Sur les zéros des polynomes associés à un polynome.

Par PAUL MONTEL à Paris.

1. Etant donnés deux polynomes à coefficients réels $P(z)$ et $Q(z)$, on peut leur faire correspondre le polynome à coefficients complexes

$$\pi(z) = P(z) + iQ(z).$$

Inversement, étant donné un polynome $\pi(z)$ à coefficients complexes, on peut le représenter d'une manière unique sous la forme précédente. Nous dirons que les polynomes $P(z)$ et $Q(z)$ sont les polynomes associés au polynome $\pi(z)$ et nous appellerons faisceau associé à $\pi(z)$, le faisceau des polynomes $P(z) + \lambda Q(z)$, λ désignant un nombre réel.

Nous nous proposons d'examiner la nature des liens qui unissent les zéros de $\pi(z)$ à ceux de ses associés. Certains sont déjà connus; par exemple, un théorème de M. FUJIWARA montre que si tous les zéros de $\pi(z)$ sont situés dans le demi-plan $\Im z > 0$, ou dans le demi-plan $\Im z < 0$, les zéros de $P(z)$ et de $Q(z)$ sont réels, distincts et entrelacés; et réciproquement[1]).

2. Nous dirons qu'un zéro est supérieur ou inférieur suivant que sa partie imaginaire est positive ou négative. Supposons que le polynome $\pi(z)$, de degré n, admette p zéros supérieurs et $q = n - p$ zéros inférieurs. Nous pouvons toujours supposer $p \geqq q$ en remplaçant au besoin $Q(z)$ par $-Q(z)$. Soit ζ, un point du demi-plan supérieur $\Im z > 0$. Je dis que le nombre des zéros supérieurs de $P(z) + \zeta Q(z)$ est invariable et donc toujours égal à p. En effet, les zéros de ce polynome varient d'une manière continue avec ζ; l'un d'eux ne peut passer du plan supérieur au plan inférieur qu'en traversant l'axe des quantités réelles. Il y aurait donc un nombre réel x qui serait racine d'une équation de la forme

$$P(z) + \zeta Q(z) = 0,$$

ζ désignant un nombre complexe, ce qui est impossible. Donc, lorsque le point ζ se déplace dans le demi-plan supérieur en décrivant une courbe

---

[1]) M. FUJIWARA, Einige Bemerkungen über die elementare Theorie der algebraischen Gleichungen, *Tôhoku Math. Journal,* **9** (1916), p. 102—108.

continue qui ne rencontre pas l'axe réel, le nombre des zéros supérieurs de $P(z)+\zeta Q(z)$ est constant et égal à p.

Supposons maintenant que le point ζ décrive le segment de droite qui unit le point i à un point de l'axe réel d'abscisse λ. Tous les zéros varient d'une manière continue avec ζ et, lorsque ζ est venu en λ, les zéros sont devenus réels ou imaginaires conjugués. Comme le nombre des zéros inférieurs est toujours égal à q, il ne peut y avoir que q couples de zéros imaginaires conjugués au plus: il y a donc au moins $p-q$ zéros réels. Je dis que ces points sont distincts. En effet, s'il n'y avait pas $p-q$ zéros réels et distincts, il y aurait $p-q-2$ points réels distincts au plus, un point réel zéro double et q couples de zéros imaginaires conjugués. Faisons varier λ infiniment peu; le zéro double donne deux zéros simples, nécessairement réels quisqu'il ne peut y avoir plus de q couples de zéros imaginaires conjugués. Mais cela est impossible car, le zéro double correspond à un point simple de la courbe $P(x)+yQ(x)=0$, puisque cette courbe, supposée indécomposable, n'a aucun point multiple à distance finie. Or, en un point simple, les zéros voisins ne peuvent rester réels pour toutes les valeurs voisines de y. Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant:

Si un polynome admet p zéros supérieurs et q zéros inférieurs $(p>q)$ *chacun des polynomes du faisceau associé admet au moins* $p-q$ *zéros réels et distincts.*

Le nombre $p-q=r$ sera appelé l'indice du faisceau ou de le fraction rationnelle $P/Q=R$.

Pour $q=0$, on voit que $P(z)+\lambda Q(z)$ a tous ses zéros réels et distincts quel que soit λ, d'où l'on déduit aussitôt que les zéros de deux de ces polynomes sont entrelacés: c'est le théorème de M. FUJIWARA[2]).

3. Comment distinguer si un zéro réel de $P(z)+\lambda Q(z)$ vient du demi-plan supérieur ou du demi-plan inférieur lorsque le point ζ, situé dans le demi-plan supérieur, vient se placer en λ?

On peut, sans modifier les raisonnements et les résultats, remplacer $P(z)$ et $Q(z)$ par deux autres polynomes du faisceau: prenons par exemple

$$P_1(z)=P(z)+\lambda Q(z),\ \ Q_1(z)=P(z)+\mu Q(z),$$

avec $\lambda>\mu$. On voit que

$$\pi_1(z)=P(z)+iQ(z)=(1+i)\left[P(z)+\frac{\lambda+i\mu}{1+i}Q(z)\right]=(1+i)\,[P(z)+\zeta Q(z)],$$

ζ étant représenté par un point du demi-plan supérieur. Donc $\pi(z)$ et $\pi_1(z)$ ont les mêmes propriétés.

Soit donc α, un zéro réel de $P(z)+\lambda Q(z)$; nous pouvons supposer

---

[2]) Voir aussi P. MONTEL, Sur les fractions rationnelles à termes entrelacés, *Mathematica,* **5** (1931), p. 110–129.

que c'est un zéro de $Q(z)$ en changeant au besoin de polynomes de base; nous pouvons aussi supposer que $\alpha=0$, en remplaçant au besoin x par $x+\alpha$. On a

$$P(z)=P(0)+zP'(0)+\ldots,\quad Q(z)=zQ'(0)+\ldots,$$

avec $P(0)\,Q'(0)\neq 0$. Lorsque $\frac{1}{\zeta}$ est voisin de 0, l'équation

$$\frac{1}{\zeta}P(z)+Q(z)=\frac{P(0)}{\zeta}+zQ'(0)+\ldots=0$$

a une racine voisine de 0, dont la valeur principale est

$$-\frac{1}{\zeta}\frac{P(0)}{Q'(0)}=-\frac{A}{\zeta},$$

A désignant le résidu de la fraction $\frac{P}{Q}$ pour le pôle 0. Donc: un zéro simple réel vient du demi-plan supérieur ou du demi-plan inférieur suivant que le résidu correspondant est positif ou négatif.

Si 0 est un zéro multiple, d'ordre m, on aura $Q(z)=z^m\frac{Q^{(m)}(0)}{m!}+\ldots$. L'équation s'écrit

$$\frac{P(0)}{\zeta}+z^m\frac{Q^{(m)}(0)}{m!}+\ldots=0;$$

on voit qu'il existe m racines voisines de zéro et qu'il y a toujours des zéros supérieurs et des zéros inférieurs. C'est pourquoi les r zéros réels sont distincts et, lorsque $q=0$, tous les zéros sont distincts.

4. Supposons maintenant que, le point ζ venant du demi-plan supérieur en un point λ de l'axe réel, le polynome $P(z)+\lambda Q(z)$ admette $\varrho>r$ zéros réels. Les $\varrho-r$ zéros réels autres que les r provenant de zéros supérieurs de $P(z)+\zeta Q(z)$, proviennent de $\frac{1}{2}(\varrho-r)$ zéros supérieurs et de $\frac{1}{2}(\varrho-r)$ zéros inférieurs qui sont venus se placer sur l'axe réel, car il doit toujours rester un nombre égal de zéros imaginaires dans les deux demi-plans puisque les $n-\varrho$ zéros non réels sont deux à deux conjugués.

Voyons comment se présente dans les différents cas la décomposition en éléments simples de la fraction $R(z)$.

Si $q=0$, les n zéros réels et distincts de $Q(z)=0$ proviennent de zéros supérieurs, on a donc

$$R=A_0+\sum_{i=1}^{n}\frac{A_i}{z-\alpha_i},\qquad(\alpha_1<\alpha_2<\ldots<\alpha_n).$$

Tous les A_i $(i=1,2,\ldots,n)$ sont positifs. D'ailleurs, lorsque λ croît en restant réel, chaque zéro de $P+\lambda Q$ varie dans le même sens, sinon un même zéro correspondrait à deux valeurs différentes de λ, ce qui est impossible. Comme, dans le voisinage de α_i, $z-\alpha_i$ est comparable à $-A_i/\lambda$, si on fait croître λ à partir de $-\infty$, $z-\alpha_i$ est positif et z croît de α_i à α_{i+1} lorsque λ varie de

$-\infty$ à $+\infty$. Donc, chaque polynome a un zéro et un seul dans l'intervalle (α_i, α_{i+1}); les deux segments $(-\infty, \alpha_1)$ et $(\alpha_n, +\infty)$ sont considérés comme formant un intervalle unique. Pour deux valeurs de λ, les zéros des deux polynomes du faisceau sont entrelacés.

Réciproquement, supposons que les zéros de $P+\lambda Q$ soient toujours réels et distincts. Le développement de $R(z)$ en élements simples a la forme précédente et tous les A_i ont le même signe. Si, en effet, deux résidus A_k et A_{k+1} étaient de signes différents, $R'(z)$ s'annulerait pour une valeur β comprise entre α_k et α_{k+1}; on aurait

$$\frac{P(\beta)}{Q(\beta)} = \frac{P'(\beta)}{Q'(\beta)} = -\lambda$$

et β serait un zéro double de $P(z)+\lambda Q(z)$, ce qui est contre l'hypothèse. Donc P et Q ont leurs zéros réels, distincts et entrelacés. Ce résultat est dû à M. KAKEYA[3]).

Dans le cas où le polynome $\pi(z)$ ne dépend que de z^s, on peut remplacer le demi-plan par un secteur limité par deux demi-droites faisant entre elles un angle de π/s. On obtient des résultats semblables aux précédents, les rayons d'une étoile de sommet origine et d'ouverture π/s se substituant à l'axe réel.

5. Examinons encore le cas où $q=1$, $p=n-1$. Si le point ζ décrit le segment qui joint le point i au point λ de l'axe réel, deux racines au plus restent imaginaires conjuguées. Il y a donc, pour $P(z)+\lambda Q(z)$, $n-2$ zéros réels et distincts et n zéros réels au plus. Dans le cas où il n'y a, quel que soit λ, que $n-2$ zéros réels, $R(z)$ s'écrit

$$R(z) = A_0 + \sum_{i=1}^{n-2} \frac{A_i}{z-\alpha_i} + I(z).$$

Si, pour une valeur de λ, il y a n zéros réels, on peut les supposer distincts en faisant au besoin varier légèrement λ; on peut supposer aussi, en faisant au besoin un changement de paramètre, que cela arrive pour $Q(z)$. Alors $R(z)$ prend la forme

$$R(z) = A_0 + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{A_i}{z-\alpha_i} - \frac{A'_{n-1}}{z-\alpha'_{n-1}}.$$

Dans le premier cas, $I(z)$ désigne l'élément simple correspondant aux zéros conjugués. Tous les A_i sont positifs puisque tous les α_i viennent du demi-plan supérieur.

Dans le second cas, tous les A_i et A'_{n-1} sont positifs puisque α'_{n-1} seul vient du demi-plan inférieur. On verrait comme précédemment que $R'(z)$ s'annule pour au moins une valeur réelle et que, par conséquent, $R(z)+\lambda$

[3]) Cf. M. FUJIWARA, loc. cit.

ne peut, quel que soit λ, avoir n zéros réels et distincts. D'ailleurs nous savons bien que, dans ce cas, $-A'_{n-1}$ doit être positif.

Les deux cas précédents peuvent se présenter. Le premier, par exemple, pour $\pi(z)=iz^3+z^2+(1+i)z+1$ et le second pour $\pi(z)=iz^3+z^2+(1-i)z-1$.

Dans le cas général, lorsque p et q sont fixés, nous pourrons avoir pour $R(z)$ les $q+1$ représentations suivantes. Nous supposons que l'on a pris pour $Q(z)$ l'un des polynomes du faisceau $P(z)+\lambda Q(z)$ qui a le plus de zéros réels et distincts. Nous désignons toujours par r la différence $p-q=n-2q$. Tous les numérateurs des fractions simples sont positifs; les expressions I_k désignent des fractions rationnelles admettant $2k$ pôles imaginaires conjugués et nulles à l'infini.

$$R(z)=A_0+\sum_{i=1}^{r}\frac{A_i}{z-\alpha_i}+I_q,$$

. . . .

$$R(z)=A_0+\sum_{i=1}^{r+h}\frac{A_i}{z-\alpha_i}-\sum_{j=r+1}^{r+h}\frac{A'_j}{z-\alpha'_j}+I_{q-h},$$

. . . .

$$R(z)=A_0+\sum_{i=1}^{r+q}\frac{A_i}{z-\alpha_i}-\sum_{j=r+1}^{r+q}\frac{A'_j}{z-\alpha'_j}.$$

Cette classification n'est pas purement théorique. On peut construire des exemples correspondant à chacune des représentations. En effet, les α_i et α'_j étant choisis arbitrairement, on peut les placer de manière que les résidus aient le signe que l'on veut; en remplaçant ensuite I_k par εI_k, on peut prendre ε assez petit pour que le fraction R se comporte comme pour I_k identiquement nul puisque cette fraction I_k a un module borné quel que soit z réel.

6. On remarquera que le seul cas où le nombre des zéros réels de $P(z)+\lambda Q(z)$ demeure invariable quelle que soit la valeur réelle de λ, est celui où le nombre de ces zéros est égal à r. On peut donc énoncer le théorème suivant:

Si le polynome $P(z)+\lambda Q(z)$ admet, quel que soit λ réel, $n-2k$ zéros réels, la fraction rationnelle $\dfrac{P}{Q}=R(z)$ est décomposable sous la forme

$$R(z)=A_0+\sum_{i=1}^{k}\frac{A_i}{z-\alpha_k}+I_k,$$

les A_i étant de même signe. Les zéros sont donc distincts et le polynome $\pi(z)=P+iQ$ a k zéros inférieurs et $n-k$ zéros supérieurs.

Pour $k=0$, on retrouve le théorème de M. Kakeya.

Si le nombre des zéros réels des polynomes du faisceau varie entre $n-2k$ et $n-2k'$ $(k'<k)$, la fraction R peut admettre plusieurs représentations

correspondant à des valeurs de q prises entre k et $\frac{n}{2}$. Si $n=2h$ ou $n=2h+1$, le nombre de ces représentations est égal à $h-k+1$.

7. Soient $P+iQ$, de degré n, admettant p zéros supérieurs et q zéros inférieurs et $\frac{P}{Q}=R$; P_1+iQ_1, de degré n_1, admettant p_1 zéros supérieurs et q_1 zéros inférieurs et $\frac{P_1}{Q_1}=S$. Formons la fraction composée $R[S(z)]$ qui est de degré nn_1. Posons $S(z)=\zeta$; l'équation

$$(1) \qquad R[S(z)]+\lambda+i\mu=0 \ (\mu>0) \quad \text{ou} \quad R(\zeta)+\lambda+i\mu=0$$

admet p zéros supérieurs $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_p$ et q zéros inférieurs $\zeta'_1, \zeta'_2, \ldots, \zeta'_q$. L'équation $S(z)-\zeta_i=0$ admet q_1 zéros supérieurs et p_1 inférieurs; au total, pq_1 supérieurs et pp_1 inférieurs. L'équation $S(z)-\zeta'_j=0$ admet p_1 zéros supérieurs et q_1 inférieurs; au total, p_1q supérieurs et q_1q inférieurs. Finalement, l'équation (1) a pp_1+qq_1 zéros inférieurs et pq_1+qp_1 supérieurs. Les nombres p' et q' relatifs à $R[S(z)]$ sont

$$p'=pq_1+qp_1, \quad q'=pp_1+qq_1, \quad \text{d'où } p'-q'=(p-q)(q_1-p_1) \text{ et } r'=rr_1,$$

Ainsi: *l'indice d'une fraction composée est le produit des indices des fractions composantes.* Le résultat est vrai quel que soit le nombre des fractions composantes. On peut remarquer que ce résultat est indépendant de l'ordre des compositions.

(Reçu le 17 septembre 1949)