Sur certaines inégalités géométriques.

Par ISTVÁN FÁRY à Paris.

1. Introduction. En utilisant des formules de la *géométrie intégrale* nous allons démontrer des inégalités, portant sur la courbure intégrale d'une courbe ou d'une surface d'une part, et sur sa longueur ou aire respectivement d'autre part (voir (10), (11), (14)). Ces inégalités sont suggérées par l'intuition géométrique: si une longue courbe, ou une surface dont l'aire est grande, est comprimée sur un espace petit, elle doit être très tortueuse, en d'autres termes sa courbure intégrale doit être grande.

Soulignons que dans nos démonstrations l'utilisation des formules de la géométrie intégrale est décisive; les formules de la géométrie différentielle ne semblaient pas être adéquates pour démontrer des inégalités de ce genre, quoique les données figurant dans celles-ci peuvent être définies aussi à l'aide des formules de la géométrie différentielle (voir [1]), [4])).

2. Un lemme sur l'intégration. N o t a t i o n s. Nous considérons constamment l'espace euclidien à trois dimensions.

Notons par R la sphère dont le centre est à l'origine o de l'espace, et dont le rayon est l'unité; un point générique de R est désigné par x, y. *Les intégrations par rapport à dx, dy $(x, y \in R)$ sont toujours étendues sur toute la surface de la sphère R.* Nous convenons d'appeler D_x le grand cercle (non orienté) de R, dont le plan a la direction $\pm x$; les points $\pm x$ sont appelés aussi pôles de D_x. Nous utilisons sur D_x une coordonnée polaire φ $(0 \leqq \varphi < 2\pi)$ dont l'origine est arbitraire; un point variable de D_x est alors noté aussi par sa coordonnée φ.

Nous nommons direction d'un plan l'une des directions de ses deux normales; nous déterminons une direction par le point x de R, tel que $\overrightarrow{ox}$ ait la direction donnée. *Nous considérons toujours (sans le mentionner désormais) des plans et des droites non orientées;* la direction de ceux-ci n'est alors déterminée qu'au signe près. Ainsi, à chaque plan P correspondent les points $\pm x$ de R; le plan est noté aussi P_x. La même remarque vaut pour une droite e.

Lemme 1. *Soit $f(x)$ une fonction sommable, définie sur R. Soit D_x le grand cercle variable de pôle x. Considérons la moyenne de f sur D_x,*

(1) $$\bar{f}(x)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi)\,d\varphi \qquad (\varphi\in D_x),$$

où φ est une coordonnée polaire sur D_x. On a alors la relation

(2) $$\int f(x)\,dx=\int \bar{f}(x)\,dx.$$

Démonstration. $f(x)$ étant une fonction sommable sur R, l'ensemble des cercles D_y sur lesquels $f(x)$ n'est pas sommable, est de mesure nulle. Il en résulte que $\bar{f}(x)$ est définie presque partout sur R. Désignons par $F(f)$ et $F^*(f)$ le premier et le deuxième membre de l'équation (2), considérés comme fonctionnelles définies pour chaque fonction sommable f. La sphère R est un espace homogène (quotient du groupe orthogonal par le tore à une dimension). Or, dans un espace homogène l'intégrale invariante est unique à un facteur près (voir par exemple WEIL [7], p. 42—45; PONTRJAGIN [5], p. 91—99). L'intégrale invariante $F(f)$ est caractérisée par les propriétés suivantes:

1^0 $F(f)$ est définie pour chaque fonction sommable f;

2^0 $F(af+bg)=aF(f)+bF(g)$, si a, b sont constantes;

3^0 $|F(f)|\leqq C$, si $|f|\leqq c$, et $F(f)\geqq K>0$, si $f\geqq k>0$;

4^0 la fonctionnelle $F(f)$ est invariante par rapport aux transformations du groupe (dans le cas de la sphère: par rapport aux rotations).

On voit immédiatement que $F^*(f)$ jouit aussi des propriétés 1^0—4^0, par conséquent, d'après le théorème d'unicité mentionné, le rapport des deux fonctionnelles est constant. Comme de plus, $F(1)=F^*(1)$, la relation (2) est vérifiée.

3. Courbes. On appelle courbe l'image univoque et continue d'un segment. Nous allons démontrer certaines formules qui seront utiles plus tard. Dans ces formules nous supposons que la courbe C est rectifiable et nous notons par $L(C)$ sa longueur.

Désignons par P le plan générique de l'espace, et notons par $n(P)$ le nombre des points $P\cap C$; un point d'intersection doit être compté avec sa multiplicité sur la courbe. Nous avons

(3) $$L(C)=\frac{1}{\pi}\int n(P)\,dP,$$

dP désignant la densité des plans de l'espace: $dP=d\varrho\,dx$ où ϱ est la distance du plan de l'origine, x sa direction.

Démonstration de (3): Évaluons d'abord (3) pour un segment de longueur 1. Considérons de coordonnées cartésiennes dans l'espace, et soit C le segment d'origine $(0,0,0)$ et d'extrémité $(0,0,1)$. On prend sur la sphère

R des coordonnées polaires ϑ et φ $(0 \leqq \vartheta \leqq \pi,\ 0 \leqq \varphi \leqq 2\pi)$. Le second membre de (3) s'écrit

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2}\int_0^{\cos\vartheta} \sin\vartheta \, d\varrho \, d\vartheta \, d\varphi = 1,$$

ce qui démontre la formule (3) pour un segment. L'intégrale étant additive, on obtient ainsi (3) pour les polygones. Par un passage à la limite on peut la démontrer pour les courbes suffisamment régulières (voir MAAK [4]), et ceci achève la démonstration.

Supposons que la courbe C est située dans un plan. Désignons par a la droite générique du plan, et notons par $n(a)$ le nombre de points $a \cap C$; alors

(4) $$L(C) = \frac{1}{2}\int n(a)\, da,$$

où da est la densité des droites dans le plan, $da = d\varrho \, d\varphi$, ϱ désignant la distance de a de l'origine du plan, φ sa direction (voir BLASCHKE [1]).

Soit C' une courbe rectifiable, *située sur la sphère* R. En désignant par D_x le grand cercle variable de R, notons par $n(x)$ le nombre de points $D_x \cap C'$. Nous avons alors

(5) $$L(C') = \frac{1}{4}\int n(x)\, dx.$$

Démonstration de (5). Le second membre de (5) prend la même valeur pour deux arcs géodésiques C_1, C_2 (arcs d'un grand cercle) de longueurs égales. En effet, la valeur de l'intégrale n'est pas changée par une rotation qui amène C_1 sur C_2. Or, si C' est un grand cercle, on a $n(x) = 2$ (sauf pour un x), (5) est alors valable pour un arc géodésique. L'intégrale étant additive, on obtient (5) pour les polygones composés d'arcs géodésiques, et ainsi pour des courbes rectifiables.

Soit C une courbe dans l'espace, et désignons par C_x sa projection sur un plan dont la direction est $\pm x$. On a

(6) $$L(C) = \frac{1}{\pi^2}\int L(C_x)\, dx.$$

Démonstration de (6). Pour le segment $(0,0,0)$, $(0,0,1)$ le deuxième membre de (6) s'écrit

$$\frac{1}{\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \sin^2\vartheta \, d\vartheta \, d\varphi = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin^2\vartheta = 1,$$

et on n'a qu'à utiliser l'additivité de l'intégrale pour obtenir (6) dans le cas où C est un polygone, et ainsi en toute généralité.

4. Soit p le point générique de la courbe continûment dérivable C, et notons par $x(p)$ la direction de la tangente à C au point p. Si p parcourt C, $x(p)$ trace une courbe C' sur la surface de la sphère R, appelée *première image sphérique de C. La longueur de C' est appelée courbure intégrale $G(C)$ de la courbe C.*[1])

Si C est une courbe plane on peut évaluer sa courbure intégrale de la façon suivante. On désigne par $t(\varphi)$ $(0 \leqq \varphi < \pi)$ le nombre des tangentes (non orientées) à C de direction φ. Alors

$$G(C) = \int_0^\pi t(\varphi)\, d\varphi \qquad (C \subset P). \tag{7}$$

Dans le cas général nous avons la proposition suivante.

Proposition 1. *Désignons par $t(x)$ le nombre des plans de direction $\pm x$, qui contiennent une tangente à la courbe C; chaque plan est compté autant de fois qu'il contient de tangentes de C, une droite avec deux points de contacts compte deux fois, etc. La formule*

$$G(C) = \frac{1}{4} \int t(x)\, dx \tag{8}$$

est valable, pourvu que la courbure intégrale $G(C)$ existe.

Démonstration. Soit C' la première image sphérique de la courbe C. D'après la définition même de $t(x)$, C' est coupée suivant $t(x)$ points par le grand cercle D_x de direction $\pm x$. On a alors $t(x) = n(x)$, le second membre ayant la même signification que dans (5); (5) entraîne alors (8).

Théorème 1. *Soit C une courbe dont la courbure intégrale existe; désignons par C_x la projection de C sur un plan de direction $\pm x$. Nous avons*

$$G(C) = \frac{1}{4\pi} \int G(C_x)\, dx. \tag{9}$$

Démonstration. Substituons au premier membre de (9) l'intégrale déduit de (8). Nous appliquons à cette intégrale le lemme 1, nous faisons varier alors x sur un grand cercle D_y et nous calculons l'intégrale

$$\int_0^{2\pi} t(\varphi)\, d\varphi \qquad (x = \varphi \in D_y).$$

[1]) Si C: $r(s) = (\xi(s), \eta(s), \zeta(s))$ $(0 \leqq s \leqq l)$ est deux fois continûment dérivable, s étant le paramètre d'arc, on a

$$G(C) = \int_0^l |r''(s)|\, ds$$

(voir par exemple FÁRY [3]). Dans ma note citée j'ai appelé $G(C)$ "courbure totale", mais, étant donné que ce mot a une autre signification dans la théorie classique des surfaces, il est préférable de l'appeler *courbure intégrale* (en allemand *Gesammtkrümmung*).

Or, il est évident que $t(x)$ $(x \in D_y)$ est le nombre des tangentes de direction x à la courbe projetée C_x, la valeur de l'intégrale ci-dessus est alors $2G(C_x)$ (puisqu'on considère des droites non orientées). D'après le lemme 1 nous avons la formule (9).[2])

Théorème 2. *Soit C une courbe fermée située dans une boule de rayon r. Nous avons l'inégalité*

$$L(C) \leqq \frac{4r}{\pi} G(C). \tag{10}$$

Démonstration. Démontrons d'abord que, *si la courbe C est située dans un plan P*, on a l'inégalité plus précise

$$L(C) \leqq r G(C) \qquad (C \subset P), \tag{11}$$

inégalité qui est la meilleure possible, comme le montre le cercle de rayon r, pour lequel $L(C) = r G(C)$.

Or, (11) est une conséquence immédiate de (4) et (7). En effet, si a_φ désigne une droite de direction φ, $n(a_\varphi) = n$, et si $p_1, \ldots, p_n$ sont les points de $a_\varphi \cap C$, alors les arcs $p_1 p_2, \ldots, p_{n-1} p_n, p_n p_1$ contiennent n points où la direction de la tangente est φ. Nous avons alors $n(a_\varphi) \leqq t(\varphi)$, donc

$$L(C) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^r n(a_\varphi)\, d\varrho\, d\varphi \leqq \frac{r}{2} \int_0^{2\pi} t(\varphi)\, d\varphi = r\, G(C),$$

ce qui achève la démonstration de (11).

Soit maintenant C une courbe gauche. D'après (11) nous avons $L(C_x) \leqq r G(C_x)$, la courbe projetée C_x étant contenu dans un cercle de rayon r. En utilisant les formules (6) et (9), nous obtenons (10), et la démonstration est achevée.

5. Surfaces. Un ensemble S de l'espace est appelé *surface* s'il est homéomorphe à un polyèdre à deux dimensions. La surface S est compacte, si le polyèdre est fini; dans ce cas S est évidemment bornée. S est appelée continûment différentiable, si chaque point de S admet un entourage, doué d'une représentation paramétrique continûment différentiable.

Il est bien connu que les différentes définitions classiques de *l'aire d'une surface* peuvent bien attacher à la même surface des aires différentes, même si celle-ci est relativement simple (voir par exemple RADÓ [6], en particulier l'introduction). Dans cette note nous nous servons d'une définition basée sur le *principe de la projection*. Vu les difficultés mentionnées *nous ne*

---

[2]) J'ai démontré ce théorème dans ma Note cité, puis, en collaboration avec M. OTTÓ VARGA, nous avons trouvé une autre démonstration, utilisant des formules de la géométrie intégrale et en même temps celles de la géométrie différentielle. La démonstration du texte est différente de ces deux premières.

considérons que des surfaces deux fois continûment différentiables[3]); dans ce cas les définitions classiques de l'aire se confondent.

Nous énonçons sans démonstration la proposition suivante, qui peut être considérée comme définition, après avoir justifiée la formule ci-dessous pour une surface élémentaire, par exemple pour une sphère (voir RADÓ [6], BLASCHKE [1]).

Proposition 2. *Soit S une surface deux fois continûment différentiable, et désignons par $A(S)$ l'aire de la surface. Pour chaque droite e de l'espace désignons par $N(e)$ $(0 \leqq N(e) \leqq +\infty)$ le nombre des points de l'intersection $e \cap S$. Alors*

$$A(S) = \frac{1}{\pi} \int N(e)\, de \tag{12}$$

où de désigne la densité des droites (non orientées) de l'espace.

6. Introduisons la notion de la courbure intégrale d'une surface S. Celle-là étant supposée continûment dérivable, nous pouvons déterminer, pour chaque point $p \in S$, les deux directions $\pm x(p)$ du plan tangent de S au point p $(\pm x(p) \in R)$. (Si S est unilatère (orientable) et si l'on choisit en un point l'une des directions du plan tangent, cette détermination se prolonge par continuité sur toute la surface.) Le point $x(p)$ décrit une partie de R, quand p parcourt S; un point de R est couvert autant de fois qu'il y a de plans tangents de cette direction. Cette partie de R (considérée avec la multiplicité de ses points) est appelée l'image sphérique de la surface; la courbure intégrale est définie par l'aire de cette partie. Nous posons ainsi la définition suivante.

Définition. Soit S une surface continûment dérivable. Désignons par $T(x)$ le nombre des plans tangents de direction $\pm x$. Nous posons

$$K(S) = \frac{1}{2} \int T(x)\, dx \tag{13}$$

et nous appelons $K(S)$ la *courbure intégrale* de S[4]).

[3]) Pour la définition de la courbure integrale cette restriction n'est pas essentielle. En remplaçant la notion du plan tangent par celle de paratingent (plus précisement par un paratingent de dimension deux, définie d'une façon convenable), on peut étendre la définition ci-dessus à tout ensemble fermé.

[4]) Si $R = 1/R_1R_2$ désigne la courbure riemannienne de la surface S (supposée deux fois continûment différentiable), on a

$$K(S) = \int_S |R|\, do,$$

où do est l'élément de la surface (voir CARTAN [2], pp. 187 et 191). Il est à noter que $K(S)$ est bien différent de

$$\int_S R\, do,$$

qui ne dépend que du genre de S, si S est close.

7. Nous pouvons énoncer maintenant le théorème suivant.

Théorème 3. *Soit S une surface compacte, deux fois continûment différentiable, qui est la frontière commune de deux domaines de l'espace. Si r est le rayon d'une boule contenant S, on a l'inégalité*

$$A(S) \leqq \frac{4}{\pi} r^2 K(S) \tag{14}$$

entre l'aire $A(S)$ de la surface et sa courbure intégrale $K(S)$.

Démonstration. Dans la démonstration nous supposons que chaque point p admet un entourage dans lequel $x(p)$ est une application biunivoque sauf les p qui appartiennent à des lignes singulières. On voit aisément que le cas général se ramène à ce cas spécial.

Nous désignons par D_y le grand cercle variable (de pôle y) de R, par $\pm x(p)$ $(p \in S)$ les directions du plan tangent de S au point p, enfin P_y désigne un plan de direction y, passant par l'origine.

(a) Soit $C_y \subset S$ l'ensemble de points p de S, tels que $\pm x(p) \in D_y$; C_y est la réunion des *courbes fermées.*

Le complémentaire de C_y est l'ensemble de points p, tels que $\pm x(p)$ appartient à des hemisphères, complémentaires de D_y. Or, $x(p)$ étant localement biunivoque C_y ne contient pas de points intérieurs. D'autre part C_y est la frontière de domaines, il est ainsi la réunion des courbes fermées.

(b) Désignons par C_y^* la projection de C_y (voir **(a)**) sur le plan P_y. On a

$$K(S) = \frac{1}{2\pi} \int G(C_y^*)\, dy \tag{15}$$

où $G(C_y^*)$ désigne la somme des courbures intégrales des courbes, dont la réunion est C_y^*.

Nous appliquons le lemme 1. Si x varie sur D_y, $T(x)$ est le nombre de tangentes des courbes de C_y^*, et d'après (7) la valeur de

$$\int_0^{2\pi} T(\varphi)\, d\varphi \qquad (\varphi \in D_y)$$

est $2G(C_y^*)$; (15) s'obtient immédiatement d'après le lemme 1.

Dans l'intégrale (12) nous pouvons séparer les variables

$$A(S) = \frac{1}{2\pi} \int N(e)\, dp\, dy \tag{16}$$

où dp est l'élément du plan P_y, qui est perpendiculaire à la droite e (voir Blaschke [1]). Nous fixons maintenant la direction y de la droite e.

(c) Soit a la droite variable du plan P_y $(C_y^* \subset P_y)$, et désignons par $n(a)$ le nombre des points $a \cap C_y^*$. Si la droite e (qui est perpendiculaire à P_y) coupe a, on a

$$N(e) \leqq n(a) \qquad (e \perp a;\ e \cap a \neq 0). \tag{17}$$

Notons par P_a le plan passant par a et perpendiculaire à P_y. $P_a \cap S$ est un système de courbes fermées, car S est la frontière commune de deux domaines de l'espace. D'autre part, $e \cap S$ $(\subset P_a \cap S)$ est composé de $N(e)$ points situés sur les courbes $P_a \cap S$, et les divisant en un nombre $\geqq N(e)$ d'arcs. Il existent alors $\geqq N(e)$ droites tangentes de direction e aux courbes $P_a \cap S$. Ces droites sont contenues en un nombre $\geqq N(e)$ de plans tangents, dont le point de contact p est tel que $\pm x(p) \in D_y$, c'est-à-dire $p \in C_y$, la projection de p est située sur a et en même temps sur C_y^*. Ceci montre l'inégalité (17).

Faisons varier e (toujours perpendiculaire à P_y) le long de la droite a, et posons

$$\bar{N}(a) = \max_{e \cap a \neq 0} N(e). \tag{18}$$

Avec cette notation on a $\bar{N}(a) \leqq n(a)$ (d'après (17)) et[5])

$$\int N(e)\, dp \leqq \frac{2r}{\pi} \int \bar{N}(a)\, da \leqq \frac{2r}{\pi} \int n(a)\, da.$$

D'après la définition de $n(a)$ et d'après (4),

$$\frac{2r}{\pi} \int n(a)\, da = \frac{4r}{\pi} L(C_y^*)$$

est valable, où $L(C_y^*)$ désigne la somme des longueurs des courbes dont la réunion constitue C_y^*. En utilisant (11) nous obtenons

$$\iint N(e)\, dp\, dy \leqq \frac{4r}{\pi} \int L(C_y^*)\, dy \leqq \frac{4r^2}{\pi} \int G(C_y^*)\, dy. \tag{19}$$

L'inégalité (14) du théorème s'ensuit alors immédiatement de (16), (15) et (19).

Bibliographie.

1. W. Blaschke, *Vorlesungen über Integralgeometrie.* I, II (Leipzig, 1935).
2. E. Cartan, *Leçons sur la géométrie des espaces de Riemann* (Paris, 1928).
3. I. Fáry, Sur la courbure totale d'une courbe gauche faisant un noeud, *Bulletin de la Société Math. de France,* **77** (1949), p. 128—138.
4. W. Maak, Integralgeometrie 18, *Abhandlungen aus dem Math. Seminar der Hansischen Univ.,* **12** (1937), p. 83–110.
5. L. Pontrjagin, *Topological groups* (Princeton, 1946).
6. T. Radó, *Length and Area* (New York, 1948).
7. A. Weil, *L'intégration dans les groupes topologiques et ses applications* (Paris, 1940).

(Reçu le 10 décembre 1949)

---

[5]) Soit $f(p)$ une fonction de point. On a

$$\int f(p)\, dp = \frac{1}{\pi} \int \left(\int f(t)\, dt \right) da$$

où t est le point variable de la droite a.