Einige aus Funktionalgleichungen zweier Veränderlichen ableitbare Differentialgleichungen.

Von J. ACZÉL in Szeged.

Einleitung.

Im folgenden wird an einigen Beispielen gezeigt, wie man die Lösung von Funktionalgleichungen mehrerer Veränderlichen an die Lösung von partiellen Differentialgleichungen zurückführen kann. Die Bedeutung einer solchen Zurückführung liegt in dem Mangel einer systematischen Theorie der Funktionalgleichungen.

N. H. ABEL[1]) hat aus der Funktionalgleichung

$$(1) \qquad z[t, z(x, y)] = z[x, z(y, t)] = z[y, z(t, x)]$$

die Differentialgleichung

$$(2) \qquad \frac{z_x}{z_y} = \frac{f(x)}{f(y)} \qquad \left(z_x = \frac{\partial}{\partial x} z(x, y);\; z_y = \frac{\partial}{\partial y} z(x, y)\right)$$

abgeleitet, um zu beweisen, daß die streng monotonen und differenzierbaren Lösungen der Funktionalgleichung (1) alle von der Form

$$(3) \qquad z(x, y) = F^{-1}[F(x) + F(y)]$$

sind, wo F eine streng monotone und differenzierbare Funktion ist. Die Differentialgleichung (2) bedeutet, daß in $\frac{z_x}{z_y}$ die Variabeln x, y „getrennt" auftreten, und zwar mit derselben Zähler- und Nennerfunktion. ABEL erhielt, daß $F(x) = C \int f(x)\, dx$. Die Gleichung (1) ist übrigens äquivalent mit den beiden Funktionalgleichungen der Symmetrie (Kommutativität)

$$(4) \qquad z(x, y) = z(y, x)$$

und der Assoziativität

$$(5) \qquad z[z(x, y), t] = z[x, z(y, t)].$$

---

[1]) N. H. ABEL, Untersuchung der Functionen zweier unabhängig veränderlichen Größen x und y, wie $f(x, y)$, welche die Eigenschaft haben, daß $f(z, f(x, y))$ eine symmetrische Function von x, y und z ist, *Journal für die reine und angewandte Math.*, 1 (1826), S. 11–15.

In § 2 werden wir sehen, daß auch (5) allein zur Herleitung der Differentialgleichung (2) bzw. der Normalform (3) genügt.

Fenyő und Verf. haben in einer früheren Arbeit[2]) aus der Funktionalgleichung der „Bisymmetrie“ [2a])

$$z[z(x,y),z(u,v)]=z\{z(x,u),z(y,v)\}, \tag{6}$$

und aus der für Mittelwerte kennzeichnenden Gleichung der „Reflexivität“

$$z(t,t)=t, \tag{7}$$

die drei äquivalenten Differentialgleichungen

$$\frac{z_{xy}}{z_y}-\frac{z_{xx}}{z_x}=X(x) \qquad \text{(von } y \text{ unabhängig)}, \tag{8}$$

$$\frac{z_{xy}}{z_x}-\frac{z_{yy}}{z_y}=Y(y) \qquad \text{(von } x \text{ unabhängig)}, \tag{9}$$

$$\frac{z_{xy}}{z_x z_y}=Z(z) \qquad \text{(Funktion von } z \text{ allein)} \tag{10}$$

nebst der „Randbedingung“

$$z_y(t,t)=q \qquad \text{(konstant)} \tag{11}$$

abgeleitet. Man kann übrigens (8) und (9) durch

$$\frac{z_x}{z_y}=\frac{f(x)}{g(y)} \tag{2'}$$

zusammenfassen.

Dadurch wurde bewiesen, daß die allgemeinste Gestalt der streng monotonen zweimal differenzierbaren Lösungen der Funktionalgleichungen (6) mit der Bedingung (7) (ebenso wie die Lösungen jeder der Differentialgleichungen (8), (9), (10), (2') mit den Randbedingungen (7) und (11)) die Funktion

$$z=F^{-1}[(1-q)F(x)+qF(y)] \tag{12}$$

ist; und zwar ist

$$F(t)=\int e^{-\int X(t)\,dt}dt=\int e^{-\int Y(t)\,dt}dt=\int e^{-\int Z(t)\,dt}dt \tag{13}$$
$$\left(=C\int f(t)\,dt=C\int g(t)\,dt\right).$$

Hieraus folgt auch, daß

$$X(t)=Y(t)=Z(t). \tag{14}$$

In § 1 der gegenwärtigen Arbeit werden wir zeigen, daß man schon aus der Funktionalgleichung (6) der Bisymmetrie [also ohne Bezugnahme

---

[2]) J. Aczél St. Fenyő, Über die Theorie der Mittelwerte, *diese Acta*, **11** (1948), S. 239–245.

[2a]) Herr G. Aumann nennt es „Konvexität gegen sich selbst“.

auf (7)] auf (8), (9), (10), (2′), (14), (13), sowie auf

(11′) $$\frac{z_x(t,t)}{z_y(t,t)} = \text{konstant}$$

schließen kann. Hieraus ergibt sich ferner

(12′) $$z = F^{-1}[aF(x) + bF(y) + c].$$

Da aus der Kommutativität (4) und der Assoziativität (5) die Bisymmetrie (6) leicht folgt, enthält § 1 auch einen neuen Beweis des *ursprünglichen* Satzes von N. H. ABEL [1]).

In § 3 untersuchen wir wieder eine andere Funktionalgleichung, die „Translationsgleichung"

(15) $$z[z(x,y),t] = z(x, y+t),$$

und beweisen, daß aus ihr direkt die Gleichung

(2″) $$\frac{z_x}{z_y} = f(x) \qquad \text{(von } y \text{ unabhängig)}$$

und die Randbedingung

(16) $$z(x,0) = x$$

folgt. — Die Gleichungen (8), (9), (10) sind auch jetzt gültig, aber mit

(14″) $$X(t) = Z(t), \quad Y(t) = 0.$$

So erhalten wir als die allgemeinste streng monotone differenzierbare Lösung von (15)

(17) $$z = F^{-1}[F(x) + y],$$

und zwar ist $F(t) = \int f(t)\,dt$.

Verwandt ist in diesen Sätzen die Gestalt der Lösungsfunktionen z ((3), (12), (12′) und (17)): es handelt sich immer um eine „quasilineare Funktion", d. h. um eine Funktion, die durch Transformation mit F aus einer linearen Funktion entsteht. Die Differentialgleichungen (2′), (8), (9), (10) bleiben in allen drei behandelten Fällen gültig, nur werden sie in verschiedener Weise spezialisiert. Die allgemeinste Lösung dieser Gleichungen ist die in der Nomographie wichtige Funktion $z = H^{-1}[F(x) + G(y)]$.[2b])

Die Bedeutung dieser Sätze besteht darin, daß obzwar KALMÁR, MIKUSIŃSKI [5]) und Verf.[3])[4])[5]) sogar unter schwächeren Bedingungen (näm-

---

[2b]) Vgl. J. ACZÉL, Zur Charakterisierung nomographisch einfach darstellbarer Funktionen durch Differential- und Funktionalgleichungen, *diese Acta*, **12 A** (1950), S. 73—80.

[3]) J. ACZÉL, On mean values, *Bulletin American Math. Soc.*, **54** (1948), S. 392—400.

[4]) J. ACZÉL, Sur les opérations définies pour nombres réels, *Bulletin Société Math. France*, **76** (1948), S. 59—64.

[5]) Siehe die demnächst in den *Studia Mathematica* erscheinende Arbeit von L. KALMÁR, J. MIKUSIŃSKI und J. ACZÉL.

lich höchstens unter Voraussetzung der Stetigkeit statt der Differenzierbarkeit) bewiesen haben, daß die allgemeinste Lösung von (6) die Funktion (12'), die von (5) die Funktion (3)[4]), und die von (15) die Funktion (17)[5]) ist, doch geschah dies immer durch eine mehr oder weniger verwickelte Konstruktion, wogegen hier der Beweis einfach durch Derivieren erfolgt. Außerdem erhalten wir eine explizite Integraldarstellung (statt eines unendlichen Prozeßes) der „linearisierenden" Funktion $F(t)$. Ein weiterer Vorteil unserer vorliegenden Behandlungsweise ist, daß man von den beiden Fragen, ob eine vorgelegte Funktion die Lösung einer der oben angegebenen Differentialgleichungen bzw. der ursprünglichen Funktionalgleichungen ist, im allgemeinen die erste leichter entscheidet. Dies wird am Ende an Beispielen erläutert werden.

§ 1.

Satz 1. *Aus der Funktionalgleichung der Bisymmetrie*

$$z[z(x,y),z(u,v)]=z[z(x,u),z(y,v)] \tag{6}$$

folgen die Differentialgleichungen

$$\frac{z_{xy}}{z_y}-\frac{z_{xx}}{z_x}=X(x), \tag{8}$$

$$\frac{z_{xy}}{z_x}-\frac{z_{yy}}{z_y}=Y(y), \tag{9}$$

$$\frac{z_{xy}}{z_x z_y}=Z(z), \tag{10}$$

und auch

$$X(t)=Y(t)=Z(t) \tag{14}$$

(und umgekehrt). Daraus folgt, daß die allgemeinste streng monotone zweimal differenzierbare Lösung von (6) *(ebenso wie die von* (8), (9), (10), (14)*) gleich*

$$z=F^{-1}[aF(x)+bF(y)+c] \tag{12'}$$

ist mit

$$F(t)=\int e^{-\int X(t)\,dt}\,dt=\int e^{-\int Y(t)\,dt}\,dt=\int e^{-\int Z(t)\,dt}\,dt. \tag{13}$$

Zunächst beweisen wir (ohne Zuhilfenahme von (6)) die Äquivalenz der Gleichungen (8), (9), (10).

Erstens ist es klar, daß die Gleichung

$$\frac{z_x}{z_y}=\frac{f(x)}{g(y)} \tag{2'}$$

mit den Gleichungen (8) und (9) äquivalent ist (der Beweis erfolgt durch Logarithmieren und Derivieren bzw. Integrieren; man sieht auch gleich, daß $f(x)=e^{-\int X(x)\,dx}$, $g(y)=e^{-\int Y(y)\,dy}$). Aus (10) folgt wieder

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[e^{-\int Z(z)\,dz} z_x\right]=e^{-\int Z(z)\,dz}\left[z_{xy}-z_x z_y\, Z(z)\right]=0,\quad \frac{\partial}{\partial x}\left[e^{-\int Z(z)\,dz} z_y\right]=0.$$

Integrieren und Division dieser Gleichungen ergibt (2'). Umgekehrt, es folgt aus (2') (da die Relation $z=z(x,y)$ y als eine implizite Funktion von x und z definiert, die nach x und z differenzierbar ist):

$$\frac{f(x)}{z_x}=\frac{g(y)}{z_y}=\varphi(x,y)=h(x,z).$$

Differenzieren wir $f(x)=z_x h(x,z)$ nach y und $g(y)=z_y h(x,z)$ nach x, so erhalten wir einerseits

$$h_x(x,z)=0, \quad \text{also} \quad h(x,z)=h(z),$$

andererseits die gewünschte Gleichung (10). (Wir sehen auch zugleich, daß $h(z)=e^{-\int Z(z)\,dz}$ und

$$\frac{f(x)}{z_x}=\frac{g(y)}{z_y}=h(z);\; z_x=\frac{f(x)}{h(z)},\; z_y=\frac{g(y)}{h(z)}.) \tag{18}$$

Also genügt es *eine* der Differentialgleichungen (8), (9), (10), (2') aus (6) abzuleiten, etwa (10).

Aus (6) folgt durch Differenzieren nach x, bzw. nach y:

$$\begin{aligned} z_x[z(x,y), z(u,v)]\, z_x(x,y) &= z_x[z(x,u), z(y,v)]\, z_x(x,u),\\ z_x[z(x,y), z(u,v)]\, z_y(x,y) &= z_y[z(x,u), z(y,v)]\, z_x(y,v) \end{aligned} \tag{19}$$

(z_x bzw. z_y bedeutet selbstverständlich immer die Derivierte nach der ersten bzw. nach der zweiten Veränderlichen, ungeachtet dessen, welcher Buchstabe an dieser Stelle steht). Setzt man $y=x$, $v=u$ und dividiert diese Gleichungen, so gewinnt man (mit der analogen, durch Derivieren nach u und v erhaltenen zweiten Gleichung zusammen):

$$\frac{z_x(x,x)}{z_y(x,x)}=\frac{z_x[z(x,u), z(x,u)]}{z_y[z(x,u), z(x,u)]}=\frac{z_x(u,u)}{z_y(u,u)} \tag{20}$$

(also ist (11') $\dfrac{z_x(t,t)}{z_y(t,t)}=$ konstant).

Differenzieren wir (19) zuerst nach y, dann nach v, und dividieren die erhaltenen Gleichungen, so bekommen wir mit $u=x$, $v=y$:

$$\frac{z_{xx}[z(x,y), z(x,y)]}{z_{xy}[z(x,y), z(x,y)]}+\frac{z_x[z(x,y), z(x,y)]}{z_{xy}[z(x,y), z(x,y)]}\,\frac{z_{xy}}{z_x z_y}=\frac{z_x(y,y)}{z_y(y,y)}.$$

Zusammen mit (20) ergibt dies

$$\frac{z_{xy}}{z_x z_y}=\frac{z_{xy}[z(x,y), z(x,y)]}{z_y[z(x,y), z(x,y)]}-\frac{z_{xx}[z(x,y), z(x,y)]}{z_x[z(x,y), z(x,y)]}=Z(z).$$

Hieraus folgt nicht nur (10) sondern auch $X(t)=Z(t)$, und ganz analog folgt auch $Y(t)=Z(t)$, also (14). Damit ist bewiesen, daß aus (6) die Gleichungen (8), (9), (10), (2'), (14) folgen.

Da aus (10) die Gleichung (2') folgt, und zwar wegen (14) in der Gestalt $\frac{z_x}{z_y}=k\frac{f(x)}{f(y)}$ (wir werden $k=\frac{a}{b}$ schreiben), so ist,

$$\varphi(x,y)=a\int f(x)\,dx+b\int f(y)\,dy=aF(x)+bF(y)+c$$

gesetzt,

$$\begin{vmatrix} z_x & z_y \\ \varphi_x & \varphi_y \end{vmatrix}=0, \quad \text{also} \quad z=G[aF(x)+bF(y)+c];$$

mit Rücksicht an (18) und (14) ergibt sich

(12') $$z=F^{-1}[aF(x)+bF(y)+C],$$

(13) $$F(t)=\int e^{-\int X(t)\,dt}dt=\int e^{-\int Y(t)\,dt}dt=\int e^{-\int Z(t)\,dt}dt,$$

w. z. b. w.

Das aus (12') offensichtlich einerseits (6), andererseits (8), (9), (10), (14) mit (13) folgen, so ist damit auch bewiesen, daß aus den Differentialgleichungen (8), (9), (10), (14) sich auch (6) ergibt und daß zum Bestehen von (6) bzw. von (8), (9), (10), (14) notwendig und hinreichend ist, daß z die Gestalt (12') hat. Natürlich reicht auch *eine* der Gleichungen (2'), (8), (9), (10) hin, etwa (10), hierzu muß aber (14) in die Gestalt

(10') $$\frac{z_{xy}}{z_x z_y}=\frac{z_{xy}[z(x,y),z(x,y)]}{z_y[z(x,y),z(x,y)]}-\frac{z_{xx}[z(x,y),z(x,y)]}{z_x[z(x,y),z(x,y)]}=$$
$$=\frac{z_{xy}[z(x,y),z(x,y)]}{z_x[z(x,y),z(x,y)]}-\frac{z_{yy}[z(x,y),z(x,y)]}{z_y[z(x,y),z(x,y)]}$$

umgeschrieben werden.

§ 2.

Satz 2. *Aus der Funktionalgleichung der Assoziativität*

(5) $$z[z(x,y);t]=z[x,z(y,t)]$$

folgen die Differentialgleichungen (8), (9), (10), (2'), (18) *und auch* (14), *sowie*

(14') $$f(t)=g(t)=h(t)$$

(und umgekehrt).

Die allgemeinste streng monotone differenzierbare Lösung von (5) *ist, ebenso wie die von* (18) *mit* (14'),

(3) $$z(x,y)=F^{-1}[F(x)+F(y)]$$

mit

$$(13)\qquad F(t)=\int e^{-\int X(t)\,dt}\,dt=\int e^{-\int Y(t)\,dt}\,dt=\int e^{-\int Z(t)\,dt}\,dt=$$
$$=C\int f(t)\,dt=C\int g(t)\,dt.$$

(*Daraus folgt* (2).)

Wegen der in § 1 bewiesenen Äquivalenz der Gleichungen (8), (9), (10), (2'), genügt es wieder (10) und (14') zu bewiesen.

Differenzieren wir (5) zuerst nach y, dann nach t, und dividieren wir die erhaltenen Gleichungen, so wird

$$(21)\qquad \frac{z_x(y,t)}{z_y(y,t)}=\frac{z_x[z(x,y),t]\,z_y}{z_y[z(x,y),t]}.$$

Differenzieren wir dagegen (5) zuerst nach x:

$$z_x[x,z(y,t)]=z_x[z(x,y),t]\,z_x(x,y),$$

dann dies weiter nach y bzw. t, und dividieren die so erhaltenen Gleichungen, so erhalten wir

$$\frac{z_x(y,t)}{z_y(y,t)}=\frac{z_{xx}[z(x,y),t]}{z_{xy}[z(x,y),t]}\,z_y+\frac{z_x[z(x,y),t]}{z_{xy}[z(x,y),t]}\cdot\frac{z_{xy}}{z_x}.$$

Der Vergleich mit (2') ergibt

$$(22)\qquad \frac{z_{xy}(x,y)}{z_x(x,y)\,z_y(x,y)}=\frac{z_{xy}[z(x,y),t]}{z_y[z(x,y),t]}-\frac{z_{xx}[z(x,y),t]}{z_x[z(x,y),t]}.$$

Da hier t konstant gewählt werden kann, so folgt $\frac{z_{xy}}{z_x z_y}=Z(z)$, also (10); anderseits bedeutet dies (da die linke Seite von (22) nicht von t abhängt):

$$\frac{z_{xy}(z,t)}{z_y(z,t)}-\frac{z_{xx}(z,t)}{z_x(z,t)}=Z(z)=X(z);$$

also gilt (8) und auch $Z(t)=X(t)$; ähnlich läßt sich auch (9) und $Y(t)=Z(t)$, also (14) ableiten.

Andererseits ergibt sich aus (21) und (22)

$$z_y=\frac{z_x(y,\beta)}{z_y(y,\beta)}\bigg/\frac{z_x(z,\beta)}{z_y(z,\beta)}=\frac{\exp\int\frac{\partial}{\partial y}\left[\log\frac{z_x(y,\beta)}{z_y(y,\beta)}\right]dy}{\exp\int\frac{\partial}{\partial z}\left[\log\frac{z_x(z,\beta)}{z_y(z,\beta)}\right]dz}=\frac{\exp\int Y(x)\,dx}{\exp\int Y(z)\,dz}=$$
$$=\frac{g(y)}{g(z)}=\frac{k\exp\int X(y)\,dy}{k\exp\int X(z)\,dz}=\frac{f(y)}{f(z)}$$

und ebenso

$$z_x=\frac{z_y(\alpha,x)}{z_x(\alpha,x)}\bigg/\frac{z_y(\alpha,z)}{z_x(\alpha,z)}=\frac{\exp\int X(x)\,dx}{\exp\int X(z)\,dz}=\frac{f(x)}{f(z)},$$

also (18) und (14') $\left(\text{und auch } \frac{z_x(z,\beta)}{z_y(z,\beta)}=k\,\frac{z_y(\alpha,z)}{z_x(\alpha,z)}\right)$. Auch (2) kann hieraus leicht erhalten werden.

Da aus (18) und (14') mit geeigneter Wahl der Funktion $F(t)$ bzw der Integrationskonstanten in $F(t) = c\int f(t)\,dt$ offensichtlich $z = F^{-1}[F(x) + F(y)]$ folgt, ist damit alles bewiesen.

§ 3.

Satz 3. *Aus der für die Translationen kennzeichnende Funktionalgleichung*

$$(15) \qquad z[z(x, y), t] = z(x, y + t)$$

folgt die Differentialgleichung

$$(2'') \qquad \frac{z_x}{z_y} = f(x)$$

und die Randbedingung

$$(16) \qquad z(x, 0) = x$$

oder, was dasselbe ist, die Gleichungen (8), (9), (10) *nebst der Bedingung*

$$(14'') \qquad Z(t) = X(t), \quad Y(t) = 0,$$

und umgekehrt. Die allgemeinste streng monotone differenzierbare Lösung von (15) (*ebenso wie von* (2'') *und* (16), *bzw. von einer der Gleichungen* (8), (9), (10) *nebst* (14'')) *ist*

$$(17) \qquad z = F^{-1}[F(x) + y]$$

mit

$$F(x) = \int f(x)\,dx.$$

(16) folgt aus (15) unmittelbar wegen der strengen Monotonie von z (man setze $y = 0$).

Um (2'') zu erhalten, differenzieren wir (15) zuerst nach x, dann nach y, und dividieren die erhaltenen Gleichungen, so wird

$$\frac{z_x(x, y)}{z_y(x, y)} = \frac{z_x(x, y + t)}{z_y(x, y + t)};$$

setzt man $t = C - y$, so erhält man

$$(2'') \qquad \frac{z_x}{z_y} = \frac{z_x(x, C)}{z_y(x, C)} = f(x).$$

Umgekehrt folgt aus (2'') mit $F(x) = \int f(x)\,dx$:

$$\begin{vmatrix} z_x & z_y \\ [F(x) + y]_x & [F(x) + y]_y \end{vmatrix} = 0, \text{ also } z = G[F(x) + y];$$

aus (16) folgt $G(t) = F^{-1}(t)$, also (17); und da (17) die Gleichung (15) und auch (2'') mit (16) offensichtlich erfüllt, so ist damit alles bewiesen.

Wir bemerken hier, daß in diesem Falle auch die direkte Konstruktion (siehe Einleitung) nicht allzu verwickelt ist; es ist nämlich $F^{-1}(t) = z(C, t)$.[5])

Übrigens ist es leicht zu sehen[6]), wie es mit der Eindeutigkeit von F und von a, b, c in (12'), (3), (17) steht: in (12') sind a und b eindeutig bestimmt und mit $F(t)$ zusammen sind die sämtlichen Lösungen durch $G(t) = AF(t) + B$ angegeben falls $c' = Ac + B(1-a-b)$. In (3) bzw. (16) sind $G(t) = AF(t)$, bzw. $G(t) = F(t) + B$ die sämtlichen Lösungen.

Beispiele.

Wie wir sehen werden, ist in der Praxis immer die Nachprüfung der Gleichung (2') (bzw. (2), (2'')) am leichtesten; an ihr sieht man auch gleich ob die Funktion von der Form (17) oder aber von der auch (3) in sich enthaltenden Form (12') ist. Die Entscheidung zwischen (3) und (12') kann dann unmitelbar geschehen.

1) $z = Cx^a y^b$. Hier ist

$$\frac{z_x}{z_y} = \frac{aCx^{a-1}y^b}{bCx^a y^{b-1}} = \frac{a}{b} \cdot \frac{1/x}{1/y}.$$

Die Funktion z erfüllt (2'), ist also bisymmetrisch; da sie aber nicht einmal (2) erfüllt, ist sie gewiß nicht assoziativ. Man hat $F(x) = \int \frac{dx}{x} = \log x$. Tatsächlich ist $z = Cx^a y^b = e^{a \log x + b \log y + c}$ $(c = \log C)$.

2) $z = xy^2 + 2xy + y^2 + x + 2y$. Hier ist

$$\frac{z_x}{z_y} = \frac{y^2 + 2y + 1}{2xy + 2x + 2y + 2} = \frac{1}{2} \frac{(y+1)^2}{(x+1)(y+1)} = \frac{1}{2} \frac{1/(x+1)}{1/(y+1)},$$

also ist z wieder bisymmetrisch ohne assoziativ zu sein. Man hat

$$F(x) = \int \frac{dx}{x+1} = \log(x+1), \quad \frac{a}{b} = \frac{1}{2}; \quad z = e^{\log(x+1) + 2\log(y+1)} - 1.$$

3) $z = \dfrac{xy+1}{y-x}$. Hier ist

$$\frac{z_x}{z_y} = \frac{(y-x)y + xy + 1}{(y-x)x - (xy+1)} = -\frac{1/(x^2+1)}{1/(y^2+1)};$$

deshalb besteht auch hier Bisymmetrie ohne Assoziativität;

---

[6]) Vgl. J. Aczél, Über eine Klasse von Funktionalgleichungen, *Commentarii Math. Helvetici*, **21** (1948), S. 247—252.

$$F(x)=\int\frac{dx}{1+x^2}=\operatorname{arc\,tg} x,\quad \frac{a}{b}=-1;$$

$$z=\operatorname{tg}\left(\operatorname{arc\,tg} x-\operatorname{arc\,tg} y+\frac{\pi}{2}\right).$$

4) $z=x^{\log y}$. Hier ist

$$\frac{z_x}{z_y}=\frac{(\log y)\,x^{\log y-1}}{x^{\log y}(\log x)\frac{1}{y}}=\frac{1/(x\log x)}{1/(y\log y)},$$

also ist z bisymmetrisch; ob sie auch assoziativ ist, ist aber hiermit noch nicht entschieden. Man hat

$$F(x)=\int\frac{dx}{x\log x}=\int\frac{d(e^t)}{e^t\log e^t}=\int\frac{dt}{t}=\log t=\log\log x,$$

$$z=e^{e^{\log\log x+\log\log y}};$$

z ist also auch assoziativ.

5) $z=x+y-xy$. Hier ist

$$\frac{z_x}{z_y}=\frac{1-y}{1-x}=\frac{1/(1-x)}{1/(1-y)}.$$

(2) ist erfüllt: $F(x)=\int\frac{dx}{1-x}=\log(1-x)$, $z=1-e^{\log(1-x)+\log(1-y)}$, also ist z assoziativ.

6) $z=\dfrac{xy-1}{x+y}$. Hier ist

$$\frac{z_x}{z_y}=\frac{(x+y)\,y-(xy-1)}{(x+y)\,x-(xy-1)}=\frac{-1/(1+x^2)}{-1/(1+y^2)}.$$

(2) ist erfüllt und man hat

$$F(x)=-\int\frac{dx}{1+x^2}=\operatorname{arc\,ctg} x,\quad z=\operatorname{ctg}(\operatorname{arc\,ctg} x+\operatorname{arc\,ctg} y);$$

z ist also assoziativ.

7) $z=x\cos y+\sqrt{1-x^2}\sin y$. Hier ist

$$\frac{z_x}{z_y}=\frac{\sqrt{1-x^2}\cos y-x\sin y}{(-x\sin y+\sqrt{1-x^2}\cos y)\sqrt{1-x^2}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$$

dies hat die Form (2''), also gilt die Translationsgleichung. Man hat

$$F(x)=\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\arcsin x,\quad z=\sin(\arcsin x+y).$$

8) $z = \dfrac{x}{1+xy}$. Hier ist

$$\frac{z_x}{z_y} = \frac{1+xy-xy}{-x^2} = -\frac{1}{x^2} \qquad \text{(siehe (2''))},$$

also gilt die Translationsgleichung; man hat

$$F(x) = -\int \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{x}, \quad z = \frac{1}{\frac{1}{x}+y}.$$

9) $z = y^2 + x + 2y\sqrt{x}$. Hier ist

$$\frac{z_x}{z_y} = \frac{1+y/\sqrt{x}}{2y+2\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \qquad \text{(siehe (2''))}.$$

Man hat

$$F(x) = \int \frac{dx}{2\sqrt{x}} = \sqrt{x}, \quad z = (\sqrt{x}+y)^2,$$

z ist also eine Translationsfunktion.

10) $z = x^{e^y}$. Hier ist

$$\frac{z_x}{z_y} = \frac{e^y x^{e^y-1}}{x^{e^y} e^y \log x} = \frac{1}{x \log x} \qquad \text{(siehe (2''))};$$

man hat

$$F(x) = \int \frac{dx}{x \log x} = \log \log x, \quad z = e^{e^{\log \log x + y}};$$

z ist also wieder eine Translationsfunktion.

(Eingegangen am 1. September 1949.)