_2 \lambda_0 = \mathfrak{G}_2$ (où $\overline{G} = \eta_\varrho \cdot G$). En particulier, il existe un ϱ'-isomorphisme qui est induit par l'automorphisme intérieur identique de $\mathfrak{G}$. $\varrho'(x_i)$ est alors une fonction superposante de G et G est représentatif. Ainsi, *tout sous-groupe transitif G du produit complet $\Gamma_1 \circ \Gamma_2$ de deux groupes abstraits Γ_1, Γ_2 est représentatif, et tout (Γ_1, Γ_2)-isomorphisme de G dans $\mathfrak{G}$ est un ϱ-isomorphisme pour quelque fonction représentative normée $\varrho(x_i)$ de Γ_1, Γ_2 dans G.*

(Reçu le 20 janvier 1949)