Solution de l'équation $\omega^{\xi} = \xi^{\omega}$ pour les nombres ordinaux.

Par WACLAW SIERPIŃSKI à Varsovie.

On sait qu'il n'existe qu'un seul système α, β de nombres ordinaux finis α et $\beta > \alpha$, tels que $\alpha^{\beta} = \beta^{\alpha}$ (à savoir $\alpha = 2$, $\beta = 4$). Or, il est intéressant qu'il existe une infinité de systèmes α, β de nombres ordinaux transfinis, tels que $\alpha < \beta$ et $\alpha^{\beta} = \beta^{\alpha}$, même tels où $\alpha = \omega$. Le but de cette note est de les trouver tous. En d'autres termes, nous nous proposons de trouver tous les nombres ordinaux $\xi > \omega$ satisfaisant à l'équation

(1) $$\omega^{\xi} = \xi^{\omega}.$$

Il est à remarquer que l'équation (1) n'a pas de solutions en nombres ordinaux $\xi < \omega$ En effet, le nombre $\xi = 1$ ne satisfait pas évidemment à l'équation (1). Donc, si $\xi < \omega$ et $\omega^{\xi} = \xi^{\omega}$, on a $\xi = n$, où n est un nombre naturel > 1, et alors on a, comme on sait $n^{\omega} = \omega$, d'où $\omega^{n} \geqq \omega^{2} > \omega = n^{\omega}$, donc, vu que $n = \xi$, $\omega^{\xi} > \xi^{\omega}$, ce qui implique une contradiction.

Soit $\xi > \omega$ une solution de l'équation (1). Soit $\xi = \omega^{\alpha} a + \omega^{\beta} b + \ldots$ le développement normal du nombre ξ. Vu que $\xi > \omega$, on a ici $\alpha \geqq 1$ et $\xi < \omega^{\alpha+1}$, d'où $\xi^{\omega} \leqq \omega^{(\alpha+1)\omega} = \omega^{\alpha\omega}$ (puisque, quel que soit le nombre ordinal α, on a $(\alpha + 1)\omega = \alpha\omega$). D'autre part, comme $\xi \geqq \omega^{\alpha}$ (vu que a est un nombre naturel), on a $\xi^{\omega} \geqq \omega^{\alpha\omega}$. On a ainsi $\xi^{\omega} = \omega^{\alpha\omega}$ et, d'après (1), on trouve $\omega^{\xi} = \omega^{\alpha\omega}$, ce qui donne $\xi = \alpha\omega$. Comme $\xi > \omega$, il en résulte que $\alpha \geqq \omega$ (puisque, pour α naturels, on a $\alpha\omega = \omega < \xi$).

Soit $\alpha = \omega^{\gamma} l + \ldots$ le développement normal du nombre α; vu que $\alpha \geqq \omega$, on a ici $\gamma \geqq 1$ et $\xi = \alpha\omega = \omega^{\gamma+1}$. Or, comme $\xi = \omega^{\alpha} a + \ldots$ (le développement normal d'un nombre ordinal étant unique), on trouve $\alpha = \gamma + 1$, d'où $\alpha\omega = (\gamma + 1)\omega = \gamma\omega$ et, comme $\alpha\omega = \omega^{\gamma+1}$, on trouve $\gamma\omega = \omega^{\gamma+1}$. Si $\gamma = \omega^{\mu} m + \ldots$ est le développement normal du nombre γ, on a $\gamma\omega = \omega^{\mu+1}$, donc, vu que $\gamma\omega = \omega^{\gamma+1}$, on trouve $\omega^{\gamma+1} = \omega^{\mu+1}$, d'où $\gamma + 1 = \mu + 1$ et $\gamma = \mu$. D'après $\gamma = \omega^{\mu} m + \ldots$ on trouve donc $\gamma \geqq \omega^{\mu} = \omega^{\gamma}$ et, comme $\omega^{\gamma} \geqq \gamma$, on trouve $\omega^{\gamma} = \gamma$. Ainsi γ est un nombre epsilonien. Or, $\xi = \alpha\omega = \gamma\omega$.

Chaque solution $\xi > \omega$ de l'équation (1) est donc de la forme $\xi = \varepsilon\omega$, où ε est un nombre epsilonien. D'autre part, soit ε un nombre epsilonien quelconque. On a donc $\varepsilon = \omega^\varepsilon$ et, pour $\xi = \varepsilon\omega$ on trouve

$$\xi^\omega = (\varepsilon\omega)^\omega = (\omega^\varepsilon . \omega)^\omega = \omega^{(\varepsilon+1)\omega} = \omega^{\varepsilon\omega} = \omega^\xi,$$

et le nombre ξ satisfait à l'équation (1).

Nous avons ainsi démontré le

Théorème. *Pour qu'un nombre ordinal $\xi \neq \omega$ satisfasse à l'équation (1), il faut et il suffit qu'il soit de la forme $\xi = \varepsilon\omega$, où ε est un nombre epsilonien.*

Or, il est à remarquer que, quel que soit le nombre ordinal transfini α de seconde espèce, il existe un nombre ordinal $\xi > \alpha$, tel que

(2) $$\alpha^\xi = \xi^\alpha.$$

En effet, soit ε un nombre epsilonien $> \alpha$ et posons $\xi = \varepsilon\alpha$. Vu que $\alpha \geqq \omega$, nous aurons $\xi = \varepsilon\alpha > \varepsilon > \alpha$, d'où $\xi > \alpha$. Or, comme $\alpha < \varepsilon$, on a $\alpha^\varepsilon = \varepsilon$, d'où

$$\xi^\alpha = (\varepsilon\alpha)^\alpha = (\alpha^\varepsilon . \alpha)^\alpha = \alpha^{(\varepsilon+1)\alpha} = \alpha^{\varepsilon\alpha} = \alpha^\xi$$

(puisque, α étant un nombre de seconde espèce, on a $(\varepsilon+1)\alpha = \varepsilon\alpha$).

Le nombre ξ satisfait donc à l'équation (2).

Remarque. On définit les nombres epsiloniens comme nombres ordinaux ε satisfaisant à l'équation $\omega^\varepsilon = \varepsilon$. Or, on les pourrait définir aussi comme nombres ordinaux $\xi > \omega$ satisfaisant à l'équation

(3) $$2^\xi = \xi.$$

En effet, d'une part, si ε est un nombre ordinal tel que $\omega^\varepsilon = \varepsilon$, on a $\varepsilon \leq 2^\varepsilon \leq \omega^\varepsilon$, donc $2^\varepsilon = \varepsilon$. D'autre part, si $2^\xi = \xi$ et $\xi > \omega$, on a $\xi = \omega + \varrho$, où $\varrho \geqq 1$. Comme $2^\xi = \xi$, on trouve $\xi = 2^{2^\xi} = 2^{2^{\omega+\varrho}} = 2^{\omega . 2^\varrho} = \omega^{2^\varrho} \geqq \omega^2$, d'où $\omega + \xi = \xi = \omega + \varrho$, ce qui donne $\xi = \varrho$, donc, d'aprés (3) : $\xi = \omega^{2^\varrho} = \omega^{2^\xi}$, d'où $\xi = \omega^\xi$, ce qui prouve que ξ est un nombre epsilonien.

Quant à l'équation (3), outre les nombres epsiloniens, elle a encore la solution $\xi = \omega$.

(Reçu le 30 mai 1949)