# Produit complet des groupes de permutations et problème d'extension de groupes. I.

Par MARC KRASNER et LÉO KALOUJNINE à Paris.

## Introduction.

Le présent travail se rattache, par certains de ses côtés, à la théorie qui fut le champ le plus ancien de la théorie des groupes, — celle des groupes de permutations. La représentation des groupes abstraits par des groupes de permutations fut surtout étudiée au cours du XIXè siècle, et les résultats classiques de cette étude sont, à présent, trop bien connus pour qu'il soit nécessaire d'en parler en détail[1]). Ils peuvent se résumer ainsi:

$G$ étant un groupe et $g$ étant un sous-groupe de $G$, l'application, qui fait correspondre à tout $a \in G$ la permutation $\{xg \rightarrow axg\}$ de l'ensemble $G/g$ des classes à droite $xg$ de $G$ suivant $g$, est une représentation de $G$ comme groupe transitif $\Gamma$ de permutations de l'ensemble $G/g$. Le noyau de cette représentation est le plus grand sous-groupe $g^*$ de $g$ invariant dans $G$. La représentation est fidèle si, et seulement si $g^*$ se réduit à l'unité de $G$.

Il est bien connu également, qu'à une similitude près, toutes les représentations du groupe $G$ par les groupes transitifs de permutations peuvent être obtenues de cette manière. A savoir, si $H$ est une représentation de $G$ comme groupe transitif de permutations d'un ensemble $M$, le choix d'un élément $m$ de $M$ définit une similitude qui transforme $H$ en la représentation de $G$ à l'aide du groupe $g_m$ des éléments de $G$ dont les images dans $H$ conservent $m$: on fait correspondre à tout $x \in M$ l'ensemble des $\sigma \in G$ dont les images dans $H$ transforment $m$ en $x$ (cet ensemble est bien une classe à droite suivant $g_m$).

La représentation considérée est primitive ou imprimitive selon que $g$ est un sous-groupe maximal ou non de $G$. Dans le second

---

[1]) Voir par exemple: A. SPEISER, *Die Theorie der Gruppen von endlicher Ordnung*, 3. édition (Berlin, 1937), Chapitre 8.

cas les ensembles des classes à droite dans $G$ suivant $g$, contenues dans les classes à droite de $G$ suivant un sous-groupe intermédiaire $g'$, $G \supset g' \supset g$, constituent des systèmes d'imprimitivité.

Soit

$$G = G_0 \supset G_1 \supset G_2 \supset \ldots \supset G_s$$

une suite de sous-groupes de $G$. On peut se demander s'il est possible d'exprimer la représentation de $G$ à l'aide de $G_s$ au moyen des $s$ représenstations $\Gamma_i$ des $G_{i-1}$ à l'aide des $G_i$ correspondants ($i = 1, 2, \ldots, s$). Un des principaux résultats de notre travail montre précisément que cette question admet une réponse positive et indique, d'une manière effective, pour les groupes $G$, où les $s$ représentations partielles $\Gamma_i$ sont données, un groupe universel $\mathfrak{G}$ de permutations, défini à une similitude près.

Malgré l'apparente banalité de ce résultat, il se trouve que le problème général d'extension des groupes par d'autres groupes[2]) qu'on pourrait appeler le problème de la "cascade schreierienne", peut se rattacher à un cas particulier de notre théorie, à savoir à celui où pour tout $i$, $G_i$ est invariant dans $G_{i-1}$ (nous disons dans ce cas que $G = G_0 \supset G_1 \supset \ldots \supset G_s$ est une suite de composition incomplète), et où, par conséquent, les groupes $\Gamma_i$ sont des groupes régulières de permutations. Il nous semble, en effet, que, dans ce cas particulier, la détermination du groupe universel, qu'on vient de mentionner, jointe à certains autres résultats de ce travail relatifs à l'isomorphie de ses sous-groupes, fournit une réponse satisfaisante, sinon tout à fait explicite, au problème de la "cascade schreierienne".

Le groupe universel $\mathfrak{G}$ pour les groupes $G$ ayant des représentations partielles données $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_s$ se trouve être une généralisation assez naturelle d'un type de groupes bien connus; à savoir, des *groupes monomiaux.*

Un groupe monomial est un groupe de substitutions de la forme $x_i \rightarrow \eta(i) x_{k(i)}$ où $\eta(i)$ appartient à un groupe multiplicatif numérique $\Gamma$. Une telle substitution monomiale peut être définie par la donnée d'une permutation $\sigma = \{x_i \rightarrow x_{k(i)}\}$ des variables à permuter et par la donnée, pour tout $x_i$, d'un nombre $\eta(i)$ dépendant de $i$.

En changeant légèrement les notations, on peut envisager un groupe de substitutions monomiales de la manière suivante: $S$ étant le groupe de toutes les permutations d'un ensemble abstrait $M$, et $\Gamma$ é'ant un groupe numérique multiplicat' soit $N = M \times \Gamma$ le produit, au sens

[2]) Le problème, aujourd'hui assique, de O. Schreier est un premier pas dans la direction de ce problème général, à savoir celui où il n'y a que deux groupes en présence.

de la théorie des ensembles, des $M$ et $\Gamma$. $N$ est, par définition, l'ensemble des couples $(m\ \gamma)$ $(m \in M, \gamma \in \Gamma)$. Une application biunivoque $\sigma = \{(m, \gamma) \to (m', \gamma')\}$ de $N$ sur lui-même est une substitution monomiale si: 1) $m'$ ne dépend que de $m$; et non de $\gamma$, et $m \to m'$ est une permutation de $M$ (donc un élément de $S$); 2) on a $\gamma' = \beta(m)\gamma$, où $\beta(m)$ est un élément de $\Gamma$ dépendant de $m$.

Sous cet aspect le concept d'un groupe monomial peut être facilement généralisé. Au lieu d'un groupe multiplicatif on peut prendre pour $\Gamma$ un groupe abstrait (non nécessairement commutatif) quelconque et de définir ensuite un groupe de substitutions de l'ensemble produit $N = M \times \Gamma$ par les conditions 1 et 2 qu'on vient d'énoncer. On peut étudier ensuite les représentations des groupes abstraits par des groupes monomiaux ainsi généralisés. A une différence de terminologie près, c'est une telle étude qui a été entreprise récemment par M. O. Ore[3]).

Un certain désavantage de la notion d'un groupe monomial généralisé réside, à notre avis, dans le fait, qu'il y a dans sa définition une dissymétrie entre les groupes $S$ et $\Gamma$. En effet, $S$ est le groupe de toutes les permutations de l'ensemble $M$, tandis que $\Gamma$ est un groupe abstrait. Il nous semble, par suite, naturel de faire disparaître cette dissymétrie entre $S$ et $\Gamma$ et de procéder comme suit:

Considérons deux groupes de permutations $\Gamma_1$ d'un ensemble $M_1$ et $\Gamma_2$ d'un ensemble $M_2$. Soit $M = M_1 \times M_2$ le produit des ensembles $M_1$, $M_2$. On envisage des applications $\sigma = \{(m_1, m_2) \to (m'_1, m'_2)\}$ de $M$ dans lui-même qui satisfont aux conditions suivantes: 1. $m'_1$ ne dépend que de $m_1$ et $\{m_1 \to m'_1\}$ est une permutation $\sigma_1$ appartenant à $\Gamma_1$; 2. Pour tout $m_1 \in M_1$ fixe, $\{m_2 \to m'_2\}$ est une permutation $\sigma_2(m_1)$ appartenant à $\Gamma_2$ (mais dépendant de $m_1$).

On démontre que l'ensemble de telles applications est un groupe de permutations de l'ensemble $M = M_1 \times M_2$.

C'est ce groupe que nous appelons le *produit complet* des groupes $\Gamma_1$ et $\Gamma_2$ et que nous notons $\mathfrak{G} = \Gamma_1 \circ \Gamma_2$. $\mathfrak{G}$ est un groupe transitif si, et seulement si $\Gamma_1$ et $\Gamma_2$ le sont. En outre, c'est un groupe imprimitif, et les sous-ensembles $\{m_1\} \times M_2$ de $M$, constitués par les éléments $(m_1, x_2)$ de $M$, où $m_1$ est fixe et où $x_2$ parcourt $M_2$, sont des systèmes d'imprimitivité de $\mathfrak{G}$.

Le groupe monomial généralisé de M. O. Ore est un cas particulier du produit complet, à savoir celui, où $\Gamma_1$ est le groupe symétrique de toutes les permutations de l'ensemble $M_1$, et où $\Gamma_2$ est la représentation régulière d'un *groupe* abstrait $\Gamma_2$ comme groupe de per-

[3]) O. Ore, Theory of monomial groups, *Transactions American Math. Soc.*, **51** (1942), p. 15–64.

mutations de l'*ensemble* $\Gamma_2$ (support de la structure de groupe $\Gamma_2$). Si $\Gamma_2$ est un groupe multiplicatif de nombres, on retrouve les groupes monomiaux classiques.

$\mathfrak{G} = \Gamma_1 \circ \Gamma_2$ est de nouveau un groupe de permutations. Soit $\Gamma_3$ un groupe de permutations d'un ensemble $M_3$. On peut, en itérant le processus indiqué, définir le produit complet $\mathfrak{G} \circ \Gamma_3 = (\Gamma_1 \circ \Gamma_2) \circ \Gamma_3$, qui est un groupe de permutations de l'ensemble $(M_1 \times M_2) \times M_3$. Il se révèle que, si l'on identifie, comme d'habitude, $(M_1 \times M_2) \times M_3$ avec $M_1 \times (M_2 \times M_3)$, le groupe $(\Gamma_1 \circ \Gamma_2) \circ \Gamma_3$ coïncide avec le groupe $\Gamma_1 \circ (\Gamma_2 \circ \Gamma_3)$, qu'on peut donc noter simplement $\Gamma_1 \circ \Gamma_2 \circ \Gamma_3$. Ainsi, la composition complète des groupes de permutations est *associative*, et on peut définir le produit complet d'un nombre fini de groupes de permutations $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_s$ d'ensembles $M_1, M_2, \ldots, M_s$[4]). C'est un groupe de permutations de de l'ensemble produit $M = M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_s$ des $M_1, M_2, \ldots, M_s$.

Dans le présent travail, nous procédons d'une manière un peu différente. Nous définissons directement, par des propriétés intrinsèques (généralisant les conditions 1 et 2 énoncées plus haut), le produit complet $\mathfrak{G} = \Gamma_1 \circ \Gamma_2 \circ \ldots \circ \Gamma_s$ de $s$ groupes $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_s$, et nous montrons ensuite, qu'on a, pour tout entier $i$ $(0 \leqq i \leqq s)$,

$$(\Gamma_1 \circ \Gamma_2 \circ \ldots \circ \Gamma_i) \circ (\Gamma_{i+1} \circ \Gamma_{i+2} \circ \ldots \circ \Gamma_s) = \Gamma_1 \circ \Gamma_2 \circ \ldots \circ \Gamma_i \circ \Gamma_{i+1} \circ \ldots \circ \Gamma_s.$$

Les §§ 1 et 2 sont consacrés à la définition rigoureuse du concept du produit complet $\mathfrak{G} = \Gamma_1 \circ \Gamma_2 \circ \ldots \circ \Gamma_s$ qu'on vient d'esquisser, et à la démonstration de ses propriétés fondamentales et élémentaires. Nous y introduisons aussi de multiples notions et notations auxiliaires dont nous nous servirons dans les paragraphes suivants. Parmi ces notions une des plus importantes est celle de la suite

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{G}_0\langle m\rangle \supset \mathfrak{G}_1\langle m\rangle \supset \ldots \supset \mathfrak{G}_s\langle m\rangle$$

de sous-groupes de $\mathfrak{G}$, attachée à un élément $m = (m_1, m_2, \ldots, m_s)$ de $M$. $\mathfrak{G}_i\langle m\rangle$ est le sous-groupe de $\mathfrak{G}$ formé par ses éléments conservant les $i$ premières coordonnées $m_1, m_2, \ldots, m_i$ de $m$. Pour tout sous-groupe $G$ de $\mathfrak{G}$, on a souvent, au cours de ce travail, à considérer la suite

$$G = G_0\langle m\rangle \supset G_1\langle m\rangle \supset \ldots \supset G_s\langle m\rangle,$$

où, pour tout $i = 1, 2, \ldots, s$, $G_i\langle m\rangle = G \cap \mathfrak{G}_i\langle m\rangle$. On montre, que, si $G$ est transitif, la représentation de $G_{i-1}\langle m\rangle$ à l'aide de $G_i\langle m\rangle$ est un groupe de permutations semblable (et ceci, pour un $m$ fixe, par une application canonique *de* $G_{i-1}\langle m\rangle / G_i\langle m\rangle$ sur $M_i$) à un sous-

[4]) Par recurrence transfinie, on peut même définir le produit complet d'une suite bien ordonnée quelconque de groupes de permutations. Ceci a été fait par L. KALOUJNINE dans un travail sous presse. Dans le présent mémoire nous nous occupons uniquement du cas d'un nombre fini de groupes.

groupe transitif $\overline{\Gamma}_i$ de $\Gamma_i$. L'application canonique ci-dessus mentionnée joue, d'ailleurs, un rôle important aux §§ 4 et 5 de ce travail. Si on la considère comme une identification de $G_{i-1}<m>/G_i<m>$ avec $M_i$, nous l'appellons la *m-identification*.

On a cru utile d'introduire au § 1 l'écriture des éléments du produit complet $\mathfrak{G}=\Gamma_1\circ\Gamma_2\circ\ldots\circ\Gamma_s$ sous la forme dite de "tableaux de permutations". Cette notation particulière (et l'algorithme qui s'y attache) n'est pas strictement indispensable pour l'exposé de la théorie générale, qui est l'objet principal de notre travail. Par contre, c'est un outil très puissant pour l'étude des cas particuliers[5]). Pour cette raison, et en vue d'applications ultérieures, nous avons indiqué pour quelques uns de nos résultats obtenus, leur transcription à l'aide de tableaux.

Dans le § 3, nous définissons la notion du *produit complet des groupes abstraits.* C'est un cas spécial important, déjà mentionné plus haut, du concept de produit complet des groupes de permutations. $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_s$ étant des groupes abstraits, on considère tout *groupe* $\Gamma_i$, en l'identifiant à sa représentation régulière, comme un groupe de permutations de *l'ensemble* $\Gamma_i$. Le produit complet de tels groupes de permutations $\Gamma_i$ est appelé produit complet des groupes abtraits. Le fait que, dans ce cas, tous les groupes facteurs sont des groupes de permutations régulières, permet de préciser et de simplifier plusieurs résultats exposés au § 2.

Entre autres, la suite de sous-groupes

$$G=G_0<m>\supset G_1<m>\supset\ldots\supset G_s<m>$$

(dont on a parlé plus haut) attachée à un élément $m$ de

$$M=\Gamma=\Gamma_1\times\Gamma_2\times\ldots\times\Gamma_s$$

est une suite de composition (incomplète) de $G\subseteq\mathfrak{G}$, c'est-à-dire $G_i<m>$ est invariant dans $G_{i-1}<m>$. D'ailleurs, nous convenons de ne considérer dans ce cas que la suite attachée à l'élément canonique $e=(e_1,e_2,\ldots,e_s)$ de $\Gamma$, où $e_i$ est l'unité de $\Gamma_i$, ce qui simplifie la suite de l'exposé. D'autre part, si $G$ est un sous-groupe transitif de $\mathfrak{G}$, la similitude canonique applique $G_{i-1}<e>/G_i<e>$ sur $\acute{\Gamma}_i$.

Aux §§ 4 et 5 nous étudions des homomorphismes et des isomorphismes d'un groupe abstrait $G$ donné sur des sous-groupes transitifs d'un produit complet de groupes de permutations (et plus particulièrement sur des sous-groupes transitifs d'un produit complet de groupes abstraits). La théorie que nous y exposons constitue une généralisation de la théorie de la représentation des groupes abstraits par les substitu-

---

[5]) Voir par exemple le travail: L. KALOUJNINE, La structure de $p$-groupes de Sylow de groupes symétriques finis, *Annales de l'École Normale Supérieure*, (3) 65 (1948), p. 239—276.

tions monomiales. En outre, comme on l'a déjà mentionné, elle généralise, en un certain sens, la théorie d'extension des groupes de O. SCHREIER.

Soit
$$G = G_0 \supset G_1 \supset \ldots \supset G_s$$
une suite donnée de sous-groupes de $G$. Si $G_s$ ne contient, en dehors de l'unité, aucun sous-groupe invariant dans $G$ (nous disons, alors, que $G_s$ est *anti-invariant* dans $G$), la représentation de $G$ à l'aide de $G_s$ est fidèle. Si $s>1$, cette représentation est imprimitive et, pour tout $i = 1, 2, \ldots, s$, les classes à droite $\tau G_i$ (l'ensemble de ses classes sera noté $G/G_i$) dans $G$ suivant $G_i$ constituent des systèmes d'imprimitivité. $\sigma$ parcourant $G_{i-1}$, $\sigma \rightarrow (\sigma) = \{\tau G_i \rightarrow \sigma\tau G_i\}$, où les classes $\tau G_i$ parcourent $G_{i-1}/G_i$, est la représentation de $G_{i-1}$ à l'aide de $G_i$. Soit $\Gamma_i$ l'image de $G_{i-1}$ par cette représentation. $\Gamma_i$ est un groupe transitif de permutations de l'ensemble $M_i = G_{i-1}/G_i$.

Une fois le concept du produit complet acquis, il est plausible de supposer que, à une similitude près, la représentation de $G$ à l'aide de $G_s$, comme groupe de permutations de l'ensemble $G/G_s$, est un sous-groupe transitif du produit complet $\mathfrak{G} = \Gamma_1 \circ \Gamma_2 \circ \ldots \circ \Gamma_s$ des groupes de permutations $\Gamma_i$ des ensembles $M_i = G_{i-1}/G_i$.

Nous montrons au § 4 qu'il en est bien ainsi. Comme par ailleurs, il a été prouvé au § 2, que $\mathfrak{G} = \Gamma_1 \circ \Gamma_2 \circ \ldots \circ \Gamma_s$ est lui-même un groupe $G$ satisfaisant au conditions précédentes relatives aux groupes de permutations $\Gamma_i$, on voit que c'est bien pour de tels groupes un *groupe universel*. C'est précisément le groupe universel dont nous avons parlé au début de cette introduction.

Le point crucial de la démonstration est la détermination d'une application biunivoque $\theta$ convenable de l'ensemble $G/G_s$ sur l'ensemble produit $G_1/G_2 \times G_2/G_3 \times \ldots \times G_{s-1}/G_s$. Une telle application $\theta$ peut être obtenue en choisissant, dans toute classe $X_i \in G_{i-1}/G_i$, un représentant $\tau(X_i) \in G$. Toute classe $X \in G/G_s$ s'écrit alors, et d'une seule manière, sous la forme $X = \tau(X_1)\,\tau(X_2) \ldots \tau(X_s)\, G_s$ (choix de coordonnées !). On pose $\theta \cdot X = (X_1, X_2, \ldots, X_s)$, et on montre que, pour tout $\sigma \in G$,
$$\sigma \rightarrow \theta\{X \rightarrow \sigma X\}\,\theta^{-1}$$
est bien un isomorphisme (ou, comme nous disons, une immersion) de $G$ dans $\mathfrak{G} = \Gamma_1 \circ \Gamma_2 \circ \ldots \circ \Gamma_s$. En choisissant autrement les représentants $\tau(X_i)$, on obtient, en général, d'autres isomorphismes de $G$ dans le produit complet $\mathfrak{G} = \Gamma_1 \circ \Gamma_2 \circ \ldots \circ \Gamma_s$ des $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_s$.

Dans le cas particulier, où $G = G_0 \supset G_1 \supset \ldots \supset G_s$ est une suite de composition (incomplète) de $G$, et où $G_{i-1}/G_i$ est isomorphe à un groupe abstrait $\Gamma_i$, le processus indiqué permet d'immerger $G$ dans le produit complet des groupes abstraits $\Gamma_i$.

Les isomorphismes d'un groupe donné $G$, avec la suite donnée $G = G_0 \supset G_1 \supset \ldots \supset G_s$, dans le produit complet $\mathfrak{G}$, obtenus à l'aide d'un choix de représentants dans les classes $X_i \in G_{i-1}/G_i$, ne sont pas quelconques. Si on choisit, pour tout $i$, l'unité de $G$ comme représentant de $m_i = G_i$ (considéré comme un élément de $G_{i-1}/G_i$), et si l'on désigne par $\overline{G}$ l'image de $G$ dans $\mathfrak{G}$ par l'immersion qu'un tel choix des représentants définit, l'isomorphisme de $G$ sur $\overline{G}$ est ce qui nous appelons *un* $(M_1, M_2, \ldots, M_s)$*-isomorphisme*. Cette notion d'un $(M_1, M_2, \ldots, M_s)$-isomorphisme, qui est une généralisation d'un concept analogue, employé dans la théorie de Schreier, sera précisée au cours du § 4. Pour le moment, on se contentera de dire (d'une manière un peu vague) qu'il s'agit d'un isomorphisme tel que si $m = (m_1, m_2, \ldots, m_s)$ et si $\overline{X}_i$ est l'image, par l'isomorphisme consideré, de la classe $X_i = \tau G_i$ ($\tau \in G_{i-1}$) suivant $G_i$ dans $G_{i-1}$, $\overline{X}_i$ est contenu précisément dans la classe suivant $\mathfrak{G}_i<m>$ que la $m$-identification de $\mathfrak{G}_{i-1}<m>/\mathfrak{G}_i<m>$ avec $M_i = G_{i-1}/G_i$ applique sur $X_i$.

Dans le cas particulier d'un groupe $G$ avec une suite de composition incomplète $G = G_0 \supset G_1 \supset \ldots \supset G_s$ telle que $G_{i-1}/G_i$ soit isomorphe à un groupe abstrait $\Gamma_i$, nous définissons la notion d'un $(\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_s)$-*isomorphisme*. Ce n'est autre chose que le $(M_1, M_2, \ldots, M_s)$-isomorphisme, pour $m = e$, dans ce cas particulier. Ainsi, les isomorphismes d'un tel groupe donné $G$ obtenus dans le produit complet $\mathfrak{G} = \Gamma_1 \circ \Gamma_2 \circ \ldots \circ \Gamma_s$ des groupes abstraits $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_s$ à l'aide d'un choix de forme précédemment indiquée de représentants dans $G$ des classes $X_i \in G_{i-1}/G_i$ sont des $(\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_s)$-*isomorphismes*.

Après avoir établi au § 4 l'existence des isomorphismes (et plus précisément des $(M_1, M_2, \ldots, M_s)$-isomorphismes) d'un groupe $G$, avec une suite de sous-groupes $G = G_0 \supset G_1 \supset \ldots \supset G_s$ donnée, dans le produit complet $\mathfrak{G} = \Gamma_1 \circ \Gamma_2 \circ \ldots \circ \Gamma_s$, nous déterminons, dans le § 5, l'ensemble de tous les $(M_1, M_2, \ldots, M_s)$-isomorphismes de $G$ dans $\mathfrak{G}$, et nous donnons une description détaillée de cet ensemble. Nous démontrons que *deux* $(M_1, M_2, \ldots, M_s)$*-isomorphismes* $\eta$ *et* $\eta'$ *de* $G$ *dans* $\mathfrak{G}$ *ne diffèrent que par un automorphisme intérieur* $(\lambda) = \{\sigma \rightarrow \lambda\sigma\lambda^{-1}\}$ *de* $\mathfrak{G}$, *où* $\lambda$ *appartient à un sous-groupe bien déterminé de* $\mathfrak{G}$ *qui est indépendant du groupe* $G$ *donné.* Inversement, *si* $\lambda$ *appartient à ce sous-groupe et si* $\eta$ *est un* $(M_1, M_2, \ldots, M_s)$*-isomorphisme de* $G$ *dans* $\mathfrak{G}$, $\eta' = (\lambda)\eta$ *est encore un* $(M_1, M_2, \ldots, M_s)$*-isomorphisme de* $G$ *dans* $\mathfrak{G}$.

En un certain sens, les résultats des §§ 4 et 5 résolvent le problème de la "cascade schreierienne", mentionné plus haut. SCHREIER détermine tous les groupes $G$ qui possédent un sous-groupe invariant $G_1$, isomorphe à un groupe donné $\Gamma_2$ et tel que $G/G_1$ soit isomorphe à un groupe donné $\Gamma_1$. Nous déterminons, dans le présent mémoire, tous les groupes $G$ possédant une suite $G = G_0 \supset G_1 \supset \ldots \supset G_s$ de sous-groupes telle que: 1) $G_s$ soit anti-invariant dans $G$, et 2) pour tout $i = 1, 2, \ldots, s$, la représentation de $G_{i-1}$ à l'aide de $G_i$ soit un groupe de permutations donné. Pour $s = 2$, si $G_1$ est invariant dans $G$, et si $G_2$ se réduit à l'unité, on peut, à partir de nos résultats, résoudre le problème original de Schreier. Nous montrons ceci dans le dernier paragraphe (§ 6) de ce travail. Notre solution est en quelque sorte duale de celle de SCHREIER[7]. En effet, Schreier fait correspondre à une paire de groupes $\Gamma_1, \Gamma_2$ un ensemble de lois de composition du support fixe $\Gamma_1 \times \Gamma_2$, tandis que nous leur faisons correspondre un ensembles de sous-groupes d'un groupe $\Gamma_1 \circ \Gamma_2$, organisé par une loi de composition fixe. Mais ce sont les mêmes systèmes de facteurs de Schreier et les mêmes identités fondamentales entre ces systèmes de facteurs que notre solution met en évidence. Naturellement, ces systèmes de facteurs ont dans notre théorie une toute autre signification que dans celle de Schreier.

La notion du produit complet de groupes abstraits a été signalée dans une Note de L. KALOUJNINE[8]), qui a remarqué que c'est une généralisation naturelle d'un concept qu'il a utilisé dans l'étude des $p$-groupes de Sylow de groupes symétriques de degré $p^m$. Ces $p$-groupes de Sylow sont, en effet, des produits complets de $m$ groupes cycliques d'ordre $p$.

M. KRASNER a remarqué que, dans le cas $s = 2$, on peut retrouver, à partir du concept de produit complet des groupes abstraits, les systèmes de facteurs de O. Schreier et les identités fondamentales qui existent entre eux (§ 6).

La présente première communication comprend les §§ 1—2; les §§ 3—6 seront publiés prochainement.

## Conventions concernant la terminologie et les notations.

On se servira, au cours de ce travail, de la terminologie généralement acceptée dans la théorie des groupes abstraits et dans la théorie des groupes de permutations. Le lecteur pourra consulter, à ce sujet, n'importe quel livre moderne sur la théorie des groupes. Pour les notions et les notations de la théorie des ensembles, nous avons adopté la terminologie de BOURBAKI.

A part cela, nous tenons à signaler les conventions suivantes:

1. Nous appelons une suite finie

$$G = G_0 \supset G_1 \supset G_2 \supset \ldots \supset G_s$$

---

[7]) O. SCHREIER, Über die Erweiterung von Gruppen I., *Monatshefte für Math. und Phys.*, **34** (1926), S. 165—180.

[8]) L. KALOUJNINE, Sur les $p$-groupes de Sylow du groupe symétrique de degré $p^m$, *Comptes Rendus Acad. Sci. Paris*, **221** (1945), p. 222—224.

de sous-groupes d'un groupe $G$, telle que, pour tout $i=1,2,\ldots,s$, $G_i$ soit un sous-groupe invariant de $G_{i-1}$, *une suite de composition* (incomplète).

2. Un sous-groupe $g$ d'un groupe $G$ sera dit *anti-invariant* dans $G$, s'il ne contient, en dehors de l'unité, aucun sous-groupe invariant de $G$.

3. $G$ étant un groupe, et $g$ étant un sous-groupe de $G$, l'ensemble des classes à droite $ag\ (a\in G)$ dans $G$ suivant $g$ sera noté $G/g$. Les éléments de $G/g$ seront désignés par des majuscules latines $X, Y, Z$.

4. Si $\theta$ est l'application d'un ensemble $M$ dans un ensemble $N$ (pouvant coincider avec $M$) on notera $\theta\cdot x$ l'image d'un $x\in M$ par $\theta$. On séparera, donc, le symbole qui désigne l'application et l'élément qu'elle transforme par un "$\cdot$" (par contre on n'emploiera jamais le signe . pour désigner la composition dans un monoide). Avec cette notation, si $\theta$ et $\psi$ sont deux applications composables, on a $\psi\cdot(\theta\cdot x)= =\psi\,\theta\cdot x$.

Si $\theta(t)$ est l'application de $M$ dans $N$ dependant d'un paramètre $t$ parcourant un ensemble $T$, on notera donc $\theta(t)\cdot x$ l'image d'un $x\in M$ par $\theta\ t)$. Comme un tel cas se présente souvent dans notre travail, il aurait été incommode d'écrire l'image de $x$ par $\theta$ sous la forme $\theta(x)$, car on serait alors obligé d'écrire, pour $\theta=\theta(t)$, l'expression incommode $\theta(t)(x)$.

D'autres conventions, plus particulières, seront indiquées dans le texte, au fur et à la mesure des besoins.

## § 1. Produit complet de groupes de permutations.

Soit $M_1, M_2, \ldots, M_s$ une suite finie d'ensembles et soit, pour tout $i=1,2,\ldots,s$, $\Gamma_i$ un groupe de permutations de l'ensemble $M_i$, dont l'unité sera notée $e_i$. Considérons le produit (au sens de la théorie des ensembles) $M=M_1\times M_2\times\ldots\times M_s$ des ensembles $M_i$, autrement dit l'ensemble des suites $m=(m_1,m_2,\ldots,m_s)$, où, pour tout $i$, $m_i$ parcourt les éléments de $M_i$. $m_i$ sera dite la *i-ième coordonnée* de $m$. En général, si $x$ est un élément de $M$ et si les coordonnées de $x$ ne sont pas déjà désignées de quelque manière, la $i$-ième coordonnée de $x$ sera notée $(x)_i$ (où on omettra les parenthèses en écrivant simplement $x_i$, si aucune confusion n'est à craindre).

Pour tout $i=1,2,\ldots,s$, les produits $M_1\times M_2\times\ldots\times M_i$ et, si $i<s$, $M_{i+1}\times\ldots\times M_{s-1}\times M_s$ seront dits la *i-section* et le *i-reste* de $M$ et seront notés $M^i$ et ${}^iM$.[1] Visiblement, $M$ peut-être identifié avec $M^i\times{}^iM$ en identifiant un $x=(x_1,x_2,\ldots,x_s)$ avec $(x^i,{}^ix)$, où $x^i=(x_1,x_2,\ldots,x_i)$ et où ${}^ix=(x_{i+1},x_{i+2},\ldots,x_s)$. $x^i$ et ${}^ix$ seront appelés la *i-section* et le *i-reste* de $x$. Si $j<i$, la $j$-section ${}^j(M^i)=({}^jM)^i$ de $M^i$ et celle ${}^j(x^i)= =(x_{j+1},x_{j+2},\ldots,x_i)$ de $x^i$ seront notés ${}^jM^i$ et ${}^jx^i$. Si $i<q\leqq j$, on a $({}^jx^i)_q=x_q$. On a évidemment $M^s=M$ et $x^s=x$. Quand $j\leqq i$, pour deux

[1]) Les indices supérieurs à droite sont écrits sans parenthèse, car les puissances ne sont employées nulle part (à l'exception de l'alinéa 5 du § 5, où il sera précisé explicitement qu'il s'agit de puissances) au cours de ce travail. Ainsi, aucune confusion n'est à craindre.

éléments $x^i$ et $y^i$ de $M^i$, la relation $(x^i)^j=(y^i)^j$ (autrement dit la coïncidence des $j$ premières coordonnées de $x^i$ et de $y^i$) est une équivalence dans $M^i$, notée $D^i_j$ et appelée le *j-ième diviseur* de $M^i$.[2]) On identifiera toute classe de cette équivalence avec l'élément de $M^j$ qui est la $j$-section des éléments de cette classe. L'ensemble $M^j$ devient ainsi l'ensemble quotient de $M^i$ par la relation d'équivalence définie ci-dessus. Toutes ces identifications sont cohérentes en ce sens que, pour $j<\bar{\imath}<i$, $D^{\bar{\imath}}_j$ est le quotient au sens de BOURBAKI[3]) de $D^i_j$ par $D^i_{\bar{\imath}}$[4]). On identifiera par suite le diviseur $D^{\bar{\imath}}_j$ de $M^{\bar{\imath}}$ avec celui $D^i_j$ de $M^i$. Pour cette raison on ecrira $D_j$ au lieu de $D^i_j$ (et, en cas de besoin, on parlera de diviseur $D_j$ dans $M^i$).

Nous aurons aussi à considérer le *0-ième diviseur* $D_0$ de $M^i$, qui est simplement l'équivalence amorphe de $M^i$ (c'est-à-dire l'équivalence, dont la seule classe est $M^i$ lui-même). L'ensemble quotient de $M^i$ par la relation d'équivalence $D_0$ et son unique élément ne dépendent pas, en vertu de l'identification de $M^j$ avec $M^i/D_j$ $(j<i)$, du choix de $i\leqq s$ et seront désignés par $M^0$ et $m^0$. Donc si $x^0$ est la classe $(\mathrm{mod}\, D_0)$ de $x^i\in M^i$, pour tout $i=1,2,\ldots,s$ et $x^i\in M^i$, on a $x^0=m^0$.

Considérons les applications

$$\sigma=\{x\to\sigma.x\}=\{(x_1,x_2,\ldots,x_s)\to((\sigma.x)_1,(\sigma.x)_2,\ldots,(\sigma.x)_s)\}$$

de l'ensemble $M$ dans lui-même qui satisfont aux deux conditions suivantes:

1. *Pour tout $i=1,2,\ldots,s$ la i-ième coordonnée $(\sigma.x)_i$ de $\sigma.x$ ne dépend que des i premières coordonnées $x_1,x_2,\ldots,x_i$ de $x$, c'est-à-dire de sa i-section $x^i$.*

Il existe donc, pour une telle application $\sigma$ et pour tout $i$, une fonction $\sigma_i(x^i)=\sigma_i(x_1,x_2,\ldots,x_i)$, définie sur $M^i$ et à valeurs dans $M_i$, telle que

$$(\sigma.x)_i=\sigma_i(x^i).$$

Par suite, $(\sigma.x)^i$ ne dépend aussi que de $x^i$, d'où il résulte que, pour tout $i$, une telle application $\sigma$ est compatible avec l'équivalence $D_i$. L'application $\sigma^i=\{x^i\to(\sigma.x)^i\}$ induite par $\sigma$ dans l'ensemble quotient $M^i=M/D_i$, qui sera dite la *i-section* de $\sigma$, satisfait, pour

---

[2]) On écrira donc, conformément à la notation de BOURBAKI, *Théorie des Ensembles. Fascicule des résultats* (Paris, 1939), p. 29, $x^i\equiv y^i\ (\mathrm{mod}\ D^i_j)$ quand $(x^i)^j=(y^i)^j$.

[3]) loc. cit.[2]), p. 32.

[4]) Autrement dit, l'identification des classes de $M^i$ suivant $D^i_j$ avec les éléments de $M^j$ est la même que celle qu'on obtient en identifiant d'abord les classes de $M^i$ suivant $D^i_{\bar{\imath}}$ avec les éléments de $M^{\bar{\imath}}$, et en identifiant ensuite les classes de $M_{\bar{\imath}}$ suivant $D^{\bar{\imath}}_j$ avec les éléments de $M^j$.

tout $j \leqq i$, à la même condition 1. On a, si $j < i$, $\sigma^j = (\sigma^i)^j$. Par conséquent, si $j < i$, les $j$ premières coordonnées de $\sigma^i \cdot x^i$ ne dépendent que des $j$ premières coordonnées de $x^i$. Ainsi une classe suivant $D^j$ dans $M^i$ est appliquée par $\sigma^i$ dans une classe suivant le même diviseur.

Soit $m^j = (m_1, m_2, \dots, m_j)$ un élément de $M^j$. Considérons les éléments $x^i \in M^i$ qui sont dans la classe suivant $D^j$ identifiée avec $m^j$.[5]) $\{{}^j x^i = {}^j(x^i) \to {}^j(\sigma^i \cdot x^i)\}$ est une application de ${}^j M^i$ dans lui même, ne dépendant que de $m^j \in M^j$ et satisfaisant, visiblement, à la condition 1. Elle sera notée ${}^j\sigma^i(m^j) \cdot {}^j x^i$ ou ${}^j\sigma^i(m_1, m_2, \dots, m_j) \cdot {}^j x^i$. (Si $i = s$, ${}^j\sigma^s$ sera aussi notée ${}^j\sigma$). En particulier, on a ${}^{i-1}\sigma^i(m_1, m_2, \dots, m_{i-1}) \cdot x_i = \sigma_i(m_1, m_2, \dots, m_{i-1}, x_i)$, où $\sigma_i(x_1, x_2, \dots, x_i)$ est l'application définie plus haut. On la notera aussi $\sigma_i(m^{i-1}).x_i$.

2. *Quel que soit $i = 1, 2, \dots, s$, pour tout $m^{i-1} = (m_1, m_2, \dots, m_{i-1}) \in M^{i-1}$ l'application $\sigma_i(m_1, m_2, \dots, m_{i-1}) \cdot x_i$ de $M_i$ dans lui-même est une permutation $a_\sigma(m_1, m_2, \dots, m_{i-1})$ appartenant au groupe $\Gamma_i$.*

Ainsi, $\sigma^i$ applique *biunivoquement* toute classe

$$m^{i-1} = (m_1, m_2, \dots, m_{i-1}) \in M^{i-1}$$

dans $M^i$ suivant $D_{i-1}$, *sur* la classe $\sigma^{i-1} \cdot m^{i-1} = (m_1', m_2', \dots, m_{i-1}')$ dans $M^i$ suivant $D_{i-1}$. Il est visible que si $\sigma$, satisfaisant à la condition 1, satisfait aussi à la condition 2 pour les groupes $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_s$, $\sigma^i$ y satisfait pour les groupes $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_i$, et ${}^j\sigma^i$ y satisfait pour les groupes $\Gamma_{j+1}, \Gamma_{j+2}, \dots, \Gamma_i$; il est aussi très facile à voir, que si $\sigma$ satisfait à la condition 1, il satisfait aussi à la condition 2, si $\sigma^i$ et, pour tout $x^i \in M^i$, ${}^i\sigma(x^i)$ y satisfont.

Montrons qu'une application $\sigma$ satisfaisant aux conditions 1 et 2 est une permutation de $M$. Comme $M = M^s$, il suffit de démontrer ce fait, par induction sur $i$ $(i = 1, 2, \dots, s)$, pour tout $\sigma^i$, considéré comme application de $M^i$ dans lui-même. Or, ceci est clair (en vertu de la condition 2) pour $i = 1$. Supposons qu'il en soit ainsi pour un $i < s$. $M^i$ est l'ensemble des classes dans $M^{i+1}$ (mod $D^i$) et, par hypothèse, $\sigma^{i+1}$ applique toute classe $x^i \in M^i$ *dans* une classe $\bar{x}^i \in M^i$ de manière que $x^i \to \bar{x}^i$ soit une application biunivoque de $M^i$ sur lui-même. D'autre part, en vertu de la remarque qui précède, $\sigma^{i+1}$ applique biunivoquement $x^i$ sur $\bar{x}^i$, quand on les considère somme des sous-ensembles de $M^{i+1}$. Ainsi, $\sigma^{i+1}$ applique biunivoquement la réunion $M^{i+1}$ de toutes les classes $x^i \in M^i$ sur la réunion des $\bar{x}^i$ correspondants, qui est aussi $M^{i+1}$; donc $\sigma^{i+1}$ est bien une permutation de $M^{i+1}$.

Considérons pour des entiers $i$, $1 \leqq i \leqq s$, des applications $f(x^{i-1})$ de l'ensemble $M^{i-1} = M/D_{i-1}$ dans le groupe $\Gamma_i$ [en particulier, si $i = 1$, $M^0 = M/D^0$ est l'ensemble réduit à un seul élément et, par suite $f(x^0)$ peut être considéré

[5]) Autrement dit $x$ est de la forme $(m_1, m_2, \dots, m_j, *, *, \dots, *)$.

comme une constante, autrement dit comme un élément fixe de $\Gamma_1$]. L'ensemble de telles applications $f(x^{i-1})$ sera noté $F^i$. On définira l'inverse d'une fonction $f(x^{i-1})\in F^i$ et le composé des fonctions $f(x^{i-1})$, $g(x^{i-1})\in F^i$, (qui sont les fonctions à valeur dans le groupe $\Gamma_i$), comme on le fait habituellement pour les fonctions à valeur dans un groupe. Un $a_i\in\Gamma_i$ sera identifié avec la fonction $f(x^{i-1})$ identiquement égale à $a_i$ sur $M^{i-1}$, et cette fonction sera notée $a_i$ (ou, quand on voudra mettre en évidence son argument, $a_i(x^{i-1})$).

$\sigma$ étant une application de $M$ satisfaisant aux conditions 1 et 2, on a vu que, pour tout $i=1,2,\ldots,s$ et pour tout $x^{i-1}=$ $=(x_1,x_2,\ldots,x_{i-1})\in M^{i-1}$, $\sigma$ détermine une permutation $a_\sigma(x^{i-1})=$ $=a_\sigma(x_1,x_2,\ldots,x^{i-1})$ telle que $(\sigma.x)_i=a_\sigma(x^{i-1}).x_i$. Ainsi peut-on faire correspondre à chaque $\sigma$ une suite $A_\sigma=[a_\sigma(x^0), a_\sigma(x^1),\ldots,a_\sigma(x^{s-1})]$ de fonctions $a_\sigma(x^{i-1})\in F^i\,(i=1,2,\ldots,s)$ dite *tableau des permutations* associé à $\sigma$, et la donnée de ce tableau détermine aussi $\sigma$, car, pour tout $i=1,2,\ldots,s$ et pour $x\in M$, elle détermine $(\sigma.x)_i$.

Inversement, si $A=[a(x^0),a(x^1),\ldots,a(x^{s-1})]$ est une suite de fonctions $a(x^{i-1})\in F^i$, l'application

$$\sigma=\{x=(x_1,x_2,\ldots,x_s)\to(a(x^0).x_1,\,a(x^1).x_2,\ldots,a(x^{s-1}).x_s)\}$$

de $M$ satisfait aux conditions 1 et 2 et $A$ est précisément le tableau $A_\sigma$ qui lui est associé. Ainsi a-t-on établi une correspondance biunivoque entre les applications de $M$ satisfaisant aux conditions 1 et 2 et les tableaux décrits ci-dessus. Le plus souvent, une telle application $\sigma$ de $M$ et son tableau $A_\sigma$ seront identifiés et notés par une même lettre. Le tableau associé à la permutation identique de $M$ est, visiblement, $e=[e_1,e_2,\ldots,e_s]$.

Montrons que l'ensemble $\mathfrak{S}$ des applications de $M$ satisfaisant aux conditions 1 et 2 (nous avons déjà montré que ces applications sont des permutations de $M$) est un groupe de permutations de $M$.

Soient $\sigma,\sigma'\in\mathfrak{S}$. Alors, si $x\in M$, la $i$-section $(x')^i$ de $x'=\sigma.x$ ne dépend, en vertu de la condition 1, que de celle $x^i$ de $x$, et de même, la $i$-section $(x'')^i$ de $x''=\sigma'.x'=\sigma'.(\sigma.x)$ ne dépend que de $(x')^i$. Donc $(x'')^i$ ne dépend que de $x^i$, et $\sigma'\sigma$ satisfait à la condition 1. D'autre part, si $x^{i-1}$ est fixé, $(x')^{i-1}$ est aussi fixé (condition 1) et $x_i\to x'_i$ est une permutation $a(x^{i-1})\in\Gamma_i$ (condition 2). De même, quand $(x')^{i-1}$ est fixé, $x'_i\to x''_i$ est une permutation $a'((x')^{i-1})\in\Gamma_i$ qui, en vertu de ce qui précède, est déterminée par la donnée de $\sigma'$ et de $x^{i-1}$. Ainsi, si $x^{i-1}$ est fixé, $x_i\to x''_i$ est la permutation $a'((x')^{i-1})a(x^{i-1})\in\Gamma_i$, et $\sigma'\sigma$ satisfait aussi à la condition 2.

Soit $\sigma\in\mathfrak{S}$. Puisque $x^i\to(x')^i=(\sigma.x)^i$ est une permutation de $M^i$, $x^i$ ne dépend que de $(x')^i$ (donc la permutation $\sigma^{-1}=\{x'=\sigma.x\to x\}$

satisfait à la condition 1) et, en particulier, si l'on fixe $(x')^{i-1}$, $x^{i-1}$ devient aussi fixe. Dès lors, si l'on ne considère que les $x \in M$ tels que $(x')^{i-1} = (\sigma . x)^{i-1}$ soit fixe, $x_i \longrightarrow (\sigma . x)_i$ est, en vertu de la condition 2, une permutation de $M_i$ appartenant à $\Gamma_i$. Il en est donc de même de l'application inverse $(\sigma . x)_i \longrightarrow x_i = (\sigma^{-1}(\sigma . x))_i$, et, par suite, $\sigma^{-1}$ satisfait aussi à la condition 2, d'où $\sigma^{-1} \in \mathfrak{G}$. Ainsi, $\mathfrak{G}$ est bien un groupe.

$$A = [a(x^0), a(x^1), \ldots, a(x^{s-1})] \quad \text{et} \quad A' = [a'(x^0), a'(x^1), \ldots, a'(x^{s-1})]$$

étant les tableaux associés des $\sigma, \sigma' \in \mathfrak{G}$, le tableau associé à $\sigma'\sigma$ est

$$[a'a, a'(a\cdot x_1)a(x_1), \ldots, a'(a\cdot x_1, a(x_1)\cdot x_2, \ldots, a(x_1, x_2, \ldots, x_{s-2})\cdot x_{s-1})a(x_1, x_2, \ldots, x_{s-1})],$$

car

$$A' . (A \cdot x) = A' . ([a, a(x_1), \ldots, a(x_1, x_2, \ldots, x_{s-1})] \cdot (x_1, x_2, \ldots, x_s)) =$$
$$= A' \cdot (a \cdot x_1, a(x_1) \cdot x_2, \ldots, a(x_1, x_2, \ldots, x_{s-1}) \cdot x_s) =$$
$$= [a', a'(x_1), \ldots, a'(x_1, x_2, \ldots, x_{s-1})] \cdot (a \cdot x_1, a(x_1) \cdot x_2, \ldots, a(x_1, x_2, \ldots, x_{s-1}) \cdot x_s) =$$
$$= (a' \cdot (a \cdot x_1), a'(a \cdot x_1) \cdot (a(x_1) \cdot x_2), \ldots, a'(a \cdot x_1, a(x_1) \cdot x_2, \ldots, a(x_1, x_2, \ldots, x_{s-2}) \cdot x_{s-1}) \cdot$$
$$\cdot (a(x_1, x_2, \ldots, x_{s-1}) \cdot x_s)) =$$
$$= (a'a \cdot x_1, a'(a \cdot x_1) a(x_1) \cdot x_2, \ldots, a'(a \cdot x_1, a(x_1) \cdot x_2, \ldots, a(x_1, x_2, \ldots, x_{s-2}) \cdot$$
$$\cdot x_{s-1}) \, a(x_1, x_2, \ldots, x_{s-1}) \cdot x_s) =$$
$$= [a'a, a'(a \cdot x_1) a(x_1), \ldots, a'(a \cdot x_1, a(x_1) \cdot x_2, \ldots, a(x_1, x_2, \ldots, x_{s-2}) \cdot x_{s-1}) a(x_1, x_2, \ldots, x_{s-1})] \cdot$$
$$\cdot (x_1, x_2, \ldots, x_s).$$

Ce tableau sera noté $A'A$ et sera dit le *composé* des $A', A$. Avec cette loi de composition de tableaux, l'identification des permutations $\sigma \in \mathfrak{G}$ et de leurs tableaux associés est non seulement une identification d'ensembles, mais une identification de groupes.

On vérifie également que dans ce groupe de tableaux le tableau inverse $A^{-1}$ du tableau

$$A = [a, a(x_1), a(x_1, x_2), \ldots, a(x_1, x_2, \ldots, x_{s-1})]$$

est de la forme

$$A^{-1} = [a^{-1}, (a(a^{-1} \cdot x_1))^{-1}, (a(a^{-1} \cdot x_1, (a(x_1))^{-1} \cdot x_2))^{-1}, \ldots].$$

Le groupe $\mathfrak{G}$ qu'on vient de définir (considéré aussi bien comme un groupe de permutation de $M = M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_s$ que comme un groupe de tableaux) sera appelé *le produit complet* des $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_s$ et sera noté $\mathfrak{G} = \Gamma_1 \circ \Gamma_2 \circ \ldots \circ \Gamma_s$.

Soient $\mathfrak{G}^i = \Gamma_1 \circ \Gamma_2 \circ \ldots \circ \Gamma_i$ et ${}^i\mathfrak{G} = \Gamma_{i+1} \circ \Gamma_{i+2} \circ \ldots \circ \Gamma_s$. Montrons que

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{G}^i \circ {}^i\mathfrak{G},$$

c'est-à-dire que

$$\mathfrak{G} = (\Gamma_1 \circ \Gamma_2 \circ \ldots \circ \Gamma_i) \circ (\Gamma_{i+1} \circ \Gamma_{i+2} \circ \ldots \circ \Gamma_s),$$

ce qui démontre, en particulier, l'associativité du produit complet et justifie notre notation:

En effet, soient $\sigma \in \mathfrak{G}$ et $x \in M$. On avait identifié $x$ avec $(x^i, {}^i x)$ $(x^i \in M^i, {}^i x \in {}^i M)$, et on a vu que $x^i \to (\sigma \cdot x)^i$ est une application de $M^i$, satisfaisant aux conditions 1 et 2 pour les groupes $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_i$, d'où $\sigma^i \in \mathfrak{G}^i$. D'autre part, on a vu que si l'on fixe $x^i, {}^i x \to {}^i(\sigma \cdot x)$ devient une permutation ${}^i\sigma(x^i)$ de ${}^i M$ satisfaisant aux mêmes conditions pour les $\Gamma_{i+1}, \Gamma_{i+2}, \ldots, \Gamma_s$; donc, ${}^i\sigma(x^i) \in {}^i\mathfrak{G}$. Ainsi

$$x = (x^i, {}^i x) \to \sigma \cdot x = (\sigma^i \cdot x^i, {}^i\sigma(x^i) \cdot {}^i x)$$

est une permutation de $M^i \times {}^i M$, satisfaisant aux conditions 1 et 2 pour $\mathfrak{G}^i$ et ${}^i\mathfrak{G}$, donc

$$\sigma \in \mathfrak{G}^i \circ {}^i\mathfrak{G}.$$

Inversement, si $\sigma$ est un élément de $\mathfrak{G}^i \circ {}^i\mathfrak{G}$, $(\sigma \cdot x)^i$ ne dépend que de $x^i$, et $x^i \to (\sigma \cdot x)^i$ est une permutation $\bar{\sigma}$ de $M^i$ appartenant à $\mathfrak{G}^i$, donc satisfaisant aux conditions 1 et 2 pour les $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_i$. Donc, si $j \leqq i$, $(\sigma \cdot x)^j$ ne dépend que de $x^j$. D'autre part, si l'on fixe $x^i, {}^i x \to {}^i(\sigma \cdot x)$ devient une permutation $\bar{\bar{\sigma}}(x^i) \in {}^i\mathfrak{G}$ de ${}^i M$. Elle satisfait donc aux conditions 1. et 2. pour les $\Gamma_{i+1}, \Gamma_{i+2}, \ldots, \Gamma_s$. Par suite, si $j > i$, quand on fixe $x^i$,

$$((\sigma \cdot x)_{i+1}, (\sigma \cdot x)_{i+2}, \ldots, (\sigma \cdot x)^j) = (\bar{\bar{\sigma}}(x^i; {}^i x)_{i+1}, \bar{\bar{\sigma}}(x^i; {}^i x)_{i+2}, \ldots, \bar{\bar{\sigma}}(x^i; {}^i x)_j)$$

ne dépend que de $x_{i+1}, x_{i+2}, \ldots, x_j$, c'est-à-dire $(\sigma x)^j$ ne dépend que de $x^j$. Ainsi, $\sigma$ satisfait à la condition 1. pour tout $j = 1, 2, \ldots, s$, et on a $\bar{\sigma} = \sigma^i$, $\bar{\bar{\sigma}}(x^i) = {}^i\sigma(x^i)$. Donc $\sigma^i$ et pour tout $x^i \in M^i$, ${}^i\sigma(x^i)$ satisfont à la condition 2, et on a vu que, dans ces conditions, $\sigma$ y satisfait aussi ce qui prouve que $\sigma \in \mathfrak{G}$.

Si tous les $M^i$ $(i = 1, 2, \ldots, s)$ sont des ensembles finis, c'est-à-dire si tous les $\Gamma_i$ sont des groupes de degré, et, par suite, d'ordre fini et si $m_i, n_i$ sont le degré, et l'ordre de $\Gamma_i$, $a(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1})$ est une fonction définie sur l'ensemble $M^{i-1}$ de $m_1 m_2 \ldots m_{i-1}$ éléments et à valeur dans l'ensemble $\Gamma_i$ de $n_i$ éléments. Le nombre de telles fonctions distinctes est $n_i^{m_1 m_2 \ldots m_{i-1}}$, et, par conséquent, il existe $n_1 n_2^{m_1} n_3^{m_1 m_2} \ldots n_s^{m_1 m_2 \ldots m_{s-1}}$ tableaux distincts de la forme $A = [a, a(x_1), \ldots, a(x_1, x_2, \ldots, x_{s-1})]$ associés aux permutations de $M$ satisfaisant aux conditions 1 et 2. Donc, dans ce cas, l'ordre du produit complet

$$\mathfrak{G} = \Gamma_1 \circ \Gamma_2 \circ \ldots \circ \Gamma_s$$

est

$$n_1 n_2^{m_1} n_3^{m_1 m_2} \ldots n_s^{m_1 m_2 \ldots m_{s-1}}.$$

En particulier,

$$\text{degré}\,(\Gamma_1 \circ \Gamma_2) = \text{degré}\,\Gamma_1 \cdot \text{degré}\,\Gamma_2$$

et

$$\text{ordre}\,(\Gamma_1 \circ \Gamma_2) = \text{ordre}\,\Gamma_1 \cdot (\text{ordre}\,\Gamma_2)^{\text{degré}\,\Gamma_1}.$$

Comme en général

$$(\text{ordre}\,\Gamma_1) \cdot (\text{ordre}\,\Gamma_2)^{\text{degré}\,\Gamma_1} \neq \text{ordre}\,\Gamma_2 \cdot (\text{ordre}\,\Gamma_1)^{\text{degré}\,\Gamma_2}$$

on voit que $\Gamma_1 \circ \Gamma_2$ et $\Gamma_2 \circ \Gamma_1$, n'ayant pas un même ordre, ne sont pas, en général, isomorphes. Ainsi la composition complète des groupes de permutation n'est pas, en général, commutative.

Si $\mathfrak{G} = \Gamma_1 \circ \Gamma_2 \circ \ldots \circ \Gamma_s$ est le produit complet des groupes $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_s$ de permutations d'ensembles $M_1, M_2, \ldots, M_s$ et si, pour chaque $i = 1, 2, \ldots, s$, $\bar{\Gamma}_i$ est un sous-groupe de $\mathfrak{G}_i$, $\bar{\mathfrak{G}} = \bar{\Gamma}_1 \circ \bar{\Gamma}_2 \circ \ldots \circ \bar{\Gamma}_s$ est un sous-groupe de $\Gamma_1 \circ \Gamma_2 \circ \ldots \circ \Gamma_s$ car la condition 1 est la même pour $\mathfrak{G}$ et pour $\bar{\mathfrak{G}}$, et la condition 2 pour $\bar{\mathfrak{G}}$ entraîne la même condition pour $\mathfrak{G}$.

Si, pour un entier $i = 1, 2, \ldots, s$, $\Gamma_i$ est l'intersection $\bigcap_\alpha \Gamma_{i,\alpha}$ d'une famille $\{\Gamma_{i,\alpha}\}$ de groupes de permutations $\Gamma_{i,\alpha}$ de $M_i$, $\mathfrak{G}$ est l'intersection des $\mathfrak{G}_\alpha = \Gamma_1 \circ \Gamma_2 \circ \ldots \circ \Gamma_{i-1} \circ \Gamma_{i,\alpha} \circ \Gamma_{i+1} \circ \ldots \circ \Gamma_s$, où $\alpha$ parcourt les mêmes indices. En effet, $\sigma$ satisfait à la condition 2 pour $\Gamma_i = \bigcap_\alpha \Gamma_{i,\alpha}$, si, et seulement s'il satisfait à la même condition pour tous les $\Gamma_{i,\alpha}$, et toutes les autres conditions sont les mêmes pour les $\sigma \in \mathfrak{G}$ et pour les $\sigma \in \mathfrak{G}_\alpha$.

Si, pour un entier $i = 1, 2, \ldots, s$, $\Gamma_i$ est le composé d'une famille $\{\Gamma_{i,\alpha}\}$ de ses sous-groupes, $\mathfrak{G}$ est le composé des

$$\mathfrak{G}_\alpha = \Gamma_1 \circ \Gamma_2 \circ \ldots \circ \Gamma_{i-1} \circ \Gamma_{i,\alpha} \circ \Gamma_{i+1} \circ \ldots \circ \Gamma_s,$$

où $\alpha$ parcourt les mêmes indices.

En vertu de l'associativité de la composition complète, il suffit de démontrer cette affirmation pour $s = 2$, car, ceci étant fait, et $\tilde{\mathfrak{G}}^i$ étant le composé des $\mathfrak{G}_{i-1} \circ \Gamma_{i,\alpha}$, on a bien $\mathfrak{G} = (\mathfrak{G}^{i-1} \circ \Gamma_i) \circ {}^i\mathfrak{G} = \tilde{\mathfrak{G}}^i \circ {}^i\mathfrak{G}$, et ce dernier groupe est le composé des $(\mathfrak{G}^{i-1} \circ \Gamma_{i,\alpha}) \circ {}^i\mathfrak{G} = \mathfrak{G}_\alpha$. Deux cas sont à considérer:

1) $i = 1$; soit $\tilde{\mathfrak{G}}$ le composé des $\mathfrak{G}_\alpha$. On a $\tilde{\mathfrak{G}} \subseteq \mathfrak{G}$, et, puisque $\sigma \to \sigma^i$ est un homomorphisme, $\sigma^1$ parcourt un sous-groupe $\tilde{\Gamma}$ de $\Gamma_1$ quand $\sigma$ parcourt $\tilde{\mathfrak{G}}$. Puisque tout $\mathfrak{G}_\alpha$ est $\subseteq \tilde{\mathfrak{G}}$, $\Gamma_{1,\alpha} \subseteq \tilde{\Gamma}$, et puisque $\Gamma_1$ est le composé des $\Gamma_{1,\alpha}$, on a $\tilde{\Gamma}_1 = \Gamma_1$. Par suite, si $\sigma \in \mathfrak{G}$, il existe un $\tilde{\sigma} \in \tilde{\mathfrak{G}}$ tel que $\tilde{\sigma}_1 = \sigma^1$, c'est-à-dire tel que $(\sigma\tilde{\sigma}^{-1})^1 = e_1$. Par conséquent, $\sigma\tilde{\sigma}^{-1} \in \mathfrak{G}$ satisfait aux conditions 1. et 2. pour les groupes $\{e_1\}, \Gamma_2$. Pour un $\alpha$ arbitraire, on a $\sigma\tilde{\sigma}^{-1} \in \{e_1\} \circ \Gamma_2 \subseteq \Gamma_{1,\alpha} \circ \Gamma_2 \subseteq \mathfrak{G}_\alpha \subseteq \tilde{\mathfrak{G}}$; donc, on a $\sigma \in \tilde{\mathfrak{G}}\tilde{\sigma} \subseteq \tilde{\mathfrak{G}}\tilde{\mathfrak{G}} = \tilde{\mathfrak{G}}$, d'où $\tilde{\mathfrak{G}} = \mathfrak{G}$.

2) $i = 2$; alors, puisque $[e_1, a(x_1)]\,[e_1, b(x_1)] = [e_1, a(x_1)\, b(x_1)]$, $\{e_1\} \circ \Gamma_2$ est le composé des $\{e_1\} \circ \Gamma_{2,\alpha} \subseteq \Gamma_1 \circ \Gamma_{2,\alpha}$, d'où $\tilde{\mathfrak{G}} \supseteq \{e_1\} \circ \Gamma_2$. Si $\alpha$ est un indice arbitraire, $(\sigma_\alpha)^1$ parcourt $\Gamma_1$ quand $\sigma_\alpha$ parcourt $\mathfrak{G}_\alpha = \Gamma_1 \circ \Gamma_{2,\alpha}$. Ainsi, si $\sigma \in \mathfrak{G}$, il existe un $\sigma_\alpha \in \mathfrak{G}_\alpha$ tel que $(\sigma_\alpha)^1 = \sigma^1$, d'où $\sigma\sigma_\alpha^{-1} \in \{e_1\} \circ \Gamma_2 \subseteq \tilde{\mathfrak{G}}$ et $\sigma \in \sigma_\alpha\tilde{\mathfrak{G}} \subseteq \mathfrak{G}_\alpha\tilde{\mathfrak{G}} = \tilde{\mathfrak{G}}$, et on a $\tilde{\mathfrak{G}} = \mathfrak{G}$.

## § 2. Quelques propriétés élémentaires du produit complet.

**1.** Soit $\mathfrak{G}$ le produit complet des groupes de permutations $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_s$ des ensembles $M_1, M_2, \ldots, M_s$, et soit $i \leq s$. On a vu que, pour tout $\sigma \in \mathfrak{G}$, la permutation $\sigma^i$ que $\sigma$ induit dans $M^i$ satisfait également aux conditions 1 et 2 et, par suite, est un élément du produit complet $\mathfrak{G}^i = \Gamma_1 \circ \Gamma_2 \circ \ldots \circ \Gamma_i$. D'autre part, pour tous $\sigma, \tau \in \mathfrak{G}$, on a $(\sigma\tau)^i = \sigma^i\tau^i$, car, pour tout $x \in M$, on a: $(\sigma\tau)^i \cdot x^i = (\sigma\tau \cdot x)^i = (\sigma \cdot (\tau \cdot x))^i = \sigma^i \cdot (\tau x)^i = \sigma^i \cdot (\tau^i \cdot x^i) = \sigma^i \tau^i \cdot x^i$. Ainsi, $\sigma \to \sigma^i$ est un homomorphisme de $\mathfrak{G}$ *dans* $\mathfrak{G}^i$. Montrons que c'est un homomorphisme de $\mathfrak{G}$ non seulement *dans* $\mathfrak{G}^i$ mais *sur* $\mathfrak{G}^i$. En effet, $\overline{\omega}$ étant un élément de $\mathfrak{G}^i$, la permutation $\omega$ de $M = M^i \times {}^iM$, définie par

$$(\omega \cdot x)^i = \overline{\omega} \cdot x^i \quad \text{et} \quad {}^i(\omega \cdot x) = {}^ix,$$

satisfait visiblement aux conditions 1 et 2 et appartient, par suite, à $\mathfrak{G}$, et on a $\omega^i = \overline{\omega}$. L'homomorphisme $\sigma \to \sigma^i$ de $\mathfrak{G}$ sur $\mathfrak{G}^i$ sera dit *canonique*. Son noyau est un sous-groupe invariant ${}^i\Delta(\mathfrak{G})$ de $\mathfrak{G}$ (qui au cours de ce travail sera d'ailleurs simplement noté ${}^i\Delta$, car cela ne peut pas prêter à confusion). ${}^i\Delta$ est l'ensemble des éléments de $\mathfrak{G}$ qui conservent les $i$ premières coordonnées de tous les éléments de $M$. En particulier, ${}^s\Delta$ conserve tout $x \in M$ et se réduit au groupe unité.

*L'ensemble des permutations $\sigma \in \mathfrak{G}$ qui conservent les $i$ premières coordonnées de tout élément de $M$ est un sous-groupe invariant ${}^i\Delta$ de $\mathfrak{G}$, tel que $\mathfrak{G}/{}^i\Delta$ soit isomorphe au groupe $\mathfrak{G}^i = \Gamma_1 \circ \Gamma_2 \circ \ldots \circ \Gamma_i$, et $\sigma \to \sigma^i$ est l'homomorphisme canonique de $\mathfrak{G}$ sur $\mathfrak{G}_i = \mathfrak{G}/{}^i\Delta$.*

On identifiera chaque $\overline{\sigma} \in \mathfrak{G}^i$ avec l'ensemble des $\sigma \in \mathfrak{G}$ tels que $\sigma^i = \overline{\sigma}$, et alors, en vertu de ce qui précède, $\mathfrak{G}^i$ s'identifie en tant que groupe avec $\mathfrak{G}/{}^i\Delta$.

Visiblement, ${}^i\Delta$, en tant que groupe de tableaux, est l'ensemble des tableaux de la forme

$$[e_1, e_2, \ldots, e_i, a(x_1, x_2, \ldots, x_i), \ldots, a(x_1, x_2, \ldots, x_{s-1})],$$

c'est-à-dire des tableaux, tels que, pour tout $j \leq i$, on ait $a(x^{j-1}) = e_j$.

Soit $\sigma \in {}^i\Delta$. Étant donné un $\overline{m} \in M^i$, faisons correspondre à $\sigma$ la permutation $\sigma_{\overline{m}}$ de $M$, dite *$\overline{m}$-projection* de $\sigma$, telle que

$$\sigma_{\overline{m}} \cdot x = x \quad \text{si } x^i \neq \overline{m} \quad \text{et} \quad \sigma_{\overline{m}} \cdot x = \sigma \cdot x \quad \text{si } x^i = \overline{m}.$$

On voit que $\sigma_{\overline{m}}$ laisse invariant tous les $x \in M$ sauf ceux qui se trouvent dans $\overline{m}$, considéré comme une classe de $M(\mathrm{mod}\, D^i)$. Le seul élément de ${}^i\Delta$ dont toutes les projections sont des permutations identiques est la permutation identique de $M$, car $\sigma \cdot x = \sigma_{x^i} \cdot x$. D'autre part, on vérifie que la permutation $\sigma_{\overline{m}}$ de $M=M_1\times M_2\times\ldots\times M_s$ satisfait aux conditions 1 et 2 et se trouve, donc, dans $\mathfrak{G}$; mais, comme elle conserve tout $x\in M \pmod{D_i}$, c'est un élément de ${}^i\Delta$. Les relations définissant $\sigma_{\overline{m}}$ montrent que, pour tous $\sigma, \tau\in{}^i\Delta$, on a $(\sigma\tau)_{\overline{m}}=\sigma_{\overline{m}}\tau_{\overline{m}}$. $\sigma\longrightarrow\sigma_{\overline{m}}$ est donc un endomorphisme de ${}^i\Delta$. On notera ${}^iT_{\overline{m}}$ le sous-groupe de ${}^i\Delta$ qui est l'image de ${}^i\Delta$par cet endomorphisme. Tout élément de ${}^iT_{\overline{m}}$ coïncide avec sa $\overline{m}$-projection.

Considérons un élément $\sigma$ de ${}^i\Delta$ et soit $\{\sigma_{\overline{m}}\}_{\overline{m}\in M^i}$ [6]) la famille de ses $\overline{m}$-projections. C'est un élément du groupe produit $\prod\limits_{\overline{m}\in M^i}{}^iT_{\overline{m}}$, et il est visible qu'en tant que permutation de $M$, $\{\sigma_{(\overline{m})}\}_{\overline{m}\in M}$ coincide avec $\sigma$. Inversement $\{\sigma_{\overline{m}}\}_{\overline{m}\in M^i}$ étant un élément quelconque de $\prod\limits_{\overline{m}\in M^i}{}^iT_{\overline{m}}$, il est visible que, en tant que permutation de $M$, c'est un élément de ${}^i\Delta$, et que, pour tout $\overline{m}\in M^i$, sa $\overline{m}$-projection est $\sigma_{\overline{m}}$. Donc ${}^i\Delta$ coïncide avec $\prod\limits_{\overline{m}\in M^i}{}^iT_{\overline{m}}$.

Si $M/D_i$ est fini, ${}^i\Delta$ est le produit direct de ses sous-groupes ${}^iT_{\overline{m}}$.

Faisons correspondre à chaque $\sigma\in{}^iT_{\overline{m}}$ l'application ${}^i\sigma(\overline{m})$ de $M^i$ définie au § 1. Quel que soit $\sigma^*\in{}^i\mathfrak{G}$, il existe un et un seul $\sigma\in{}^iT_{\overline{m}}$ tel que $\sigma^*={}^i\sigma(\overline{m})$, à savoir $\sigma$ tel que

$$\sigma\cdot x=x \text{ si } x^i\neq\overline{m},\ \sigma\cdot x=(\overline{m},\sigma^*\cdot{}^ix) \text{ si } x^i=\overline{m}.$$

Un tel $\sigma$ est, en effet, un élément de ${}^i\Delta$. Ainsi, $\sigma\longrightarrow{}^i\sigma(\overline{m})$ est une application biunivoque de ${}^iT_{\overline{m}}$ sur ${}^i\mathfrak{G}$. C'est un isomorphisme, car, si $\sigma,\tau\in{}^i\Delta$, et si $x^i=\overline{m}$, on a

$$(\overline{m},{}^i(\sigma\tau)(\overline{m};{}^ix))=\sigma\tau\cdot x=\sigma\cdot(\tau\cdot x)=(\overline{m},{}^i\sigma(\overline{m};{}^i\tau(\overline{m};{}^ix))),$$

$$\text{car } \tau\cdot x=(\overline{m},{}^i\tau(\overline{m};{}^ix)).$$

Ainsi ${}^iT_{\overline{m}}$ est isomorphe à ${}^i\mathfrak{G}$. Par suite l'application $\sigma\longrightarrow\{\sigma^i(\overline{m})\}_{\overline{m}\in M^i}\ (\sigma\in{}^i\Delta)$ est un isomorphisme de ${}^i\Delta=\prod\limits_{\overline{m}\in M^i}{}^iT_{\overline{m}}$ sur $({}^i\mathfrak{G})^{M^i}$. Cet isomorphisme, ainsi que son inverse, seront dits *canoniques*.

[6]) Etant donné une famille de groupes $F_\nu$ ($\nu$ parcourant un ensemble d'indices $N$) de permutations opérant chacune sur un ensemble $C_\nu$ (où les $C_\nu$ sont disjoints deux à deux), on considère les permutations $\varphi$ de l'ensemble $C=\cup C_\nu$ telles que: 1. $\varphi(C_\nu)=C_\nu$; 2. pour tout $\nu\in N$, il existe un $\varphi_\nu\in F_\nu$ tel que pour tout $c_\nu\in C_\nu$, on ait $\varphi\cdot c_\nu=\varphi_\nu\cdot c_\nu$. Une telle permutation sera désignée par le symbole $\{\varphi_\nu\}_{\nu\in N}$. Visiblement $\{\varphi_\nu\}_{\nu\in N}\{\varphi'_\nu\}_{\nu\in N}=\{\varphi_\nu\varphi'_\nu\}_{\nu\in N}$. Le groupe de permutations de $C$ ainsi défini sera noté $F=\prod\limits_{\nu\in N}F_\nu$ et sera appelé le produit des $F_\nu$ (ce qui généralise la définition de Bourbaki, *Algèbre*, Chap. I; *Structures algébriques* (Paris, 1942), p. 73—79).

En particulier, quand l'ensemble $N=\{\nu_1,\nu_2,\ldots,\nu_s\}$ est fini, le produit de groupes de permutations $F_\nu$, $\nu\in N$, sera appelé leur *produit direct* et sera noté $F_{\nu_1}\times F_{\nu_2}\times\ldots\times F_{\nu_s}$. On plongera chaque $F_\nu$ dans $F$ en identifiant tout $\varphi_\nu\in F_\nu$ avec l'élément $\varphi=\{\varphi'_\mu\}_{\mu\in N}\in F$ tel que $\varphi'_\mu$ soit l'identité ou $\varphi_\nu$ suivant que $\mu\neq$ ou $=\nu$. $F$ sera dit aussi le produit de ses sous-groupes ainsi identifiés avec les $F_\nu$. C'est en ce sens que ${}^i\Delta$ est le produit des groupes ${}^iT_{\overline{m}}$, $\overline{m}\in M^i$.

Ainsi, *${}^{i}\Delta$ est isomorphe à* $({}^{i}\mathfrak{G})^{M^i}$, $\mathfrak{G} = {}^{0}\Delta \supset {}^{1}\Delta \supset {}^{2}\Delta \supset \ldots \supset {}^{s}\Delta = \{e\}$ (où e est l'unité du groupe $\mathfrak{G}$) *est une suite normale de* $\mathfrak{G}$, *et pour tout* $i = 1, 2, \ldots, s$, on a ${}^{i-1}\Delta/{}^{i}\Delta \simeq \Gamma_i^{M^{i-1}}$. En effet on a $\mathfrak{G}/{}^{i}\Delta = \mathfrak{G}^i$, ${}^{i-1}\Delta/{}^{i}\Delta = {}^{i-1}\Delta(\mathfrak{G}^i)$, ${}^{i-1}(\mathfrak{G}^i) = \Gamma_i$ et ${}^{i-1}(M^i) = M_i$, d'où ${}^{i-1}\Delta/{}^{i}\Delta = \Gamma_i^{M^{i-1}}$.

Etant donné un sous-groupe $G$ de ${}^{i}\mathfrak{G}$, on appellera *son prolongement dans* ${}^{i}\Delta$ l'image, par l'isomorphisme canonique, de $G^{M^i}$ dans ${}^{i}\Delta$, et on le désignera par $({}^{i}\Delta; G)$. Si aucune confusion n'est possible on le notera simplement ${}^{i}G$.

Soient $E_1, E_2, \ldots, E_s$ une famille d'ensembles disjoints deux à deux, $\sigma$ une permutation de leur réunion $E = \bigcup_i E_i$ conservant chaque $E_i$, et $\sigma^i$ la permutation qu'elle induit dans $E_i$. Soient $\mathfrak{E} = E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_s$ le produit (au sens de la théorie d'ensembles) de mêmes ensembles, et $\sigma^*$ la permutation de $\mathfrak{E}$ telle que, pour tout $x = (x_1, x_2, \ldots, x_s)$ $(x_i \in E_i)$, on ait $\sigma^* \cdot x = (\sigma_1 \cdot x_1, \sigma_2 \cdot x_2, \ldots, \sigma_s \cdot x_s)$. L'application $\sigma \rightarrow \sigma^*$ est un isomorphisme, car, si $\bar{\sigma}$ est une autre permutation de $E$ de cette forme, on a

$$(\sigma\sigma)^* \cdot x = ((\sigma\bar{\sigma})_1^* \cdot x_1, (\sigma\bar{\sigma})_2^* \cdot x_2, \ldots, (\sigma\bar{\sigma})_s^* \cdot x_s) =$$
$$= (\sigma_1 \cdot (\bar{\sigma}_1 \cdot x_1), \sigma_2 \cdot (\bar{\sigma}_2 \cdot x_2), \ldots, \sigma_s \cdot (\bar{\sigma}_s \cdot x_s)) = \sigma^* \cdot (\bar{\sigma}^* \cdot x),$$

et $\sigma^*$ est l'identité si, et seulement si tous les $\sigma_i$, et, par conséquent, $\sigma$, le sont.

On identifiera $\sigma$ avec $\sigma^*$, et, de cette manière le groupe des permutations de $E$ conservant les $E_i$ s'identifiera avec le groupe des permutations de $\mathfrak{E}$ telles que le transformé d'une coordonnée ne dépend pas des autres.

Soit $\mathfrak{G} = \Gamma_1 \circ \Gamma_2 \circ \ldots \circ \Gamma_s$ le produit complet des groupes de permutations $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_s$ d'ensembles $M_1, M_2, \ldots, M_s$ et soit $\Gamma = \Gamma_1 \times \Gamma \times \ldots \times \Gamma_s$ leur produit direct. Si $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_s) \in \Gamma$ $(\sigma_i \in \Gamma_i)$, $\sigma^*$ est la permutation de $M$ telle que, pour tout $x \in M$, on a $(\sigma^* \cdot x)_i = \sigma_i \cdot x_i$; autrement dit c'est l'élément de $\mathfrak{G}$ représenté par le tableau

$$A = [a, a(x^1), \ldots, a(x^{s-1})] = [\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_s]$$

c'est-à-dire tel que, pour tout $i = 1, 2, \ldots, s$, $a(x^{i-1})$ soit la constante $\sigma_i \in \Gamma_i$. Ainsi, en vertu de l'identification précédente, $\Gamma$ est un sous-groupe de $\mathfrak{G}$ à savoir celui des tableaux dont les composantes sont constantes.

**2.** *Transitivité. Le produit complet* $\mathfrak{G} = \Gamma_1 \circ \Gamma_2 \circ \ldots \circ \Gamma_s$ *est un groupe transitif de permutations de* $M = \Pi M_i$, *si et seulement si pour tout* $i = 1, 2, \ldots, s$, $\Gamma_i$ *est un groupe transitif de permutations de* $M_i$.

En vertu de l'associativité du produit complet démontrée au § 1, il suffit de démontrer ce fait pour le cas de deux groupes $\Gamma_1, \Gamma_2$.

Supposons que $\Gamma_1$ et $\Gamma_2$ soient transitifs, et soient $(x_1, x_2)$ et $(x_1', x_2')$ deux éléments arbitraires de $M_1 \times M_2$. En vertu de la transitivité des

$\Gamma_i\,(i=1,2)$, il existe un $\sigma_i \in \Gamma_i$ tel que $\sigma_i \cdot x_i = x'_i$. L'élément $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2)$ de $\Gamma_1 \times \Gamma_2 \subseteq \Gamma_1 \circ \Gamma_2$ applique $(x_1, x_2)$ sur $(\sigma_1 \cdot x_1, \sigma_2 \cdot x_2) = (x'_1, x'_2)$ et, ainsi, $\Gamma_1 \circ \Gamma_2$ est transitif.

Inversement, supposons que $\Gamma_1 \circ \Gamma_2$ soit transitif. Soient $x_1, x'_1$ deux éléments arbitraires de $M_1$, et soit $x_2 \in M_2$. Il existe un $\sigma \in \Gamma_1 \circ \Gamma_2$ tel que $\sigma \cdot (x_1, x_2) = (x'_1, x_2)$. Dès lors, $\sigma^1 \cdot x_1 = x'_1$ et, puisque $\sigma^1 \in \mathfrak{G}^1 = \Gamma_1$, $\Gamma_1$ est transitif.

De même, soient $x_2, x'_2$ deux éléments arbitraires de $M_2$, et soit $x_1 \in M_1$. Il existe un $\sigma \in \Gamma_1 \circ \Gamma_2$ tel que $\sigma \cdot (x_1, x_2) = (x_1, x'_2)$, d'où $\sigma_2(x_1) \cdot x_2 = x'_2$, et, puisque $\sigma_2(x_1) \in \Gamma_2$, $\Gamma_2$ est transitif.

**3.** Soit $\mathfrak{G} = \Gamma_1 \circ \Gamma_2 \circ \ldots \circ \Gamma_s$ le produit complet des groupes transitifs $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_s$ des permutations d'ensembles $M_1, M_2, \ldots, M_s$, et soit $m = (m_1, m_2, \ldots, m_s)$ un élément fixe de $M$. On désignera par $\mathfrak{G}_i < m >$ le sous-groupe de $\mathfrak{G}$ conservant $m^i$, autrement dit l'ensemble des permutations $\sigma \in \mathfrak{G}$ telles que

$$\sigma \cdot m \equiv m \pmod{D_i}.$$

$\mathfrak{G}_i < m >$ est donc le groupe de tableaux

$$A = [a(x^0), a(x_1), \ldots, a(x^{s-1})]$$

tels que, pour tout $j \leq i$, on ait $a(m^{j-1}) \cdot m_j = m_j$.

La suite des sous-groupes

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{G}^0 < m > \supset \mathfrak{G}_1 < m > \supset \ldots \supset \mathfrak{G}_s < m >$$

de $\mathfrak{G}$ sera dite *la suite canonique de* $\mathfrak{G}$ *associée à* $m$.

Soit $\sigma \in \mathfrak{G}_{i-1} < m >$. Alors $\sigma \longrightarrow (\sigma \cdot m)_i$ est une application $\varrho_i^{(m)}$ de $\mathfrak{G}_{i-1} < m >$ dans $M_i$. Comme $\mathfrak{G}$ est transitif, il existe, quel que soit $x_i \in M_i$, un $\sigma \in \mathfrak{G}$ tel que $\sigma \cdot m = (m_1, m_2, \ldots, m_{i-1}, x_i, *, *, \ldots, *)$ et, en vertu de la définition précédente, $\sigma \in \mathfrak{G}_{i-1} < m >$. Puisque $(\sigma \cdot m)_i = x_i$, on voit que $\varrho_i^{(m)}$ est une application de $\mathfrak{G}_{i-1} < m >$ non seulement *dans*, mais *sur* $M_i$.

On va montrer que, si $\sigma, \bar{\sigma} \in \mathfrak{G}_{i-1} < m >$, on a $(\sigma \cdot m)_i = (\bar{\sigma} \cdot m)_i$ si, et seulement si $\sigma$ et $\bar{\sigma}$ sont dans une même classe à droite $X_i = \sigma \mathfrak{G}_i < m > = \bar{\sigma} \mathfrak{G}_i < m >$ dans $\mathfrak{G}_{i-1} < m >$ suivant $\mathfrak{G}_i < m >$. En effet, si $\sigma' \in \mathfrak{G}_i < m >$, on a, puisque $(\sigma \cdot x)^i$ ne dépend que de $x^i$, $(\sigma\sigma' \cdot m)_i = (\sigma \cdot (\sigma' \cdot m))_i = (\sigma \cdot m)_i$, car $(\sigma' \cdot m)^i = m^i$. Inversement, si $\bar{\sigma} \in \mathfrak{G}_{i-1} < m >$ est tel que $(\bar{\sigma} \cdot m)_i = (\sigma \cdot m)_i$, donc $(\bar{\sigma} \cdot m)^i = (\sigma \cdot m)^i$, on a,

$$(\sigma^{-1}\bar{\sigma} \cdot m)^i = (\sigma^{-1}\bar{\sigma})^i \cdot m^i = (\sigma^i)^{-1} \cdot (\bar{\sigma}^i \cdot m^i) = (\sigma^i)^{-1} \cdot (\sigma^i \cdot m^i) = m^i$$

et on a $\sigma^{-1}\bar{\sigma} \in \mathfrak{G}_i < m >$. Ainsi, $\pi_i^{(m)} = (\varrho_i^{(m)})^{-1}$ applique biunivoquement $M_i$ sur l'ensemble $\mathfrak{G}_{i-1} < m > / \mathfrak{G}_i < m >$ des classes à droite dans $\mathfrak{G}_{i-1} < m >$ suivant $\mathfrak{G}_i < m >$. Si l'on identifie $\pi_i^{(m)} \cdot x_i$ avec $x_i\,(x_i \in M_i)$ on obtient une identification de $\mathfrak{G}_{i-1} < m > / \mathfrak{G}_i < m >$ avec $M_i$, qui sera dite *la première* $m$-identification.

Comme tout $\sigma \in \mathfrak{G}_{i-1}<m>$ conserve $m^{i-1}$, considéré comme classe mod $D_i$, il y induit une permutation, à savoir

$$(m_1, m_2, \ldots, m_{i-1}, x_i) \to (m_1, m_2, \ldots, m_{i-1}, \sigma_i(m^{i-1}) \cdot x_i).$$

Par suite, $\sigma \to \sigma_i(m^{i-1})$ est un homomorphisme de $\mathfrak{G}_{i-1}<m>$ dans $\Gamma_i$. C'est un homomorphisme non seulement *dans*, mais *sur* $\Gamma_i$, car, quel que soit $\sigma_i \in \Gamma_i$, l'élément $\sigma = [e_1, e_2, \ldots, e_{i-1}, \sigma_i; *, *, \ldots, *]$ de $\Gamma_1 \times \Gamma_2 \times \ldots \times \Gamma_s \subset \mathfrak{G}$ appartient, visiblement, à $\mathfrak{G}_{i-1}<m>$, et on a $\sigma_i(m^{i-1}) = \sigma_i$.

D'autre part, $\pi_i^{(m)} \cdot x_i$ $(x_i \in M_i)$ est précisément l'ensemble des $\sigma \in \mathfrak{G}_{i-1}<m>$ qui transforment $(m_1, m_2, \ldots, m_{i-1}, m_i)$ en $(m_1, m_2, \ldots, m_{i-1}, x_i)$. En particulier $\pi_i^{(m)} \cdot m_i$ est $\mathfrak{G}_i<m>$. En vertu de la théorie classique des représentations d'un groupe à l'aide d'un sous-groupe[7]), si $X_i = \pi_i^{(m)} \cdot x_i$ $(X_i \in \mathfrak{G}_{i-1}<m>/\mathfrak{G}_i<m>, x_i \in M_i)$, on a $\sigma X_i = \pi_i^{(m)} \cdot (\sigma_i(m^{i-1}) \cdot x_i)$. Ainsi, la représentation $\sigma_i^* = \{X_i \to \sigma X_i\}$ de $\sigma \in \mathfrak{G}_{i-1}<m>$ à l'aide du sous-groupe $\mathfrak{G}_i<m>$ de $\mathfrak{G}_{i-1}<m>$ est le transformé $\pi_i^{(m)} \sigma_i(m^{i-1}) \pi_i^{(m)-1}$ de $\sigma_i(m^{i-1})$ par $\pi_i^{(m)}$. Par suite, le noyau de l'homomorphisme $\sigma \to \sigma_i(m^{i-1})$ $(\sigma \in \mathfrak{G}_{i-1}<m>)$ est le même que celui de l'homomorphisme $\sigma \to \sigma_i^*$, c'est-à-dire est le plus grand sous-groupe $\mathfrak{G}_i^*<m>$ de $\mathfrak{G}_i<m>$ invariant dans $\mathfrak{G}_{i-1}<m>$. Donc, si l'on identifie $\sigma_i \in \Gamma_i$ avec l'ensemble des $\sigma \in \mathfrak{G}_{i-1}<m>$ tels que $\sigma_i(m^{i-1}) = \sigma_i$, $\Gamma_i$ s'identifie avec $\mathfrak{G}_{i-1}<m>/\mathfrak{G}_i^*<m>$. Cette identification sera dite la *deuxième m-identification*.

Si $\Sigma_i$ est une classe suivant $\mathfrak{G}_i^*<m>$ dans $\mathfrak{G}_{i-1}<m>$, et si $\sigma_i \in \Gamma_i$ est son image par $\sigma \to \sigma_i(m^{i-1})$, on a, visiblement, pour tout $x_i \in M_i$,

$$\varrho_i^{(m)} \cdot (\Sigma_i(\pi_i^{(m)} \cdot x_i)) = \sigma_i \cdot x_i$$

Ainsi,

*un élément $m \in M$ étant choisi, il existe pour tout $i = 1, 2, \ldots, s$ une identification canonique de $M_i$ avec l'ensemble $\mathfrak{G}_{i-1}<m>/\mathfrak{G}_i<m>$ des classes à droite dans $\mathfrak{G}_{i-1}<m>$ suivant $\mathfrak{G}_i<m>$, et il existe une identification canonique du groupe $\Gamma_i$ des permutations de $M_i$ avec le groupe quotient $\mathfrak{G}_{i-1}<m>/\mathfrak{G}_i^*<m>$ de $\mathfrak{G}_{i-1}<m>$ par le plus grand sous-groupe $\mathfrak{G}_i^*<m>$ de $\mathfrak{G}_i<m>$ invariant dans $\mathfrak{G}_{i-1}<m>$, ce groupe quotient étant considéré, de la manière classique, comme un groupe de permutations de $\mathfrak{G}_{i-1}<m>/\mathfrak{G}_i<m>$; cette seconde identification est le prolongement de la première au sens habituel.*

Si $s = 1$, c'est-à-dire $\mathfrak{G} = \Gamma_1$, la $m$-identification de $\Gamma_1 (= \mathfrak{G})$ avec $\mathfrak{G}/\mathfrak{G}_1^*<m>$ $(m = m_1 \in M_1)$ n'est autre chose que l'identification classique du groupe de permutations $\Gamma_1$ de $M_i$ avec sa représentation à l'aide de son sous-groupe conservant l'élément $m \in M_1$. Ainsi, ce fait classique n'est qu'un cas particulier de celui qu'on vient d'indiquer et qui n'en est, d'ailleurs, qu'une légère généralisation.

---

7) A. Speiser, *Theorie der Gruppen von endlicher Ordnung* (Berlin, 1937).

4. Soit $G$ un sous-groupe de $\mathfrak{G} = \Gamma_1 \circ \Gamma_2 \circ \ldots \circ \Gamma_s$. Ayant choisi un élément $m \in M$, on associera à $G$, comme on l'a fait pour le groupe $\mathfrak{G}$ tout entier, la suite

$$G = G_0<m> \supset G_1<m> \supset \ldots \supset G_s<m>$$

des sous-groupes $G_i<m>$ de $G$ conservant $m_i$. On a

$$G_i<m> = G \cap \mathfrak{G}_i<m>.$$

Désignons par $\bar{\varrho}_i^{(m)}$ l'application $\sigma \longrightarrow (\sigma \cdot m)_i$ $(\sigma \in G_{i-1}<m>)$ de $G_{i-1}<m>$ dans $M_i$, et notons $\overline{M}_i$ l'image de $G_{i-1}<m>$ par cette application; $\bar{\varrho}_i^{(m)}$ est la restriction à $G_{i-1}<m>$ de l'application $\bar{\varrho}_i^{(m)}$ définie de la manière analogue dans $\mathfrak{G}_{i-1}<m>$. Posons $\bar{\pi}_i^{(m)} = \bar{\varrho}_i^{(m)-1}$.

Si $G$ est un sous-groupe transitif de $\mathfrak{G}$, $\bar{\varrho}_i^{(m)-1}$ est, pour tout $i = 1, 2, \ldots, s$, une application de $G_{i-1}<m>$ *sur* $M_i$, c'est-à-dire $\overline{M}_i = M_i$, car, dans ce cas, il existe, pour tout $x_i \in M_i$, un $\sigma \in G$, tel que

$$\sigma \cdot m = (m_1, m_2, \ldots, m_{i-1}, x_i, *, *, \ldots, *).$$

$\sigma$, qui conserve $m^{i-1}$, est dans $G_{i-1}<m>$, et on a $\bar{\varrho}_i^{(m)} \cdot \sigma = (\sigma \cdot m)_i = x_i$.

D'autre part, si $G$ n'est pas transitif, il existe un $i$ tel que $\overline{M}_i \neq M_i$. En effet, $G^i$ étant l'image de $G$ par l'homomorphisme $\sigma \longrightarrow \sigma^i$ de $\mathfrak{G}$ sur $\mathfrak{G}^i$, soit $i \leqq s$ le plus petit indice tel que $G^i$ ne soit pas un groupe transitif de permutations de $M^i$. Alors, puisque $G^i$ n'est pas transitif, il existe un élément $x \in M$ tel que, pour aucun $\sigma \in G$, on n'ait $(\sigma \cdot m)^i = x^i$. Mais, puisque $G^{i-1}$ est un groupe transitif de permutations de $M^{i-1}$, il existe un $\tau \in G$ tel que $(\tau \cdot m)^{i-1} = x^{i-1}$. Par suite, comme $\tau$ applique $m^{i-1}$, considéré comme une classe (mod $D_i$), *sur* $x^{i-1}$, considéré aussi comme une telle classe, il existe un élément $y^i = (m_1, m_2, \ldots, m_{i-1}, y_i)$ de $M^i$ tel que $\tau^i \cdot y^i = x^i$. S'il existait un $\sigma \in G$ tel que $(\sigma \cdot m)^i = y^i$, on aurait $(\tau\sigma \cdot m)^i = (\tau \cdot (\sigma \cdot m))^i = \tau^i \cdot (\sigma \cdot m)^i = \tau^i \cdot y^i = x^i$, contre l'hypothèse. Ainsi, il existe un $y_i \in M_i$ tel que, pour tout $\sigma \in G_{i-1}<m>$, on a $(\sigma \cdot m)_i \neq y_i$. Par suite, on a $\overline{M}_i \neq M_i$.

Il résulte de l'alinéa précédent que, si $\sigma, \tau \in G_{i-1}<m>$, on a $\bar{\varrho}_i^{(m)} \cdot \sigma = \bar{\varrho}_i^{(m)} \cdot \tau$ si, et seulement si $\sigma$ et $\tau$ sont dans une même classe à droite suivant $\mathfrak{G}_i<m>$, c'est-à-dire suivant $\mathfrak{G}_i<m> \cap G = G_i<m>$. Ainsi, l'application inverse $\bar{\pi}_i^{(m)}$ est une application biunivoque de $\overline{M}_i$ sur $G_{i-1}<m>/G_i<m>$. En particulier, si $G$ est transitif, c'est une application biunivoque de $M_i$ sur $G_{i-1}<m>/G_i<m>$.

En vertu du même alinéa, $\sigma \longrightarrow \sigma_i(m^{i-1})$ $(\sigma \in G_{i-1}<m>)$ est un homomorphisme de $G_{i-1}<m>$ dans $\Gamma_i$, dont le noyau est, visiblement, $G_i^*<m> = G \cap \mathfrak{G}_i^*<m>$. L'image de $G_{i-1}<m>$ par cet homomorphisme sera notée $\overline{\Gamma}$.

Si $\overline{\Sigma}_i$ est une classe suivant $G_i^*<m>$ dans $G_{i-1}<m>$, si $\sigma_i \in \overline{\Gamma}_i$ est son image par $\sigma \longrightarrow \sigma_i(m^{i-1})$; et si $\Sigma_i$ est l'image réciproque de $\sigma_i$ dans

$\mathfrak{G}_{i-1}<m>$ par la même application, on a, pour tout $x_i \in M_i$,

$$\bar{\varrho}_i^{(m)} \cdot (\bar{\Sigma}_i(\bar{\pi}_i^{(m)} \cdot x_i)) = \varrho_i^{(m)} \cdot (\bar{\Sigma}_i(\bar{\pi}_i^{(m)} \cdot x_i)) \supseteq \varrho_i^{(m)} \cdot (\Sigma_i(\pi_i^{(m)} \cdot x_i)) = \sigma_i \cdot x_i,$$

d'où

$$\bar{\varrho}_i^{(m)} \bar{\Sigma}_i(\bar{\pi}_i^{(m)} \cdot x_i)) = \sigma_i \cdot x_i.$$

*Les $\bar{\Gamma}_i$ sont, pour tout $i = 1, 2, \ldots, s$, des groupes transitifs de permutations des $M_i$ correspondants si, et seulement si $G$ est transitif.*

En effet, on a vu que si $G$ est transitif, il existe, pour tout $i = 1, 2, \ldots; s$ et pour tout $x_i \in M_i$, un $\sigma \in G$ qui transforme $m$ en $(m_1; m_2, \ldots, m_{i-1}, x_i, *, *, \ldots, *)$, et on a $\sigma_i(m^{i-1}) \cdot m_i = x_i$; et que si $G$ ne l'est pas, on peut trouver un entier $i = 1, 2, \ldots, s$ et un élément $x_i \in M_i$ tels que un tel $\sigma$ n'existe pas. Il est visible, d'ailleurs que, dans tous les cas, $\bar{M}_i$ est un système de transitivité de $\bar{\Gamma}_i$.

On va montrer que, *si $G$ est transitif, $G_i^*<m>$ est le plus grand sous-groupe de $G_i<m>$ invariant dans $G_{i-1}<m>$*. Soit $\bar{\sigma}_i(m^{i-1})$ la restriction de $\sigma_i(m^{i-1})$ à $\bar{M}_i$. Si $\sigma \in G_{i-1}<m>$, en vertu de ce qui précède, $\bar{\sigma}_i(m^{i-1})$ est une permutation de $\bar{M}_i$. Puisque $\bar{\pi}_i^{(m)} \cdot x_i$ est pour tout $x_i \in \bar{M}_i$, précisément l'ensemble des $\sigma \in G_{i-1}<m>$ tels que $\bar{\sigma}_i(m^{i-1}) \cdot m_i = x_i$, et puisque $G_i<m> = \bar{\pi}_i^{(m)} \cdot m_i$, on voit, comme pour le groupe $\mathfrak{G}$, que la représentation

$$\bar{\sigma}_i^* = \{X_i \longrightarrow \sigma X_i\} \quad (X_i \in G_{i-1}<m>/G_i<m>)$$

de $\sigma \in G_{i-1}<m>$ à l'aide de $G_i<m>$ est le transformé $\bar{\pi}_i^{(m)} \bar{\sigma}_i(m^{i-1}) \bar{\pi}_i^{(m)-1}$ de $\bar{\sigma}_i(m^{i-1})$ par $\bar{\pi}_i^{(m)}$; on voit aussi que le noyau de l'homomorphisme $\sigma \longrightarrow \bar{\sigma}_i(m^{i-1})$ et celui de l'homomorphisme $\sigma \longrightarrow \bar{\sigma}_i^*$ (qui est le plus grand sous-groupe $\bar{G}_i^*<m>$ de $G_i<m>$ invariant dans $G_{i-1}<m>$) coïncident. Or, si $G$ est transitif, on a $\bar{M}_i = M_i$ d'où $\bar{\sigma}(m^{i-1}) = \sigma_i(m^{i-1})$. Ainsi, dans ce cas, le noyau du premier homomorphisme est $G_i^*<m> = G \cap \mathfrak{G}_i^*<m>$ et, par suite, $G_i^*<m>$ est le plus grand sous-groupe de $G_i<m>$ invariant dans $G_{i-1}<m>$.

Etant donné un élément $m \in M$ et un sous-groupe transitif $G$ de $\mathfrak{G} = \Gamma_1 \circ \Gamma_2 \circ \ldots \circ \Gamma_s$, les applications précédentes de $G_{i-1}<m>/G_i<m>$ sur $M_i$ et de $G_{i-1}<m>/G_i^*<m>$ sur $\bar{\Gamma}_i$ seront considérées comme des identifications, dites *$m$-identifications dans $G$*.

**5.** Soient $m, m'$ deux éléments de $M$, et soit $G$ un sous-groupe transitif de $\mathfrak{G} = \Gamma_1 \circ \Gamma_2 \circ \ldots \circ \Gamma_s$. En vertu de la transitivité de $G$, il existe un $\tau \in G$ tel que $\tau \cdot m = m'$. On a, pour chaque $i = 1, 2, \ldots, s$, $\tau^i \cdot m^i = (\tau \cdot m)^i = (m')^i \cdot \sigma \in \mathfrak{G}$ conserve (mod $D_i$) $m$ (ou $m'$) si, et seulement si $\sigma^i$ conserve $m^i$ (ou $(m')^i$). Or, visiblement, $\sigma^i$ conserve $m^i$ si, et seulement si $\tau^i \sigma^i (\tau^i)^{-1}$ conserve $(m')^i \cdot \sigma \longrightarrow \sigma^i$ étant un homomorphisme, on a $\tau^i \sigma^i (\tau^i)^{-1} = (\tau \sigma \tau^{-1})^i$. D'autre part, puisque $\tau \in G$, $\sigma \in \mathfrak{G}$ et $\tau \sigma \tau^{-1}$ sont en même temps dans $G$. Ainsi, *le groupe $G_i<m'>$ des $\sigma \in G$ conservant $(m')^i$ est le transformé par $\tau$ du groupe $G_i<m>$ des $\sigma \in G$ conservant $m^i$*:

$$G_i<m'> = \tau G_i<m> \tau^{-1}.$$

Ceci montre, en particulier, que tous les $\tau \in G$ tels que $\tau \cdot m = m'$ transforment $G_i<m>$ en un même groupe $G_i<m'>$.

Si $(m')^{i-1} = m^{i-1}$, on a $\tau \in G_{i-1}<m>$, et inversement. Ainsi, l'ensemble des $G_i<m'>$, pour les $m'$ satisfaisant à cette condition, coïncide avec l'ensemble des groupes conjugués de $G_i<m>$ dans $G_{i-1}<m>$. Par suite, leur intersection est le plus grand sous-groupe de $G_i<m>$ invariant dans $G_{i-1}<m>$, c'est-à-dire le groupe $G_i^*<m>$.

L'intersection des $G_i<m>$, étendue à tous les $m \in M$, est, visiblement, le groupe des éléments $\sigma \in G$ qui conservent (mod $D_i$) tout $m \in M$. C'est donc le groupe ${}^i\Delta(\mathfrak{G}) \cap G$, et, par suite, ce groupe est le plus grand sous-groupe de $G_i<m>$ invariant dans $G$.

Il en résulte, en particulier, que

$$G_i<m> \supseteq G_i^*<m> \supseteq {}^i\Delta \cap G,$$

et, pour $G = \mathfrak{G}$,

$$\mathfrak{G}_i<m> \supseteq \mathfrak{G}_i^*<m> \supset {}^i\Delta.$$

Comme ${}^s\Delta$ est le groupe unité, on voit que $G_s<m>$ *est un sous-groupe anti-invariant de* $G$.

*(Reçu le 20 janvier 1949)*