Sur les fonctions internes, non monotones.

Par ÁKOS CSÁSZÁR à Budapest.

J'ai introduit dans ma Note précédente intitulée „Sur une classe des fonctions non mesurables" [1] la notion de fonction *interne* selon la définition suivante:

La fonction $f(x)$ est dite interne dans l'intervalle (a, b) si pour

$$a < x < y < b$$

on a

$$\min[f(x), f(y)] \leqq f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leqq \max[f(x), f(y)],$$

le signe d'égalité n'étant valable que si $f(x) = f(y)$.

Toute fonction strictement monotone dans l'intervalle (a, b) y est interne; par contre, toute solution discontinue de l'équation fonctionnelle

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$

(dont l'existence a été démontrée par G. HAMEL [2]) est interne sans être monotone. En tout cas, les fonctions internes, non monotones sont fort singulières, comme le montrent les théorèmes suivants, démontrés dans ma Note citée ci-dessus:

$f(x)$ étant une fonction interne, non monotone dans (a, b):

A) pour tout point α $(a < \alpha < b)$, les ensembles $E[f(x) > f(\alpha)]$ et $E[f(x) < f(\alpha)]$ sont partout denses dans (a, b),

B) $f(x)$ n'est pas mesurable sur (a, b).

Dans l'article présent, je démontrerai la généralisation suivante de la proposition B):

Théorème. *$f(x)$ étant une fonction interne, non monotone dans l'intervalle (a, b), $f(x)$ n'est mesurable sur aucun sous-ensemble mesurable de (a, b) de mesure positive.*

La démonstration sera basée sur la proposition A) et sur le lemme suivant:

Lemme. *Soit $f(x)$ une fonction interne, non monotone dans l'intervalle (a, b) et soit $a < \alpha < \beta < b$. Désignons par E le sous-ensemble de (α, β) dans lequel la valeur de $f(x)$ est située entre $f(\alpha)$ et $f(\beta)$. La mesure intérieure*[1]) *de E est alors* 0.

Démonstration. Bornons-nous pour le moment au cas où on a $a < \alpha < \beta < 2\beta - \alpha < b$.

Supposons, pour fixer les idées que $f(\alpha) < f(\beta)$ et soit E_1 un sous-ensemble mesurable arbitraire de E, de sorte que

$$f(\alpha) < f(x) < f(\beta) \quad \text{pour } x \in E_1.$$

Supposons que $|E_1| > 0$; cette supposition conduira à une contradiction. Car en désignant par I un sous-intervalle intérieur de (α, β) tel que $|E_1 I| > 0$ et par E_3 l'ensemble symétrique à $E_2 = E_1 I$ par rapport au point β, E_3 appartient encore à l'intervalle (a, b) et on a

$$f(x) > f(\beta) \quad \text{pour } x \in E_3.$$

Désignons par $\{\beta_n\}$ une suite de nombres tels que

$$f(\beta_n) < f(\alpha) \text{ et } \beta_n \to \beta \quad \text{pour } n \to \infty;$$

une telle suite existe en vertu de la proposition A). Soit E_4^n le symétrique de E_3 par rapport au point β_n. On a alors pour tout entier n suffisamment grand

$$f(x) < f(\beta_n) < f(\alpha) \quad \text{pour } x \in E_4^n.$$

Mais on voit aisément que les propositions

$$x \in E_2 \quad \text{et} \quad x + 2(\beta_n - \beta) \in E_4^n$$

sont équivalentes, de sorte que E_4^n se produit de E_2 par une translation infiniment petite. De là résulte en vertu d'un théorème de M. H. STEINHAUS[2]) que

$$E_2 E_4^n \neq 0 \quad \text{pour } n \text{ suffisamment grand.}$$

Mais c'est impossible puisque

$$f(x) < f(\alpha) \quad \text{pour } x \in E_4^n \quad \text{et} \quad f(x) > f(\alpha) \quad \text{pour } x \in E_2$$

de sorte que les ensembles E_2 et E_4^n ne peuvent pas avoir des points en commun.

Dans le cas général, on choisira les nombres α_n de sorte qu'ils satisfassent aux inégalités

$$2\beta - b < \alpha_1 < \beta \text{ et } f(\alpha_1) < f(\alpha),$$
$$2\alpha_1 - b < \alpha_2 < 2\alpha_1 - \beta \text{ et } f(\alpha_2) > f(\beta),$$
$$2\alpha_2 - b < \alpha_3 < 2\alpha_2 - \beta \text{ et } f(\alpha_3) < f(\alpha),$$

---

1) Nous appelons la mesure intérieure d'un ensemble E la borne supérieure de la mesure des sous-ensembles mesurables de E.

2) Voir [3], une démonstration directe est esquissée dans [4].

etc., jusqu'à ce que pour $n=r-1$ on ait

$$\alpha < \alpha_{r-1} < \frac{\alpha+\beta}{2},$$

on choisira enfin un nombre α_r tel que

$$\alpha < \alpha_{r-1} < \alpha_r < \frac{\alpha+\beta}{2} \quad \text{et} \quad f(\alpha_r) > f(\beta);$$

la possibilité de ces choix étant garantie par la proposition A). On emploiera ensuite la partie déjà établie du lemme aux intervalles (α_1, β) $(\alpha_2, \alpha_1), \ldots, (\alpha_r, \alpha_{r-1})$, (α, α_r) qui satisfont évidemment à la restriction que nous avons faite au commencement.

Pour démontrer le théorème, supposons que $f(x)$ soit mesurable sur un sous-ensemble mesurable E de (a, b) et que $|E|>0$. Selon un théorème connu de N. Lusin, $f(x)$ est alors continue sur un ensemble mesurable $E_1 \subseteq E$, $|E_1|>0$. Soit α un point de densité de E_1 et soient α_1, β_1 des points tels que

$$a < \alpha_1 < \alpha, \qquad f(\alpha_1) < f(\alpha),$$
$$\alpha < \beta_1 < b, \qquad f(\beta_1) > f(\alpha).$$

Désignons par I l'intervalle (α_1, β_1). Tout point $x \in E_1$ assez voisin de α appartient à l'ensemble $I.E[f(\alpha_1) < f(x) < f(\beta_1)]$, de sorte que celui-ci a une mesure intérieure positive, en contradiction avec le lemme, en vertu duquel la mesure intérieure de l'ensemble $I.E[f(\beta_1) < f(x) < f(\alpha_1)]$ est nulle.

Corollaire. *$f(x)$ étant une fonction interne, non monotone dans l'intervalle (a, b), $f(x)$ n'est approximativement continue en aucun point de cet intervalle.*

Ouvrages cités.

[1] Á. Császár, Sur une classe des fonctions non mesurables, *Fundamenta Math.*, sous presse.

[2] G. Hamel, Eine Basis aller Zahlen und die unstetigen Lösungen der Funktionalgleichung: $f(x+y)=f(x)+f(y)$, *Math. Annalen*, **60** (1905), pp. 459–462, en particulier p. 462.

[3] H. Steinhaus, Sur les distances des points des ensembles de mesure positive, *Fundamenta Math.*, 1 (1920), pp. 93–104.

[4] A. Zygmund, *Trigonometrical series*, (Warszawa–Lwów, 1935), p. 143.

(*Reçu le 10 Septembre 1948*)