Die Grenzschichte in der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen.

Von R. v. MISES in Cambridge, Mass.

Die Erscheinung der sogenannten „Grenzschichte“, die in verschiedenen Gebieten der klassischen Physik (Hydromechanik, Elastizität) eine Rolle spielt, beruht in letzter Linie auf einem mathematischen Tatbestand, der sich in seiner einfachsten Form in der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen aufweisen läßt. Vorgelegt sei die Randwertaufgabe zweiter Ordnung

$$A(x,y)\,y'' + B(x,y)\,y' + C(x,y) = 0 \tag{a}$$

$$y(x_1) = y_1, \quad y(x_2) = y_2. \tag{b}$$

Man interessiert sich für das Verhalten der Lösung in dem Falle, daß der Faktor $A(x, y)$ im ganzen Bereich gleichmäßig gegen Null geht. Mit $A = 0$ wird (a) eine Gleichung erster Ordnung und hat im allgemeinen keine Lösung, die beide Bedingungen (b) befriedigt, wohl aber zwei verschiedene Lösungen $u(x)$ und $v(x)$ von denen jede eine der beiden Bedingungen erfüllt. Es stellt sich heraus, daß unter gewissen Voraussetzungen die Lösung $y(x)$ von (a), (b) im ganzen Bereich *mit Ausnahme eines schmalen Grenzstreifens* gegen $u(x)$ oder $v(x)$ konvergiert (je nach dem Vorzeichen von A) während der Übergang zur Erfüllung der anderen Randbedingung quasi sprungartig in der Grenzzone erfolgt.

Zur Illustration kann das Beispiel $B = C = 1$, $A = \nu = \text{const.}$ dienen. Hier läßt sich die Lösung von (a), (b) in zwei Formen anschreiben:

$$\begin{aligned} y(x) &= y_2 + x_2 - x + (y_2 + x_2 - y_1 - x_1)\,\frac{e^{(x_1-x)/\nu} - e^{(x_1-x_2)/\nu}}{e^{(x_1-x_2)/\nu} - 1} = \\ &= y_1 + x_1 - x - (y_2 + x_2 - y_1 - x_1)\,\frac{e^{(x_2-x)/\nu} - e^{(x_2-x_1)/\nu}}{e^{(x_2-x_1)/\nu} - 1}. \end{aligned}$$

Wenn ν durch positive Werte gegen Null geht, wird der Bruch im ersten Ausdruck für $x - x_1 \geqq \varepsilon > 0$ gleich 0 und $y(x)$ gleich $y_2 + x_2 - x$. Nähert sich jedoch ν der Null von links, so hat der zweite Bruch den Grenzwert 0, sobald $x_2 - x \geqq \varepsilon > 0$, und dann $y(x) = y_1 + x_1 - x$.

Im folgenden wird das Auftreten der Grenzschicht unter der wesentlichen Annahme, daß A/B constantes Zeichen hat, bewiesen. Ein Zeichenwechsel von A/B verändert die Verhältnisse völlig.

1. Behauptungen.

Wir betrachten einen rechteckigen Bereich

(1) $$R: \; x_1 \leqq x \leqq x_2, \; b_1 \leqq y \leqq b_2, \; x_2 - x_1 = L, \; b_2 - b_1 = M.$$

Sei $P_1(x_1, y_1)$ ein Punkt der linken und $P_2(x_2, y_2)$ ein Punkt der rechten Begrenzung von R. Die Funktionen $f(x, y)$ und $g(x, y)$ seien stetig und beschränkt in R, überdies sei g positiv:

(2) $$|f(x, y)| \leqq F, \quad 0 < g(x, y) \leqq G.$$

Schließlich werde angenommen, daß es zwei Funktionen $u(x)$ und $v(x)$ gibt, die durch

(3) $$u' = f(x, u), \; u(x_1) = y_1$$

(4) $$v' = f(x, v), \; v(x_2) = y_2$$

eindeutig im Intervall (x_1, x_2) definiert werden und ganz in R verlaufen. Unter diesen Voraussetzungen beweisen wir:

Satz 1. *Wenn die Randwertaufgabe*

(5) $$y' = f(x, y) + \nu g(x, y) y''$$

(6) $$y(x_1) = y_1, \; y(x_2) = y_2$$

bei kleinem positiven oder negativen ν *eine Lösung* $y(x)$ *besitzt, so ist*

(7) *bei* $\nu \geqq 0$: $\lim\limits_{\nu \to 0} y(x) = u(x)$ *gleichmäßig in* $x_1 \leqq x \leqq x_2 - \varepsilon \quad (\varepsilon > 0)$

(8) *bei* $\nu \leqq 0$: $\lim\limits_{\nu \to 0} y(x) = v(x)$ „ „ $x_1 + \varepsilon \leqq x \leqq x_2 \quad (\varepsilon > 0)$.

Der Beweis dieses Satzes stützt sich auf den folgenden Hilfssatz, der in gewisser Hinsicht mehr besagt:

Satz 2. *Sei* $N = FL + M$. *Wenn eine Integralkurve* $y(x)$ *von* (5) *die rechte Begrenzung von* R *trifft, d. h. wenn* $b_1 \leqq y(x_2) \leqq b_2$, *so gilt für genügend kleines* $|\nu|$ *im ganzen Intervall*

(9) $$|y'(x) - f(x, y)| \leqq \frac{2 G N |\nu|}{(x_2 - x)^2} (1 + \varepsilon)$$

für jedes noch so kleine $\varepsilon > 0$. *Ebenso, wenn* $y(x)$ *an der linken Begrenzung des Rechtecks beginnt, ist*

(9') $$|y'(x) - f(x, y)| \leqq \frac{2 G N |\nu|}{(x - x_1)^2} (1 + \varepsilon).$$

Dieser Satz ist im wesentlichen gleichbedeutend mit dem folgenden:

Satz 3. *Sei* $z(x) = y'(x) - f(x, y)$. *Wenn an einer Stelle einer Integralkurve von* (5) $z(x_0) > 0$, *so gibt es zu jedem* $\varepsilon > 0$ *ein solches* $\nu_1 > 0$, *daß*

(10) $$z(x) \geqq (1 - \varepsilon) z(x_0) \quad \begin{cases} \text{in } x_0 \leqq x \leqq x_2 & \text{für } 0 < \nu < \nu_1, \\ \text{in } x_1 \leqq x \leqq x_0 & \text{für } 0 < -\nu < \nu_1. \end{cases}$$

Analog bei $z(x_0) < 0$.

2. Beweis der Sätze 3 und 2 für differenzierbares f.

Die beiden letzten Sätze — in etwas schärferer Form — lassen sich besonders leicht beweisen, wenn $f(x, y)$ als beschränkt differenzierbar vorausgesetzt wird. Wenn angenommen wird

$$|\operatorname{grad} f| \leqq K, \tag{11}$$

so gilt für Differentiation längs der Integralkurve

$$\left|\frac{df}{dx}\right| \leqq K(1+F). \tag{11'}$$

Wir wählen

$$\nu_1 = \frac{z(x_0)}{KG(1+F)}. \tag{12}$$

Dann folgt durch Differentiation von $z = y' - f$, solange $z > 0$, $\nu > 0$,

$$z' = y'' - \frac{df}{dx} \geqq \frac{z}{\nu_1 G} - \frac{df}{dx} \geqq K(1+F)\frac{z - z(x_0)}{z(x_0)}. \tag{13}$$

Diese Differential-Ungleichung für z besagt, daß bei $z(x_0) > 0$ die Differenz $z - z(x_0)$ mit wachsendem x nicht abnehmen kann, daß also $z - z(x_0) \geqq 0$ für $x > x_0$ und $z - z(x_0) \leqq 0$ für $x < x_0$. Damit ist die erste der vier Aussagen von Satz 3 bewiesen; die anderen sind analog.

Die Differentialgleichung (5) gibt für $z \geqq z(x_0) \gtrless 0$ und $\nu > 0$

$$y'' = \frac{z}{\nu g} \geqq \frac{z(x_0)}{\nu G} \tag{14}$$

woraus durch zweimalige Integration folgt

$$y - y_0 - y'(x_0)(x - x_0) \geqq \frac{z(x_0)}{2\nu G}(x - x_0)^2. \tag{15}$$

Wenn y für $x = x_2$ in das Intervall (b_1, b_2) fallen soll, ist die linke Seite von (15) dem Betrage nach nicht größer als $M + FL = N$, also muß

$$z(x_0) \leqq \frac{2G\nu}{(x_2 - x_0)^2} \tag{16}$$

sein, und dies ist die (verschärfte) Aussage (9) des Satzes 2.

3. Allgemeiner Beweis der Sätze 3 und 2.

Es sei $z(x_0) > 0$, $\nu > 0$. Wenn $f(x, y)$ stetig ist, so gibt es einen Kreis C_0, mit dem Mittelpunkt in $P_0(x_0, y_0)$ so daß in jedem Punkt innerhalb von C_0

$$|f(x, y) - f(x_0, y_0)| \leqq \varepsilon z(x_0). \tag{17}$$

Solange eine in P_0 beginnende Integralkurve von (5) innerhalb C_0 verläuft, kann y' nicht abnehmen. Denn wäre x die erste Abszisse, an der das geschieht, so müßte hier $y'(x) \geqq y'(x_0) = z(x_0) + f(x_0, y_0)$ und daher

$$y''(x) = \frac{y'(x) - f(x, y)}{\nu g(x, y)} \geqq \frac{z(x_0) + f(x_0, y_0) - f(x, y)}{\nu g(x, y)} \geqq \frac{(1-\varepsilon)\, z(x_0)}{\nu g(x, y)}$$

d. h. $y''(x)$ hat einen positiven Wert. Es ist also y' im ganzen Bereich C_0 nicht abnehmend und überall

$$(18) \qquad y'' \geqq \frac{(1-\varepsilon)\,z(x_0)}{\nu G} = \alpha.$$

Somit liegt die Integralkurve, rechts von x_0, solange sie in C_0 verläuft, oberhalb der Parabel

$$(19) \qquad y(x) = y_0 + y'(x_0)(x-x_0) + \frac{\alpha}{2}(x-x_0)^2.$$

Hierbei ist $y'(x_0) \geqq -F + z(x_0, y_0)$. Der Teil der Parabel (19), der zwischen dem Punkt $P_0(x_0, y_0)$ und einem Punkt $P_*(x_*, y_*)$ liegt, für den

$$\frac{y_* - y_0}{x_* - x_0}$$

einen vorgegebenen Wert A annimmt, kann durch Vergrößerung von α, also durch Verkleinerung von ν, auf das Innere des Kreises C_0 zusammengezogen werden. Wählt man ein entsprechend kleines ν, so erreicht die Integralkurve die Ordinate y_* an einer Abszisse $x' < x_*$ und es ist

$$\frac{y_* - y_0}{x' - x_0} > A$$

und a fortiori (da y' nicht abnehmend ist)

$$(20) \qquad y'(x') > A.$$

Es läßt sich nun zeigen: Wenn in einem Punkt einer Integralkurve von (5) einmal $y' \geqq F + a$ bei positivem a, so ist von da an y' nicht abnehmend und $y'' \geqq a/\nu G$. Wäre nämlich x die erste Abszisse nach x', an der y' abnimmt, so müßte $y'(x) \geqq y'(x') \geqq F + a$ sein, daher

$$(21) \qquad y''(x) = \frac{y'(x) - f(x, y)}{\nu g(x, y)} \geqq \frac{a + F - f(x, y)}{\nu g(x, y)} \geqq \frac{a}{\nu G}$$

im Widerspruch mit $y'' < 0$. Es ist also für alle $x > x'$ die Ungleichung (21) erfüllt.

Wir wählen nun die willkürlich gelassene Größe A so, daß

$$(22) \qquad A = F + (1-\varepsilon)\,z(x_0).$$

Dann folgt aus (21) in Verbindung mit (18), daß $y'' \geqq \alpha$ im ganzen Intervall $x \geqq x_0$. Also bleibt die Integralkurve dauernd oberhalb der Parabel (19):

$$y(x) - y_0 - y'(x_0)(x - x_0) \geqq \frac{\alpha}{2}(x - x_0)^2.$$

Genau wie bei (15) beweist man daraus, daß

$$(23) \qquad \alpha = \frac{(1-\varepsilon)\,z(x_0)}{\nu G} \leqq \frac{2N}{(x_2 - x_0)^2}$$

sein muß, was mit Gl. (9) von Satz 2 übereinstimmt.

Hinsichtlich Satz 3 beachte man, daß y' innerhalb C_0 nicht abnimmt und $f(x, y) \leqq f(x_0, y_0) + \varepsilon z(x_0)$ gilt, so daß innerhalb C_0

$$z(x) = y'(x) - f(x, y) \geqq y'(x_0) - f(x_0, y_0) + \varepsilon z(x_0) \geqq (1-\varepsilon) z(x_0). \tag{24}$$

Von der Stelle (x', y_*) an ist $y' > A$, also nach (22) ebenfalls

$$z(x) = y'(x) - f(x,y) \geqq (1-\varepsilon) z(x_0) + F - f(x,y) \geqq (1-\varepsilon) z(x_0), \tag{24'}$$

was zu beweisen war.

4. Beweis des Satzes 1.

Der Übergang von Satz 2 zu Satz 1 wird geliefert durch das bekannte Theorem der Theorie der Differentialgleichungen: Ist $|\varphi(x, y)|$ beschränkt im Intervall (x_1, a_2) und besitzt

$$y' = f(x, y) + \nu \varphi(x, y), \quad y(x_1) = y,$$

genau eine Lösung, für jedes ν, so konvergiert diese mit abnehmendem ν gegen die Lösung für $\nu = 0$, gleichmäßig in (x_1, a_2). In der Ungleichung (9) von Satz 2 ist der Faktor von ν beschränkt im Intervall $x_1 \leqq x \leqq x_2 - \varepsilon$, für beliebig kleines $\varepsilon > 0$. Ebenso ist der Faktor von ν an der rechten Seite von (9′) beschränkt im Intervall $x_1 + \varepsilon \leqq x \leqq x_2$. Damit ist Satz 1 bewiesen.

5. Asymptotisches Verhalten in der Grenzschicht.

Die übliche Betrachtungsweise der Grenzschicht-Theorie richtet sich nur auf das asymptotische Verhalten der Integrale in der Grenzschicht und sieht das im Vorstehenden bewiesene als gegeben an. Ist tatsächlich einmal der Verlauf der Lösung im Intervall $(x_1, x_2 - \varepsilon)$ bekannt, so läßt sich leicht der Rest bestimmen.

Wir beschränken uns auf den Fall $\nu > 0$, mit der Grenzschicht zwischen $x_2 - \varepsilon$ und x_2, und führen die zusätzliche Bezeichnung

$$g(x, y) \geqq \gamma > 0 \tag{25}$$

ein. Der Wert der in (3) definierten Funktion $u(x)$ an der Stelle x_2 heiße u_2.

Wird die Variable x ersetzt durch

$$\xi = \frac{x_2 - x}{\nu}, \tag{26}$$

so erhält die Differentialgleichung (5) die Form

$$-\frac{dy}{d\xi} = g(x_2 - \nu\xi, y) \frac{d^2 y}{d\xi^2} + \nu f(x_2 - \nu\xi, y). \tag{27}$$

Da $|f|$ beschränkt und $1/g$ stetig ist, können wir den oben erwähnten Stetigkeitssatz (in seiner Verallgemeinerung auf Gleichungen zweiter Ordnung), anwenden. Mit $\nu = 0$ wird (27)

$$\frac{d^2 y}{d\xi^2} = -\frac{1}{g(x_2, y)} \frac{dy}{d\xi}. \tag{28}$$

Mit der Abkürzung

$$h(y)=\int^{y}\frac{d\eta}{g(x_2,\eta)} \tag{29}$$

wird das Integral von (28), das für $\xi=0$ den Wert y_2 und für $\xi=\infty$ den Wert u_2 annimmt, gegeben durch

$$\xi=\int_{y_2}^{y}\frac{d\eta}{h(u_2)-h(\eta)}.$$

Da die Ableitung von h zwischen $1/G$ und $1/\gamma$ liegt, geht in der Tat $h(u_2)-h(\eta)$ mit der ersten Potenz von $u_2-\eta$ gegen Null. Mithin gibt

$$\int_{y_2}^{y}\frac{d\eta}{h(u_2)-h(\eta)}=\lim_{\nu\to 0}\frac{x_2-x}{\nu} \tag{30}$$

den Verlauf von $y(x)$ in dem Grenzstreifen von $x_2-\varepsilon$ bis x_2.

In der gleichen Weise läßt sich der Fall $\nu<0$ erledigen.

HARVARD UNIVERSITY.

(Eingegangen am 17. August 1949.)