Über die Verteilung der Primzahlen (I).

Von P. TURÁN in Budapest.

§ I.

In seinem Vortrag zu Cambridge in 1912 bezeichnete Professor LANDAU als eines der Hauptprobleme der Primzahltheorie den Beweis folgender Behauptung: wenn x eine genügend große, sonst aber beliebige Zahl bedeutet, dann gibt es zwischen x^2 und $(x+1)^2$ oder — was dasselbe bedeutet — zwischen x und $x+2\sqrt{x}+1$ immer Primzahlen. In diesem Aufsatz wollen wir uns mit dieser Frage beschäftigen.

Das Problem ist offenbar mit der Abschätzung von oben des Restgliedes der Primzahlformel verbunden. Wenn wir die berühmte Riemannsche Vermutung $\left(\text{d. h. } \zeta(s) \neq 0 \text{ für } \sigma > \frac{1}{2},\ s = \sigma + it\right)$ als bewiesen annehmen und wenn p die sukzessiven Primzahlen durchläuft, dann gilt für $x \to \infty$ nach H. VON KOCH[1])

$$(1) \qquad \pi(x) = \sum_{p \leqq x} 1 = \int_2^x \frac{dt}{\log t} + O(\sqrt{x} \log x).$$

Aus (1) ergibt sich leicht die Existenz zweier numerischen Konstanten c_1 und c_2 so, daß für $x \geqq c_1$ zwischen x und $x + c_2\sqrt{x}\log^2 x$ immer Primzahlen existieren. Dieses Ergebnis wurde von H. CRAMÉR[2]) verbessert, wieder unter Annahme der Riemannschen Vermutung, indem er $\log^2 x$ durch $\log x$ ersetzen konnte. Dieser Weg wurde

[1]) H. VON KOCH, Sur la distribution des nombres premiers, *Acta Math.*, **24** (1901), p. 159—182.

[2]) H. CRAMÉR, Some theorems concerning prime numbers, *Arkiv för Math.*, **15** (1920), No. 5.

aber ziemlich hoffnungslos, als es klargemacht wurde, daß die Abschätzung des Restgliedes von oben in (1) mit der Wahrheit der Riemannschen Vermutung *untrennbar* verbunden ist; aus dieser Bemerkung erhellt sich, daß in der Riemannschen Vermutung im Wesen schon eine Behauptung vorliegt, welche in einer verschleierten Form die Verteilung der Primzahlen reguliert. LANDAU[3]) ist noch weiter gegangen, er hat bekanntlich direkt einen arithmetischen Zusammenhang zwischen ζ-Wurzeln und Primzahlen vermutet.

Einen sehr wichtigen Schritt machte HOHEISEL[4]) im Jahre 1930. Mittels einer sehr originellen Methode bewies er ohne Hypothesen, daß für alle hinreichend große x zwischen x und $x+x^{1-\frac{1}{33000}}$ immer Primzahlen existieren. Er entdeckte, daß man zur asymptotischen Abschätzung von $\pi(x+x^a)-\pi(x)$ $(a<1)$ kein Gebrauch davon zu machen hat, daß $\zeta(s)\neq 0$ in der Halbebene $\sigma>a$ ist, es genügt zu wissen I. daß $\zeta(s)\neq 0$ für ein Bereich $\sigma>1-D\frac{\log\log(|t|+3)}{\log(|t|+3)}$, $|t|>c_3$, wo D, c_3 und ferner $c_4, \ldots$ numerische Konstanten bedeuten, II. daß keine der Halbebenen $\sigma>\sigma_0\left(\frac{1}{2}<\sigma_0<1\right)$ „zu viele“ ζ-Wurzeln enthalten kann. Was I anbelangt, mußte er nur Littlewoods bekannte Abschätzung numerisch verfolgen, für II genügte ihm eine, etwas verschärfte Form des bekannten Satz von CARLSON[5]), nach welchem für die nichttrivialen ζ-Wurzeln, $\varrho=\sigma_\varrho+it_\varrho$,

$$(2)\qquad N(\sigma_0, T)\equiv \sum_{\substack{\varrho \\ \sigma_\varrho\geqq\sigma_0 \\ 0<t_\varrho\leqq T}} 1 < c_4 T^{4\sigma_0(1-\sigma_0)}\log^6 T.$$

Der Exponent $1-\frac{1}{33000}$ wurde zunächst durch die Vergrößerung von D in I von H. HEILBRONN[6]) zu $1-\frac{1}{250}$ verbessert; etwas

[3]) E. LANDAU, *Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen* (Leipzig, 1909). Siehe besonders p. 367—368.

[4]) G. HOHEISEL, Primzahlprobleme in der Analysis, *Sitzungsberichte der Preußischen Akademie, phys. math. Klasse*, 1930, p. 580—588.

[5]) F. CARLSON, Über die Nullstellen der Dirichletschen Reihen und der Riemannschen ζ-Funktion, *Arkiv för Math.*, 15 (1920), No. 20.

[6]) H. HEILBRONN, Über den Primzahlsatz von Herrn Hoheisel, *Math. Zeitschrift*, 36 (1933), p. 394—423.

später bewies TCHUDAKOFF[7]) mittels der Winogradoffschen Methode, daß D beliebig groß gewählt werden kann, woraus, wie schon HOHEISEL angibt, folgt, daß zwischen x und $x+x^{\frac{3}{4}+\varepsilon}$ immer Primzahlen existieren, wenn nur $x > c_5 = c_5(\varepsilon)$. Eine weitere wesentliche Verkleinerung des Exponenten $\frac{3}{4}+\varepsilon$ gelang INGHAM[8]), indem er entdeckte, daß eine Verbesserung des Exponenten $4\sigma_0(1-\sigma_0)$ in (2) eine Verkleinerung des Exponenten $\frac{3}{4}+\varepsilon$ nach sich zieht. Aus Hoheisels Beweis arbeitete er (Tchudakoffs Resultat wieder benützend) den folgenden Satz aus: wenn für b und B die Ungleichung

$$N(\sigma_0, T) < c_6 T^{b(1-\sigma_0)} \log^B T \tag{3}$$

gleichmäßig für $\frac{1}{2} \leqq \sigma_0 \leqq 1$ erfüllt ist, dann ist für jedes $\vartheta > \frac{1}{b}$

$$\lim_{x\to\infty} [\pi(x+x^{\vartheta}) - \pi(x)] \frac{\log x}{x^{\vartheta}} = 1. \tag{4}$$

Wie aus dem wohlbekannten Riemann—Mangoldtschen Satze $N\left(\frac{1}{2}, T\right) \sim c_7 T \log T$ folgt, kann b nicht kleiner sein als 2, d. h., (4) ist auf diesem Wege *grundsätzlich* nur für $\vartheta \geqq \frac{1}{2}$ beweisbar. INGHAM beweis (3) mit $b = \frac{8}{3}$ und so (4) mit $\vartheta > \frac{5}{8}$. Für $\vartheta < \frac{1}{2}$ sind mir nur Cramérs neuere Ergebnisse bekannt[9]), von denen typisch ist der folgende Satz: unter Annahme der Riemannschen Vermutung und $0 < \alpha < \frac{1}{2}$ gilt

$$\sum_{\substack{p_n \leqq x \\ p_{n+1} - p_n \geqq p_n^{\alpha}}} 1 < c_8 x^{1-2\alpha} \log^2 x.$$

Hier bedeuten $2 = p_1 < p_2 < \ldots$ die sukzessiven Primzahlen.

[7]) N. G. TCHUDAKOFF, On zeros of Dirichlets L-functions, *Recueil math. (Moscou)*, **1** **(43)** (1936), p. 591—602.

[8]) A. E. INGHAM, On the difference between consecutive primes, *Quarterly Journal*, Oxford Series, **8** (1937), p. 255—266.

[9]) H. CRAMÉR, On the order of the magnitude of the difference between consecutive prime-numbers, *Acta Aritmetica*, **1** (1936), p. 23—46.

INGHAM beweis allgemeiner (3) mit $b=2+4c$, $B=5$, wo c die untere Grenze derjenigen Exponenten β bedeutet, für welche $\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)=O(t^\beta)$ gilt. Wenn also $c=0$, d. h. wenn die Lindelöfsche Vermutung wahr ist, dann bewies INGHAM wesentlich den oben erwähnten Koch—Cramérschen Satz, wo er aber statt der Riemannschen Vermutung die schwächere[10]) Lindelöfsche benötigte. Auch diese ist aber gewissermaßen mit den Primzahlen innig verbunden, da aus (1) die Riemannsche Vermutung und nach[10]) die Lindelöfsche folgt.

In § II werde ich die Ungleichung

$$N(a, T)\leqq T^{2(1-a)}\exp(13\log^{0.18} T) \tag{5}$$

gleichmäßig für $\frac{1}{2}\leqq a\leqq 1$, $T\geqq c_9$ beweisen, vorläufig unter Annahme einer anderen Vermutung, welche aber meines Erachtens unabhängig von den Primzahlen ist. Diese Annahme wird enger, wenn wir (5) gleichmäßig für $\frac{1}{2}\leqq a\leqq 1$ beweisen wollen, als wenn der Beweis nur für $\frac{1}{2}\leqq a\leqq 1-\varepsilon$ geführt wird. Für letzteres genügt die

Hypothese a. *Es sei $\omega(n)$ eine positive, für $n\to\infty$ monoton ins Unendlich strebende Funktion von n, sonst beliebig. Für $n\geqq c_9$ gibt es ein $M=M(n)$, das die Ungleichungen*

$$n\omega(n)\leqq M(n)\leqq\frac{n^2}{\omega(n)^2} \tag{6a}$$

erfüllt und es gilt

$$\max_{M\left(1-\frac{1}{\omega(n)}\right)\leqq\nu\leqq M}|z_1^\nu+z_2^\nu+\ldots+z_n^\nu|>\exp\left(-\frac{n^2}{M\omega(n)}\right) \tag{6b}$$

für alle Wertsysteme $(z_1, z_2, \ldots, z_n)$, welche die Bedingungen

$$z_1=1,\quad 1\geqq|z_\nu|\geqq 1-\frac{n^2}{2M^2},\quad (\nu=2,3,\ldots,n) \tag{6c}$$

genügen.

---

10) J. E. LITTLEWOOD, Quelques consequences de l'hypothèse que la fonction $\zeta(s)$ de Riemann n'a pas de zeros dans le demi plan $\sigma>\frac{1}{2}$. *Comptes Rendus Paris,* **154** (1912), p. 263—265.

Den wesentlichen Inhalt dieser Hypothese kann man offenbar so ausdrücken, daß „zu viele" konsekutive Potenzsummen von n komplexen Zahlen nicht gleichzeitig „zu klein" sein können. Übrigens zeigt eine heuristische Überlegung, daß diese Hypothese wahrscheinlich für *alle* $M(n)$, welche (6a) genügen, *alle* Wertsysteme $(z_1, z_2, \ldots, z_n)$, welche nur die schwächeren Bedingungen $z_1 = 1$, $|z_\nu| \leqq 1$ $(\nu = 2, 3, \ldots, n)$ erfüllen, gültig ist, sogar mit $\exp(-\log^3 n)$ statt $\exp\left(-\frac{n^2}{M\omega(n)}\right)$. In § III werden wir zwei Resultate in der Richtung der Hypothese entwickeln; der erste ergibt, daß, wenn nur die Bedingungen $M \geqq 2n$, $|z_\nu| \geqq 1 - \frac{n}{M}$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ erfüllt sind, dann gilt

$$(7) \qquad \max_{M-n+1 \leqq \nu \leqq M} |z_1^\nu + \ldots + z_n^\nu| \geqq \left(\frac{n}{200M}\right)^n .$$

Zur Orientierung bemerken wir, daß, wenn wir $n\omega(n)^2$ als $M(n)$ wählen, dann gibt (7) die Abschätzung

$$(8a) \qquad \max_{M-n+1 \leqq \nu \leqq M} |z_1^\nu + \ldots + z_n^\nu| \geqq \exp\{-n \log(200\omega(n)^2)\}.$$

während (6b) die Ungleichung

$$(8b) \qquad \max_{M-n\omega(n) \leqq \nu \leqq M} |z_1^\nu + \ldots + z_n^\nu| \geqq \exp\left\{-\frac{n}{\omega(n)^3}\right\}$$

fordert. Wenn $\omega(n)$ „langsam" ins Unendlich strebt, so ist die rechte Seite von (8a) „fast" die gewünschte, trotzdem, daß in der bewiesenen Ungleichung (8a) das Intervall für ν viel enger ist, als in (8b). Das zweite Resultat liegt in der entgegengesetzten Richtung; ich gebe, eine Bemerkung von Herrn P. STEIN folgend, ein Wertsystem $(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ mit $z_1 = 1$, $|z_2| = |z_3| = \ldots = |z_n| = 1$ an, für welches

$$\max_{M\left(1-\frac{1}{\omega(n)}\right) \leqq \nu \leqq M} |z_1^\nu + z_2^\nu + \ldots + z_n^\nu| < \exp\left(-\frac{5}{6} \log n \log \omega(n)\right)$$

bei jeder Wahl von M gilt.

Wenn wir (5) gleichmäßig für $\frac{1}{2} \leqq a \leqq 1$ beweisen wollen, benötigen wir eine schärfere Hypothese, welche auch ein gewissermaßen willkürliches $M = M(n)$ enthält; da diese Hypothese wahrscheinlich für jede erlaubte Wahl von M und sogar für $z_1 = 1$,

$|z_2| \leqq 1$, $|z_3| \leqq 1, \ldots, |z_n| \leqq 1$ wahr ist, einfachkeitshalber benützen wir hier sie mit $M = n^{3/2}$. Dann lautet unsere Hypothese, wie folgt:

Hypothese **b.** *Für* $n \geqq c_{10}$ *und* $z_1 = 1$, $|z_2| \leqq 1, \ldots, |z_n| \leqq 1$ *gilt*

$$\max_{n^{3/2}(1-n^{-0\cdot 42}) \leqq \nu \leqq n^{3/2}} |z_1^\nu + z_2^\nu + \ldots + z_n^\nu| > \exp(-n^{0\cdot 09}).$$

Aus (5) leiten wir, die Beweisführung von HOHEISEL—INGHAM folgend, für $x \to \infty$

$$\pi(x + \sqrt{x} \exp(\log^{0\cdot 996} x)) - \pi(x) \sim \frac{\sqrt{x}}{\log x} \exp(\log^{0\cdot 996} x) \tag{9}$$

ab. So gelangen wir im Wesen zu dem Koch—Inghamschen Satze, aber unter Annahme einer *von Primzahlen unabhängigen* Vermutung. Hierbei sei noch bemerkt, daß ich für den Inghamschen Satz einen neuen Beweis gefunden habe — natürlich ohne irgendwelche Vermutungen — der mit Kochs Beweis einige Ähnlichkeit zeigt und der die „verkürzte" Primzahlformel von RIEMANN—MANGOLDT—LANDAU nicht benützt. Von der Darstellung dieses Beweises wollen wir diesmal absehen.

Der Ausgangspunkt dieser Untersuchungen war der folgende heuristische Beweis der Riemannschen Vermutung. Es sei $s_0 = \sigma_0 + it_0$ mit $\sigma_0 > 1$, $t_0^2 > 2\sigma_0 - 1$, so daß s_0 von dem Punkte $s = 1$ ferner liegt, als von der imaginären Achse. Nach dem Satze von CAUCHY—HADAMARD hat $\zeta(s)$ keine Wurzel im Kreise

$$|s - s_0|^{-1} = \overline{\lim_{\nu \to \infty}} \sqrt[\nu]{\frac{1}{\nu!} \left| \frac{\zeta'}{\zeta}(s)^{(\nu)} \right|_{s=s_0}} = R^{-1}.$$

Wenn wir heuristisch $\left| \frac{\zeta'}{\zeta}(s)^{(\nu)} \right|_{s=s_0}$ durch den längst der ganzen Linie $\sigma = \sigma_0$ genommenen quadratischen Mittelwert ersetzen, gelangen wir zu[11])

$$R^{-1} = \overline{\lim_{\nu \to \infty}} \sqrt[2\nu]{\frac{1}{\nu!^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Lambda(k)^2 \log^{2\nu} k}{k^{2\sigma_0}}} \leqq \overline{\lim_{\nu \to \infty}} \sqrt[2\nu]{\frac{1}{\nu!^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\log^{2\nu+2} k}{k^{2\sigma_0}}}.$$

Wie man aber leicht sieht, ist der rechtsstehende $\overline{\lim}$ (sogar lim) genau $\left(\sigma_0 - \frac{1}{2}\right)^{-1}$; so ergibt sich, daß, wenn s_0 die Gerade $\sigma = \sigma_0$ durchläuft, $\zeta(s)$ in dem Bereiche $\sigma > \frac{1}{2}, |t| > \sqrt{2\sigma_0 - 1}$ keine Wur-

[11]) $\Lambda(k)$ bedeutet, wie üblich, $\log p$ für $k = p^\alpha$ und sonst 0.

zel hat. Vorliegender Aufsatz enthält eine erste Verbesserung dieser heuristischen Methode; ich hoffe bald auch Verbesserungen anderer Art mitteilen zu können. Zwecks Abschätzung von $N(a, T)$ nehmen wir jetzt die vorherigen ν und σ_0 als geeignete Funktionen von T an, für welche wir anfangs nur $\lim_{T \to \infty} \nu = \lim_{T \to \infty} \sigma_0 = +\infty$ voraussetzen; mit diesen ν und σ_0 ergibt die obere Abschätzung des Integrals

$$J = \int\limits_{\substack{T/2 \\ \sigma = \sigma_0}}^{T} \left| \frac{\zeta'}{\zeta}(s)^{(\nu)} \right|^2 dt,$$

daß eine Ungleichung von der Form

$$\left| \frac{\zeta'}{\zeta}(s)^{(\nu)} \right| \leqq T^{a-1} \sqrt{J} \tag{10}$$

„sehr oft" für $T/2 \leqq t \leqq T$, $\sigma = \sigma_0$ gilt, d. h. überall in diesem Intervall höchstens mit Ausnahme einer Intervallmenge $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}(\nu, a)$, deren Gesamtlänge $m(\mathfrak{A})$ die Ungleichung $m(\mathfrak{A}) < c_{11}(\varepsilon)\, T^{2(1-a)+\varepsilon}$ genügt. Diese Menge $\mathfrak{A}$ hängt selbst von ν ab; wenn wir aber den Wert von ν auf ein Intervall kürzer als T^ε beschränken, dann ist für $\sum\limits_{\nu} \mathfrak{A}(\nu, a) = \mathfrak{A}^+$ offenbar $m(\mathfrak{A}^+) < c_{12}(\varepsilon)\, T^{2(1-a)+2\varepsilon}$, d. h. (10) ist im $\sigma = \sigma_0$, $T/2 \leqq t \leqq T$ „sehr oft" *für beliebige zugelassene* ν *gleichzeitig* befriedigt. Aus der Riemann—Hadamardschen Formel

$$\begin{aligned} \frac{\zeta'}{\zeta}(s) = b - \frac{1}{s-1} + \frac{1}{s+2} + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{s+2n+2} - \frac{1}{2n} \right) + \sum_{\varrho} \left(\frac{1}{s-\varrho} + \frac{1}{\varrho} \right) \end{aligned} \tag{11}$$

ausgehend (b Weltkonstante) können wir $\left| \frac{\zeta'}{\zeta}(s)^{(\nu)} \right|$ auf der Komplementärmenge $\mathfrak{B}$ von $\mathfrak{A}^+$ im $T/2 \leqq t \leqq T$ *nach einer geeigneter Wahl von* ν von unten abschätzen; diese beiden Abschätzungen ergeben, daß die Ungleichung $\sigma_\varrho \leqq a$ im Intervalle $T/2 \leqq t \leqq T$ „sehr oft" befriedigt ist.

Das Interessante in den oben skizzierten Methoden ist die Tatsache, daß ich, im Gegensatz zu den klassischen Methoden, immer mit Funktionswerten operiere, welche „fern von dem kritischen Streifen" angenommen werden.

Wir wenden folgende bekannte Sätze aus der Theorie der ζ-Funktion an. Es gibt eine positive, absolut konstante ganze Zahl $A \geqq 4$ mit den Eigenschaften:

$$\text{für } |t| \geqq A \text{ ist}^{12)} \sum_{\substack{\varrho \\ t \leqq t_\varrho \leqq t+\frac{1}{2}}} 1 > 0, \tag{12}$$

$$\sum_{-A \leqq t_\varrho \leqq A} 1 < \frac{A^2}{2}, \tag{13}$$

$$\text{für } t \geqq A \text{ gilt}^{13)} \left| \sum_{0 \leqq t_\varrho \leqq t} 1 - \frac{t}{2\pi} \log \frac{t}{2\pi} + \frac{t}{2\pi} \right| < \frac{1}{2} \log t \tag{14}$$

und

$$\sum_{\substack{\varrho \\ t \leqq t_\varrho \leqq t+1}} 1 < \min(t-1, \log t). \tag{15}$$

Ferner erwähne ich noch drei einfache Ungleichungen, die in folgendem öfter benötigt werden: Wenn n eine positive ganze Zahl bedeutet, dann gilt

$$\left(\frac{n}{e}\right)^n \leqq \frac{1}{e} n!, \tag{16a}$$

$$(n+1)!^2 \leqq \frac{(2n+3)!}{2^{2n+2}}, \tag{16b}$$

$$(2n+2)! \leqq 4^{n+1} (n+1)!^2. \tag{16c}$$

§ II.

Lemma I. *Es sei $b = 1$ oder 2, $K \geqq 1$, $r \geqq 2$. Dann ist*

$$J_1 \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log^K(bn)}{n^r} < 2 \frac{b^r K!}{(r-1)^K}.$$

Beweis: Da

$$\frac{d}{dy}\left(y^{-r} \log^K(by)\right) = y^{-r-1} \log^{K-1}(by)\left(K - r\log(by)\right)$$

für $y > 1$ nur dann verschwindet, wenn $y = \frac{1}{b} e^{K/r}$, so haben wir nach (16a)

---

[12]) J. E. Littlewood, Two notes on the Riemann ζ-function, *Proceedings Cambridge Phil. Society,* **22** (1924), p. 234—242.

[13]) R. Backlund, Über die Nullstellen der Riemannschen Zetafunktion, *Acta Math.,* **41** (1928), p. 345—375.

$$J_1 < 2b^r\left(\frac{K}{er}\right)^K + \int_1^\infty \frac{\log^K(by)}{y^r}\,dy =$$

$$= 2b^r\left(\frac{K}{er}\right)^K + b^{r-1}\int_0^\infty e^{-(r-1)y} y^K dy = 2b^r\left(\frac{K}{er}\right)^K + \frac{b^{r-1}K!}{(r-1)^{K+1}} <$$

$$< 2b^r \frac{1}{e}\,\frac{K!}{r^K} + \frac{b^r K!}{(r-1)^K} < 2b^r \frac{K!}{(r-1)^K}.$$

Lemma II. *Für* $\nu > 0$, $\sigma_0 > 0$, $\frac{\sigma_0}{\nu+1} < 1$ *und* $1 \leqq n \leqq \frac{1}{2} e^{\frac{\nu+1}{\sigma_0}}$ *gilt*

$$\log^{\nu+1} n \leqq \frac{1}{2^{\sigma_0}} \log^{\nu+1}(2n).$$

Beweis:

$$\log n \leqq \frac{\nu+1}{\sigma_0} - \log 2 = \frac{(\nu+1) - \sigma_0 \log 2}{\sigma_0},$$

d. h.

$$1 + \frac{\log 2}{\log n} \geqq 1 + \frac{\sigma_0 \log 2}{(\nu+1) - \sigma_0 \log 2} = \frac{1}{1 - \frac{\sigma_0}{\nu+1}\log 2} \geqq e^{\frac{\sigma_0}{\nu+1}\log 2} = 2^{\frac{\sigma_0}{\nu+1}}.$$

Daraus folgt aber

$$\left(\frac{\log(2n)}{\log n}\right)^{\nu+1} \geqq 2^{\sigma_0}, \qquad \text{w. z. b. w.}$$

Wir haben

$$N(a, T) < T^{2(1-a)} \exp(13 \log^{0 \cdot 18} T)$$

für $\frac{1}{2} \leqq a \leqq 1$ und für $T > C$ zu beweisen; C bedeutet hier und später absolute, nicht notwendig dieselben Konstanten (also hier ist C speziell von a und T unabhängig). Es ist mehr bequemlich a durch $1 - \frac{\alpha}{2}$ zu ersetzen; dann ist unsere Behauptung

$$N\left(1 - \frac{\alpha}{2}, T\right) < T^\alpha \exp(13 \log^{0 \cdot 18} T) \tag{17}$$

für $T > C$ und $0 \leqq \alpha \leqq 1$. Da TITCHMARCH[14]) mittels der Wino-

[14]) E. C. TITCHMARCH, On $\zeta(s)$ and $\pi(x)$, *Quarterly Journal,* Oxford Series, 9 (1938), p. 97—108.

gradoffschen Methode

$$N(1-2\log^{-0{\cdot}81} T,\ T)=0$$

für $T>C$ bewiesen hat, haben wir (17) nur für

$$T>C,\quad 1\geqq \alpha \geqq 2\log^{-0{\cdot}81} T \tag{18}$$

zu beweisen.

Wir betrachten zuerst

$$N^+\left(1-\frac{\alpha}{2},\ T\right)=N\left(1-\frac{\alpha}{2},\ T\right)-N\left(1-\frac{\alpha}{2},\ \frac{T}{2}\right). \tag{19}$$

Es sei in folgendem

$$\sigma_0=2^6\,(1+\log^{-0{\cdot}84} T)\log^2 T=B\log^2 T \tag{20}$$

und die ganze Zahl $\nu=\nu(T)$ beschränken wir in diesem Moment nur durch

$$2B\log^2 T\leqq \nu \leqq B\log^3 T. \tag{21}$$

Dann ist für $T>C$ offenbar

$$\begin{gathered}\sigma_0>100,\ \frac{\sigma_0}{\nu+1}<1,\\ \left(1+\frac{1}{2\sigma_0-2}\right)^{2\nu+2}<e^{\frac{\nu+1}{\sigma_0-1}}<2T.\end{gathered} \tag{22}$$

Lemma III. *Mit den oben definierten σ_0 und ν gilt für $T>C$*

$$J_2\equiv\int\limits_{\substack{T/2\\ \sigma=\sigma_0}}^{T}\left|\frac{\zeta'}{\zeta}(s)^{(\nu)}\right|^2 dt<109\,T\log T\,\frac{(2\nu+3)!}{(2\sigma_0-1)^{2\nu+2}}.$$

Beweis: Aus der bekannten, für $\sigma>1$ gültigen Identität

$$\sum\frac{\Lambda(n)}{n^s}=-\frac{\zeta'}{\zeta}(s)$$

folgt:

$$\sum\frac{\Lambda(n)\log^\nu n}{n^s}=(-1)^{\nu+1}\frac{\zeta'}{\zeta}(s)^{(\nu)}. \tag{23}$$

Also ist, wenn wir im Beweis des Lemma III σ_0 zur Abkürzung durch σ ersetzen,

$$J_2=\left|\frac{T}{2}\sum_n\frac{\Lambda(n)^2\log^{2\nu} n}{n^{2\sigma}}+\right.$$

$$\left.+\sum\sum_{m\neq n}\frac{\Lambda(m)\Lambda(n)\log^\nu m\log^\nu n}{(mn)^\sigma}\int\limits_{T/2}^{T}\left(\frac{m}{n}\right)^{it}dt\right|<$$

$$< \frac{T}{2} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\log^{2\nu+2} n}{n^{2\sigma}} + 4 \sum_{n<m} \sum \frac{\log^{\nu+1} m \log^{\nu+1} n}{(mn)^{\sigma} \log \frac{m}{n}} =$$

$$= \frac{T}{2} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\log^{2\nu+2} n}{n^{2\sigma}} + 4 \sum_{m \geqq 2n} \sum \frac{\log^{\nu+1} m \log^{\nu+1} n}{(mn)^{\sigma} \log \frac{m}{n}} +$$

$$+ 4 \sum_{n<m<2n} \sum \frac{\log^{\nu+1} m \log^{\nu+1} n}{(mn)^{\sigma} \log \frac{m}{n}} <$$

$$< \frac{T}{2} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\log^{2\nu+2} n}{n^{2\sigma}} + \frac{4}{\log 2} \left(\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\log^{\nu+1} n}{n^{\sigma}} \right)^2 +$$

$$+ \frac{4}{\log 2} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\log^{\nu+1} n}{n^{\sigma-1}} \sum_{n<m<2n} \frac{\log^{\nu+1} m}{m^{\sigma}(m-n)},$$

da für $0 \leqq y \leqq 1$ $\log(1+y) \geqq y \log 2$. Für die ersten zwei Glieder können wir Lemma I mit $K = 2\nu + 2$, $r = 2\sigma$, $b = 1$ bzw. mit $K = \nu + 1$, $r = \sigma$, $b = 1$ anwenden und so gelangen wir zu

$$|J_2| < \frac{(2\nu+2)!}{(2\sigma-1)^{2\nu+2}} T + \frac{16}{\log 2} \frac{(\nu+1)!^2}{(\sigma-1)^{2\nu+2}} +$$

$$(24) \qquad + \frac{4}{\log 2} \sum_{n \leqq \frac{1}{2} e^{(\nu+1)/\sigma}} \frac{\log^{\nu+1} n}{n^{\sigma-1}} \left(\sum_{n<m<2n} \frac{\log^{\nu+1} m}{m^{\sigma}(m-n)} \right) +$$

$$+ \frac{4}{\log 2} \sum_{\frac{1}{2} e^{(\nu+1)/\sigma} < n \leqq e^{(\nu+1)/\sigma}} \frac{\log^{\nu+1} n}{n^{\sigma-1}} \left(\sum_{n<m<2n} \frac{\log^{\nu+1} m}{m^{\sigma}(m-n)} \right) +$$

$$+ \frac{4}{\log 2} \sum_{n > e^{(\nu+1)/\sigma}} \frac{\log^{\nu+1} n}{n^{\sigma-1}} \left(\sum_{n<m<2n} \frac{\log^{\nu+1} m}{m^{\sigma}(m-n)} \right).$$

Die letzten drei Summen seien mit J_3, J_4 und J_5 bezeichnet und es sei zuerst J_5 betrachtet. Da die Funktion $\frac{\log^{\nu+1} x}{x^{\sigma}}$ von $x = 1$ bis $x = e^{(\nu+1)/\sigma}$ monoton zunimmt und für $x > e^{(\nu+1)/\sigma}$ monoton abnimmt, so ist

$$|J_5| < \frac{4}{\log 2} \sum_{n > e^{(\nu+1)/\sigma}} \frac{\log^{\nu+1} n}{n^{\sigma-1}} \frac{\log^{\nu+1} n}{n^{\sigma}} \sum_{n<m<2n} \frac{1}{m-n} <$$

$$< \frac{8}{\log 2} \sum_{n > e^{(\nu+1)/\sigma}} \frac{\log^{2\nu+3} n}{n^{2\sigma-1}} < \frac{8}{\log 2} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\log^{2\nu+3} n}{n^{2\sigma-1}}$$

und nach Lemma I (mit $b = 1$, $K = 2\nu + 3$, $r = 2\sigma - 1$)

$$(25\text{a}) \qquad |J_5| < \frac{16}{\log 2} \frac{(2\nu+3)!}{(2\sigma-2)^{2\nu+3}}.$$

Nun betrachten wir J_3. Da $2n \leqq e^{(\nu+1)/\sigma}$ gilt, gelangen wir nach der obigen Bemerkung über den Verlauf der Funktion $\frac{\log^{\nu+1} x}{x^\sigma}$ zu

$$|J_3| < \frac{4}{\log 2} \sum_{2 \leqq n \leqq \frac{1}{2} e^{(\nu+1)/\sigma}} \frac{\log^{\nu+1} n}{n^{\sigma-1}} \frac{\log^{\nu+1}(2n)}{(2n)^\sigma} \sum_{n<m<2n} \frac{1}{m-n}$$

und mit Rücksicht auf Lemma II

$$|J_3| < \frac{12}{\log 2} \frac{1}{2^{2\sigma}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log^{2\nu+3}(2n)}{n^{2\sigma-1}}.$$

Lemma I ergibt also (mit $b=2$, $K=2\nu+3$, $r=2\sigma-1$)

$$|J_3| < \frac{12}{\log 2} \frac{(2\nu+3)!}{(2\sigma-2)^{2\nu+3}}. \tag{25b}$$

Wir schätzen endlich J_4 ab. Da für $x>1$ die Ungleichung $\frac{\log^{\nu+1} x}{x^\sigma} \leqq \left(\frac{\nu+1}{e\sigma}\right)^{\nu+1}$ gilt, so folgt mit Rücksicht auf (20) und (21) für $T>C$

$$|J_4| < \frac{4}{\log 2} \sum_{\frac{1}{2} e^{(\nu+1)/\sigma} \leqq n \leqq e^{(\nu+1)/\sigma}} \frac{\log^{\nu+1} n}{n^{\sigma-1}} \left(\frac{\nu+1}{e\sigma}\right)^{\nu+1} \left(\sum_{n<m<2n} \frac{1}{m-n}\right) <$$

$$< \frac{12}{\log 2} \left(\frac{\nu+1}{e\sigma}\right)^{\nu+1} \sum_{\frac{1}{2} e^{(\nu+1)/\sigma} \leqq n \leqq e^{(\nu+1)/\sigma}} \frac{\log^{\nu+2} n}{n^{\sigma-1}} <$$

$$< \frac{12}{\log 2} \left(\frac{\nu+1}{e\sigma}\right)^{\nu+1} \frac{1}{2} e^{\frac{\nu+1}{\sigma}} \left(\frac{\nu+2}{e(\sigma-1)}\right)^{\nu+2} <$$

$$< \frac{7}{\log 2} \left(\frac{\nu+1}{e}\right)^{2\nu+2} \left(\frac{e^{1/\sigma}}{\sigma(\sigma-1)}\right)^{\nu+1} \log T$$

und nach (16a) und (16b)

$$|J_4| < \frac{7}{e^2 \log 2} (\nu+1)!^2 \left(\frac{e^{1/\sigma}}{\sigma(\sigma-1)}\right)^{\nu+1} \log T <$$

$$< \frac{7}{e^2 \log 2} (2\nu+3)! \left(\frac{e^{1/\sigma}}{4\sigma(\sigma-1)}\right)^{\nu+1} \log T.$$

Da aber $(2\sigma-2)e^{1/\sigma} < (2\sigma-2)\frac{1}{1-\frac{1}{\sigma}} = 2\sigma$ gilt, ist

$$|J_4| < \frac{7}{e \log 2} \log T \frac{(2\nu+3)!}{(2\sigma-2)^{2\nu+2}}. \tag{25c}$$

Aus (25a), (25b), (25c), (24) und (22) gewinnen wir für $T>C$

die Abschätzung

$$|J_2| < T\frac{(2\nu+2)!}{(2\sigma-1)^{2\nu+2}} + \frac{28}{\log 2}\,\frac{(2\nu+3)!}{(2\sigma-2)^{2\nu+3}} +$$

$$+\frac{7}{e\log 2}\log T\frac{(2\nu+3)!}{(2\sigma-2)^{2\nu+2}} < T\frac{(2\nu+2)!}{(2\sigma-1)^{2\nu+2}} + 54\log T\,\frac{(2\nu+3)!}{(2\sigma-2)^{2\nu+2}} =$$

$$= T\frac{(2\nu+3)!}{(2\sigma-1)^{2\nu+2}}\left[1+54\log T\,\frac{1}{T}\left(1+\frac{1}{2\sigma-2}\right)^{2\nu+2}\right] <$$

$$< 109\,T\log T\frac{(2\nu+3)!}{(2\sigma-1)^{2\nu+2}}, \qquad \text{w. z. b. w.}$$

Lemma IV. *Es sei die integrierbare Funktion* $A(t)$ *für* $T/2 \leqq t \leqq T$ *definiert und* β *eine beliebige Zahl zwischen* 0 *und* 1. *Dann gilt für* $T/2 \leqq t \leqq T$

$$(26) \qquad |A(t)| \leqq T^{-\frac{\beta}{2}}\left(\int_{T/2}^{T}|A(t)|^2\,dt\right)^{1/2},$$

mit Ausnahme einer Menge, deren Maß höchstens T^{β} *ist.*

Beweis: Wir bezeichnen mit $\mathfrak{K}$ die Menge derjenigen Punkte, für welche (26) nicht erfüllt ist. Dann ist nach dem Mittelwertsatz

$$\int_{T/2}^{T}|A(t)|^2\,dt \geqq m(\mathfrak{K})\inf_{y\in\mathfrak{K}}|A(y)|^2 \geqq m(\mathfrak{K})\,T^{-\beta}\int_{T/2}^{T}|A(t)|^2\,dt,$$

woraus die Behauptung unmittelbar folgt.

Wir wenden Lemma IV mit $A(t)=\frac{\zeta'}{\zeta}(s)^{(\nu)}$, $s=\sigma_0+it$, $\beta=\alpha$ und Lemma III an. So erhalten wir, daß die Ungleichung

$$\left|\frac{\zeta'}{\zeta}(s)^{(\nu)}\right|_{s=\sigma_0+it} \leqq T^{-\frac{\alpha}{2}}\left(109\,T\log T\frac{(2\nu+3)!}{(2\sigma_0-1)^{2\nu+2}}\right)^{1/2}$$

und nach (16c) und (21) a fortiori die Ungleichung

$$\left|\frac{\zeta'}{\zeta}(s)^{(\nu)}\right|_{s=\sigma_0+it} \leqq 2^{15}\,T^{\frac{1-\alpha}{2}}\log^5 T\,\frac{\nu!}{\left(\sigma_0-\frac{1}{2}\right)^{\nu+1}}$$

für $T>C$ und $T/2 \leqq t \leqq T$ mit Ausnahme einer Menge vom Maß nicht größer als T^{α} gilt. Diese Menge selbst kann wohl von ν abhängen; da aber die Anzahl der von (21) zugelassenen Werte von ν kleiner als $B\log^3 T$ ist, so gilt die folgende Behauptung: für $T>C$ kann man aus dem Intervall $T/2 \leqq t \leqq T$ eine Menge

$\mathfrak{A}^+ = \mathfrak{A}^+(\alpha)$ mit dem Maß $\leqq BT^\alpha \log^3 T$ auslassen, auf deren Komplementärmenge $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}(\alpha)$ überall

$$(27) \qquad \left| \frac{1}{\nu!} \frac{\zeta'}{\zeta}(s)^{(\nu)} \right|_{s=\sigma_0+it} < 2^{15} T^{\frac{1-\alpha}{2}} \log^5 T \frac{1}{\left(\sigma_0 - \frac{1}{2}\right)^{\nu+1}}$$

für jeden, (21) *erfüllenden Wert* von ν gilt.

Nun betrachten wir auf der Geraden $\sigma = \sigma_0$ die Intervalle $l_\mu \equiv \left[\sigma_0 + \left(\mu + \frac{1}{4}\right) i,\ \sigma_0 + \left(\mu + \frac{3}{4}\right) i\right]$; hier läuft der Index μ die Werte $\left[\frac{T}{2}\right] + 1, \left[\frac{T}{2}\right] + 2, \ldots, [T] - 1$ durch. Nach (27) kann die Menge $\mathfrak{A}^+$ höchstens $2BT^\alpha \log^3 T$ von den Intervallen l_μ ganz bedecken; wir bezeichnen diese mit l''_μ, lassen sie außer Acht und betrachten nur die übrigen Intervalle, welche wir mit l'_μ bezeichnen. Die Anzahl dieser Intervalle l'_μ ist nach dem obigen für $T > C$ größer als $T/2 - 2^7 T^\alpha \log^3 T$ und *jede* l'_μ enthält mindestens eine $s = s_0$, für welche die Ungleichung (27) erfüllt ist. *Im ganzen* § II *bezeichnet* $s_0 = \sigma_0 + it_0$ *durchwegs einen solchen Punkt.*

Aus (11) gewinnen wir nach ν-maliger Differentiation für $\sigma > 1$

$$\frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu!} \frac{\zeta'}{\zeta}(s)^{(\nu)} = \frac{1}{(s-1)^{\nu+1}} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(s+2n)^{\nu+1}} - \sum_{\varrho} \frac{1}{(s-\varrho)^{\nu+1}}.$$

Aus dieser Gleichung und aus (27) erhalten wir für $T > C$

$$\left| \frac{1}{(s_0-1)^{\nu+1}} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(s+2n)^{\nu+1}} - \sum_{\varrho} \frac{1}{(s_0-\varrho)^{\nu+1}} \right| < 2^{15} \frac{T^{\frac{1-\alpha}{2}} \log^5 T}{\left(\sigma_0 - \frac{1}{2}\right)^{\nu+1}},$$

wo T, α, ν nur durch (18) und (21) beschränkt werden. Wenn ϱ' diejenige ζ-Wurzel bedeutet, welche zu s_0 am nächsten liegt, so gilt

$$(28) \qquad \frac{1}{|s_0 - \varrho'|^{\nu+1}} \left| \sum_{\varrho} \left(\frac{s_0 - \varrho'}{s_0 - \varrho}\right)^{\nu+1} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{s_0 - \varrho'}{s_0 + 2n}\right)^{\nu+1} - \left(\frac{s_0 - \varrho'}{s_0 - 1}\right)^{\nu+1} \right| <$$

$$< 2^{15} \frac{T^{\frac{1-\alpha}{2}} \log^5 T}{\left(\sigma_0 - \frac{1}{2}\right)^{\nu+1}}.$$

Zuerst schätzen wir in (28) das letzte Glied ab. Für $T > C$ $(> 2A + 2)$ gilt nach (12)

$$|s_0 - \varrho'|^2 \leqq \sigma_0^2 + \frac{1}{4},$$

folglich nach (20) und (21) und $t_0 \geqq \frac{T}{2}$

$$(29)\quad \left|\frac{s_0-\varrho'}{s_0-1}\right|^{\nu+1} < \left(\frac{\sigma_0^2+\frac{1}{4}}{t_0^2}\right)^{\frac{\nu+1}{2}} < \exp\left(-\frac{\nu}{3}\log T\right) < \exp(-3\log^2 T)$$

für $T > C$. Die Abschätzung der zweiten Summe in (28) gelingt auch sehr einfach; für $T > C$ ist

$$(30a)\quad \begin{aligned} J_6 &\equiv \left|\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{s_0-\varrho'}{s_0+2n}\right)^{\nu+1}\right| = \left|\frac{s_0-\varrho'}{s_0+2}\right|^{\nu+1}\left|\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{s_0+2}{s_0+2n}\right)^{\nu+1}\right| < \\ &< \left|\frac{s_0-\varrho'}{s_0-1}\right|^{\nu+1}\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{s_0+2}{s_0+2n}\right|^{\nu+1} < \exp(-3\log^2 T)\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{s_0+2}{s_0+2n}\right|^{\nu+1}\end{aligned}$$

nach (29). Ferner gilt für $T > C$, $t_0 \geqq T/2 > 3\sigma_0$, also, wenn $n \geqq l t_0$,

$$4\sigma_0+4 \leqq \sigma_0^2 < \sigma_0^2+t_0^2,$$

$$(\sigma_0+2)^2+t_0^2 < 2(\sigma_0^2+t_0^2) < \frac{20}{9}\,t_0^2 \leqq \frac{3n^2}{l^2} < \frac{(\sigma_0+2n)^2+t_0^2}{l^2}.$$

Daher ist

$$(30b)\quad \begin{aligned} &\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{s_0+2}{s_0+2n}\right|^{\nu+1} < \\ &< \sum_{1\leqq n\leqq 2t_0} 1 + \frac{1}{2^{\nu+1}}\sum_{2t_0<n\leqq 3t_0} 1 + \frac{1}{3^{\nu+1}}\sum_{3t_0<n\leqq 4t_0} 1 + \ldots < \\ &< 2t_0\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots\right) < 4T.\end{aligned}$$

Aus (28), (29), (30a), (30b) erhalten wir für $T > C$

$$(31)\quad \frac{1}{|s_0-\varrho'|^{\nu+1}}\left(\left|\sum_{\varrho}\left(\frac{s_0-\varrho'}{s_0-\varrho}\right)^{\nu+1}\right| - \exp(-2\log^2 T)\right) < 2^{15}\frac{T^{\frac{1-\alpha}{2}}\log^5 T}{\left(\sigma_0-\frac{1}{2}\right)^{\nu+1}}.$$

Die restliche Summe in (31) zerlegen wir in fünf Teile:

$$(32)\quad \begin{gathered} J_7 = \sum_{\substack{\varrho \\ t_\varrho \leqq -A}}\left(\frac{s_0-\varrho'}{s_0-\varrho}\right)^{\nu+1}, \quad J_8 = \sum_{-A<t_\varrho\leqq A}\left(\frac{s_0-\varrho'}{s_0-\varrho}\right)^{\nu+1}, \\ J_9 = \sum_{A<t_\varrho\leqq t_0-2\pi\sqrt{\sigma_0}}\left(\frac{s_0-\varrho'}{s_0-\varrho}\right)^{\nu+1}, \quad J_{10} = \sum_{\substack{\varrho \\ |t_\varrho-t_0|<2\pi\sqrt{\sigma_0}}}\left(\frac{s_0-\varrho'}{s_0-\varrho}\right)^{\nu+1}, \\ J_{11} = \sum_{\substack{\varrho \\ t_\varrho\geqq t_0+2\pi\sqrt{\sigma_0}}}\left(\frac{s_0-\varrho'}{s_0-\varrho}\right)^{\nu+1}\end{gathered}$$

Diese Fünfteilung hat für $T > C$ gewiß einen Sinn. Für J_8 haben wir gleich wegen (13), (20) und (21)

$$(33a)\quad |J_8| < \sum_{\substack{\varrho \\ |t_\varrho| \leqq A}} \left(\frac{\sigma_0^2 + \frac{1}{4}}{(\sigma_0 - 1)^2 + (t_0 - A)^2} \right)^{\frac{\nu+1}{2}} <$$

$$< \frac{A^2}{2} \left(\frac{2^{18} \log^4 T}{T^2} \right)^{\frac{\nu+1}{2}} < \exp(-2 \log^2 T)$$

für $T > C$. Für J_7 kommen wir mit der rohen Abschätzung aus (15) aus; für $T > C$ gilt nämlich

$$|J_7| < \sum_{m=-\infty}^{-A} \sum_{\substack{\varrho \\ -m < t_\varrho \leqq -(m-1)}} \left| \frac{s_0 - \varrho'}{s_0 - \varrho} \right|^{\nu+1} < \sum_{m=A}^{\infty} m \left(\frac{\sigma_0^2 + \frac{1}{4}}{(\sigma_0 - 1)^2 + (t_0 + m)^2} \right)^{\frac{\nu+1}{2}} =$$

$$(33b)\quad = \left(\frac{\sigma_0^2 + \frac{1}{4}}{\sigma_0^2} \right)^{\frac{\nu+1}{2}} \sum_{m=A}^{\infty} m \left(\frac{\sigma_0^2}{(\sigma_0 - 1)^2 + (t_0 + m)^2} \right)^{\frac{\nu+1}{2}} <$$

$$< 2 \sum_{m=A}^{\infty} m \left(\frac{\sigma_0}{t_0 + m} \right)^{\nu+1} < 2 \sum_{m=A}^{[t_0^2]+1} m \left(\frac{\sigma_0}{t_0} \right)^{\nu+1} + 2 \sum_{m=[t_0^2]+2}^{\infty} m \left(\frac{\sigma_0}{m} \right)^{\nu+1} <$$

$$< 2 \left(\frac{\sigma_0}{t_0} \right)^{\nu+1} t_0^5 + 2 \frac{\sigma_0^{\nu+1}}{t_0^{2\nu-2}} < \exp(-2 \log^2 T).$$

Für J_9 haben wir für $T > C$

$$|J_9| < \sum_{m=A}^{[t_0 - 2\pi \sqrt{\sigma_0}]} m \left(\frac{\sigma_0^2 + \frac{1}{4}}{(\sigma_0 - 1)^2 + (m - t_0)^2} \right)^{\frac{\nu+1}{2}} <$$

$$(33c)\quad < T^2 \left(\frac{\sigma_0^2 + \frac{1}{4}}{\sigma_0^2 + (4\pi^2 - 2)\sigma_0 + 1} \right)^{\frac{\nu+1}{2}} < T^2 \left(1 - \frac{4\pi^2 - 3}{\sigma_0} \right)^{\frac{\nu+1}{2}} <$$

$$< T^2 \exp\left(- \frac{4\pi^2 - 3}{2} \, \frac{\nu + 1}{\sigma_0} \right)$$

und für J_{11}

$$|J_{11}| < \sum_{m=[t_0 + 2\pi \sqrt{\sigma_0}]}^{\infty} m \left(\frac{\sigma_0^2 + \frac{1}{4}}{(\sigma_0 - 1)^2 + (m - t_0)^2} \right)^{\frac{\nu+1}{2}} =$$

$$= \sum_{m=[t_0 + 2\pi \sqrt{\sigma_0}]}^{[t_0^2]+1} + \sum_{m=[t_0^2]+2}^{\infty} <$$

$$(33d)\quad < T^4 \left(\frac{\sigma_0^2 + \frac{1}{4}}{\sigma_0^2 + (4\pi^2 - 2)\sigma_0 + 1} \right)^{\frac{\nu+1}{2}} + \sum_{m=[t_0^2]+2}^{\infty} m \left(\frac{\sigma_0^2 + 1}{(m - t_0)^2} \right)^{\frac{\nu+1}{2}} <$$

$$< T^4\left(1-\frac{4\pi^2-3}{\sigma_0}\right)^{\frac{\nu+1}{2}}+\sum_{m=[t_0^5]+2}^{\infty}\left(\frac{2}{m}\right)^{\frac{\nu-1}{2}}<$$

$$< T^4\exp\left(-\frac{4\pi^2-3}{2}\,\frac{\nu+1}{\sigma_0}\right)+\exp(-2\log^2 T).$$

Aus (33a), (33b), (33c), (33d) (32) und (31) erhalten wir für $T>C$

$$(34)\quad \frac{1}{|s_0-\varrho'|^{\nu+1}}\left(\left|\sum_{\substack{\varrho\\ |t_\varrho-t_0|\leqq 2\pi\sqrt{\sigma_0}}}\left(\frac{s_0-\varrho'}{s_0-\varrho}\right)^{\nu+1}\right|-\right.$$

$$\left.-T^4\exp\left(-\frac{4\pi^2-4}{2}\,\frac{\nu+1}{\sigma_0}\right)-\exp(-\log^2 T)\right)<2^{15}\frac{T^{\frac{1-\alpha}{2}}\log^5 T}{\left(\sigma_0-\frac{1}{2}\right)^{\nu+1}}.$$

Zur Abschätzung von J_{10} benötigen wir außer der Hypothese **b** noch das einfache

L e m m a V. *Für die Anzahl N_1 der nichttrivialen Wurzeln im $|t-t_0|\leqq 2\pi\sqrt{\sigma_0}$ gilt für $T>C$*

$$|N_1-2\sqrt{B}\log^2 T|<10\sqrt{B}\log T.$$

B e w e i s: Nach (14) ist für $T>C$

$$\left|N_1-\frac{t_0+2\pi\sqrt{\sigma_0}}{2\pi}\log\frac{t_0+2\pi\sqrt{\sigma_0}}{2\pi}+\right.$$

$$\left.+\frac{t_0-2\pi\sqrt{\sigma_0}}{2\pi}\log\frac{t_0-2\pi\sqrt{\sigma_0}}{2\pi}-2\sqrt{\sigma_0}\right|<\log T,$$

$$\left|N_1-\sqrt{\sigma_0}\log\frac{t_0^2-4\pi^2\sigma_0}{4\pi^2}\right|<$$

$$<(1+2\sqrt{B})\log T+\frac{t_0}{2\pi}\log\frac{1+\frac{2\pi\sqrt{\sigma_0}}{t_0}}{1-\frac{2\pi\sqrt{\sigma_0}}{t_0}}<(1+4\sqrt{B})\log T,$$

$$|N_1-2\sqrt{\sigma_0}\log t_0|<(1+4\sqrt{B})\log T+\sqrt{\sigma_0}\log(4\pi^2)+$$

$$+\sqrt{\sigma_0}\cdot\log\left(\frac{1}{1-\frac{4\pi^2\sigma_0}{t_0^2}}\right)<(1+8\sqrt{B})\log T,$$

$$|N_1-2\sqrt{\sigma_0}\log T|<(1+8\sqrt{B})\log T+\sqrt{\sigma_0}<(1+9\sqrt{B})\log T,\ \text{w.z.b.w.}$$

Wir bemerken zunächst, daß die Glieder $\left(\frac{s_0-\varrho'}{s_0-\varrho}\right)^{\nu+1}$ von J_{10} dem absoluten Werte nach sämtlich $\leqq 1$ sind und Gleichheitzeichen gilt sicher für $\varrho=\varrho'$; ferner, daß die Mengen $\mathfrak{A}^+$, $\mathfrak{B}$, die Intervalle I'_μ, s_0, ϱ', also auch die Zahlen $\frac{s_0-\varrho'}{s_0-\varrho}$ *von der Wahl von* ν

unabhängig sind. Dann können wir aber unsere Hypothese **b** mit $n=N_1$, $z_\nu=\frac{s_0-\varrho'}{s_0-\varrho}$ anwenden, wo N_1 den im Lemma V gegebenen Sinn hat; dieses ergibt für $T>C$ die Existenz einer ganzen Zahl ν_0, für welche

$$N_1^{3/2}(1-N_1^{-0.42})\leqq\nu_0\leqq N_1^{3/2} \tag{35a}$$

und

$$|J_{10}|=\Bigg|\sum_{\substack{\varrho\\ |t_\varrho-t_0|\leqq 2\pi\sqrt{\sigma_0}}}\left(\frac{s_0-\varrho'}{s_0-\varrho}\right)^{\nu_0}\Bigg|>\exp(-N_1^{0.09}). \tag{35b}$$

Wir geben nun dem, bisher nur der Bedingung (21) untergeworfenen ν den Wert $\nu=\nu_0-1$; wir zeigen, daß (21) bei dieser Wahl befriedigt wird. Aus (35a) und Lemma V folgt für $T>C$

$$\nu<\nu_0\leqq N_1^{3/2}<(2\sqrt{B}\log^2 T)^{3/2}\left(1+\frac{5}{\log T}\right)^{3/2}< \tag{36a}$$

$$<2^{3/2}B^{3/4}\log^3 T\left(1+\frac{8}{\log T}\right)<B\log^3 T$$

nach der Definition von B (siehe (20)). Es folgt ferner aus Lemma V und (35a) ganz grob für $T>C$

$$\nu+1=\nu_0>\frac{1}{2}N_1^{3/2}>\frac{1}{2}(\sqrt{B}\log^2 T)^{3/2}>2B\log^2 T+1. \tag{36b}$$

Mit (36a) und (36b) ist also (21) gerechtfertig. Da für $T>C$ offenbar

$$\frac{\nu_0}{\sigma_0}>\frac{2}{3\sigma_0}N_1^{3/2}>\frac{2}{3}\,\frac{2^{3/2}B^{3/4}\log^3 T\left(1-\frac{5}{\log T}\right)^{3/2}}{B\log^2 T}>\frac{1}{2}\log T$$

und

$$T^4\exp\left(-\frac{4\pi^2-4}{2}\,\frac{\nu+1}{\sigma_0}\right)=T^4\exp\left(-\frac{4\pi^2-4}{2}\,\frac{\nu_0}{\sigma_0}\right)<$$

$$<T^{4-(\pi^2-1)}<T^{-4}$$

gilt, erhalten wir aus diesen, (35b), (34) und Lemma V für $T>C$

$$|s_0-\varrho'|^{-\nu_0}\exp(-2\log^{0.18}T)<$$

$$<\frac{1}{|s_0-\varrho'|^{\nu+1}}\{\exp(-N_1^{0.09})-2T^{-4}\}<2^{15}\frac{T^{\frac{1-\alpha}{2}}\log^5 T}{\left(\sigma_0-\frac{1}{2}\right)^{\nu_0}},$$

d. h. für $T > C$

$$|s_0-\varrho'|>$$

$$>\left(\sigma_0-\frac{1}{2}\right)\exp\left(-\frac{1-\alpha}{2\nu_0}\log T-\frac{5\log\log T}{\nu_0}-\frac{15\log 2}{\nu_0}-\frac{2\log^{0\cdot 18}T}{\nu_0}\right)>$$

$$>\left(\sigma_0-\frac{1}{2}\right)\left[1-\left(\frac{1-\alpha}{2}\log T+5\log\log T+15\log 2+2\log^{0\cdot 18}T\right)\frac{1}{\nu_0}\right]>$$

$$(37)\qquad >\left(\sigma_0-\frac{1}{2}\right)\left[1-\left(\frac{1-\alpha}{2}\log T+3\log^{0\cdot 18}T\right)\frac{1}{\nu_0}\right]>$$

$$>\sigma_0-\frac{1}{2}-\left(\frac{1-\alpha}{2}\log T+3\log^{0\cdot 18}T\right)\frac{\sigma_0}{\nu_0}.$$

Mit Rücksicht auf (35a), (20) und Lemma V ist für $T > C$

$$\frac{\sigma_0}{\nu_0}<\frac{B\log^2 T}{N_1^{3/2}[1-N_1^{-0\cdot 42}]}<\frac{B\log^2 T}{(2\sqrt{B})^{3/2}\log^3 T\left(1-\frac{5}{\log T}\right)^{3/2}(1-N_1^{-0\cdot 42})}<$$

$$<\frac{(1+\log^{-0\cdot 84}T)^{1/4}}{\log T}\left(1+\frac{8}{\log T}\right)\left(1+\frac{2}{N_1^{0\cdot 42}}\right)<\frac{1}{\log T}\left(1+\frac{1}{\log^{0\cdot 84}T}\right),$$

also folgt aus (37)

$$(38)\qquad |s_0-\varrho'|>\sigma_0-\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)-\frac{4}{\log^{0\cdot 82}T}.$$

Nun betrachten wir von den Intervallen I'_μ ein beliebiges I'_j und wir bezeichnen durch $\varrho^+=\sigma^++it^+$ diejenige nichttriviale Wurzel aus $j\leqq t_\varrho\leqq j+1$, welche den größten reellen Teil besitzt. Dann folgt aus (38) für $T > C$

$$\sigma_0^2-2\sigma^+\sigma_0+2\geqq(\sigma_0-\sigma^+)^2+(t_0-t^+)^2=|s_0-\varrho^+|^2\geqq|s_0-\varrho'|^2>$$

$$>\sigma_0^2-2\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\sigma_0-\frac{8\sigma_0}{\log^{0\cdot 82}T},$$

d. h.

$$(39)\qquad \sigma^+\leqq 1-\frac{\alpha}{2}+\frac{5}{\log^{0\cdot 82}T}.$$

Dies bedeutet aber, daß im Intervall $T/2\leqq t\leqq T$ nur die Intervalle I''_μ nichttriviale, in der Halbebene $\sigma\geqq 1-\frac{\alpha}{2}+\frac{5}{\log^{0\cdot 82}T}$ liegende Wurzeln enthalten können, wenn nur $T > C$. Daraus folgt nach (15) und $m(\mathfrak{A}^+)\leqq BT^\alpha\log^3 T$ für $T > C$

$$N^+\left(1-\frac{\alpha}{2}+\frac{5}{\log^{0\cdot 82}T},\,T\right)<2^7T^\alpha\log^4 T.$$

Wenn wir α durch $\alpha^+ + \frac{10}{\log^{0.82} T}$ ersetzen, gelangen wir zu

$$(40)\qquad N^+\left(1-\frac{\alpha^+}{2}, T\right) < 2^7 T^{[\alpha^+ + 10\exp(-0.82\log\log T)]}\log^4 T <$$
$$< T^{\alpha^+}\exp(11\log^{0.18} T),$$

wenn $T > C$ und $1 - \frac{10}{\log^{0.82} T} \geqq \alpha^+ \geqq \frac{2}{\log^{0.81} T}$; nach (14) gilt diese Abschätzung auch für $1 \geqq \alpha^+ \geqq 1 - \frac{10}{\log^{0.82} T}$. Wir bezeichnen α^+ wieder durch α und wenden (40) nacheinander mit $\frac{T}{2}, \frac{T}{2^2}, \dots, \frac{T}{2^\lambda}$ anstatt T an, wo

$$\lambda = \left[\left(1-\frac{\alpha}{4}\right)\frac{\log T}{\log 2}\right] + 1.$$

Dann ist offenbar

$$\lambda < 2\log T,\ \frac{T}{2^\lambda} \leqq T^{\frac{\alpha}{4}} \leqq \frac{T}{2^{\lambda-1}};$$

für $\alpha \geqq \frac{2}{\log^{0.81} T}$ ist

$$\frac{T}{2^\lambda} > \frac{1}{2} T^{\frac{\alpha}{4}} > \frac{1}{2}\exp\left(\frac{1}{2}\log^{0.19} T\right) > C$$

wenn $T > C$. Nach Summation erhalten wir für $T > C$

$$N\left(1-\frac{\alpha}{2}, T\right) - N\left(1-\frac{\alpha}{2}, T^{\frac{\alpha}{4}}\right) <$$
$$< T^\alpha \exp(11\log^{0.18} T)\left[\frac{1}{1^\alpha}+\frac{1}{2^\alpha}+\dots+\frac{1}{\lambda^\alpha}\right] > T^\alpha\exp(12\log^{0.18} T)$$

und, da nach (15) offenbar $N\left(1-\frac{\alpha}{2}, T^{\frac{\alpha}{4}}\right) < 2T^{\frac{\alpha}{4}}\log T$ gilt, gewinnen wir endlich für $T > C$, $1 \geqq \alpha \geqq 2\log^{-0.81} T$ die behauptete Ungleichung (17).

Für den Beweis der asymptotischen Formel (9) skizzieren wir vollständigkeitshalber die Beweisführung von HOHEISEL—INGHAM. Zur Abkürzung sei gesetzt:

$$\sqrt{x}\exp(\log^{0.996} x) = h,\quad \sum_{\substack{p,\,m\\ p^m \leqq x}} \log p = \psi(x),\quad T = \sqrt{x}\exp(-\log^{0.995} x).$$

Aus der Riemann—Mangoldt—Landauschen Formel erhalten die genannten Verfasser leicht (siehe [8]))

$$(41)\qquad \left|\frac{\psi(x+h)-\psi(x)}{h}-1\right|<$$

$$<C\left(\frac{x}{Th}\log^2 x+\frac{T\log T}{x}+2\int\limits_0^{1-2\log^{-0{\cdot}81}T} N(a,T)x^{a-1}\log x\,da\right),$$

wo C von da an von x unabhängige Konstanten bedeutet. Die ersten zwei Glieder haben den Grenzwert 0; für das dritte gilt für $T>C$ nach (5)

$$\int\limits_0^1 N(a,T)x^{a-1}\log x\,da<$$

$$<\frac{10T\log T\log x}{\sqrt{x}}+\int\limits_{1/2}^{1-2\log^{-0{\cdot}81}T} N(a,T)x^{a-1}\log x\,da<$$

$$<o(1)+\log x\int\limits_{-\infty}^{1-2\log^{-0{\cdot}81}T}\left(\frac{T^2}{x}\right)^{1-a}\exp(13\log^{0{\cdot}18}T)\,da<$$

$$<o(1)+\exp(14\log^{0{\cdot}18}T)\exp[2\log^{-0{\cdot}81}T(-2\log^{0{\cdot}995}x)]<$$

$$<o(1)+\exp(14\log^{0{\cdot}18}T)\exp(-\log^{0{\cdot}184}T)=o(1),$$

d. h.

$$\frac{\psi(x+h)-\psi(x)}{h}=1+o(1),\qquad \text{w. z. b. w.}$$

§ III.

Dieser Abschnitt enthält einige Bemerkungen über unsere Hypothese **a**. Wir beweisen den folgenden

S a t z. *Für* $m\geqq 2n$, $|z_\nu|\geqq 1-\frac{n}{m}$ $(\nu=1,2,\ldots,n)$ *gilt*

$$R=\max_{m-n+1\leqq\nu\leqq m}|z_1^\nu+z_2^\nu+\ldots+z_n^\nu|>\left(\frac{n}{200m}\right)^n.$$

B e w e i s: Es sei

$$(42\text{a})\qquad f(z)=\prod_{\nu=1}^{n}\left(1-\frac{z}{z_\nu}\right)=\sum_{\nu=0}^{n}b_\nu z^\nu,\qquad b_0=1$$

$$(42\text{b})\qquad \frac{1}{f(z)}=\sum_{\nu=0}^{\infty}c_\nu z^\nu,\qquad c_0=1.$$

Offenbar gilt

(42c) $$c_u = \sum_{\substack{i_1+i_2+\dots+i_n=\mu \\ i_1\geqq 0,\, i_2\geqq 0,\dots,\, i_n\geqq 0}} \frac{1}{z_1^{i_1}, z_2^{i_2}, \dots, z_n^{i_n}},$$

also

(43a) $$|b_\nu| \leqq \binom{n}{\nu} \frac{1}{\left(1-\frac{n}{m}\right)^\nu} \qquad (\nu=0,1,2,\dots,n)$$

und

(43b) $$|c_\mu| \leqq \frac{1}{\left(1-\frac{n}{m}\right)^\mu} \sum_{\substack{j_1+j_2+\dots+j_n=n+\mu \\ j_1>0,\dots,\, j_n>0}} 1 = \frac{1}{\left(1-\frac{n}{m}\right)^\mu} \binom{\mu+n-1}{n-1}.$$

Es sei

(44a) $$\sum_{\nu=0}^{m-n} c_\nu z^\nu = s_{m-n}(z)$$

und

(44b) $$1-f(z)s_{m-n}(z) = F(z).$$

Offenbar ist $F(z)$ ein Polynom m-ten Grades; es ist leicht zu sehen, daß die Koeffizienten von $z^0, z^1, z^2, \dots, z^{m-n}$ in $F(z)$ verschwinden. Es gilt

(45a) $$F(z) = \sum_{\nu=m-n+1}^{m} d_\nu z^\nu$$

und nach (44b)

(45b) $$F(z_1) = F(z_2) = \dots = F(z_n) = 1.$$

Wir ersetzen in (45a) z der Reihe nach durch $z_1, z_2, \dots, z_n$ und addieren; so gelangen wir wegen (45b) mit der Abkürzung $z_1^\nu + z_2^\nu + \dots + z_n^\nu = s_\nu$ zu

(46) $$n = \sum_{\nu=m-n+1}^{m} d_\nu s_\nu = \left| \sum_{\nu=m-n+1}^{m} d_\nu s_\nu \right| \leqq R \sum_{\nu=m-n+1}^{m} |d_\nu|.$$

Da für $k=(m-n+1), (m-n+2), \dots, m$ nach (43a) und (43b) wegen $m>2n$

$$|d_k| = |c_k b_0 + c_{k-1} b_1 + \dots + c_{k-n} b_n| \leqq$$

(47a) $$\leqq \frac{1}{\left(1-\frac{n}{m}\right)^k} \left[\binom{k+n-1}{n-1}\binom{n}{0} + \binom{k+n-2}{n-1}\binom{n}{1} + \dots + \binom{k-1}{n-1}\binom{n}{n} \right] \leqq \frac{\binom{k+n-1}{n-1} 2^n}{\left(1-\frac{n}{m}\right)^m} \leqq \frac{2^n}{\left(1-\frac{n}{m}\right)^m} \binom{m+n-1}{n-1}$$

und wegen der elementaren Ungleichung $(n-1)^{n-1} < e^{n-2}(n-1)!$

$$\binom{m+n-1}{n-1} < \frac{(m+n)^{n-1}e^{n-2}}{(n-1)^{n-1}} < \left(e\frac{m+n}{n-1}\right)^n < \left(3e\frac{m}{n}\right)^n,$$

gilt, so folgt

$$\text{(47b)} \qquad |d_k| \leqq \frac{\left(6e\frac{m}{n}\right)^n}{\left(1-\frac{n}{m}\right)^m} \qquad (k = m-n+1, \ldots, m).$$

Nach (47b) und (46) ist

$$R \geqq \frac{\left(1-\frac{n}{m}\right)^m}{\left(6e\frac{m}{n}\right)^n} > \frac{e^{-2n}}{\left(6e\frac{m}{n}\right)^n} = \left(\frac{n}{6e^3 m}\right)^n > \left(\frac{n}{200m}\right)^n, \quad \text{w. z. b. w.}$$

Endlich zeigen wir an einem Gegenbeispiel, daß es zu jedem M ein Wertsystem $(z_1, \ldots, z_n)$ sogar mit $z_1 = 1 = |z_2| = \ldots = |z_n|$ gibt, für welche

$$\max_{M\left(1-\frac{1}{\omega}\right) \leqq \nu \leqq M} |z_1^\nu + z_2^\nu + \ldots + z_n^\nu| < \exp\left(-\frac{5}{6}\log n \log \omega\right).$$

Das Gegenbeispiel habe ich aus einer Bemerkung des Herrn P. STEIN gewonnen, die ich aus einem Littlewoodschen Aufsatze[15]) entnehme; dieser Aufsatz behandelt übrigens ein Problem, welches mit unseren Hypothesen verwandt ist. Es sei $n = 4^l$, die ersten $\binom{2l}{l}$ von den z_ν seien gleich 1, die folgenden $\binom{2l}{l-1}$ aus denselben seien gleich $\exp\left(\frac{\pi i}{M}\right)$, die folgenden $\binom{2l}{l+1}$ seien gleich $\exp\left(-\frac{\pi i}{M}\right)$ und allgemein

$$z_{\binom{2l}{l}+\binom{2l}{l-1}+\binom{2l}{l+1}+\ldots+\binom{2l}{l-k+1}+\binom{2l}{l+k-1}+1} = \ldots =$$

$$= z_{\binom{2l}{l}+\binom{2l}{l-1}+\binom{2l}{l+1}+\ldots+\binom{2l}{l-k+1}+\binom{2l}{l+k-1}+\binom{2l}{l-k}} = \exp\left(\frac{k\pi i}{M}\right)$$

$$z_{\binom{2l}{l}+\binom{2l}{l-1}+\binom{2l}{l+1}+\ldots+\binom{2l}{l-k}+1} = \ldots =$$

$$= z_{\binom{2l}{l}+\binom{2l}{l-1}+\binom{2l}{l+1}+\ldots+\binom{2l}{l-k+1}+\binom{2l}{l+k-1}+\binom{2l}{l-k}+\binom{2l}{l+k}} = \exp\left(-\frac{k\pi i}{M}\right)$$

$$(k = 2, 3, \ldots, l).$$

---

15) J. E. LITTLEWOOD, Mathematical Notes (12): An inequality for a sum of cosines, *Journal of London Math. Society*, **12** (1937), p. 117—222.

Dann ist

$$z_1^x + z_2^x + \ldots + z_n^x = \sum_{\mu=0}^{2l} \binom{2l}{\mu} \left(e^{(l-\mu)\frac{\pi i}{M}}\right)^x = \sum_{\mu=0}^{2l} \binom{2l}{\mu} \left(e^{\frac{\pi i x}{M}}\right)^{l-\mu} =$$

$$= \left(e^{\frac{\pi i x}{2M}} + e^{-\frac{\pi i x}{2M}}\right)^{2l} = \left(2 \cos \frac{\pi x}{2M}\right)^{2l},$$

also

$$\max_{M\left(1-\frac{1}{\omega}\right) \leqq \nu \leqq M} |z_1^\nu + \ldots + z_n^\nu| \leqq \left(2 \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2\omega}\right)\right)^{2l} =$$

$$= \left(2 \sin \frac{\pi}{2\omega}\right)^{2l} < \left(\frac{\pi}{\omega}\right)^{2l} = \exp\left(-\frac{\log n}{\log 2} \log \frac{\omega}{\pi}\right) <$$

$$< \exp\left(-\frac{5}{6} \log n \log \omega\right),$$

wie behauptet.

(Eingegangen am 27. Dezember 1939; umgearbeitet am 1. Januar 1941.)