Merkwürdige Punktgruppen bei allgemeinen Lemniskaten.

Von GYULA SZ. NAGY in Szeged.

§ 1. Einleitung.

Bedeutet $R=\varrho^n$ eine positive Konstante und ist

(1) $$f(z)=(z-z_1)(z-z_2)\ldots(z-z_n)=z^n+a_1z^{n-1}+\ldots+a_n,$$

so heißt der Ort der Punkte z in der komplexen z-Ebene, in denen

(2) $$|f(z)|=R=\varrho^n, \quad \text{oder} \quad f(z)\overline{f(z)}-R^2\equiv|f(z)|^2-R^2=0$$

ist, eine *Lemniskate n-ten Grades* mit dem *Halbmesser* ϱ und mit den *Mittelpunkten* $z_1, z_2, \ldots, z_n$. Die Lemniskaten $|f(z)|=R$ und $|f(z)|=R'$ heißen *konzentrisch.* Die Lemniskaten $|f(z)|=R_1$ und $|f(z)|=R_2$ sind bezüglich der Lemniskate $|f(z)|=R$ *konjugiert,* falls $R_1R_2=R^2$ ist.

Die Gleichung

(3) $$Z=f(z)$$

bestimmt eine konforme Abbildung der komplexen z-Ebene auf die Z-Ebene. Die inverse Abbildung (kurz: *W-Abbildung*) bildet den Kreis $|Z|=R=\varrho^n$ auf die Lemniskate (2) ab. Das W-Bild eines Punktes Z ist eine Punktgruppe in der z-Ebene, bestehend aus den Punkten, in denen das Polynom $f(z)$ den Wert Z annimmt. Diese Punktgruppe wird im Folgenden eine *Polgruppe* der Lemniskate (2) genannt. Die Gruppe der Mittelpunkte der Lemniskate ist auch eine Polgruppe ($Z=0$). Es gibt genau eine Polgruppe, die einen Punkt z_0 enthält. Sie besteht aus den Wurzeln der Gleichung $f(z)=f(z_0)$.

Bezüglich einer Lemniskate spielen die Polgruppen eine ähnliche Rolle, wie die Punkte der Ebene bezüglich eines Kreises. Man erhält durch die W-Abbildung aus den Sätzen über den Kreis entsprechende Sätze über die Lemniskate. So gelangt man aus der Grundeigenschaft des Kreises zur Grundeigenschaft der Lemniskate, daß die Abstände ihrer Punkte von den Mittelpunkten ein konstantes Produkt ergeben.

In einer früheren Arbeit[1]) habe ich die allgemeinen Lemniskaten von dieser Eigenschaft ausgehend untersucht. In der gegenwärtigen Arbeit werden andere Eigenschaften der Kreise auf die Lemniskaten verallgemeinert.

Das W-Bild des Kreises $|Z-Z_0|=R$ ist auch eine Lemniskate, deren Mittelpunkte eine Polgruppe, das W-Bild des Zentrums Z_0 bilden. Die W-Bilder der Kreise der Z-Ebene sind *adjungierte Lemniskaten.* Die ebene Kreisgeometrie hat in der Geometrie der adjungierten Lemniskaten ein Analogon.

§ 2. Polgruppen bei einer Lemniskate.

Jede Polgruppe der Lemniskate n-ten Grades

$$|f(z)|\equiv|z^n+a_1z^{n-1}+\ldots+a_n|\equiv|(z-z_1)(z-z_2)\ldots(z-z_n)|=R$$

läßt sich durch eine Gleichung n-ten Grades von der Form

$$f(z)=Z=re^{i\varphi}\qquad(r\geqq 0)\tag{4}$$

darstellen. Diese Polgruppe besteht aus den Wurzeln $u_1, u_2, \ldots, u_n$ dieser Gleichung. Die Polgruppen haben den gemeinsamen Schwerpunkt

$$-\frac{a_1}{n}=\frac{z_1+z_2+\ldots+z_n}{n}=\frac{u_1+u_2+\ldots+u_n}{n}.$$

Eine Polgruppe ist durch den Wert Z oder durch einen ihrer Punkte ganz bestimmt. Die Polgruppe (4) hat dann und nur dann einen mehrfachen Punkt z, wenn beide Gleichungen

$$f(z)-Z\equiv f(z)-re^{i\varphi}=0 \quad\text{und}\quad f'(z)=0$$

bestehen. Bezeichnen $z'_1, z'_2, \ldots, z'_{n-1}$ die Nullstellen der Derivierten $f'(z)$, so gibt es nur in den Polgruppen $f(z)=f(z'_k)\equiv Z'_k$ $(k=1, 2, \ldots, n-1)$ mehrfache Punkte. Ausgenommen diese höchstens $n-1$ Polgruppen, besteht jede Polgruppe aus lauter verschiedenen Punkten.

Ist $r=R$, so liegt jeder Punkt der Polgruppe (4) auf der Lemniskate $|f(z)|=R$. Dann wird die Polgruppe eine *Hauptgruppe* der Lemniskate heißen. Ist $r<R$ bzw. $r>R$, so ist die Polgruppe (4) eine *innere* bzw. *äußere Polgruppe der Lemniskate* $|f(z)|=R$.

Eine Lemniskate n-ten Grades $|f(z)|=R$ besteht aus höchstens n Jordanschen Kurven, Zykeln, von denen keiner einen anderen schneiden oder umschließen kann[2]). Zwei Zykel können höchstens einen Punkt gemeinsam haben. Ein gemeinsamer Punkt von zwei Zykeln ist eine Ecke beider Zykel. Ein Punkt liegt innerhalb eines Zykels M, wenn er

[1]) Gy. Sz. Nagy, Über die allgemeinen Lemniskaten, *diese Acta,* **11** (1948), S. 207—224.

[2]) A. a. O. [1]), S. 211.

ein innerer Punkt des von M begrenzten einfach geschlossenen Bereiches ist. Eine Lemniskate besitzt innerhalb jedes Zykels mindestens einen Mittelpunkt.

Es gilt der Satz

I. *Jede innere Polgruppe einer Lemniskate hat innerhalb eines Zykels M der Kurve dieselbe Anzahl $\varkappa$ der Mittelpunkte (jeden Mittelpunkt nach seiner Vielfachheit gerechnet). Die natürliche Zahl $\varkappa$ ist die Charakteristik des Zykels M.*

Ist $0 < r_0 < R$ und verändert sich r von 0 ausgehend bis r_0 stetig und monoton, so bewegen sich die Nullstellen der Polynome

$$g(z) \equiv f(z) - r e^{i\varphi}$$

stetig. Dies gilt auch dann, wenn auch der Winkel φ sich stetig verändert. Während dieser Veränderung von r und φ kann keine Nullstelle der Polynome $g(z)$ den Zykel M übertreten. In den Nullstellen z der Polynome $g(z)$ besteht nämlich die Ungleichung

$$|f(z)| = r \leqq r_0 < R,$$

in den Punkten z des Zykels M ist aber $|f(z)| = R$.

Daraus folgt, daß jedes Polynom $g(z)$ $(0 \leqq r \leqq r_0 < R;\ 0 \leqq \varphi < 2\pi)$ innerhalb des Zykels M der Lemniskate $|f(z)| = R$ ebenso oft verschwindet, wie das Polynom $f(z)$. Damit ist der Satz I bewiesen.

Ein *Zug* einer Lemniskate ist ein geschlossener Teil der Kurve, der überall stetige Tangenten besitzt. Ein Zug ist ein Zykel, wenn er sich nicht schneidet. Widrigenfalls besteht der Zug aus mehreren Zykeln. Die Charakteristik eines Zuges ist die Summe der Charakteristiken seiner Zykel. Man sagt, daß ein Punkt innerhalb eines Zuges der Lemniskate liegt, wenn er innerhalb eines Zykels des Zuges liegt. Mit dieser Definition gilt der Satz I auch für die Züge der Lemniskate.

Ein Kreis ist durch sein Zentrum und durch seinen Halbmesser, oder durch sein Zentrum und durch einen seiner Punkte bestimmt. Ebenso ist eine Lemniskate bestimmt, wenn man ihre Mittelpunkte und außerdem ihren Halbmesser oder einen ihrer Punkte kennt. Im zweiten Falle kann man den Punkt durch jeden anderen Punkt der zugehörigen Polgruppe ersetzen. Eine Polgruppe als Hauptgruppe und zwei andere Punkte bestimmen die Lemniskate, wenn die zwei Punkte nicht derselben Polgruppe gehören.

§ 3. Die Lage der Hauptgruppen auf der Lemniskate.

Jede Hauptgruppe der Lemniskate $|f(z)| = R$ besteht aus den Nullstellen eines Polynoms $h(z)$ von der Form

$$h(z) = f(z) - R e^{i\varphi} = \prod_{k=1}^{n} (z - c_k). \tag{5}$$

Diese Hauptgruppe wird mit $H(\varphi)$ bezeichnet. φ heißt der Winkel der Hauptgruppe $H(\varphi)$. Jeder Punkt von $H(\varphi)$ liegt auf der Lemniskate. Ein Punkt z ist dann und nur dann ein mehrfacher Punkt der Hauptgruppe $H(\varphi)$, wenn beide Gleichungen $h(z)=0$ und $h'(z)\equiv f'(z)=0$ bestehen, wenn also z ein singulärer Punkt der Lemniskate ist[3]). Jeder (reelle) singuläre Punkt einer Lemniskate ist ein mehrfacher Punkt mit getrennten Tangenten, wo ein Zug sich schneidet. Zwei Züge haben einen Punkt nur dann gemeinsam, wenn beide Züge sich in diesem Punkte schneiden. Schneidet ein Zug der Lemniskate sich nicht, so enthält er keinen singulären Punkt. Er ist ein Zykel.

Während der Winkel φ von Null bis 2π stetig und monoton zunimmt, bewegen sich die Punkte der Hauptgruppen $H(\varphi)$ auf der Lemniskate stetig und beschreiben die Lemniskate. Hat der Zykel M der Lemniskate keine Ecke, so hat jede Hauptgruppe auf M lauter verschiedene Punkte. Die zyklische Aufeinanderfolge dieser Punkte auf M bleibt also bei der Veränderung des Winkels φ unverändert. Deshalb werden die auf M liegenden Punkte einer Hauptgruppe $H(\varphi)$ von denjenigen einer anderen Hauptgruppe $H(\varphi')$ getrennt.

Dies gilt auch für einen Zykel M mit Ecken, wenn man eine Ecke in der zugehörigen Hauptgruppe der Lemniskate auf M einfach rechnet.

Ist $\varkappa$ die Charakteristik des Zykels M, so hat jedes Polynom

$$g(z;\, r)=f(z)-re^{i\varphi}, \qquad 0\leqq r<R,$$

in dem von M begrenzten Bereich B $\varkappa$ Nullstellen. Diese Nullstellen gehören der Hauptgruppe $H(\varphi;\, r)$ der Lemniskate $|f(z)|=r$.

Es gibt eine Zahl R_0, so daß keine Lemniskate $|f(z)|=r$, $R_0<r<R$ im Bereich B einen singulären Punkt besitzt. Enthält das Innere von B die Nullstellen $z_1', z_2', \ldots, z_p'$ der Derivierten $f'(z)$, so ist $R_0=\operatorname{Max}|f(z_k')|$ $(k=1, 2, \ldots, p)$. Im Falle $p=0$ ist $R_0=0$.

Eine Lemniskate $|f(z)|=r$, $R_0<r<R$, hat mit dem Zykel M der Lemniskate $|f(z)|=R$ keinen Punkt gemeinsam. Sie hat also in B eine aus ganzen Zügen bestehende Teilkurve, die keinen singulären Punkt besitzt und die sich dem Zykel M nähert, falls $r\to R$. Daraus folgt, daß die in B liegenden Punkte der Lemniskate $|f(z)|=r$, $R_0<r<R$, auf einem Zykel $M(r)$ ohne Ecke liegen.

Die auf $M(r)$ liegenden Punkte der Hauptgruppe $H(\varphi;\, r)$ trennen diejenigen der Hauptgruppe $H(\varphi';\, r)$, $\varphi'\not\equiv\varphi$ (mod. 2π). Diese zwei Punktgruppen konvergieren im Falle $r\to R$ gegen die auf M liegenden Punktgruppen der Hauptgruppen $H(\varphi)$ und $H(\varphi')$. Diese Punktgruppen

[3]) A. a. O. [1]), S. 209.

trennen auf M einander. Dies gilt auch dann, wenn die Hauptgruppe $H(\varphi)$ eine Ecke E des Zykels M enthält.

Bezeichnet nämlich $E(r)$ den Punkt von $M(r)$, der im Falle $r \to R$ gegen E konvergiert und bezeichnen $E_1'(r)$ und $E_2'(r)$ die auf $M(r)$ zu $E(r)$ benachbarten Punkte der Hauptgruppe $H(\varphi'; r)$, so enthält der Bogen $E_1'(r)\,E(r)\,E_2'(r)$ des Zykels $M(r)$ außerhalb von $E(\varphi)$ keinen Punkt der Hauptgruppe $H(\varphi; r)$. Diese Hauptgruppe hat also auf dem Zykel $M(r)$ nur einen Punkt, der im Falle $r \to R$ gegen die Ecke E des Zykels M konvergiert.

Damit ist der Satz bewiesen:

II. *Jede Hauptgruppe hat auf ihrem Zug M von der Charakteristik $\varkappa$ genau $\varkappa$ getrennte Punkte, wobei eine Ecke des Zykels in der zugehörigen Hauptgruppe einfach zu rechnen ist. Die auf dem Zykel M liegenden Punkte zweier Hauptgruppen $H(\varphi)$ und $H(\varphi')$ trennen einander.*

§ 4. Konjugierte Polgruppen bezüglich einer Lemniskate.

Die Punkte Z_1 und Z_2 sind konjugierte Pole bezüglich eines Kreises K, wenn sie Spiegelbilder voneinander für den Kreis K sind. Die Punkte Z_1 und Z_2 sind also bezüglich des Kreises

$$|Z| = R \text{ oder } Z\bar{Z} - R^2 \equiv |Z|^2 - R^2 = 0$$

dann konjugierte Pole, wenn

$$Z_1 = R_1 e^{i\varphi} \equiv R T e^{i\varphi}, \quad Z_2 = R_2 e^{i\varphi} \equiv R T^{-1} e^{i\varphi}, \quad 0 < T \neq 1$$

sind.

Aus der Identität

$$(6) \quad (A + \lambda B)(\bar{A} + \mu \bar{B}) - (B + \mu A)(\bar{B} + \lambda \bar{A}) \equiv (1 - \lambda\mu)(A\bar{A} - B\bar{B})$$

folgt im Falle $A = Z$, $B = -R$, $\lambda = T e^{i\varphi}$, $\mu = \bar{\lambda} = T e^{-i\varphi}$, $T \neq 1$, daß

$$(Z - Z_1)(\bar{Z} - \bar{Z}_1) - T^2 (Z - Z_2)(\bar{Z} - \bar{Z}_2) \equiv (1 - T^2)(Z\bar{Z} - R^2),$$

oder

$$|Z - Z_1|^2 - T^2 |Z - Z_2|^2 \equiv (1 - T^2)(|Z|^2 - R^2)$$

ist. In den Punkten des Kreises $|Z| = R$ besteht also die Gleichung

$$\left| \frac{Z - Z_1}{Z - Z_2} \right| = T \equiv \left| \frac{Z_1}{Z_2} \right|^{\frac{1}{2}}.$$

Diese Gleichung stellt einen bezüglich der konjugierten Pole Z_1 und Z_2 Apollonischen Kreis mit dem Parameter T dar.

Die Eigenschaft des Apollonischen Kreises läßt sich auf die Lemniskaten übertragen.

Sind Z_1 und Z_2 konjugierte Pole bezüglich des Kreises $|Z| = R$, so bilden die Nullstellen der Polynome

$$
(7)\qquad
\begin{aligned}
g_1(z) &\equiv f(z) - Z_1 \equiv f(z) - RTe^{i\varphi} \equiv \prod_{k=1}^{n} (z - a_k),\\
g_2(z) &\equiv f(z) - Z_2 \equiv f(z) - RT^{-1}e^{i\varphi} \equiv \prod_{k=1}^{n} (z - b_k)
\end{aligned}
$$

bezüglich der Lemniskate $|f(z)| = R$ *konjugierte Polgruppen.* Diese Polgruppen sind W-Bilder der Punkte Z_1 und Z_2.

Aus der Identität (6) folgt im Falle

$$A = f(z),\ B = -R,\ \lambda = Te^{i\varphi},\ \mu = \bar{\lambda} = Te^{-i\varphi},\ T \neq 1$$

die Identität

$$f_1(z)\bar{f_1}(\bar{z}) - T^2 f_2(z)\bar{f_2}(\bar{z}) = (1 - T^2)\,(f(z)\bar{f}(\bar{z}) - R^2),$$

oder

$$|f_1(z)|^2 - T^2|f_2(z)|^2 \equiv (1 - T^2)\,(|f(z)|^2 - R^2).$$

In den Punkten der Lemniskaten $|f(z)| = R$ besteht also die Gleichung

$$\left|\frac{f_1(z)}{f_2(z)}\right| = \prod_{k=1}^{n} \left|\frac{z - a_k}{z - b_k}\right| = T.$$

Daraus ergibt sich der Satz

III. *Bezeichnen G und G' konjugierte Polgruppen bezüglich einer Lemniskate n-ten Grades und bezeichnen $d_1, d_2, \ldots, d_n$ bzw. $d_1', d_2', \ldots, d_n'$ die Abstände eines Punktes der Lemniskate von den Punkten der Polgruppe G bzw. G', so ist das Verhältnis*

$$\frac{d_1 d_2 \ldots d_n}{d_1' d_2' \ldots d_n'} = T = t^n$$

von der Lage des Punktes P unabhängig. Die positive Zahl t heißt der Parameter der Lemniskate bezüglich der konjugierten Polgruppen G und G'.

Dieser Satz gilt auch im Falle $T = 1$. Er ist aber dann trivial, weil dann die Punktgruppen G und G' in eine Hauptgruppe der Lemniskate zusammenfallen. Das Prinzip des Beweises des Satzes III kommt schon beim Beweis eines anderen allgemeinen Satzes von G. Darboux vor[4]). Der Satz III enthält einen Satz von A. Wangerin[5]) über eine Lemniskate zweiten Grades.

Jeder nicht auf der Lemniskate liegende Punkt Q der Ebene gehört offenbar einer einzigen Polgruppe G an und bestimmt die konjugierten Polgruppen G und G', sowie den Parameter t eindeutig. Bewegt sich Q auf der Lemniskate $|f(z)| = R_1 = RT$, so bewegt sich die

---

[4]) G. Darboux, *Sur une classe remarquable de courbes et de surfaces algébriques* (Paris, 1873; unveränderter neuer Abdruck, 1899), S. 66—80.

[5]) A. Wangerin, Über eine Eigenschaft der Lemniskate, *Archiv der Math. Phys.*, 55 (1873), S. 19—21.

ganze Polgruppe G auf dieser Lemniskate. Die konjugierte Polgruppe bewegt sich auf der konjugierten Lemniskate $|f(z)| = R_2 = RT^{-1}$.

Sind Z_1 und Z_2 konjugierte Pole bezüglich des Kreises $|Z| = R$, so schneidet jeder Kreis K durch die Punkte Z_1 und Z_2 den Kreis $|Z| = R$ orthogonal. Das W-Bild des Kreises K ist eine zur Lemniskate $|f(z)| = R$ adjungierte Lemniskate, die durch die konjugierten Polgruppen (7) geht und die Lemniskate $|f(z)| = R$ orthogonal schneidet. Dies folgt aus der Konformität der W-Abbildung. Es gilt also der Satz

IV. *Eine Lemniskate wird von einer adjungierten Lemniskate, die durch zwei bezüglich der ersten Lemniskate konjugierte Polgruppen geht, in jedem gewöhnlichen Punkte orthogonal geschnitten. (Die Schnittpunkte bilden auf beiden Lemniskaten zwei Hauptgruppen.)*

§ 5 Die Orientierung der Punkte einer Lemniskate bezüglich ihrer Hauptgruppen.

Besteht eine ebene Punktgruppe (C) aus den Punkten $C_k (k = 1, 2, \ldots, n)$, weicht der Punkt P der Ebene von den Punkten C_k ab und bezeichnet γ_k $(0 \leq \gamma_k < \pi)$ den Winkel der Geraden PC_k zu einer festen Achse (orientierten Geraden), so heißt der Winkel $\Omega \equiv \Sigma \gamma_k \pmod{\pi}$ die *Orientierung* des Punktes P bezüglich der Punktgruppe (C) und auch die Orientierung der Punktgruppe (C) bezüglich des Punktes P. Ω ist die Laguerresche Orientierung des Systems der Geraden PC_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$.[6])

Bezeichnet (C') eine andere Punktgruppe mit den Punkten $C'_1, C'_2, \ldots, C'_{n_1}$ und bezeichnet ω_k den (mit Drehungssinn versehenen) Winkel, unter dem der Vektor $\overrightarrow{C_k C'_k}$ vom Punkt P aus erscheint, so ist $\omega_k = \gamma'_k - \gamma_k$. Dann heißt der Winkel

$$\Omega_{01} \equiv \sum_{k=1}^{n} \omega_k \equiv \sum_{k=1}^{n} (\gamma'_k - \gamma_k) \equiv \Omega' - \Omega \pmod{\pi}$$

bzw.

$$\Omega_{10} \equiv - \sum_{k=1}^{n} \omega_k \equiv \Omega - \Omega' \pmod{\pi}$$

die *Orientierung des Punktes P bezüglich der Punktgruppen* (C) *und* (C') bzw. (C') und (C). Ω und Ω' sind offenbar komplementäre Winkel und hängen von der Achse der Orientierung nicht ab.

Bezeichnet z bzw. c_k die zum Punkt P bzw. C_k gehörige komplexe Zahl, ist die reelle Achse die Achse der Orientierung und ist

$$z - c_k = r_k e^{i\varphi_k} \qquad (0 \leq \varphi_k < 2\pi),$$

so ist $\varphi_k = \gamma_k$ bzw. $\varphi_k = \gamma_k + \pi$, je nachdem $\varphi_k < \pi$ bzw. $\varphi_k > \pi$ ist.

6) Oeuvres de LAGUERRE, II (Paris, 1905), S. 23–26. Vgl. G. HUMBERT, Sur l'orientation des systèmes de droites, *Nouvelles Annales de Math.*, (2) 12 (1893), S. 37–64; 123–136.

In beiden Fällen ist also $2\varphi_k \equiv 2\gamma_k \pmod{2\pi}$. Deshalb besteht die Gleichung

$$\frac{z-c_k}{\bar{z}-\bar{c}_k} = e^{2i\varphi_k} = e^{2i\gamma_k}.$$

Sind $h(z) = \prod_{k=1}^{n}(z-c_k)$ und $h_1(z) = \prod_{k=1}^{n}(z-c_k')$, so sind

$$\frac{h(z)}{\bar{h}(\bar{z})} = \prod_{k=1}^{n}\frac{z-c_k}{\bar{z}-\bar{c}_k} = e^{2i\Sigma\gamma_k} = e^{2i\Omega} \text{ und } \frac{h_1(z)}{\bar{h}_1(\bar{z})}\cdot\frac{\bar{h}(\bar{z})}{h(z)} = e^{2i(\Omega'-\Omega)} = e^{2i\Omega_{01}}.$$

Setzt man in der Identität (6)

$$A = f(z),\; B = -R,\; \lambda = e^{i\varphi},\; \mu = e^{-i\varphi'};\; \lambda\mu \neq 1,$$

setzt man ferner

$$h(z) = f(z) - Re^{i\varphi},\; h_1(z) = f(z) - Re^{i\varphi'},$$

so hat die Identität die Form

$$h(z)\,\bar{h}_1(\bar{z}) - e^{i(\varphi-\varphi')}h_1(z)\,\bar{h}(\bar{z}) \equiv (1-e^{i(\varphi-\varphi')})\,[f(z)\,\bar{f}(\bar{z}) - R^2] \equiv$$
$$\equiv (1-e^{i(\varphi-\varphi')})\,[|f(z)|^2 - R^2].$$

In den Punkten z der Lemniskate (2) besteht also die Gleichung

$$e^{i(\varphi-\varphi')} = \frac{h_1(z)}{\bar{h}_1(\bar{z})}\,\frac{\bar{h}(\bar{z})}{h(z)} = e^{2i\Omega_{01}}.$$

Es gilt also

$$2\Omega_{01} \equiv \varphi' - \varphi \equiv \Omega' - \Omega \pmod{2\pi} \quad\text{oder}\quad \Omega_{01} \equiv \frac{\varphi'-\varphi}{2} \pmod{\pi}.$$

Daraus ergibt sich die folgende Verallgemeinerung des Satzes über den Peripheriewinkel des Kreises:

V. *Die Punkte einer Lemniskate haben bezüglich ihrer Hauptgruppen $H(\varphi)$ und $H(\varphi')$ die konstante Orientierung* $\Omega_{01} \equiv \dfrac{\varphi'-\varphi}{2} \pmod{\pi}$.

Bewegt sich ein Punkt z auf der Lemniskate stetig ohne inzwischen irgendeinen Punkt der Hauptgruppen $H(\varphi)$ und $H(\varphi')$ überzutreten, so ist $\omega_k = \omega_k(z)$ eine stetige Funktion ($k = 1, 2, \ldots, n$). Unterdessen bleibt also nicht nur Ω_{01}, sondern auch $\Sigma\omega_k(z)$ beständig. In den Punkten c_k und c_k' der Lemniskate ist $\omega_k(z)$ unstetig, $\omega_k(z)$ hat dort einen Sprung. Deshalb unterscheiden die Werte von $\Sigma\omega_k(z)$ in zwei Punkten der Lemniskate, zwischen denen es genau einen Punkt der Hauptgruppen $H(\varphi)$ und $H(\varphi')$ gibt, um π voneinander.

Die Hauptgruppen $H(\varphi)$ und $H(\varphi+\pi)$ heißen *Gegenhauptgruppen.* Aus Satz V ergibt sich die folgende Verallgemeinerung des Thalesschen Satzes:

VI. *Die Orientierung jedes Punktes einer Lemniskate bezüglich ihrer beliebigen zwei Gegenhauptgruppen ist ein Rechtwinkel.*

Der Schwerpunkt der Mittelpunkte einer Lemniskate zweiten Grades (einer Cassinischen Kurve) ist auch Schwerpunkt ihrer Hauptgruppen.

Das Symmetriezentrum der Lemniskate zweiten Grades halbiert also das Punktpaar jeder Hauptgruppe. Liegen also die Ecken eines Parallelogramms $A_1A_2A_3A_4$ auf einer Lemniskate zweiten Grades, so ist das Punktpaar A_1A_3 oder A_2A_4 eine Hauptgruppe der Kurve. Der Satz V enthält also einen Satz von DARBOUX[7]) über Cassinische Kurven und damit einen spezielleren Satz von WANGERIN[8]) über einzügige Cassinische Kurven.

§ 6. Das Doppelverhältnis von Polgruppen einer Lemniskate.

Das Doppelverhältnis der Polgruppen $f(z)=Z_k$ $(k=1, 2, 3, 4)$ der Lemniskate $|f(z)|=R$ (die auch Polgruppen der Lemniskaten $|f(z)-Z_0|=R'$ sind), ist die Zahl

$$Dv=\frac{Z_3-Z_1}{Z_3-Z_2}:\frac{Z_4-Z_1}{Z_4-Z_2}=\frac{Z_1-Z_3}{Z_1-Z_4}:\frac{Z_2-Z_3}{Z_2-Z_4}.$$

Liegen die Punkte Z_1, Z_2, Z_3 und Z_4 auf einem Kreis $|Z-Z_0|=R''$, so ist Dv reell. Das Doppelverhältnis von beliebigen vier Hauptgruppen einer Lemniskate ist also immer reell.

Das Doppelverhältnis Dv läßt sich durch die Punkte der ersten (oder letzten) zwei Polgruppen und durch je einen Punkt der anderen zwei Polgruppen ausdrücken.

Sind nämlich

$$f(z)-Z_1=\prod_{k=1}^{n}(z-a_k),\ f(z)-Z_2=\prod_{k=1}^{n}(z-b_k), f(c)=Z_3 \text{ und } f(d)=Z_4,$$

so sind

$$Z_3-Z_1=f(c)-Z_1=\prod_{k=1}^{n}(c-a_k),\quad Z_3-Z_2=f(c)-Z_2=\prod_{k=1}^{n}(c-b_k),$$

$$Z_4-Z_1=f(d)-Z_1=\prod_{k=1}^{n}(d-a_k) \text{ und } Z_4-Z_2=f(d)-Z_2=\prod_{k=1}^{n}(d-b_k).$$

Daraus folgt die Gleichung

$$Dv=\prod_{k=1}^{n}\left[\frac{c-a_k}{c-b_k}\right]:\left[\frac{d-a_k}{d-b_k}\right].$$

Liegen die Punkte Z_1, Z_2, Z_3 und Z_4 auf einem Kreis K und ist ihr Doppelverhältnis Dv negativ bzw. positiv, so ist das Punktpaar Z_1Z_2 von dem Punktpaar Z_3Z_4 getrennt bzw. nicht getrennt. Für Lemniskaten gilt der Satz:

VII. *Haben die Hauptgruppen $H(\varphi^{(j)})$ $(j=1, 2, 3, 4)$ einer Lemniskate ein negatives Doppelverhältnis Dv, so hat jede dieser Hauptgruppen*

---

7) A. a. O., S. 80.

8) A. a. O.

je einen Punkt unter ihren vier auf einem Zykel M von der Charakteristik $\varkappa$ aufeinanderfolgenden Punkten und das Punktpaar der ersten zwei Hauptgruppen trennt das Punktpaar der letzten zwei auf M. Im Falle $Dv > 0$ trennen diese zwei Punktpaare auf M einander nicht.

Es kann angenommen werden, daß die Aufeinanderfolge der Punkte der Hauptgruppe $H(\varphi^{(1)})$ beim positiven Umlaufen des Zykels M $c_1^{(1)}, c_2^{(1)}, \ldots, c_\varkappa^{(1)}$ ist. Der Bogen $c_1^{(1)}c_2^{(1)}$ (oder $c_2^{(1)}c_3^{(1)}, c_3^{(1)}c_4^{(1)}, \ldots, c_{\varkappa-1}^{(1)}c_1^{(1)}$) von M enthält nach Satz II je einen Punkt der übrigen drei Hauptgruppen.

Während ein Punkt z von $c_1^{(1)}$ ausgehend den Zykel M im positiven Sinne umläuft, geht der Punkt $Z=f(z)$ in der Z-Ebene den Kreis vom Punkt Z_1 ausgehend im positivem Sinne $\varkappa$-mal um. Während dieser Bewegung des Punktes z auf dem Zykel M verändert sich der Winkel des Wurzelfaktors $z-z_k$ von $f(z)$ offenbar um 0 oder um 2π, je nachdem der Mittelpunkt z_k außerhalb bzw. innerhalb des Zykels M liegt.

Während der Punkt z den Bogen $c_1^{(1)}c_2^{(1)}$ beschreibt, geht der Punkt $Z=f(z)$ von Z_1 ausgehend den Kreis K in positivem Sinne einmal um. Inzwischen tritt der Punkt Z jeden der Punkte Z_2, Z_3 und Z_4 einmal über, weil die von Z_2, Z_3 bzw. Z_4 bestimmte Hauptgruppe auf dem Bogen $c_1^{(1)}c_1^{(2)}$ genau einen Punkt besitzt. Die Aufeinanderfolge der Punkte der Hauptgruppen $H(\varphi^{(j)})$ $(j=1, 2, 3, 4)$ auf den Bogen $c_1^{(1)}c_2^{(1)}$ (oder $c_2^{(1)}c_3^{(1)}, \ldots, c_{\varkappa-1}^{(1)}c_1^{(1)}$) stimmt also mit der Aufeinanderfolge der Punkte Z_1, Z_2, Z_3, Z_4 beim positiven Umlaufen des Kreises K überein. Daraus folgt die Richtigkeit des Satzes VII.

§ 7. Potenz, Potenzlinie, Potenzpunkte bei Lemniskaten.

Die Gleichung der Lemniskate $|f(z)-Z_0|=R$ läßt sich in der Form

$$(8)\quad L(z)\equiv[f(z)-Z_0]\,[\bar f(\bar z)-\bar Z_0]-R^2\equiv$$
$$\equiv f(z)\,\bar f(\bar z)-[\bar Z_0 f(z)+Z_0\bar f(\bar z)]-R^2=0$$

oder

$$(9)\qquad L(x,y)\equiv\prod_{k=1}^{n}[(x-x_k)^2+(y-y_k)^2]-R^2=0$$

schreiben, wenn

$$f(z)-Z_0\equiv\prod_{k=1}^{n}(z-z_k),\quad z=x+iy\quad\text{und}\quad z_k=x_k+iy_k$$

sind.

Der (reelle) Wert $L(z_0)=L(x_0, y_0)$ ist die *Potenz* des Punktes $z=x_0+iy_0$ in bezug auf die Lemniskate (8) bzw. (9). Die Potenz eines Punktes z_0 der Lemniskate ist also Null. Liegt z_0 außerhalb jeder

Zykel bzw. innerhalb eines Zykels der Lemniskate, so ist die Potenz $L(z_0)$ positiv bzw. negativ. Enthält eine Polgruppe den Punkt z_0, so haben auch die übrigen Punkte der Polgruppe in bezug auf die Lemniskate die Potenz $L(z_0)$. Die Punkte, die in bezug auf eine Lemniskate dieselbe Potenz haben, liegen auf einer konzentrischen Lemniskate.

Es gilt die folgende Verallgemeinerung des bekannten Satzes des Kreises:

VIII. *Wird ein Strahlenbüschel durch den Punkt P_0 von einer Lemniskate geschnitten, so ist das Produkt der Strecken, die auf jedem Strahle von P_0 bis an die Lemniskate reichen, von beständiger Größe. Dieses Produkt ist die Potenz des Punktes P_0 in bezug auf die Lemniskate.*

Eine beliebige Gerade g durch den Punkt $P_0=(x_0, y_0)$ hat die Gleichungen von der Form

$$x=x_0+d\cos\alpha \quad \text{und} \quad y=y_0+d\sin\alpha.$$

Wird dies in die Gleichung (9) eingesetzt, so ergibt sich die Gleichung

$$L(x_0+d\cos\alpha,\ y_0+d\sin\alpha)=d^{2n}+A_1 d^{2n-1}+\ldots+A_{2n-1}d+L(x_0, y_0)=0.$$

Daraus folgt der Satz VIII, weil die Wurzeln $d_1, d_2, \ldots, d_{2n}$ dieser Gleichung der Relation $d_1 d_2 \ldots d_{2n}=L(x_0, y_0)$ genügen.

Die Punkte z, die in bezug auf die adjungierten aber nicht konzentrischen Lemniskaten ($Z_1 \neq Z_2$)

$$(10)\quad L_k(z)\equiv|f(z)-Z_k|^2-R_k^2\equiv f(z)\bar{f}(\bar{z})-[\bar{Z}_k f(z)+Z_k\bar{f}(\bar{z})]-R_k^2=0 \quad (k=1, 2)$$

gleiche Potenzen besitzen, genügen der Gleichung

$$(11)\quad L_1(z)-L_2(z)\equiv(\bar{Z}_2-\bar{Z}_1)f(z)+(Z_2-Z_1)\bar{f}(\bar{z})+R_2^2-R_1^2=0$$

und liegen auf der *Potenzlinie* der Lemniskaten $L_1(z)=0$ und $L_2(z)=0$. Diese Potenzlinie ist eine Kurve n-ter Ordnung, eine *Stelloide* von E. Lucas[9]), das W-Bild einer Geraden der Z-Ebene. Sind nämlich

$$f(z)=X+iY \quad \text{und} \quad Z_2-Z_1=R'e^{i\alpha},$$

so läßt sich die Gleichung (11) in der Form

$$X\cos\alpha+Y\sin\alpha+\frac{R_2^2-R_1^2}{2R'}=0$$

schreiben. Die W-Bilder der Geraden der Z-Ebene werden *adjungierte Stelloiden* genannt. Sie sind durch das Polynom $f(z)$ bestimmt. Eine Stelloide enthält mit einem Punkt auch die übrigen Punkte der zugehörigen Polgruppe. Zwei adjungierte Stelloiden haben eine Pol-

---

[9]) Vgl. G. Loria, *Spezielle algebraische und transzendente Kurven* (Leipzig, 1910), Bd. I, S. 439 - 450.

gruppe gemeinsam. Die Asymptoten einer Stelloide laufen in den Schwerpunkt der Polgruppen zusammen und bilden eine n-strahlige Windrose.

Sind λ_1 und λ_2 reelle Zahlen mit der Summe 1, so bilden die Lemniskaten

$$L(z) \equiv \lambda_1 L_1(z) + \lambda_2 L_2(z) = 0 \tag{12}$$

ein Büschel von Lemniskaten. Für jeden Punkt z der Lemniskate (12) ist

$$L_1(z) : L_2(z) = -\lambda_2 : \lambda_1 = \lambda.$$

Der Ort der Punkte, deren Potenzen in bezug auf zwei adjungierte Lemniskaten ein gegebenes Verhältnis λ haben, ist also eine Lemniskate des Büschels. Das Büschel enthält im Falle $\lambda = 1$ eine Stelloide, die gemeinsame Potenzlinie aller Paare der Lemniskaten des Büschels. Aus $\lambda_1 + \lambda_2 = \mu_1 + \mu_2 = 1$ folgt nämlich, daß

$$[\lambda_1 L_1(z) + \lambda_2 L_2(z)] - [\mu_1 L_1(z) + \mu_2 L_2(z)] \equiv (\lambda_1 - \mu_1)[L_1(z) - L_2(z)].$$

Es gibt in der Z-Ebene einen Punkt (Potenzpunkt), der in bezug auf drei Kreise die gleiche Potenz besitzt. Zu drei adjungierten Lemniskaten gibt es also eine Polgruppe, die Potenzpolgruppe der Lemniskaten, deren Punkte in bezug auf die drei Lemniskaten die gleiche Potenz besitzen.

Die W-Abbildung ist konform. Aus bekannten Sätzen der elementaren Kreisgeometrie folgen z. B. die Sätze: Die Gruppen der Mittelpunkte der Lemniskaten eines Büschels liegen auf einer adjungierten Stelloide, von der die Potenzlinie in jedem Punkte einer Polgruppe orthogonal geschnitten wird. Schneidet eine Lemniskate zwei adjungierte Lemniskaten orthogonal, so schneidet sie jede Lemniskate des von diesen zwei Lemniskaten bestimmten Büschels orthogonal (in zwei Polgruppen) und ihre Mittelpunktgruppe liegt auf der Potenzlinie des Büschels.

§ 8. Durch Polgruppen einer Lemniskate bestimmte Korrespondenzen zwischen den Punkten der Ebene.

Die Polgruppen einer Lemniskate $|f(z)| = R$ n-ten Grades bestimmen zwischen den Punkten der Ebene eine $(n-1, n-1)$ Korrespondenz. In dieser Korrespondenz entsprechen einem Punkte z_0 der Ebene die übrigen Nullstellen des Polynoms $f(z) = f(z_0)$, also die übrigen $n-1$ Punkte der z_0 enthaltenden Polgruppe. Bezeichnet M bzw. M' einen Zykel der Lemniskate $f(z) = R$ von der Charakteristik $\varkappa$ bzw. $\varkappa'$ und bezeichnet B bzw. B' den von M bzw. M' begrenzten abgeschlossenen endlichen Bereich, so bestimmt die $(n-1, n-1)$ Korrespondenz zwischen den Punkten der Bereiche B und B' eine $(\varkappa', \varkappa)$ Korrespondenz. Ist $\varkappa \geqq 2$, so bestimmen die Polgruppen zwischen den Punkten des Bereiches B eine $(\varkappa - 1, \varkappa - 1)$ Korrespondenz. Dies folgt aus Satz I.

Jede (1, 1) Korrespondenz zwischen den Punkten der komplexen Z-Ebene ist eine Korrespondenz zwischen den Polgruppen und damit eine (n, n) Korrespondenz zwischen den Punkten der Ebene. Einem Punkte einer Polgruppe entsprechen nämlich die Punkte derjenigen Polgruppe, die nach der (1, 1) Korrespondenz der ersten Polgruppe entspricht.

Jede solche Korrespondenz zwischen den Punkten der Ebene induziert eine $(\varkappa, \varkappa)$ bzw. $(\varkappa', \varkappa')$ Korrespondenz zwischen den Punkten des Bereiches B bzw. B' und eine $(\varkappa', \varkappa)$ Korrespondenz zwischen den Punkten der Bereiche B und B'.

In der Geometrie der Lemniskaten haben diejenigen Korrespondenzen eine besondere Rolle, die aus den einfachsten involutorischen Abbildungen der Z-Ebene, d. h. aus Spiegelungen bezüglich eines Punktes, einer Geraden oder eines Kreises entspringen. Die entsprechenden (n, n) Korrespondenzen mögen Spiegelungen bezüglich einer Polgruppe, eines adjungierten Stelloide bzw. einer adjungierten Lemniskate genannt werden.

Jede dieser Korrespondenzen hat die auszeichnende Eigenschaft, daß einem Punkte der Ebene lauter reelle Punkte entsprechen.

(Eingegangen am 10. August 1948.)