Le principe du maximum en théorie du potentiel et la notion de fonction surharmonique.

Par HENRI CARTAN à Paris et JACQUES DENY à Strasbourg.

1.

Dans la théorie classique du potentiel newtonien (ou plus généralement des potentiels d'ordre α de M. RIESZ), on peut distinguer deux problèmes fondamentaux:

Le *problème d'équilibre:* Tout compact C admet-il une distribution d'équilibre? Autrement dit: existe-t-il une distribution *positive* portée par C dont le potentiel soit égal à 1 sur C, à l'exception des points d'un sous-ensemble de capacité nulle?

Le *problème du balayage:* Toute distribution positive μ peut-elle être "balayée" sur un ensemble fermé quelconque F? Autrement dit: existe-t-il une distribution μ' portée par F, telle que les potentiels engendrés par μ et μ' soient égaux sur F, à l'exception des points d'un sous-ensemble de capacité nulle? [1])

On sait que le problème d'équilibre reçoit une réponse affirmative pour $0<\alpha\leqq 2$.[2]) La solution donnée par O. FROSTMAN [5] repose sur la remarque suivante, que l'auteur nomme "principe (élémentaire) du maximum": un potentiel continu, engendré par une distribution à support [3]) compact C, atteint son maximum sur C. Ce théorème s'étend au cas d'un potentiel qui n'est

---

[1]) Avec cette définition la distribution balayée μ' n'est *unique* que lorsque μ ne charge pas l'ensemble des points "irréguliers" de F, ce qui a lieu notamment lorsque le support de μ est disjoint de F, ou lorsque μ est d'énergie finie; dans le cas contraire la définition du balayage doit être précisée (cf. par exemple [6] et [3]). Dans ce travail il sera seulement question du balayage d'une distribution d'énergie finie ou d'une masse ponctuelle située dans l'extérieur de l'ensemble fermé sur lequel on effectue le balayage, de sorte qu'on pourra adopter la définition du texte.

[2]) Pour $2<\alpha<m$ (où m est la dimension de l'espace), il existe encore une solution (et une seule) dans le champ des distributions de SCHWARTZ (cf. [4], chap. I), mais ce n'est plus une distribution *positive.*

[3]) Rappelons que le *support* d'une mesure μ est le plus petit ensemble *fermé* dont le complémentaire est de mesure nulle pour μ.

pas continu, sous la forme suivante, que nous appellerons *premier principe du maximum* ou *principe de Frostman:* Si le potentiel U d'une distribution positive μ est majoré par une constante c sur le support de μ, on a $U \leqq c$ dans tout l'espace [4]).

Soit maintenant F un ensemble fermé et x un point extérieur à F; le problème du balayage sur F de la distribution ε^x (masse-unité placée au point x) se ramène aussitôt, grâce à la transformation de Kelvin, au problème d'équilibre pour le compact F' déduit de F par une inversion de centre x. C'est le point de vue de M. Riesz [10]. Du balayage d'une masse ponctuelle on passe ensuite facilement au cas général.

Pour des généralisations ultérieures, il est utile d'édifier une théorie autonome du balayage, indépendamment du problème d'équilibre. On sait qu'on peut le faire en utilisant le résultat suivant, que nous appellerons *second principe du maximum:* soient U et V les potentiels engendrés par des distributions positives d'énergie finie μ et ν; si on a $U \leqq V$ sauf sur un ensemble de mesure nulle pour μ (nous dirons alors: *presque partout pour* μ), on a $U \leqq V$ dans tout l'espace. [5])

Dans la première partie de ce travail nous envisagerons des potentiels pris par rapport à un *noyau quelconque* K (satisfaisant toutefois à des conditions précisées au paragraphe 2). Nous donnerons plusieurs systèmes (équivalents) de conditions nécessaires et suffisantes que doit remplir ce noyau K pour que le problème d'équilibre et le problème du balayage d'une distribution positive d'énergie finie admettent tous les deux une réponse affirmative. Nous verrons notamment que, pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que le "premier principe du maximum" et le "second principe du maximum" soient vérifiés tous deux. La conjonction de ces deux principes sera appelée *principe complet du maximum.*

Dans la deuxième partie de ce travail nous imposerons a priori des conditions de "régularité" au noyau K. Pour de tels noyaux *réguliers,* nous donnerons un critère (théorème 3) qui permet de reconnaître effectivement si un noyau donné (supposé régulier) satisfait au principe complet du maximum.

Chemin faisant, nous aurons été amenés à introduire diverses classes de fonctions positives. Lorsque le second principe est satisfait, toutes ces classes coïncident; les fonctions de ces classes jouent alors, pour le noyau K, le rôle joué par les fonctions surharmoniques $\geqq 0$ dans le cas du noyau newtonien. Une étude plus approfondie de ces fonctions "surharmoniques" (déjà considérées par M. Riesz et O. Frostman dans le cas des "noyaux d'ordre α") fera l'objet d'une publication ultérieure.

---

[4]) Ce théorème a été établi par A. J. Maria [8] dans le cas newtonien et par O. Frostman [5] pour les potentiels d'ordre α.

[5]) Ce théorème, qui est vrai notamment dans le cas du noyau d'ordre α pour $0 < \alpha \leqq 2$, est appelé *principe du maximum* dans l'article [1], de la terminologie duquel nous nous écartons donc un peu.

I. NOYAUX GÉNÉRAUX.

2. Rappel de définitions et lemmes.

On se placera une fois pour toutes dans l'espace euclidien R^m à m dimensions. On emploiera la notation additive pour les opérations du groupe R^m, et on désignera par $|x|$ la distance euclidienne du point x à l'origine 0.

Dans un but de concision on appellera "mesure" (mesure de RADON) toute distribution *positive*. La mesure invariante par translation sera notée dx.

On supposera toujours que le noyau K est une mesure de type positif dont la transformée de Fourier est une fonction (positive) à croissance lente ainsi que son inverse[6]); il ne sera pas fait d'autre hypothèse sur K dans cette première partie.

Par définition le *potentiel* engendré par la mesure μ est la mesure $K*\mu$, pourvu que ce produit de composition ait un sens (ce qui a certainement lieu si μ est à support compact). Si la mesure $K*\mu*\check{\mu}$ est définie et est à densité continue f[7]) on dit que μ est d'énergie finie (infinie dans le cas contraire); *l'énergie* de μ est alors le nombre $f(0) = \mathrm{Sp}\, K*\mu*\check{\mu}$ (trace de f), qui est non négatif, et nul dans le seul cas $\mu \equiv 0$. On désigne par $\|\mu\|$ la racine carrée de ce nombre.

Si λ et μ sont d'énergie finie, la mesure $K*\lambda*\check{\mu}$ est à densité continue; la quantité $(\lambda, \mu) = \mathrm{Sp}\, K*\lambda*\check{\mu}$ est appelée *énergie mutuelle* de λ et μ; elle vérifie l'inégalité de Schwarz: $(\lambda, \mu) \leqq \|\lambda\|\,\|\mu\|$.

On peut définir l'énergie de la distribution $\lambda - \mu$, différence de deux mesures λ et μ d'énergie finie: c'est le nombre non négatif $\|\lambda - \mu\|^2 = \|\lambda\|^2 + \|\mu\|^2 - 2(\lambda, \mu)$ (nul seulement si $\lambda = \mu$). La racine carrée de l'énergie est une norme sur l'espace vectoriel de ces distributions (la "norme-énergie"). Ainsi normé, cet espace vectoriel (préhilbertien) H n'est pas complet en général, mais *les sous-ensembles E et E_F de H, constitués respectivement par les mesures* (positives) *d'énergie finie et par les mesures d'énergie finie portées par un ensemble fermé F de R^m sont complets.*

Comme en théorie classique la notion d'énergie permet de définir la *capacité* d'un ensemble compact, puis les capacités intérieure et extérieure d'un ensemble quelconque. Un ensemble de capacité intérieure nulle est de mesure intérieure nulle pour la mesure invariante. Nous dirons qu'une propriété a lieu à peu près partout (à p.p.p.) si elle ne tombe en défaut qu'aux points d'un ensemble de capacité intérieure nulle; elle a lieu quasi-partout (q.p.) si l'ensemble exceptionnel est de capacité extérieure nulle.

---

6) C'est-à-dire: si $\mathfrak{K}$ est la transformée de K, il existe un nombre $p > 0$ tel que les intégrales $\int \frac{\mathfrak{K}\, dx}{(1+|x|^2)^p}$ et $\int \frac{dx}{\mathfrak{K}(1+|x|^2)^p}$ soient toutes deux finies. Cette restriction suffit pour entraîner les lemmes qui vont être rappelés et dont on pourra trouver la démonstration dans [4], chap. I et II.

7) C'est-à-dire si les mesures $K*\mu*\check{\mu}$ et $f\, dx$ coïncident; $\check{\mu}$ désigne la mesure symétrique de μ.

Si μ est une mesure d'énergie finie, le produit de composition $K*\mu$ est défini. C'est une mesure (positive), dont on montre qu'elle a la forme $f(x)dx$, où f est une fonction sommable sur tout compact (pour la mesure de Lebesgue). A priori, cette fonction n'est définie qu'à un ensemble de mesure nulle près; mais on montre ([4], Chap. II, théorème 1) qu'on peut la préciser à un ensemble de capacité extérieure nulle près. On a le résultat précis suivant: à chaque mesure μ d'énergie finie est associée une classe $\Phi(\mu)$ de fonctions $\geqq 0$, deux à deux égales q.p., de telle manière que les conditions suivantes soient satisfaites:

1° si $K*\mu$ est à densité continue f, la fonction f appartient à la classe $\Phi(\mu)$;

2° la classe $\Phi(\mu_1+\mu_2)$ est constituée par les sommes d'une fonction de $\Phi(\mu_1)$ et d'une fonction de $\Phi(\mu_2)$;

3° si $f\in\Phi(\mu)$ et si $\lambda\in E$, l'énergie mutuelle (μ,λ) est égale à l'intégrale $\int f d\lambda$;

4° si une suite de mesures $\mu_n\in E$ converge fortement[8]) vers une $\mu\in E$, et si $f_n\in\Phi(\mu_n)$, il existe une suite partielle telle que les fonctions f_{n_k} convergent q.p. vers une fonction $f\in\Phi(\mu)$, la convergence étant uniforme sur le complémentaire d'un ensemble ouvert de capacité arbitrairement petite.

Il en résulte que si $f\in\Phi(\mu)$, il existe, pour tout nombre $h>0$, un ouvert ω de capacité $\leqq h$, tel que la restriction de f au complémentaire de ω soit une fonction *continue*.

Désormais, on désignera par U^μ l'une quelconque des fonctions de la classe $\Phi(\mu)$, et on l'appellera le *potentiel* de la mesure μ supposée d'énergie finie.

Les lemmes suivants seront constamment utilisés par la suite:

Lemme 1. (Régularisation.) *Soit $\{\alpha_n\}$ une suite de mesures portées par un compact fixe et convergeant vaguement[9]) vers la mesure ε (masse-unité à l'origine). Pour toute $\mu\in E$, le produit de composition $\mu_n=\mu*\alpha_n$ est une mesure de E qui converge fortement vers μ. On peut donc extraire, de la suite des potentiels U^{μ_n}, une suite partielle convergeant p.q. vers U^μ (la convergence étant uniforme sur le complémentaire d'un ouvert de capacité arbitrairement petite).*

Si les mesures α_n sont de la forme $\varphi_n(x)dx$ (où chaque φ_n est sommable et bornée), les potentiels U^{μ_n} sont *continus*; la suite μ_n est alors dite *régularisante* pour μ.

Lemme 2. (Suites monotones de potentiels.) *Si $\{U^{\mu_n}\}$ est une suite décroissante (q.p.) de potentiels d'énergie finie, ou une suite croissante (q.p.) de*

[8]) C'est-à-dire $\|\mu-\mu_n\|$ tend vers 0.

[9]) Ceci signifie que $\lim \int f(x)\,d\alpha_n(x)=f(0)$ pour toute fonction continue f.

potentiels d'énergie uniformément bornée, μ_n converge fortement vers une mesure $\mu \in E$, et on a: $\lim U^{\mu_n} = U^{\mu}$ q.p.

L e m m e 3. (Propriété de minimum.) *Soient F un ensemble fermé, et f une fonction positive, sommable pour toute mesure de E, et majorée sur F par un potentiel d'énergie finie; il existe une mesure de E_F et une seule, soit μ, qui vérifie:*

$$U^{\mu} \geqq f \text{ à p. p. p. sur } F,$$
$$U^{\mu} = f \text{ presque partout pour } \mu;$$

cette mesure μ est, parmi les mesures $\nu \in E_F$, celle qui rend minimum l'intégrale:

$$I_f(\nu) = \int (U^{\nu} - 2f)\, d\nu.$$ [10]

Si $f = U^{\lambda}$, avec $\lambda \in E$, l'opération qui fait passer de λ à μ est appelée dans [5] le "balayage imprécis de λ sur F". Si λ admet une balayée λ' sur F (au sens donné au § 1), on a $\mu = \lambda'$.

Si F est compact, la constante 1 satisfait aux hypothèses du lemme 3. La mesure μ correspondante coïncide avec la distribution d'équilibre dans le cas où celle-ci existe.

3. Classes de fonctions associées au noyau.

Dans ce paragraphe et le suivant, on ne considère que des fonctions f positives jouissant de la propriété suivante: *la restriction de f à tout compact est sommable pour toute mesure d'énergie finie.* Un potentiel d'énergie finie, une fonction continue positive, vérifient cette condition. Parmi ces fonctions, on va considérer trois classes de plus en plus restreintes, qui toutes contiennent trivialement la constante 0.

F o n c t i o n s d e l a c l a s s e α. *Une fonction f est dans la classe α si, pour tout compact C, il existe une mesure $\mu \in E_C$ telle que $U^{\mu} = f$ à p.p.p. sur C.*

Les fonctions de la classe α jouissent des propriétés suivantes:

(i) La mesure μ associée à une telle fonction f et à un compact quelconque C satisfait à *$U^{\mu} \leqq f$ à p.p.p. dans l'espace.* En effet cette mesure satisfait aux conditions du lemme 3 et par conséquent est *unique;* soit alors c un compact en tout point duquel on ait $U^{\mu} > f$, et ν la mesure (unique) de E_F telle que $U^{\nu} = f$ à p. p. p. sur l'ensemble fermé $F = C \cup c$; puisque $\mu \in E_F$, on a $\mu = \nu$ (lemme 3), ce qui exige que c soit de capacité nulle.

(ii) La somme de deux fonctions de la classe α est dans la classe α.

---

10) Sous différentes formes ce lemme est d'un usage courant en théorie du potentiel (cf. notamment [5], p. 66, et [1], § V). L'existence et l'unicité de la mesure minimisant "l'intégrale de GAUSS" $I_f(\nu)$ résultent facilement de ce que l'espace E_F est convexe et complet (application d'un théorème bien connu de F. RIESZ).

Fonctions de la classe β. *Une fonction f est dans la classe β si*

a) *sur tout compact, f est majorée par un potentiel d'énergie finie*[11]),

b) *pour toute $\mu \in E$ à support compact F_μ, la relation $U^\mu \leqq f$ à p. p. p. sur F_μ entraîne $U^\mu \leqq f$ à p. p. p. dans l'espace.*

Observons qu'on obtient encore la classe β en substituant à b) la condition en apparence plus forte:

b') *Pour toute $\mu \in E$ la relation $U^\mu \leqq f$ presque partout pour μ entraîne $U^\mu \leqq f$ à p. p. p. dans tout l'espace.*

Il suffit évidemment de montrer que toute fonction f de la classe β satisfait à b'): soit en effet μ une mesure de E (à support quelconque), avec $U^\mu \leqq f$ presque partout pour μ. Il existe une suite croissante de compacts E_n contenus dans l'ensemble des points où $U^\mu \leqq f$, et tels que μ soit limite des restrictions μ_n de μ aux ensembles E_n. D'après le lemme 2, on a $U^\mu = \lim U^{\mu_n}$ q. p. Or on a $U^{\mu_n} \leqq f$ à p. p. p. dans l'espace (d'après b)), donc, à la limite, $U^\mu \leqq f$ à p. p. p. Par suite f satisfait à b').

Les fonctions de la classe β jouissent des propriétés suivantes:

(i) La borne inférieure de deux fonctions de la classe β est dans la classe β.

(ii) Si une fonction de la classe β est majorée par un potentiel d'énergie finie, elle est à p. p. p. égale à un potentiel d'énergie finie.

(iii) La restriction d'une fonction de la classe β à un compact C est égale à p. p. p. sur C au potentiel d'une mesure de E_C.

(i) est évident; quant aux propriétés (ii) et (iii), elles s'obtiennent très simplement à l'aide du lemme 3 et de la propriété b'), en prenant pour l'ensemble F qui figure dans l'énoncé du lemme 3 soit l'espace R^m tout entier, soit le compact C. La propriété (iii) exprime que *la classe β est contenue dans la classe α.*

Fonctions de la classe γ. *Une fonction f est dans la classe γ si elle vérifie la condition* a) *et si, pour toute mesure $\mu \in E$, la fonction $\inf(U^\mu, f)$ est à p. p. p. égale à un potentiel d'énergie finie.*

Les fonctions de la classe γ jouissent des propriétés évidentes:

(i) La borne inférieure de deux fonctions de la classe γ est dans la classe γ.

(ii) Si une fonction de la classe γ est majorée par un potentiel d'énergie finie, elle est à p. p. p. égale à un potentiel d'énergie finie.

La classe γ est contenue dans la classe β (et a fortiori dans la classe α): il suffit de montrer que toute fonction f de la classe γ satisfait à b'; or soit μ une mesure de E telle que $U^\mu \leqq f$ presque partout pour μ; posons

11) Si f et g sont deux fonctions définies à p. p. p., on dit que f est majorée par g si on a $f \leqq g$ à p. p. p.

$\inf(U^\mu, f) = U^\nu$ à p. p. p.; comme U^ν est majorée par U^μ et $U^\nu = U^\mu$ presque partout pour μ, on a: $\|\mu-\nu\|^2 = \int (U^\mu - U^\nu)\, d\mu - \int (U^\mu - U^\nu)\, d\nu \leqq 0$, d'où $\mu = \nu$, ce qui entraîne $U^\mu \leqq f$ à p. p. p.

4. Second principe du maximum.

Considérons les hypothèses suivantes:

H y p o t h è s e I. *La classe α contient tous les potentiels d'énergie finie.*

Cette hypothèse exprime *la possibilité de faire le balayage de toute mesure d'énergie finie sur tout compact.* La propriété (i) des fonctions de la classe α montre que *le potentiel engendré par la mesure balayée est majoré dans tout l'espace par le potentiel de la mesure donnée.* En considérant des suites croissantes de compacts on en déduit la possibilité de faire le balayage sur tout fermé.

L'hypothèse I est satisfaite si on suppose seulement que la classe α contient les potentiels continus d'énergie finie. A cet effet désignons par V l'espace hilbertien obtenu en complétant (pour la norme-énergie) l'espace déjà considéré H des distributions qui sont différences de deux mesures de E; désignons par V_C l'espace obtenu d'une manière analogue à partir de E_C (V_C est un sous-espace linéaire de V). Dire que le potentiel U^μ est dans la classe α revient à dire que, pour tout compact C, la "projection" de μ sur V_C appartient au sous-ensemble E_C [12]). Or les mesures de potentiels continus (et même les mesures à densité continue et support compact) sont denses dans E (d'après les lemmes 1 et 2); si les projections sur V_C de ces mesures sont des éléments de E_C, il en est de même pour toutes les mesures de E, d'où le résultat.

H y p o t h è s e II. *La classe β contient tous les potentiels d'énergie finie.*

Autrement dit, si μ et ν sont des mesures quelconques de E, et si $U^\mu \leqq U^\nu$ presque partout pour μ, on a $U^\mu \leqq U^\nu$ à p. p. p. (donc q. p., comme on le voit aussitôt en régularisant). Cette hypothèse n'est autre que l'énoncé du *second principe du maximum,* rappelé au § 1 (à cette différence près que la dernière majoration a lieu seulement q. p., puisque, dans le cas général envisagé ici, un potentiel est une fonction qui n'est définie qu'à un ensemble de capacité extérieure nulle près).

H y p o t h è s e III. *La classe γ contient tous les potentiels d'énergie finie.*

Autrement dit, si λ et μ sont des mesures quelconques de E, il existe une mesure $\nu \in E$ telle que $U^\nu = \inf(U^\lambda, U^\mu)$ à p. p. p. (et on peut montrer que l'égalité a même lieu q. p)

---

[12]) En effet si la projection de μ sur V_C est une *mesure* μ', on a $(\mu, \nu) = (\mu', \nu)$ pour toute $\nu \in E$, ce qui exprime que $U^{\mu'} = U^\mu$ à p. p. p. sur C; si inversement μ admet une balayée μ' sur C, la distribution $\mu - \mu'$ est orthogonale à toutes les mesures $\nu \in E_C$, donc à V_C.

Théorème 1. *Les trois hypothèses précédentes sont équivalentes; lorsqu'elles sont satisfaites, les classes α, β et γ sont identiques.*

A priori les hypothèses I, II et III sont de plus en plus fortes, puisque les classes α, β et γ sont de plus en plus restreintes: Il suffit donc de montrer que, moyennant l'hypothèse I, toute fonction de la classe α est dans la classe β, et toute fonction de la classe β est dans la classe γ.

Faisons donc l'hypothèse I, et soient f une fonction de la classe α, et μ une mesure de E à support compact C, telle que $U^\mu \leqq f$ à p. p. p. sur C; il s'agit de montrer que $U^\mu \leqq f$ à p. p. p. dans l'espace. Puisque f est dans la classe α il existe dans E_C une mesure ν (unique) satisfaisant à $U^\nu = f$ à p. p. p. sur C, $U^\nu \leqq f$ à p. p. p. dans l'espace. D'après l'hypothèse I toute $\lambda \in E$ admet une balayée λ' sur C, et on a $(\lambda', \mu) = (\lambda, \mu)$, $(\lambda', \nu) = (\lambda, \nu)$ (puisque μ et ν sont deux éléments de E_C). Comme U^μ est majoré sur C par U^ν, on a $(\lambda', \mu) \leqq (\lambda', \nu)$, d'où $(\lambda, \mu) \leqq (\lambda, \nu)$ pour toute $\lambda \in E$, ce qui entraîne $U^\mu \leqq U^\nu$ à p. p. p., et a fortiori $U^\mu \leqq f$ à p. p. p.

Soient maintenant f une fonction de la classe β, et μ une mesure quelconque de E. U^μ est dans la classe β, puisque U^μ est dans la classe α par hypothèse, et qu'on vient de montrer que toute fonction de la classe α est dans la classe β. D'après les propriétés (i) et (ii) des fonctions de la classe β, la fonction $\inf(f, U^\mu)$ est un potentiel d'énergie finie, ce qui montre bien que f est dans la classe γ.

Remarques: *a*) L'hypothèse II est satisfaite si on suppose seulement que les potentiels *continus* d'énergie finie [13]) sont dans la classe β, car alors ils sont aussi dans la classe α, et on a montré que dans ce cas l'hypothèse I est satisfaite.

b) De même l'hypothèse III est satisfaite si on suppose seulement que les potentiels continus d'énergie finie sont dans la classe γ, mais on peut même donner un énoncé un peu meilleur: l'hypothèse III est satisfaite si on suppose seulement que la borne inférieure de deux potentiels *continus* d'énergie finie est un potentiel. [14])

c) La somme de deux fonctions de la classe α est dans la classe α; donc, moyennant l'une quelconque des hypothèses I, II ou III, la somme de deux fonctions de la classe β (ou de la classe γ) appartient à la même classe.

---

[13]) Ou même seulement si les potentiels engendrés par les mesures à densité continue et à support compact sont dans la classe β.

[14]) Pour établir ce résultat on montre d'abord que l'hypothèse affaiblie entraîne la propriété suivante: Si $\{U^{\nu_n}\}$ est une suite de potentiels continus et si l'énergie $\|\nu_n\|$ est uniformément bornée, il existe une mesure $\nu \in E$ telle que $\liminf U^{\nu_n} = U^\nu$ q. p. (c'est une conséquence facile du lemme 2). Soient alors λ et μ deux mesures quelconques de E; il suffit de considérer deux suites régularisantes $\{\lambda_n\}$ et $\{\mu_n\}$ convergeant fortement vers λ et μ, les potentiels continus U^{λ_n} et U^{μ_n} convergeant q. p. vers U^λ et U^μ (lemme 1), et d'appliquer la propriété précédente à la suite $\{\nu_n\}$ définie par $U^{\nu_n} = \inf(U^{\lambda_n}, U^{\mu_n})$.

5. Le principe complet du maximum.

Nous venons d'établir trois énoncés équivalents du second principe du maximum (hypothèses I, II et III). Occupons-nous maintenant du problème d'équilibre; à cet effet exprimons successivement que la constante *un* est dans l'une des classes α, β ou γ; on obtient les conditions suivantes, qui sont de force croissante, mais qui deviennent équivalentes si le noyau satisfait au second principe:

Condition (1): *Tout compact admet une distribution d'équilibre.* Le potentiel engendré (potentiel d'équilibre) est alors $\leqq 1$ à p. p. p. (et même q. p.) dans tout l'espace (propriété (i) des fonctions de la classe α).

Condition (2): *Si le potentiel U^μ est majoré par* 1 (à p. p. p.) *sur le support de μ* (qu'on peut supposer compact), *il en est de même dans tout l'espace.* C'est le *principe de Frostman* (cf. § 1); il entraîne la condition (1), c'est-à-dire l'existence d'une distribution d'équilibre pour tout compact (même si on ne suppose pas que le noyau satisfait au second principe).

Condition (3): *Quelle que soit la mesure $\mu \in E$, la fonction* $\inf(U^\mu, 1)$ *est un potentiel.*

On appellera *principe complet du maximum* la conjonction de l'une quelconque des hypothèses I, II ou III et de l'une quelconque des conditions (1), (2) ou (3), c'est-à-dire la conjonction du second principe du maximum et du principe de Frostman. Il revient au même de dire que les potentiels d'énergie finie et les constantes non négatives sont dans la classe β, ou encore (d'après la remarque *c*, § 4) que la classe β contient les fonctions de la forme $U^\nu + c$, où ν est une mesure de E et c une constante non négative.

Finalement on obtient l'énoncé suivant du principe complet: *Quelles que soient les mesures μ et ν de E et la constante $c \geqq 0$, la relation $U^\mu \leqq U^\nu + c$ presque partout pour μ entraîne $U^\mu \leqq U^\nu + c$ q. p. dans l'espace.* Il est utile d'observer que dans cet énoncé on peut se borner à considérer des potentiels U^ν *continus* (remarque *a*, § 4) et des mesures μ à *support compact.* Nous verrons que dans le cas d'un noyau "régulier" on peut également supposer les potentiels U^μ continus.

II. NOYAUX RÉGULIERS.

6. Définitions.

Nous supposerons dans cette deuxième partie que le noyau K, satisfaisant toujours aux hypothèses générales de la première partie (§ 2), vérifie également les trois conditions de régularité suivantes:

(a) *Le noyau est une fonction $K(x)$* [15] *strictement positive, continue, finie en tout point x sauf peut-être en* 0.

---

[15]) C'est-à-dire que la mesure K est de la forme $K(x)dx$, la fonction $K(x)$ étant sommable sur tout compact; d'ailleurs la sommabilité de $K(x)$ sur tout compact résulte aussi de la condition (c).

(b) *L'ensemble e_s des points x tels que $K(x) \geqq s$ est compact quel que soit $s > 0$, et convexe pour s suffisamment grand.*

(c) *Il existe un nombre $h < m$ (où m est la dimension de l'espace R^m), tel que $K(x) \leqq 2^h K(2x)$ pour tout x d'un voisinage de 0.*

Remarques. 1°) Puisque K est de type positif, on a $K(x) = K(-x)$ pour tout x; *les compacts e_s admettent donc l'origine pour centre de symétrie.*

2°) Si $K(0) < +\infty$, la seconde partie de la condition (b) est satisfaite (les e_s étant vides pour $s > K(0)$); la condition (c) est aussi satisfaite.

3°) Si $K = K(r)$ est une fonction continue de la seule distance $|x| = r$, strictement positive, décroissante pour $r > 0$, avec $K(r) \to 0$ pour $r \to +\infty$, la condition (b) est satisfaite.

Notation. Si F désigne un ensemble quelconque, on notera F^x l'ensemble déduit de F par la translation x; de même μ^x sera la mesure déduite de la mesure μ par cette translation.

Lemme 4: *Dans un voisinage de 0 la valeur moyenne $K_s(x)$ de K sur le compact e_s^x est majorée par $AK(x)$, où A est une constante indépendante de s (suffisamment grand).* [16])

Esquissons brièvement la démonstration: on observe d'abord que, pour s assez grand, $K_s(0) \leqq 2^h s/(1-2^{h-m})$; pour cela désignons par I_k l'ensemble des points x définis par $K(2^k x) \geqq s$, $K(2^{k+1} x) < s$ $(k = 0, 1, \ldots)$; e_s, privé de l'origine, est la réunion des I_k; or on a $K(x) \leqq 2^h s$ pour $x \in I_0$ et, par récurrence, $K(x) \leqq 2^{h(k+1)} s$ pour $x \in I_k$; de ces majorations on déduit aisément l'inégalité annoncée.

Soit alors x un point arbitraire d'un voisinage (suffisamment petit) de 0. Posons $K(x/2) = t$, $F = e_s^x \cap e_t$, $F' = e_s^x \cap (R^m - e_t)$ (F est vide pour $s > t$, d'après la convexité et la symétrie des e_s); on a $\int_{F'} K(y)\,dy/\text{mes}(e_s^x) \leqq t \leqq 2^h K(x)$ (dans tous les cas); $\int_F K(y)\,dy/\text{mes}(e_s^x) = 0$ pour $s > t$, sinon cette quantité est, d'après la première partie de la démonstration, $\leqq 2^h t/(1-2^{h-m})$; on a donc bien $K_s(x) \leqq AK(x)$, en prenant $A = 2^h(1 + 2^h/(1-2^{h-m}))$.

Suivant l'usage classique, nous appellerons *potentiel* engendré par une mesure (positive) quelconque μ, la fonction $\int K(x-y)\,d\mu(y)$, qui est définie pour *tout* x (à valeurs finies ou infinies) et *semi-continue inférieurement* (s. c. i.). Désignons-la provisoirement par $V^\mu(x)$. Il faut vérifier que cette définition du potentiel est en accord avec celle donnée dans la première partie (§ 2),

---

16) Ce lemme a été établi par O. Frostman ([5], p. 27) dans le cas des potentiels d'ordre α.

autrement dit que la fonction V^μ est dans la classe $\Phi(\mu)$, lorsque μ est une mesure d'énergie finie. Le théorème 2 ci-dessous montrera qu'il en est bien ainsi. Avant de le démontrer, il nous faut étudier la fonction V^μ dans le cas où la mesure μ est à support compact; si $K(0)<+\infty$, V^μ est alors continue, et par suite appartient à la classe $\Phi(\mu)$. On peut donc se borner au cas où $K(0)=+\infty$; dans ce cas:

Lemme 5. *Soit μ une mesure à support compact; en tout point x la valeur moyenne $V_s^\mu(x)$ de V^μ sur e_s^x converge vers $V^\mu(x)$ lorsque s tend vers $+\infty$.*

Ce lemme est évident si $V^\mu(x)=+\infty$ (grâce à la s. c. i.); sinon il existe un voisinage de x tel que, si μ' est la restriction de μ à ce voisinage, $V^{\mu'}(x)$ soit arbitrairement petit. Il suffit alors d'appliquer le lemme 4, qui entraîne $V_s^{\mu'}(x)\leqq A\,V^{\mu'}(x)$ pour s assez grand, et de tenir compte de la continuité de $V^{\mu-\mu'}$ au voisinage de x.

Remarque. Le lemme 5 exprime que V^μ est partout limite de ses régularisées par les fonctions $\psi_n/\mathrm{mes}(e_n)$, où ψ_n est la fonction caractéristique de e_n. V^μ est également limite de ses régularisées par une suite de fonctions continues $\varphi_n\geqq 0$, ne dépendant que de $K(x)$, s'annulant, pour n assez grand, en dehors de voisinages de plus en plus petits de l'origine, et telles enfin que $\int \varphi_n(x)\,dx=1$.

On peut alors énoncer d'une façon précise:

Théorème 2. *Pour qu'une mesure μ soit d'énergie finie, il faut et il suffit que l'intégrale*

$$\iint K(x-y)\,d\mu(x)\,d\mu(y) \tag{1}$$

soit finie, et alors sa valeur est égale à l'énergie $\|\mu\|^2$. Dans ce cas la fonction $V^\mu(x)=\int K(x-y)\,d\mu(y)$ est dans la classe $\Phi(\mu)$.

Par la suite nous pourrons donc adopter la notation usuelle U^μ au lieu de V^μ, que μ soit d'énergie finie ou non.

Pour démontrer le théorème, considérons d'abord une mesure μ de E à support compact, et soit μ_n le produit de composition de μ par la distribution homogène de la masse $+1$ sur e_n; V^{μ_n} est continue, donc appartient à la classe $\Phi(\mu_n)$; comme μ_n converge fortement vers μ, on peut extraire de la suite V^{μ_n} une suite partielle convergeant q. p. vers une fonction $U^\mu\in\Phi(\mu)$ (lemme 1), mais comme V^{μ_n} converge partout vers V^μ (lemme 5), on a bien $V^\mu\in\Phi(\mu)$ et par suite, pour toute $\lambda\in E$:

$$(\lambda,\mu)=\int U^\mu\,d\lambda=\int V^\mu\,d\lambda;$$

en particulier:

$$\|\mu\|^2=\int V^\mu\,d\mu=\iint K(x-y)\,d\mu(x)\,d\mu(y).$$

Soit inversement μ une mesure à support compact, pour laquelle l'intégrale (1) soit finie; les régularisées μ_n sont d'énergie finie et il résulte du lemme 2 que $\|\mu_n\|^2 = \int V^{\mu_n} d\mu_n$ converge vers $\int V^{\mu} d\mu$ [17]); $\|\mu_n\|$ étant uniformément bornée, μ_n converge faiblement vers une mesure de E qui n'est autre que μ (puisque μ_n converge vaguement vers μ); μ_n converge donc fortement vers μ (puisque μ_n est la régularisée de μ qui, on vient de le voir, est d'énergie finie), et $\|\mu\|^2 = \lim \|\mu_n\|^2 = \int V^{\mu} d\mu$. On a bien montré l'identité entre les deux définitions de l'énergie pour toute mesure à support compact.

Soit enfin μ une mesure quelconque, μ_p sa restriction à la boule $B(0, p)$; on a dans tous les cas (compte tenu de la s. c. i.): $\|\mu\|^2 = \lim \|\mu_p\|^2 = \lim \int V^{\mu_p} d\mu_p = \int V^{\mu} d\mu$, et d'autre part: $V^{\mu} = \lim V^{\mu_p}$ partout, ce qui achève de démontrer le théorème.

Pour la suite il sera utile d'étendre le lemme 5 à certaines mesures qui ne sont pas à support compact; un point essentiel de la démonstration du lemme 5 était la continuité du potentiel $U^{\mu-\mu'}$ au voisinage de x; la généralisation suivante est donc immédiate, et il suffit de l'énoncer:

L e m m e 5 bis. Soit μ une mesure telle que, pour tout point x, on puisse trouver un compact C tel que le potentiel engendré par les masses extérieures à C soit arbitrairement petit au voisinage de x; alors *la valeur moyenne $U_s^{\mu}(x)$ de U^{μ} sur e_s^x converge vers $U^{\mu}(x)$ lorsque s tend vers $+\infty$*.

R e m a r q u e s. 1°) Avec des hypothèses convenables de "régularité à l'infini" pour K, *toute* mesure de potentiel non identiquement infini satisfait aux conditions du lemme 5 bis, et par suite tout potentiel est partout limite de ses régularisés [18]). Par exemple il en est ainsi lorsque la condition suivante est vérifiée: A tout compact C on peut associer un nombre k et un compact C' tels que $K(x-y) \leq kK(x-z)$ pour tous points $y \in C$, $z \in C$, x non $\in C'$. Les conséquences d'une telle hypothèse relativement à la théorie des fonctions "surharmoniques" seront étudiées dans un travail ultérieur.

2°) Si K satisfait au principe de Frostman, toute mesure μ d'énergie finie dont le potentiel est majoré par le potentiel d'une mesure λ à support compact satisfait aux conditions du lemme 5 bis. En effet à tout nombre $\alpha > 0$ on peut associer un compact C tel que U^{λ}, donc U^{μ}, soit $\leq \alpha$ sur le

---

17) En effet on a, d'après le théorème de FUBINI-TONELLI, $\int V^{\mu} d\mu = V^{\nu}(0)$, avec $\nu = \mu * \check{\mu}$, et $\int V^{\mu_n} d\mu_n = V^{\nu_n}(0)$, où ν_n s'obtient en régularisant ν par *deux* médiations successives.

18) La nécessité d'une hypothèse de régularité à l'infini est mise en évidence par l'exemple suivant: $K(x) = e^{-x^2}$ (avec $m = 1$), $\mu = e^{x^2} dx / (1 + x^2)$; on a $U^{\mu}(0) < +\infty$, $U^{\mu}(x) = +\infty$ pour tout $x \neq 0$, donc $\lim_{s \to \infty} U_s^{\mu}(0) = +\infty \neq U^{\mu}(0)$. Notons toutefois que ce noyau, bien que de type positif, ne satisfait pas à toutes les hypothèses exigées au § 2 (l'inverse e^{x^2} de sa transformée de Fourier n'est pas à croissance lente).

complémentaire de C; or soit μ_1 la restriction de μ au complémentaire de C; a fortiori $U^{\mu_1} \leqq \alpha$ sur le complémentaire de C, donc $U^{\mu_1} \leqq \alpha$ q. p. (principe de FROSTMAN), et enfin $U^{\mu_1} \leqq \alpha$ partout (d'après la s. c. i. de U^{μ_1}).

7. Le théorème d'Evans-Vasilesco.

Soit μ une mesure à support compact, ou plus généralement une mesure satisfaisant aux conditions du lemme 5 bis; le théorème suivant, établi par G. C. EVANS [4 bis] et F. VASILESCO [11] dans le cas newtonien, et étendu par O. FROSTMAN [5] (p. 26) aux potentiels d'ordre α, est également une conséquence des hypothèses de régularité:

Lemme 6. *Si la restriction de U^μ au support d'une telle mesure μ est continue, U^μ est une fonction continue dans tout l'espace.*

Une simple adaptation des démonstrations classiques montre en effet que le résultat est vrai toutes les fois que, dans un voisinage de 0, la relation $K(x) \leqq K(y)$ entraîne $K(x) \leqq qK(x-y)$, où q est une constante positive indépendante de x et de y (le noyau K étant supposé d'autre part continu, symétrique et fini pour $x \neq 0$). Or cette condition est réalisée lorsque les compacts e_s sont convexes pour s assez grand et que la relation $K(x) \leqq qK(2x)$ est satisfaite pour x voisin de 0.

On en déduit la conséquence suivante:

Lemme 7. *Toute mesure $\mu \in E$ est limite croissante de mesures μ_n à support compact, dont le potentiel U^{μ_n} est continu dans tout l'espace et converge partout vers U^μ.*

Soit en effet $\{\omega_n\}$ une suite décroissante d'ouverts dont la capacité tend vers 0 avec $1/n$, la restriction de U^μ au complémentaire de ω_n étant continue (une telle suite existe puisque la fonction partout définie U^μ est dans la classe $\Phi(\mu)$). Désignons par μ_n la restriction de μ au compact $C_n = B_n - B_n \cap \omega_n$, où B_n est la boule fermée $B(0, n)$; la suite croissante $\{\mu_n\}$ converge vaguement (et même fortement) vers μ [19]), et le potentiel U^{μ_n} converge partout vers U^μ. [20]).

Il reste à montrer que U^{μ_n} est continu dans tout l'espace, et pour cela que la restriction de U^{μ_n} au compact C_n, qui contient le support de μ_n, est continue. Or les restrictions à C_n des fonctions s. c. i. U^{μ_n} et $U^{\mu-\mu_n}$ ayant pour somme une fonction continue (la restriction de U^μ), chacune d'elles est continue.

[19]) Les μ_n ont en effet une limite (vague ou forte) $\nu \leqq \mu$, et la différence $\mu - \nu$ est portée par l'intersection des ω_n, qui est de capacité extérieure nulle; il en résulte que tout compact contenu dans cette intersection est de mesure nulle pour la mesure $\mu - \nu$ dont l'énergie est finie, et donc que $\mu - \nu$ est nulle.

[20]) Cela résulte des propriétés élémentaires de l'intégrale d'une fonction s. c. i. (non négative) par rapport à une suite croissante de mesures.

Remarque. Si F est un ensemble de mesure nulle pour μ, on peut évidemment astreindre les mesures μ_n de l'énoncé ci-dessus à avoir leur support contenu dans le complémentaire de F.

8. Classes de fonctions associées à un noyau régulier.

Considérons les deux classes de fonctions $\geqq 0$, dont l'analogie avec les classes β et γ de la première partie est évidente [21]).

Classe B: *f est dans la classe B si f est s. c. i. et si, pour toute $\mu \in E$, la relation $U^\mu \leqq f$ presque partout pour μ entraîne $U^\mu \leqq f$ partout.*

Classe C: *f est dans la classe C si, pour toute $\mu \in E$, la fonction* $\inf(U^\mu, f)$ *est partout égale à un potentiel (d'énergie évidemment finie).*

Ces définitions entraînent aisément les remarques suivantes:

1⁰) *La classe C est contenue dans la classe B*: on observe d'abord que toute fonction f de la classe C est s. c. i. [22]); soit alors μ une mesure quelconque de E, avec $U^\mu \leqq f$ presque partout pour μ, et posons $U^\nu = \inf(U^\mu, f)$; le raisonnement utilisé au § 3 pour montrer que la classe γ est contenue dans la classe β prouve encore que $\mu = \nu$, d'où $U^\mu \leqq f$ partout.

2⁰) *La classe B est identique à la suivante* (qui est plus large en apparence seulement):

Classe B': *f est dans la classe B' si f est s. c. i. et si, pour toute mesure μ à support compact et à potentiel continu, la relation $U^\mu \leqq f$ sur le support de μ entraîne $U^\mu \leqq f$ partout.*

Il suffit de montrer que toute fonction f de la classe B' est dans la classe B; or soit $\mu \in E$, avec $U^\mu \leqq f$ presque partout pour μ. D'après le lemme 7 et la remarque qui le suit, μ est limite d'une suite croissante de mesures μ_n dont le support est compact et contenu dans l'ensemble des points x tels que $U^\mu(x) \leqq f(x)$, et dont le potentiel U^{μ_n} est continu et converge partout vers U^μ; comme f est dans la classe B', on a partout $U^{\mu_n} \leqq f$, d'où, à la limite, la propriété à démontrer: $U^\mu \leqq f$ partout.

3⁰) *La borne inférieure de deux fonctions de la classe B (respect. de la classe C) est dans la même classe.*

C'est une conséquence évidente des définitions.

---

[21]) On pourrait aussi définir une classe A analogue à la classe α, mais cela exigerait une étude approfondie des points irréguliers que nous n'envisagerons pas ici; dans le cas du noyau d'ordre α $(0 < \alpha < 2)$, cela conduirait à la définition bien connue des fonctions surharmoniques d'ordre fractionnaire de M. Riesz [10] et O. Frostman [7].

[22]) Si en effet on pose $U^{\nu_n} = \inf(nU^\mu, f)$, où μ est une mesure de E non nulle (donc de potentiel strictement positif dans tout l'espace), on voit que f est partout limite d'une suite croissante de fonctions s. c. i., donc est elle-même s. c. i.

4⁰) *Si une fonction f de la classe B est majorée par un potentiel d'énergie finie, il existe une $\mu \in E$ telle que $U^{\mu} \leqq f$ partout, $U^{\mu} = f$ à p. p. p.*; en effet f est alors dans la classe β, et, d'après la propriété (ii) des fonctions de cette classe, il existe une $\mu \in E$ avec $U^{\mu} = f$ à p. p. p., donc $U^{\mu} \leqq f$ partout (puisque f est dans la classe B).

Comme application de la remarque 2⁰), montrons que, dans le cas d'un noyau régulier, le principe complet du maximum (§ 5) est équivalent à la forme suivante, qu'on peut appeler la "forme élémentaire" (par analogie avec la forme élémentaire du principe de Frostman):

(M) *Si les potentiels d'énergie finie U^{μ} et U^{ν} sont continus, et si la borne supérieure de $U^{\mu} - U^{\nu}$ est strictement positive, cette borne est atteinte sur le support de μ, supposé compact.*

En effet, d'après la définition du § 5, le principe complet exprime que la classe B contient toutes les fonctions de la forme $U^{\nu} + c$, où U^{ν} est un potentiel *continu* d'énergie finie, et c une constante non négative. Il est clair que cette hypothèse entraîne (M); inversement on voit facilement, en raisonnant par l'absurde, que si (M) est vérifié, les fonctions de la forme $U^{\nu} + c$ sont dans la classe B', et par suite dans la classe B; d'où le résultat.

9. Critère pour le principe complet du maximum.

Le théorème suivant donne un critère pour le principe complet, et met en évidence les propriétés principales des fonctions surharmoniques par rapport à un noyau régulier satisfaisant à ce principe:

Théorème 3. *Pour qu'un noyau régulier K satisfasse au principe complet du maximum, il faut et il suffit qu'il existe une famille $\mathfrak{F}$ de mesures σ, distinctes de ε*[23]), *de masse totale $\leqq 1$, telles que $U^{\sigma} \leqq K$ partout, et telles que, pour tout voisinage V de 0, il existe une mesure $\sigma \in \mathfrak{F}$ avec $U^{\sigma} = K$ hors de V.*

S'il en est ainsi, tout potentiel, toute constante $\geqq 0$ est dans les classes B et C; en outre, pour une fonction $f \geqq 0$ et s. c. i., les quatre propriétés suivantes sont équivalentes:

(i) *f est dans la classe B.*

(ii) *f est dans la classe C.*

(iii) *f est limite d'une suite croissante de potentiels d'énergie finie.*

(iv) *f satisfait en tout point x à la relation:*

$$f(x) \geqq \int f(x+y)\, d\sigma(y) \quad \text{pour toute } \sigma \in \mathfrak{F}. \tag{2}$$

---

[23]) Rappelons que ε désigne la mesure qui consiste en une masse $+1$ placée à l'origine.

Pour démontrer ce théorème nous établirons successivement les propositions suivantes:

Proposition 1. *Si le noyau $K(x)$ satisfait au principe complet, il est dans la classe B.*

Il suffit de montrer que K est alors dans la classe B': soit donc μ une mesure à support compact F, dont le potentiel est continu et majoré par K sur F; d'après la continuité de K et de U^μ on a, pour toute constante $c>0$, $U^\mu \leqq K+c$ dans un voisinage de F; si donc U^{μ_n} et K_n sont les régularisés de U^μ et de K (par exemple par médiations sur les e_n^x) on a $U^{\mu_n} \leqq K_n+c$ sur le support de μ_n pour n assez grand; K_n étant lui-même un potentiel d'énergie finie, cette relation a lieu dans tout l'espace (principe complet); il suffit alors de faire $n \to +\infty$, puis $c \to 0$, pour obtenir la relation à démontrer: $U^\mu \leqq K$ partout.

Proposition 2. *Si le noyau satisfait au principe complet, il existe une famille $\mathfrak{F}$.*

On va montrer qu'on peut "balayer" la mesure ε (qui est d'énergie finie seulement si $K(0)<+\infty$) sur l'ensemble fermé (non borné) F_s des points x tels que $K(x) \leqq s$; ou tout au moins qu'on peut trouver, pour tout $s>0$, une mesure ε_s de masse totale $\leqq 1$, portée par F_s, dont le potentiel vaut K en tout point intérieur de F_s et est majoré partout par K. De telles mesures ε_s constitueront évidemment une famille $\mathfrak{F}$.

Soit à cet effet un nombre t $(0<t<s)$; K est borné sur le compact $F_s \cap e_t$, donc il existe (d'après le lemme 3 et la proposition 1 ci-dessus) une mesure μ de E portée par ce compact, avec $U^\mu = K$ à p. p. p. sur ce compact, $U^\mu \leqq K$ partout.

La masse totale de cette mesure μ est $\leqq 1$: soit en effet γ la distribution d'équilibre de la boule fermée $B_r = B(0, r)$ (l'existence de γ découle du principe complet); par définition $U^\gamma \leqq 1$ q. p., $U^\gamma = 1$ q. p. sur B_r; comme γ est à support compact, le lemme 5 entraîne $U^\gamma \leqq 1$ partout, $U^\gamma = 1$ en tout point intérieur de B_r; on peut donc écrire:

$$\int_{B_r} d\mu \leqq \int U^\gamma d\mu = \int U^\mu d\gamma \leqq \int K d\gamma = U^\gamma(0) = 1,$$

d'où le résultat, pour $r \to +\infty$.

L'énergie de μ est donc bornée, indépendamment de t; lorsque t tend vers 0 en décroissant, U^μ croît (d'après le second principe), donc μ converge fortement vers une mesure ε_s portée par F_s, de masse totale $\leqq 1$, de potentiel $U^{\varepsilon_s} = K$ q. p. sur F_s (lemme 3), donc $\leqq K$ partout (proposition 1). Il reste à vérifier qu'on a effectivement $U^\mu = K$ en tout point intérieur de F_s, ce qui résulte de la continuité de K et de ce que U^μ est partout limite de ses régularisées (remarque 2° du lemme 5 bis). [24])

Définition. Nous venons de voir que le critère est nécessaire; *à l'avenir nous supposerons l'existence d'une famille* $\mathfrak{F}$ et nous appellerons *fonction surharmonique* toute fonction $f \geqq 0$, s. c. i, telle que, en tout point x, on ait la relation

$$f(x) \geqq \int f(x+y)\, d\sigma(y) = \int f\, d\sigma^x \text{ pour toute } \sigma \in \mathfrak{F}. \tag{2}$$

Cette condition est indépendante de la famille $\mathfrak{F}$ particulière considérée, comme cela résultera du théorème 3 lorsqu'il aura été démontré: l'une quelconque des conditions (i), (ii), (iii) de ce théorème caractérisera en effet les fonctions surharmoniques.

Proposition 3. *Tout potentiel est surharmonique.*

Un potentiel U^μ (engendré par une mesure positive tout à fait arbitraire) étant s. c. i., il suffit de montrer (2), qui est une conséquence du théorème de FUBINI (que les intégrales écrites soient finies ou non):

$$\int U^\mu\, d\sigma^x = \int U^{\sigma^x} d\mu \leqq \int K(y-x)\, d\mu(y) = U^\mu(x).$$

On démontre aussi facilement les propositions suivantes:

Toute constante c $(0 \leqq c \leqq +\infty)$ est surharmonique.

La borne inférieure de deux fonctions surharmoniques est surharmonique.

La limite d'une suite croissante de fonctions surharmoniques est surharmonique.

Proposition 4. *Toute fonction surharmonique est dans la classe B.*

Il suffit de montrer qu'une telle fonction f est dans la classe B'; ou encore: si une mesure μ, à support compact C, engendre un potentiel continu, et si la borne supérieure c de $U^\mu - f$ est strictement positive, cette borne est atteinte en un point de C (au moins).

A cet effet désignons par F l'ensemble des points x tels que $U^\mu(x) - f(x) = c$; cet ensemble est non-vide et compact [25]); nous allons montrer que l'hypothèse: "C est disjoint de F" conduit à une contradiction.

---

[24]) On peut même préciser davantage: pour s assez grand, $U^{\mu_s} = K$ en tout point de F_s sans exception. Supposons en effet s assez grand pour que e_s soit convexe, et soit x un point frontière; on peut trouver un voisinage V de x tel que, si μ est la restriction de ε_s à V, $U^\mu(x)$ soit arbitrairement petit. Pour t assez grand la valeur moyenne de U^μ sur $e_t^x \cap F_s$ est $\leqq 2^m A\, U^\mu(x)$ (d'après le lemme 4 et les hypothèses de convexité), d'où le résultat, compte tenu de la continuité de $U^{\varepsilon_s - \mu}$ au voisinage de x.

[25]) Car $U^\mu - f$ est semi continue supérieurement, et $U^\mu(x)$ est arbitrairement petit pour $|x|$ assez grand (μ étant à support compact).

En effet la distance de tout point de C à tout point de F est alors bornée inférieurement par un nombre strictement positif; il existe donc une mesure $\sigma \in \mathfrak{F}$ telle que la fonction $U^{\sigma}(y-x)$, potentiel engendré au point y par la mesure σ^{x} déduite de σ par la translation x, soit égale à $K(y-x)$ quels que soient $y \in C$ et $x \in F$. On a donc:

$$\int U^{\mu}(x+y)\,d\sigma(y) = \int U^{\mu} d\sigma^{x} = \int U^{\sigma^{x}} d\mu = \int K(y-x)\,d\mu(y) = U^{\mu}(x).$$

En rapprochant de (2) il vient, pour tout $x \in E$:

$$\int (U^{\mu}-f)\,d\sigma^{x} \geqq U^{\mu}(x) - f(x) = c.$$

La moyenne, par rapport à la mesure σ^{x}, de la fonction $U^{\mu}-f-c \leqq 0$ étant $\geqq 0$, l'ensemble des points où cette fonction est <0 est de mesure nulle pour σ^{x}; comme cet ensemble est ouvert (car f est s. c. i.), on a $U^{\mu}-f=c$ en tout point du support de σ^{x} (et en outre la masse totale de σ^{x} doit être égale à 1).

Le support F_{σ} de σ n'est pas réduit au seul point 0 (puisque σ est de masse totale 1 et est, par hypothèse, distincte de ε); soit un point $z \neq 0$, $z \in F_{\sigma}$; le point $x_1 = x+z$ appartient au support de σ^{x}, donc aussi à F; en recommençant le raisonnement avec x_1 on met en évidence une suite infinie de points $x_k = x+kz$ $(k=0, 1, \ldots)$ appartenant tous à F, ce qui est en contradiction avec l'hypothèse que F est compact.

Le résultat est donc établi. Il résulte des propositions 3 et 4 que tout potentiel et toute constante positive sont dans la classe B, ce qui démontre que tout noyau régulier qui possède une famille $\mathfrak{F}$ satisfait au principe complet.

La démonstration du théorème fondamental sera achevée si nous prouvons les propositions 6 et 7 qu'on va lire ci-dessous; voici d'abord une proposition auxiliaire:

Proposition 5. *Soient U^{μ} un potentiel quelconque, et f une fonction s. c. i.; si on a $U^{\mu} \leqq f$ partout, et $U^{\mu}=f$ presque partout (pour la mesure de Lebesgue), alors $U^{\mu}=f$ partout.*

Si U^{μ} est majorée par le potentiel d'une mesure à support compact, U^{μ} est partout limite de ses régularisées (lemme 5 bis), qui sont égales aux régularisées de f, d'où $U^{\mu} \geqq f$ (en vertu de la s. c. i. de f), et par suite $U^{\mu}=f$ partout.

Dans le cas général, soit ν une mesure de E à support compact; $g = \inf(U^{\mu}, U^{\nu})$ est surharmonique (proposition 3); elle est donc dans la classe B, et il existe une mesure $\lambda \in E$ avec $U^{\lambda}=g$ à p. p. p., $U^{\lambda} \leqq g$ partout (remarque 4° du § 8). D'après la première partie de la démonstration, $U^{\lambda}=g$ partout, d'où $U^{\lambda} = \inf(U^{\nu}, f)$ presque partout, et $U^{\lambda} \leqq \inf(U^{\nu}, f)$ partout, ce qui entraîne (toujours d'après la première partie) $U^\lambda = \inf(U^\nu, f)$ partout. En résumé on a $\inf(U^\mu, U^\nu) = \inf(f, U^\nu)$ pour toute $\nu \in E$ à support compact, d'où finalement $U^\mu = f$ partout.

Proposition 6. *La classe B est contenue dans la classe C.*

Soient effet f une fonction de la classe B, et U^μ un potentiel d'énergie finie; U^μ est dans la classe B et il en est de même de $\inf(U^\mu, f)$ (remarque 3° du § 8); cette fonction étant majorée par un potentiel d'énergie finie, il existe une mesure $\lambda \in E$ avec $U^\lambda \leq \inf(U^\mu, f)$ partout, $U^\lambda = \inf(U^\mu, f)$ à p. p. (remarque 4° du § 8); la proposition 5 entraîne alors l'égalité à démontrer: $U^\lambda = \inf(U^\mu, f)$ partout.

Proposition 7. *Toute fonction de la classe C est limite d'une suite croissante de potentiels d'énergie finie.*

Soient en effet f une telle fonction et μ une mesure de E non identiquement nulle; la fonction $\inf(nU^\mu, f)$ est partout égale à un potentiel d'énergie finie U^{μ_n} (proposition 6), et on a partout: $f = \lim U^{\mu_n}$.

Ceci achève la démonstration du théorème. Signalons les corollaires suivants: *tout potentiel est limite d'une suite croissante de potentiels d'énergie finie; toute fonction surharmonique majorée par un potentiel d'énergie finie est partout égale à un potentiel d'énergie finie.*

10. Remarques finales.

a) Rappelons que la forme élémentaire du principe de FROSTMAN est vérifiée lorsque le noyau régulier K est sousharmonique (au sens ordinaire) en tout point $x \neq 0$ (cf. [5]); pour un tel noyau, tout compact admet une distribution d'équilibre dont le potentiel vaut 1 en tout point intérieur au compact.

b) La définition donnée par F. RIESZ des fonctions surharmoniques [9] concorde bien avec celle donnée ici lorsque le noyau est le noyau newtonien r^{2-m} (dans l'espace de dimension $m \geq 3$); en effet il suffit alors de prendre pour famille $\mathfrak{F}$ celle des distributions homogènes, de masse totale un, portées par les sphères de centre 0.

c) Un noyau régulier étant donné, il se peut qu'une famille $\mathfrak{F}$ soit en évidence a priori. Par exemple si le noyau est $r^{\alpha-m}$ $(m \geq 2, 0 < \alpha < 2)$, on obtient les mesures d'une famille $\mathfrak{F}$ en effectuant la transformation de KELVIN sur les distributions d'équilibre des boules de centre 0 (cf. [10]). En utilisant cette famille $\mathfrak{F}$ pour caractériser les fonctions surharmoniques relatives à un tel noyau, on retrouve une des deux définitions des fonctions "surharmoniques d'ordre α" données par M. RIESZ; elle généralise la définition de F. RIESZ.

Signalons rapidement un autre exemple de noyau pour lequel une famille $\mathfrak{F}$ est en évidence a priori: il s'agit de la solution élémentaire, bien connue, de l'équation $\Delta U - a^2 U = 0$ (a constante > 0). Par exemple, pour trois dimensions, on obtient le noyau e^{-ar}/r, qui est évidemment régulier; sa transformée de Fourier $(a^2 + 4\pi^2 r^2)^{-1}$ (à un facteur constant positif près) est bien une fonction positive à croissance lente, ainsi que son inverse, de sorte que la fonction e^{-ar}/r est bien le noyau d'une théorie du potentiel. Pour ce noyau, associons à la sphère de centre 0 et de rayon r la distribution de la masse totale $ar/\mathrm{sh}\, ar$, répartie uniformément sur la sphère: lorsque r varie on obtient une famille $\mathfrak{F}$ dont l'existence prouve que *le noyau e^{-ar}/r satisfait au principe complet.* Dans un travail ultérieur, nous étudierons plus en détail ce noyau et les fonctions surharmoniques correspondantes.

Références bibliographiques.

[1] H. Cartan, Sur les fondements de la théorie du potentiel, *Bulletin de la Société Math. de France,* **69** (1941), p. 71—96.
[2] H Cartan, Théorie du potentiel newtonien: énergie, capacité, suites de potentiels, *ibidem,* **73** (1945); p. 74—106.
[3] H. Cartan, Théorie générale du balayage en potentiel newtonien, *Annales Université de Grenoble,* **22** (1946), p. 221—280.
[4] J. Deny, Les potentiels d'énergie finie, *Acta Math.,* **82** (1950), p. 107—183.
[4 bis] G. C. Evans, On potentials of positive mass, *Transactions American Math. Society,* **37** (1935), p. 226—253.
[5] O. Frostman, Potentiels d'équilibre et capacité des ensembles, *Thèse* (Lund, 1935).
[6] O. Frostman, Sur le balayage des masses, *ces Acta,* **9** (1938), p. 43—51.
[7] O. Frostman, Sur les fonctions surharmoniques d'ordre fractionnaire, *Arkiv för Math., Astronomi och Fysik,* **26 A** (1939).
[8] A. J. Maria, The potential of a positive mass and the weight function of Wiener, *Proceedings National Academy of Sciences, USA,* **20** (1934), p. 485—489.
[9] F. Riesz, Sur les fonctions subharmoniques et leur rapport à la théorie du potentiel, *Acta Math.,* **54** (1930), p. 321—360.
[10] M. Riesz, Intégrales de Riemann-Liouville et potentiels, *ces Acta,* **9** (1938), p. 1—42.
[11] F. Vasilesco, Sur la continuité du potentiel à travers les masses, etc., *Comptes Rendus Acad. Sci. Paris,* **200** (1935), p. 1173—1174.

(Reçu le 27 octobre 1949)