Über die Lage der Doppelgeraden von gewissen Flächen gegebener geometrischer Ordnung.

Von GYULA SZ. NAGY in Szeged.

1. Unter einer Fläche verstehen wir eine stetige und geschlossene Fläche, die in jedem ihrer Punkte eine stetige Berührungsebene besitzt, die kein ebenes Flächenstück enthält und für die und für ihre Berührungskegel jede ebene Schnittkurve sich in eine endliche Anzahl von Konvexbogen zerlegen läßt. Die ebenen Schnittkurven können ganze Geraden enthalten. Es handelt sich in dieser Arbeit nur um *solche Flächen, die keine Ebene und keine Regelfläche zweiter Ordnung enthalten.*

Die *geometrische Ordnung* (oder kurz die *Ordnung*) einer Fläche ist die höchste Anzahl (einfacher) reeller Punkte, in denen die Fläche von einer nicht ganz der Fläche zugehörigen Geraden getroffen wird. Es wird angenommen, daß jede Gerade, die mit der Fläche eine größere Anzahl von Punkten gemeinsam hat, als die Ordnung angibt, ganz auf der Fläche liegt und daß die Fläche von jeder Geraden, die durch einen Punkt P einer k-fachen Geraden der Fläche geht, k-fach in P getroffen wird.

Früher habe ich den Satz bewiesen[1]):

Hat eine Fläche n-ter Ordnung $n-2$ Schalen dritter Ordnung (und höchstens eine Schale zweiter Ordnung), so haben die Doppelgeraden der Fläche einen Punkt gemeinsam. Die einzige Ausnahme kann im Falle $n=6$ auftreten. Es gibt nämlich eine Fläche 6-ter Ordnung, die vier Schalen 3-ter Ordnung besitzt und deren Doppelgeraden die sechs Kanten eines Tetraeders sind. Diese Flächen n-ter bzw. 6-ter Ordnung sind vom Maximalindex, d. h. sie haben mit jeder Geraden mindestens $n-2$ bzw. 4 Punkte gemeinsam.

Ist die Ordnung n einer Fläche kleiner als 6, oder hat die Fläche eine $(n-3)$-fache, oder $(n-2)$-fache Gerade, so kann man die Lage

[1]) GY. (J.) v. SZ. NAGY, Über Flächen vom Maximalindex, *Math. Annalen*, **98** (1928), S. 657—683.

ihrer Doppelgeraden auch dann einfach charakterisieren, wenn die Fläche nicht vom Maximalindex ist.

2. Man kann leicht einsehen, daß eine Fläche 3-ter Ordnung, die keine Ebene enthält, höchstens eine Doppelgerade besitzt.

Bezeichnet F eine Fläche 4-ter oder 5-ter geometrischer Ordnung, (die keine Ebene und keine Regelfläche 2-ter Ordnung enthält), so gelten die Sätze:

I. *Eine Fläche F besitzt nicht drei solche Doppelgeraden, die in einer Ebene liegen, oder windschief sind.*

II. *Enthält eine Ebene zwei Doppelgeraden g_1 und g_2 einer Fläche F, so enthält sie außerhalb beider Geraden g_1 und g_2 keinen Doppelpunkt der Fläche.*

III. *Besitzt eine Fläche F zwei windschiefe Doppelgeraden g_1 und g_2, so wird das Geradenpaar $g_1 g_2$ von jeder anderen Doppelgeraden der Fläche geschnitten. Hat die Fläche außer g_1 und g_2 noch die Doppelgeraden g_3 und g_4, so sind auch g_3 und g_4 windschief. Die Geraden g_1, g_2, g_3, und g_4 bilden dann ein räumliches Viereck und die Fläche hat keine andere Doppelgerade.*

IV. *Haben drei Doppelgeraden einer Fläche F einen Punkt P gemeinsam, so gehen auch ihre übrigen Doppelgeraden durch P.*

V. *Besitzt eine Fläche F mindestens 5 (verschiedene) Doppelgeraden, so haben ihre Doppelgeraden einen Punkt gemeinsam.*

VI. *Es gibt Flächen F, deren Doppelgeraden die Seiten eines räumlichen Vierecks sind. Es gibt Flächen F mit beliebig vielen Doppelgeraden.*

3. Hätte eine Fläche F (4-ter oder 5-ter Ordnung) in einer Ebene drei Doppelgeraden oder zwei Doppelgeraden g_1 und g_2 und einen außerhalb von g_1 und g_2 liegenden Doppelpunkt A, so würde die Fläche von jeder Geraden bzw. von jeder durch A gehenden Geraden der Ebene in mindestens 6 Punkten getroffen. Darum müßten diese Geraden und damit auch ihre Ebene der Fläche zugehören. Hätte eine Fläche F drei windschiefe Doppelgeraden g_1, g_2 und g_3, so würde sie von jeder gemeinsamen Transversalen t der Geraden g_1, g_2 und g_3 in mindestens 6 Punkten getroffen. Deshalb müßten die Transversalen t und auch die von ihnen gebildete Regelfläche 2-ter Ordnung der Fläche zugehören.

Damit sind die Sätze I und II bewiesen, weil F keine Ebene und keine Regelfläche 2-ter Ordnung enthält.

Besitzt eine Fläche F die Doppelgeraden $g_1, g_2, g_3, \ldots, g_d$ $(d \geqq 3)$ und sind g_1 und g_2 windschief, so trifft g_3 mindestens eine der Geraden g_1 und g_2 (Satz I). Würde g_2 von g_3 nicht getroffen, so würde die Ebene $g_1 g_3$ von g_2 außerhalb von g_1 und g_3 getroffen. Dies ist aber unmöglich (Satz II). g_3 trifft also beide Geraden g_1 und g_2. Ist $d \geqq 4$, so fallen die Geraden g_3 und g_4 nicht in eine Ebene. Widrigenfalls enthielte die Ebene $g_3 g_4$ drei Doppelgeraden: g_3, g_4 und eine der Geraden g_1 und g_2. Dies ist aber nach Satz I unmöglich. Im Falle $d \geqq 5$ wären also die Geraden g_3, g_4 und g_5, im Widerspruch zum Satz I, windschief.

Damit ist der Satz III bewiesen.

Bilden die Doppelgeraden g_1, g_2 und g_3 einer Fläche F eine Ecke, so fällt der Schnittpunkt eines vierten Doppelgeraden g_4 mit einer Ebene der Ecke nach Satz II mindestens auf eine Kante der Ecke. Dies ist nur dann möglich, wenn g_4 durch den Scheitel der Ecke geht. Damit ist der Satz IV bewiesen.

Der Satz V folgt aus den Sätzen III und IV.

Es gibt nämlich unter den Doppelgeraden $g_1, g_2, \ldots, g_d$ einer Fläche F im Falle $d > 4$ kein windschiefes Paar. Die Gerade g_3 schneidet deshalb beide Geraden g_1 und g_2 und geht deshalb durch den gemeinsamen Punkt von g_1 und g_2, weil sie nicht in die Ebene $g_1 g_2$ fallen kann. Damit ist der Satz V bewiesen.

4. Man kann leicht einsehen, daß die Gleichung

$$H_4(x, y, z, t) = x^2 t^2 + xyzt + y^2 z^2 = 0$$

bzw.

$$H_5(x, y, z, t) = x^3 t^2 + x^2 t^3 + y^2 z^3 + y^3 z^2 + xyzt(x + y + z + t) = 0$$

in homogenen Tetraederkoordinaten eine Fläche F 4-ter bzw. 5-ter geometrischer Ordnung herstellt, für welche die vier Kanten des Koordinatentetraeders

$$x = 0, y = 0;\ x = 0, z = 0;\ y = 0, t = 0 \text{ und } z = 0, t = 0$$

Doppelgeraden sind.

Bezeichnet C eine aus einem Oval Z_0 und aus einem Zug Z_1 3-ter Ordnung bestehende Kurve 3-ter Ordnung und bezeichnet n eine beliebige natürliche Zahl, so kann man leicht ein zweites Oval Z_0' konstruieren, so daß Z_0' von Z_0 in $2n$ Punkten geschnitten wird und daß Z_0' (wie Z_0) von keiner Geraden getroffen wird, die mit Z_1 drei Punkte gemeinsam hat. Die Züge Z_0 und Z_0' bzw. Z_0, Z_0' und Z_1 bilden dann eine Kurve K_4 bzw. K_5 4-ter bzw. 5-ter Ordnung mit $2n$ Doppelpunkten. Projiziert man die Kurve K_4 bzw. K_5 von einem außerhalb ihrer Ebene liegenden Punkt aus, so erhält man eine Kegelfläche F 4-ter bzw. 5-ter Ordnung mit $2n$ Doppelgeraden. Damit ist der Satz VI bewiesen.

5. Die Sätze I—VI lassen sich so verallgemeinern:

Bezeichnet F eine Fläche n-ter Ordnung ($n \geqq 4$), die keine Ebene und keine Regelfläche 2-ter Ordnung enthält und die eine $(n-3)$-fache *oder $(n-2)$-fache Gerade g_0 und d (>2) Doppelgeraden $g_1, g_2, \ldots, g_d$ besitzt, so gelten die Sätze:*

VII. *Es gibt kein Geradentripel g_0, g_i, g_k $(1 \leqq i < k \leqq d)$, dessen Geraden in einer Ebene liegen oder windschief sind.*

VIII. *Enthält eine Ebene die Geraden g_0 und g_1, so enthält sie außerhalb von g_0 und g_1 keinen Doppelpunkt der Fläche F. Liegen die Geraden g_1 und g_2 in einer Ebene, so fällt der Schnittpunkt dieser Ebene mit g_0 mindestens auf eine der Geraden g_1 und g_2.*

IX. *Sind die Geraden g_0 und g_1 windschief, so werden beide Geraden von jeder der übrigen $d-1$ Doppelgeraden $g_2, g_3, \ldots, g_d$ getroffen.*

X. *Die $(n-3)$-fache, oder $(n-2)$-fache Gerade g_0 wird von mindestens $d-1$ Doppelgeraden der Fläche geschnitten.*

6. Hätte eine Fläche F (n-ter Ordnung mit einer $(n-3)$-fachen oder $(n-2)$-fachen Geraden g_0 und mit den Doppelgeraden $g_1, g_2, \ldots, g_d$) in einer Ebene E zwei unter den Geraden g_0, g_1 und g_2 und einen außerhalb beider Geraden liegenden Punkt A der dritten Geraden, so würde die Fläche von jeder durch A gehenden Geraden der Ebene E in mindestens $(n-3)+2+2=n+1$ Punkten getroffen. Deshalb müßte die Ebene E der Fläche F zugehören. Wären die Geraden g_0, g_1 und g_2 windschief, so würden ihre Transversalen der Fläche zugehören. Daraus folgen die Sätze VII und VIII.

Sind g_0 und g_1 windschief, so trifft g_2 (nach Satz VII) mindestens eine von ihnen. Würde g_0 bzw. g_1 von g_2 nicht getroffen, so müßte die Ebene $g_1 g_2$ bzw. $g_0 g_2$ (nach Satz VIII) der Fläche zugehören. Daraus folgt der Satz IX.

Wird g_0 von einer Geraden g_i $(i>0)$ nicht getroffen, so wird sie (und g_i) von den übrigen $d-1$ Geraden g_k geschnitten. Daraus folgt der Satz X.

Die Sätze VII—X gelten offenbar auch dann, wenn die Vielfachheit einiger Geraden unter $g_1, g_2, \ldots, g_d$ für F größer als Zwei ist.

7. Die Sätze III und IV lassen sich auch auf folgende Weise verallgemeinern:

Bezeichnet F' eine Fläche n-ter Ordnung, welche die mehrfachen Geraden $g_1, g_2, \ldots, g_d$ von den Vielfachheiten $m_1, m_2, \ldots, m_d$ $(m_k \geqq 2, d>2)$ besitzt, so gelten die Sätze:

XI. *Sind g_1 und g_2 windschief und ist $n-1 \leqq m_1+m_2 \leqq n$, so wird das Geradenpaar g_1, g_2, von jeder der übrigen $d-2$ Geraden g_k geschnitten.*

XII. *Sind $m_1+m_2 \geqq n-1$, $m_1+m_3 \geqq n-1$, $m_2+m_3 \geqq n-1$ und haben die Geraden g_1, g_2 und g_3 einen Punkt S gemeinsam, so geht auch jede andere Gerade g_k durch S.*

Der Beweis des Satzes XI geschieht ebenso, wie derjenige des Satzes IX.

Die Geraden g_1, g_2, g_3 im Satz XII sind Kanten einer Ecke vom Scheitel S, weil sie nicht in eine Ebene fallen können. Der Schnittpunkt A der Geraden g_4 mit der Ebene $g_1 g_2$ ($g_1 g_3$ bzw. $g_2 g_3$) fällt nicht außerhalb beider Geraden g_1, g_2 (g_1, g_3 bzw. g_2, g_3). Widrigenfalls hätte jede durch A gehende Gerade der Ebene mit F' mindestens $n+1$ Punkte gemeinsam. Daraus folgt, daß g_4 jede der Geraden g_1, g_2, g_3 schneidet und deshalb durch S geht. Damit ist der Satz XII bewiesen.

Aus den Sätzen XI und XII folgt die folgende Verallgemeinerung von V:

XIII. *Bezeichnet F_6 bzw. F_7 eine Fläche 6-ter bzw. 7-ter Ordnung, welche $d (\geqq 5)$ mehrfache Geraden $g_1, g_2, \ldots, g_d$ besitzt, unter denen die Geraden g_1, g_2, bzw. g_1, g_2, g_3, dreifache Geraden sind, so haben die d Geraden $g_1, g_2, \ldots, g_d$ einen Punkt gemeinsam.*

Wir nehmen erst an, daß g_1 und g_2 windschief sind. Dann wird das Geradenpaar g_1, g_2 (nach Satz IX) von den Geraden $g_3, g_4, g_5, \ldots$ geschnitten. Die Geraden g_3, g_4, g_5 sind windschief. Widrigenfalls enthielte die Ebene $g_3 g_4$ ($g_3 g_5$ oder $g_4 g_5$) noch eine der Geraden g_1 und g_2. Dann würde die Fläche F_6 bzw. F_7 von jeder Geraden der betreffenden Ebene in mindestens 7 bzw. 8 Punkten getroffen.

Daraus folgt, daß je zwei der Geraden g_1, g_2, g_3 sich schneiden müssen. Die Geraden g_1, g_2, g_3 bilden eine Ecke, weil sie nicht in eine Ebene fallen können. Damit ist der Satz XIII auf Grund von XII bewiesen.

8. Wir beweisen noch die Sätze:

XIV. *Enthält eine Fläche F_0 n-ter Ordnung keine Ebene und besitzt sie eine $(n-1)$-fache Gerade g_0, so ist sie eine Regelfläche, die außerhalb von g_0 keinen singulären Punkt besitzt.*

XV. *Enthält eine Fläche F'_0 n-ter Ordnung keine Regelfläche 2-ter Ordnung, besitzt sie eine m-fache Gerade g_0 und eine $m' = (n-m)$-fache Gerade g'_0 und sind g_0 und g'_0 windschief, so ist F'_0 eine Regelfläche.*

Die Fläche F_0 wird von einer Ebene, die durch g_0 und durch einen außerhalb von g_0 liegenden beliebigen Punkt P von F_0 geht, in der $(n-1)$-fach zu rechnenden Geraden g_0 und in einer durch P gehenden Geraden getroffen. Wäre P ein singulärer Punkt von F_0, so würde E zu F_0 gehören, weil jede durch P gehende Gerade der Ebene mit F_0 mindestens $n+1$ Punkte gemeinsam hätte.

Bezeichnet P einen außerhalb beider Geraden g_0 und g'_0 liegenden Punkt der Fläche F'_0, so liegt die durch P gehende Transversale von g_0 und g'_0 ganz auf der Fläche, weil sie mit F'_0 mindestens $n+1$ Punkte gemeinsam hat.

(Eingegangen am 10. Dezember 1946.)