Une généralisation du théorème tauberien de Wiener.

Par S. MANDELBROJT et S. AGMON à Paris.

1. Nous désignons par L la classe de toutes les fonctions $K(x)$, mesurables sur $(-\infty, \infty)$ et telles que $\int_{-\infty}^{\infty} |K(x)| dx < \infty$. Nous désignons par $g(u) = S(K)$ la transformée de Fourier de K:

$$g(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} K(x) e^{-iux}\, dx.$$

L'ensemble des racines de $g(u) = 0$ sera désigné par $\Omega(K)$. E étant un ensemble linéaire fermé quelconque, nous désignerons par E_f la frontière de E, c'est-à-dire l'ensemble de tous les points non intérieurs de E. Nous désignerons enfin par B la classe de toutes les fonctions mesurables et bornées sur $(-\infty, \infty)$.

2. Le théorème tauberien général de N. WIENER est bien connu:

Théorème W_1. *Si la relation*

$$\lim_{y=\infty} \int_{-\infty}^{\infty} K_0(y-x) h(x)\, dx = A \int_{-\infty}^{\infty} K_0(x) dx \tag{1}$$

a lieu pour une fonction $K_0 \in L$ avec $\Omega(K_0)$ vide, et une fonction $h \in B$, la relation

$$\lim_{y=\infty} \int_{-\infty}^{\infty} K(y-x)\, h(x)\, dx = A \int_{-\infty}^{\infty} K(x) dx \tag{2}$$

a lieu pour toute fonction $K \in L$.

Par contre si $\Omega(K_0)$ n'est pas vide il existe une fonction h de B et une fonction K de L telles que (1) ait lieu sans que (2) ait lieu. WIENER a démontré que le théorème W_1 résulte du théorème suivant:

Théorème W_2. *Soit $\{\xi_n\}$ une suite partout dense sur $(-\infty, \infty)$, et soit $K_0 \in L$ avec $\Omega(K_0)$ vide. Soit $K \in L$. A tout $\varepsilon > 0$ correspondent un entier N et* *des constantes* $a_1, a_2, \ldots a_N$ *tels que*

(3) $$\int_{-\infty}^{\infty} |K(x) - \sum_{1}^{N} a_\nu K_0(x-\xi_\nu)|\, dx < \varepsilon.$$

Nous nous posons le problème général suivant: la fonction $K_0 \in L$ étant donnée, déterminer le sous-espace $\pi(K_0)$ de L, tel que pour toute fonction K de $\pi(K_0)$ une inégalité de la forme (3) ait lieu pour tout $\varepsilon > 0$. On voit immédiatement qu'une condition *nécessaire* pour que $K \in \pi(K_0)$ est que

(4) $$\Omega(K) \supset \Omega(K_0).$$

Cette condition, est-elle aussi suffisante pour que $K \in \pi(K_0)$? Nous n'avons pu le démontrer qu'en ajoutant une hypothèse portant, soit sur $\Omega(K)$, soit sur la croissance de K (pour ne citer qu'un cas particulier d'un théorème plus général: la réponse est affirmative si $xK(x) \in L$)

Il résulte de la méthode générale de F. Riesz qu'une condition nécessaire et suffisante pour que (3) ait lieu pour tout $\varepsilon > 0$ est que le système infini d'équations

$$\int_{-\infty}^{\infty} K(x)\varphi_0(x)\,dx = 1, \quad \int_{-\infty}^{\infty} K_0(x-\xi_n)\varphi_0(x)\,dx = 0 \quad (n \geqq 1)$$

n'ait pas de solution $\varphi_0 \in B$.

La suite $\{\xi_n\}$ étant partout dense sur $(-\infty, \infty)$, on voit ainsi qu'une condition nécessaire et suffisante pour que $K \in \pi(K_0)$ est que toute fonction $\varphi_0 \in B$ vérifiant l'équation

(5) $$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_0(x) K_0(y-x)\,dx = 0$$

vérifie aussi l'équation

(6) $$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_0(x) K(y-x)\,dx = 0.$$

3. A la fonction $\varphi \in B$ faisons correspondre, avec Carleman[1]), les fonctions suivantes

(7) $$\begin{aligned} F^+(z) &= \int_{-\infty}^{0} \varphi(t) e^{-itz}\,dt, \quad I(z) > 0 \\ F^-(z) &= -\int_{0}^{\infty} \varphi(t) e^{-itz}\,dt, \quad I(z) < 0 \end{aligned}$$

respectivement holomorphes dans le demi-plan supérieur et demi-plan inférieur. D'après un théorème de Carleman, si $\varphi \in B$ est une solution de (6) $(K \in L)$, les fonctions $F^+(z)$ et $F^-(z)$, définies par (7) sont aussi régulières en tout

1) T. Carleman, *Intégrale de Fourier et questions qui s'y rattachent* (Uppsale, 1944).

point qui n'appartient pas à $\Omega(K)$, et chacune d'elles constitue le prolongement analytique de l'autre à travers tout segment ne contenant pas de points de $\Omega(K)$.

Nous allons maintenant démontrer le lemme suivant:

L e m m e 1. *Soient* $K \in L$, $\varphi_0 \in B$, *et posons*

$$\varphi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_0(t) K(x-t) dt. \tag{8}$$

Si $\Omega(K_0)$ *contient un intervalle* (α, β), *chacune des fonctions* F^+, F^- *définies par* (7) *à partir de la fonction* φ *donnée par* (8) *(cette fonction est continue et* $\varphi \in B$*) est le prolongement analytique de l'autre à travers* (α, β).

La fonction continue $\Delta(x)$ définie par: $\Delta(x) = 1 - |x|$ pour $|x| \leq 1$, $\Delta(x) = 0$ pour $|x| \geq 1$, est la transformée de Fourier de $\delta(x)$ où $\delta(2x) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} (\sin x)^2/x^2$. La fonction $\Delta_0(x) = \Delta[(x-\xi)/l]$ où $\xi = (\alpha+\beta)/2$, $l = (\beta-\alpha)/2$, est par conséquent, la transformée de Fourier de $\delta_0(x) = l e^{i\xi x} \delta(lx)$.

Or on a

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) \delta_0(x-t) dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \delta_0(x-t) dt \int_{\infty}^{\infty} \varphi_0(u) K(t-u) du =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_0(u) du \int_{-\infty}^{\infty} \delta_0(x-t) K(t-u) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_0(u) K^*(x-u) du \tag{9}$$

où K^* est le produit symbolique ("faltung") de δ_0 et K. Comme $g^*(u) = S(K^*) = g(u) \Delta_0(u)$, où $g(u) = S(K)$, on voit que $g^*(u) \equiv 0$, donc $K^*(x) \equiv 0$, et (9) nous permet d'écrire

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) \delta_0(x-t) dt = 0.$$

Comme $\Delta_0(u)$ ne s'annule pas dans (α, β) le resultat énoncé résulte immédiatement du théorème cité de CARLEMAN.

4. Nous pouvons maintenant démontrer le théorème suivant:

T h é o r è m e 1. *Soient* $\varphi_0 \in B$, $K_0 \in L$, $K \in L$, φ_0 *et* K_0 *étant liés par* (5). *Supposons que* (4) *ait lieu. La fonction* φ *définie par* (8) *satisfait alors aussi à l'équation* (8), *appartient à* B *et est continue; et la fonction définie par*

$$F(z) = \int_{-\infty}^{0} \varphi(t) e^{-itz} dt, \quad I(z) > 0, \tag{10}$$

est holomorphe dans tout le plan excepté un ensemble Σ *qui est un sous-*

ensemble parfait de l'ensemble

$$I(K_0, K) = \Omega_f(K_0) \cap \Omega_f(K). \text{[2]} \tag{11}$$

La fonction F peut aussi être définie par

$$F(z) = -\int_0^\infty \varphi(t) e^{-itz} dt, \quad I(z) < 0. \tag{12}$$

L'affirmation concernant φ est évidente. Il résulte alors du théorème de CARLEMAN cité et du lemme I que $\Sigma \subset I(K_0, K)$, la fonction F étant uniforme. Il nous reste à démontrer que l'ensemble Σ est parfait. Comme cet ensemble est fermé il faut démontrer qu'il ne contient pas de points isolés. Posons $M = \overline{\text{borne}}\, |\varphi(x)|$. Il résulte de (10) et (12) que pour $|y| > 0$:

$$|F(x+iy)| \leq \frac{M}{|y|}. \tag{13}$$

Supposons, contrairement à notre affirmation, qu'il existe un point isolé ξ de Σ. Il résulte alors de (13) que ξ est un pôle simple. Soit $l_0 > 0$ tel que l'intervalle $|x-\xi| \leq l_0$ ne contienne d'autres points de Σ que ξ, soit $0 < l < l_0$ et soit a le résidu de ξ. On a pour $\alpha > 0$:

$$\int_{\xi-l}^{\xi+l} \Delta\left(\frac{x-\xi}{l}\right) [F(x+i\alpha) - F(x-i\alpha)] dx = \int_{\xi-l}^{\xi+l} \Delta\left(\frac{x-\xi}{l}\right) dx \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) e^{-\alpha|t|} e^{-itx} dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) e^{-\alpha|t|} dt \int_{\xi-l}^{\xi+l} \Delta\left(\frac{x-\xi}{l}\right) e^{-itx} dx = l\sqrt{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha|t|} \varphi(t) e^{-it\xi} \delta(lt) dt.$$

Comme $\varphi(t)\delta(lt) \in L$, on peut écrire

$$\lim_{\alpha=0} \int_{\xi-l}^{\xi+l} \Delta\left(\frac{x-\xi}{l}\right) [F(x+i\alpha) - F(x-i\alpha)]\, dx = l\sqrt{2\pi} \int_{\infty}^{\infty} \varphi(t) e^{-i\xi t} \delta(lt) dt. \tag{14}$$

Mais, en écrivant $F(z) = a(z-\xi)^{-1} + G(z)$, on sait que $G(z)$ est holomorphe pour $|x-\xi| \leq l$ On a donc

$$l \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) e^{-i\xi t} \delta(lt) dt = \lim_{\alpha=0} \frac{-1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\xi-l}^{\xi+l} \Delta\left(\frac{x-\xi}{l}\right) \frac{2ai\alpha}{(x-\xi)^2 + \alpha^2} dx =$$

$$= -\frac{2ai}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = -\sqrt{2\pi}\, ai. \tag{15}$$

En tenant compte de de (8) et du fait que $\xi \in \Omega(K)$, c'est-à-dire

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(lu)\, e^{-i\xi t} K(t-u) dt = \delta(lu) e^{-i\xi u} g(\xi) = 0 \quad (g = S(K)),$$

[2]) C'est-à-dire que $I(K_0, K)$ est l'intersection des ensembles $\Omega_f(K_0)$ et $\Omega_f(K)$. Cet ensemble est donc fermé, partout non-dense.

on obtient:

$$(16)\qquad l\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)e^{-i\xi t}\delta(lt)\,dt = l\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi t}\delta(lt)\,dt\int_{-\infty}^{\infty} K(t-u)\varphi_0(u)\,du =$$

$$= l\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_0(u)\,du\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi t}\delta(lt)K(t-u)\,dt = l\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_0(u)\,du\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi t}[\delta(lt)-\delta(lu)]K(t-u)\,dt.$$

Il résulte alors de (15) et (16) que

$$\sqrt{2\pi}\,|a| \leqq Ml\int_{-\infty}^{\infty} du\int_{-\infty}^{\infty}|\delta(lt)-\delta(lu)|\,|K(t-u)|\,dt =$$

$$= M\int_{-\infty}^{\infty}|K(t)|\,dt\int_{-\infty}^{\infty}|\delta(y+lt)-\delta(y)|\,dy,\quad 0<l<l_0.$$

En faisant tendre l vers zéro, on obtient $a=0$, ce qui prouve que ξ n'appartient pas à Σ et notre théorème est démontré.

Comme un ensemble parfait dénombrable est vide, il résulte du théorème I que si (4) a lieu et si $I(K_0, K)$ est dénombrable, $F(z)$ est une fonction entière, et d'après (13) $F(z)\equiv 0$, c'est-à-dire $\varphi(x)\equiv 0$. On a ainsi le théorème suivant:

Théorème II. *Si $K_0 \in L$, $K \in L$, si* (4) *a lieu et si l'ensemble $I(K_0, K)$ défini par* (11) *est dénombrable, la fonction K appartient à $\pi(K_0)$. Donc chaque solution φ_0 de* (5) *est aussi une solution de* (6); (3) *est satisfait pour chaque $\varepsilon > 0$; et si pour une fonction $h \in B$ on a* (1) *on a aussi* (2) *(généralisation du théorème tauberien de Wiener).*

5. Le théorème précédent peut être généralisé de la manière suivante:

Théorème III. *Les conclusions du théorème* II *subsistent si, en conservant les autres hypothèses de ce théorème, l'hypothèse que $I(K_0, K)$ est dénombrable est remplacée par la suivante: Il existe un ensemble ouvert O contenant $\Omega(K_0)$, sauf peut-être un sous-ensemble dénombrable de $\Omega(K_0)$, et possédant les propriétés suivantes:*

a) *à tout point $\xi \in O$ on peut faire correspondre un $\alpha > 0$ tel que $g(u) = S(K)$ soit absolument continue sur $|u-\xi| \leqq \alpha$.*

b) *on a*

$$(17)\qquad \int_{\xi-\alpha}^{\xi+\alpha}|g'(u)|^2\,du < \infty$$

[de a) il résulte que $g'(u)$ existe p. p. dans $|u-\xi| \leqq \alpha$].

Les conditions a) et b) sont satisfaites si, par exemple, g est localement lipschitzienne d'ordre un, donc si $g'(u)$ est une fonction continue et, en particulier, si $xK(x) \in L$.

Pour la démonstration du théorème remarquons (nous conservons les notations de la démonstration du théorème II) que $F(z)$ est holomorphe en dehors de l'ensemble $\Omega(K_0)$ Nous démontrerons que cette fonction est aussi régulière en tout point de O, elle ne pourrait donc être singulière qu'en un ensemble dénombrable, et la conclusion du théorème III résultera, comme celle du théorème II, du théorème I.

Si donc ξ et α sont définis comme dans l'énoncé, définissons $\omega_\alpha(u)$ de la manière suivante: $\omega_\alpha(u) = 1$ pour $|u-\xi| \leq \alpha/2$, $\omega_\alpha(u) = 0$ pour $|u-\xi| \geq \alpha$, $\omega_\alpha(u)$ est linéaire pour $\alpha/2 \leq |u-\xi| \leq \alpha$. $\omega_\alpha(u)$ est la transformée de Fourier d'une fonction $P_\alpha(x)$ appartenant à L. Posons $g_\alpha(u) = g(u)\omega_\alpha(u)$. $g_\alpha(u)$ est la transformée de Fourier de la fonction

$$K_\alpha(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} K(t) P_\alpha(x-t)\,dt \tag{18}$$

Posons

$$\varphi_\alpha(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_0(t) K_\alpha(x-t)\,dt. \tag{19}$$

La fonction $g_\alpha(u)$ satisfait aussi aux conditions a) et b) et l'on a $g_\alpha(u) = 0$ pour $|u-\xi| \geq \alpha$. Désignons par Ω_α la partie de $\Omega(K_0)$ située dans $|u-\xi| \leq \alpha$ et soit $m(\Omega_\alpha)$ sa mesure. Quel que soit $\varepsilon > 0$, on peut couvrir Ω_α par un nombre fini, n, d'intervalles $[\alpha_i, \beta_i]$ $(i = 1, \ldots, n)$:

$$\xi - \alpha \leq \alpha_1 < \beta_1 < \alpha_2 \ldots < \alpha_i < \beta_i < \ldots \leq \xi + \alpha,$$

dont les extrémités appartiennent à Ω_α et tels que $\sum_1^n (\beta_i - \alpha_i) < m(\Omega_\alpha) + \varepsilon$. Posons $\beta_0 = \xi - \alpha$, $\alpha_{n+1} = \xi + \alpha$ et soit $g_{\alpha,\varepsilon}(u)$ la fonction définie de la manière suivante: $g_{\alpha,\varepsilon}(u) = 0$ pour $|u-\xi| \geq \alpha$, $g_{\alpha,\varepsilon}(u) = 0$ pour $\beta_i \leq u \leq \alpha_{i+1}$ $(i = 0, \ldots, n)$, $g_{\alpha,\varepsilon}(u) = g_\alpha(u)$ pour $\alpha_i \leq u \leq \beta_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. La fonction $g_{\alpha,\varepsilon}(u)$ possède une dérivée p p., égale à $g'_\alpha(u)$ p. p. dans les intervalles (α_i, β_i) et égale à zéro ailleurs. Comme, d'autre part, $g'_\alpha(u) = 0$ p. p. dans Ω_α, on voit que $g'_{\alpha,\varepsilon}(u) \neq 0$ seulement sur un ensemble E_ε dont la mesure ne dépasse pas ε. D'ailleurs $g_{\alpha,\varepsilon}(u)$ ne diffère, elle-même, de zéro que sur un ensemble de mesure non supérieure à ε. Cette fonction est la transformée de Fourier de la fonction

$$K_{\alpha,\varepsilon}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g_{\alpha,\varepsilon}(u) e^{iux}\,du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\xi-\alpha}^{\xi+\alpha} g_{\alpha,\varepsilon}(u) e^{iux}\,du. \tag{20}$$

En intégrant cette intégrale par parties on obtient (car $g_{\alpha,\varepsilon}(\xi \pm \alpha) = 0$):

$$K_{\alpha,\varepsilon}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,x} \int_{\xi-\alpha}^{\xi+\alpha} g'_{\alpha,\varepsilon}(u) e^{iux}\,dx.$$

Et, en utilisant l'inégalité de Schwartz et l'égalité de Parseval, on a

$$\int_1^\infty |K_{\alpha,\varepsilon}(x)|\,dx \leqq \left\{\frac{1}{2\pi}\int_1^\infty \frac{dx}{x^2}\right\}^{1/2} \left\{\int_1^\infty \left|\int_{\xi-\alpha}^{\xi+\alpha} g'_{\alpha,\varepsilon}(u)\,e^{iux}\,du\right|^2 dx\right\}^{1/2}$$

$$\leqq \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\left|\int_{\xi-\alpha}^{\xi+\alpha} g'_{\alpha,\varepsilon}(u)\,e^{iux}\,du\right|^2 dx\right\}^{1/2} = \left\{\int_{\xi-\alpha}^{\xi+\alpha}|g'_{\alpha,\varepsilon}(u)|^2du\right\}^{1/2} = \left\{\int_{E_\varepsilon}|g'_{\alpha}(u)|^2du\right\}^{1/2}.$$

La même inégalité est valable pour $\int_{-\infty}^{-1}|K_{\alpha,\varepsilon}(x)|\,dx$, et l'on a aussi $|K_{\alpha,\varepsilon}(x)|\leqq \varepsilon H$ où $H=(2\pi)^{-1/2}\underset{|u-\xi|\leqq\alpha}{\mathrm{Max}}|g(u)|$. Il en résulte que

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\infty}^{\infty}|K_{\alpha,\varepsilon}(x)|\,dx=0. \tag{21}$$

Or il résulte du théorème II et de la manière même dont la fonction $g_{\alpha,\varepsilon}(u)$ a été définie que

$$\varphi_\alpha(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_0(x-t)K_\alpha(t)\,dt=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_0(x-t)K_{\alpha,\varepsilon}(t)\,dt.$$

On voit donc d'après (21) que $\varphi_\alpha(x)\equiv 0$. Par conséquent, on peut écrire

$$F(z)=\int_{-\infty}^{0}(\varphi(t)-\varphi_\alpha(t))\,e^{-itz}\,dt$$

où

$$\varphi(x)-\varphi_\alpha(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_0(t)[K(x-t)-K_\alpha(x-t)]\,dt.$$

Comme la transformée de Fourier de $K(x)-K_\alpha(x)$ est nulle pour $|u-\xi|<\frac{\alpha}{2}$, on voit d'après le lemme I que la fonction $F(z)$ est holomorphe dans cet intervalle, d'où le résultat cherché.

6. Démontrons maintenant les lemmes suivants:

Lemme II. *Soit $K\in L$, et posons*

$$G(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-1}^{1}(1-u^2)^2e^{iux}\,du. \tag{22}$$

On a $G\in L$, $xG(x)\in L$ et, en posant pour $N>0$:

$$K_N(x)=N\int_{-\infty}^{\infty}K(t)\,G[N(x-t)]\,dt; \tag{23}$$

on a pour $\varphi_1\in B$:

$$\lim_{N=\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_1(x)K_N(x)\,dx=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_1(x)K(x)\,dx.$$

Lemme III. *Soit $P>0$. Il existe une constante C (ne dépendant que de P et K) telle que, quelle que soit la fonction positive mesurable $A(x)$ avec $A(x)\leq|x|/T$, où $T>P$, $A(x)\leq 1$ $(-\infty<x<\infty)$, on ait:*

$$\int_{-\infty}^{\infty}|K_N(x)|\,A(x)\,dx\leq\frac{C}{T}\int_0^T dx\left(\int_x^{\infty}|K(u)|\,du+\int_{-\infty}^{-x}|K(u)|\,du\right). \tag{24}$$

La démonstration du lemme II est immédiate; quant au lemme III, on a, en désignant le premier membre de (24) par B_n,

$$B_n\leq N\int_{-\infty}^{\infty}|K(u)|\int_{\infty}A(x)|G[N(x-u)]|\,dx\,du\leq C_1\left(\int_{-\infty}^{-T}|K|\,du+\int_T^{\infty}|K|\,du\right)+$$

$$+\frac{C_2N}{T}\int_{-T}^{T}|K(u)|\int_{-\infty}^{\infty}|G[N(x-u)]x|\,dx\,du\leq C_1\left(\int_{-\infty}^{-T}|K|\,du+\int_T^{\infty}|K|\,du\right)+$$

$$+\frac{C_3}{T}\int_{-T}^{T}|K(u)u|\,du+\frac{C_4}{T}\int_{-T}^{T}|K(u)|\,du\leq C\left(\int_{-\infty}^{-T}+\int_T^{\infty}|K|\,du+\frac{1}{T}\int_{-T}^{T}|K(u),u|\,du\right).$$

Il suffit d'intégrer par parties la dernière intégrale dans le dernier membre pour avoir le résultat cherché.

7. E étant un ensemble situé sur la droite et I étant un intervalle, partageons I en n parties égales, et désignons par $\mu_n(E,I)$ la longueur totale de ceux de ces intervalles qui contiennent des points de $E\cap I$. Quel que soit $\alpha<1$, il existe un ensemble parfait E tel que pour tout I, $\underline{\lim}_{n=\infty}\mu_n(E,I)n^{\alpha}=0$. Ainsi l'ensemble composé de tous les points $x=\sum_{\nu=1}^{\infty}c_\nu/q^\nu$ où $q\geq 3$ est un entier, et où les c_ν prennent de toutes les manières possibles, k valeurs entières positives: $\alpha_1<\alpha_2\ldots<\alpha_k<q$, est un ensemble parfait avec $\mu_{q^m}(E,I)=$ $=\left(\frac{k}{q}\right)^m=(q^m)^{\frac{\log k}{\log q}-1}$ pour tout intervalle I contenant $[0,1]$; autrement dit on a $\underline{\lim}\,\mu_n(E,I)n^{\alpha}=0$ pour tout $\alpha<1-\log k/\log q$. L'exemple de CANTOR correspond au cas $q=3$, $k=2$.

Théorème IV. *Soient $K_0\in L$, $K\in L$. Supposons que la condition* (4) *est satisfaite. Désignons par I_N l'intervalle $|x|\leq N$, et posons $\mu_n^{(N)}=\mu_n(I(K_0,K),I_N)$. Si pour chaque $N>0$ on a*

$$\underline{\lim}_{n=\infty}\,\mu_n^{(N)}\int_0^n dx\left(\int_x^{\infty}|K(u)|\,du+\int_{-\infty}^{-x}|K(u)|\,du\right)=0 \tag{25}$$

les conclusions du théorème II *subsistent.*

Ainsi, si $\underline{\lim}_{n=\infty}\mu_n^{(N)}n^{\alpha}=0$, il suffit que $\int_{-\infty}^{-x}+\int_x^{\infty}|K(u)|du=O(x^{\beta})$ $(0<x\to\infty)$ avec $\beta\leq\alpha-1$ pour que (25) soit satisfait.

Soit, pour $N>0$, K_N la fonction définie par (23) et posons $E_N = I(K_0, K) \cap I_N$. On a $E_N = I(K_0, K_N)$. Partageons I_N en n parties égales, désignons par $J_n^{(N)}$ l'ensemble de ces intervalles partiels qui contiennent des points de E_N, et soient $u_1 < u_2 < \ldots u_q$ les abscisses des extrémités et des milieux des intervalles de $J_n^{(N)}$. Soit p_n le nombre d'intervalles de $J_n^{(N)}$. Il est clair que $q \leqq 3p_n$.

Posons

$$\Delta_{n,N}(u) = \sum_{j=1}^{q} \Delta\left[\frac{n}{N}(u-u_j)\right],$$

la fonction Δ étant définie comme dans le n° 3. Il est clair que $\Delta_{n,N}(u) = 1$ pour u appartenant à un intervalle de $J_n^{(N)}$, $\Delta_{n,N}(u) = 0$ lorsque u est à une distance non inférieure à N/n d'un tel intervalle, et $\Delta_{n,N}(u)$ est une fonction linéaire ailleurs. Soit $g_N(u)$ la transformée de Fourier de K_N, et posons

$$G_{n,N}(u) = g_N(u)\Delta_{n,N}(u) = \sum_{j=1}^{q} \left\{ \Delta\left[\frac{n}{N}(u-u_j)\right]\left[g_N(u) - g_N(u_j)\right] + \right.$$
$$\left. + \Delta\left[\frac{n}{N}(u-u_j)\right] g_N(u_j) \right\}.$$

Or le premier membre de l'accolade est la transformée de Fourier de

$$Q_{N,n,j}(x) = \frac{N}{n\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} K_N(x-y)\, e^{iu_j y}\, \delta\left(\frac{Ny}{n}\right) dy - \frac{N}{n} g_N(u_j)\, e^{iu_j x}\, \delta\left(\frac{Nx}{n}\right) =$$
$$= \frac{N}{n\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{iu_j(x-y)} \left[\delta\left(\frac{N}{n}(x-y)\right) - \delta\left(\frac{N}{n}x\right)\right] K_N(y)\, dy, \tag{26}$$

et le second membre de cette accolade est la transformée de Fourier de

$$R_{N,n,j}(x) = \frac{N}{n} g_N(u_j)\, e^{iu_j x}\, \delta\left(\frac{N}{n}x\right). \tag{27}$$

Mais, d'après la définition de u_j, il existe un point u'_j tel que $|u'_j - u_j| \leqq \frac{2N}{n}$ avec $g_N(u'_j) = 0$. Par conséquent:

$$|g_N(u_j)| = |g_N(u_j) - g_N(u'_j)| \leqq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |K_N(x)(e^{-iu_j x} - e^{-iu'_j x})| dx$$

Comme $|e^{-iu_j x} - e^{-iu'_j x}| \leqq |(u_j - u'_j)x| \leqq \frac{2N}{n}|x|$ et $|e^{-iu_j x} - e^{-iu'_j x}| \leqq 2$ on voit, d'après le lemme III, avec $A(x) = |e^{-iu_j x} - e^{-iu'_j x}|/2(N+1)$, $T = n$ que $|g_N(u_j)| \leqq CB(n)$, où l'on a posé

$$B(T) = \frac{1}{T} \int_0^T dx \left(\int_x^{\infty} |K(u)| du + \int_{-\infty}^{-x} |K(u)| du \right).$$

Il résulte donc de (27) que

$$\int_{-\infty}^{\infty} |R_{N,n,j}(x)|\,dx \leq C_2 B(n). \tag{28}$$

Il résulte aussi de (26) et du lemme III avec $A(x) = \alpha \int_{-\infty}^{\infty} \left|\delta\left(y - \frac{N}{n}x\right) - \delta(y)\right| dy$,

où α est une constante convenablement choisie, que

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} |Q_{N,n,j}(x)|\,dx &\leq \frac{N}{n\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |K_N(x)| \int_{-\infty}^{\infty} \left|\delta\left[\frac{N}{n}(y-x)\right] - \delta\left(\frac{N}{n}y\right)\right| dy\,dx = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |K_N(x)| \int_{-\infty}^{\infty} \left|\delta\left(y - \frac{N}{n}x\right) - \delta(y)\right| dy\,dx \leq C_3 B(n).\end{aligned} \tag{29}$$

Ainsi $G_{N,n}(u)$ est la transformée de Fourier d'une fonction $K_{N,n}(x)$ telle que

$$\int_{-\infty}^{\infty} |K_{N,n}(x)|\,dx \leq C_4 q_n B(n) \leq C_5 p_n B(n) = C_5 \mu_n^{(\lambda)} \int_0^n dx \left(\int_{-\infty}^{-x} |K|\,du + \int_x^{\infty} |K|\,du\right).$$

Il résulte donc de nos hypothèses que

$$\lim_{n=\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |K_{N,n}(x)|\,dx = 0. \tag{30}$$

La fonction $G^*_{N,n}(u) = g_N(u) - G_{N,n}(u)$ (où $g_N(u) = S(K_N)$) s'annule dans un ensemble d'intervalles qui, dans leur réunion, contiennent $I(K_0, K_N)$. Si $K^*_{N,n}(x)$ désigne la fonction dont $G^*_{N,n}$ est la transformée de Fourier, l'ensemble $I(K_0, K^*_{N,n})$ ne contient que des points isolés, et d'après le théorème II

$$\int_{-\infty}^{\infty} K^*_{N,n}(y-x)\varphi_0(x)\,dx = 0.$$

La relation (30) fournit alors

$$\int_{-\infty}^{\infty} K_N(y-x)\varphi_0(x)\,dx = 0,$$

et le lemme II permet alors d'écrire

$$\int_{-\infty}^{\infty} K(y-x)\varphi_0(x)\,dx = 0.$$

(Reçu le 24 septembre 1949)