Über die Primzahlen der arithmetischen Progression. (II.)

Von PAUL TURÁN in Budapest.

Im folgenden sei immer $s = \sigma + ti$, $L(s, \chi)$ eine beliebige Dirichletsche L-Reihe, welche für $\sigma > 1$ bekanntlich durch $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s}$ definiert ist; $\varphi(k)$ die Eulersche Funktion, $\Lambda(n)$ das Dirichletsche Symbol. Die zu behandelnde Progression sei $kx + l\,(x = 0, 1, \ldots)$, wo $(k, l) = 1$; es bedeute $P(k, l)$ die kleinste Primzahl dargestellt von $kx + l$. Es ist $L(s, \chi) \neq 0$ für $\sigma > 1$; die unbewiesene Piltzsche Vermutung[1]) behauptet, daß $L(s, \chi) \neq 0$ für $\sigma > \frac{1}{2}$.

S. CHOWLA[2]) bemerkte, daß unter Annahme der Piltzschen Vermutung gilt

$$P(k, l) < c_1 \varphi(k)^{2+\varepsilon}, \tag{1}$$

wo $\varepsilon > 0$, beliebig klein und $c_1 = c_1(\varepsilon)$ ist. In meinem ersten Aufsatze[3]) bewies ich, daß unter derselben Vermutung

$$P(k, l) < c_2 \varphi(k) \log^{2+\varepsilon} \varphi(k) \tag{2}$$

für fast alle Progressionen mod k, d. h. für jedes beliebig kleine ε existiert ein $c_2 = c_2(\varepsilon)$ so, daß

$$\lim_{k \to \infty} \frac{1}{\varphi(k)} \sum_{\substack{l \\ 1 \leq l < k,\ (k, l) = 1 \\ P(k, l) < c_2 \varphi(k) \log^{2+\varepsilon} \varphi(k)}} 1 = 1.$$

---

1) A. PILTZ, *Über die Häufigkeit der Primzahlen in arithmetischen Progressionen etc.* (Habilitationschrift Jena, 1884.)

2) S. CHOWLA, On the Least Prime in the Arithmetical Progression, *Journal Indian Math. Society,* (2) 1 (1934), p. 1—3.

3) P. TURÁN, Über die Primzahlen der arithmetischen Progression, *diese Acta,* 8 (1936—37), p. 226—235.

Zur Orientierung bemerke ich, daß aus dem Primzahlsatze offenbar

$$\lim_{k \to \infty} \frac{1}{\varphi(k)} \sum_{\substack{l \\ (l,k)=1,\ 1 \leqq l \leqq k-1 \\ P(k,l) < \varphi(k) \log^{1-\varepsilon} \varphi(k)}} 1 = 0$$

folgt; es ist also fast immer $P(k, l) < c_2(\varepsilon)\varphi(k) \log^{2+\varepsilon} \varphi(k)$ und $P(k, l) > \varphi(k) \log^{1-\varepsilon} \varphi(k)$.

Im folgenden will ich kurz zeigen, daß man mit einer schwächeren Voraussetzung auskommt. Es genügt nur über die „kleinen" Wurzeln der L-Funktionen etwas vorauszusetzen; so erhellt sich besonders, daß die „kleinen" Primzahlen der arithmetischen Progression nur von den „kleinen" Wurzeln der L-Funktionen abhängen. Diesen Schluß ziehen wir aus dem folgenden Satz.

Satz. *Es sei vorausgesetzt, daß die Piltzsche Vermutung in folgender schwächerer Form wahr ist: Es existieren zwei positiven Weltkonstanten δ mit $0 < \delta \leqq \frac{1}{2}$ und α, so daß in das Parallelogramm $1 - \delta < \sigma \leqq 2$, $|t| \leqq \alpha$ keine der L-Funktionen verschwinden. Dann ist*

$$P(k, l) < c_3 \varphi(k)^{c_4},$$

wo c_3 eine absolute Konstante bedeutet und c_4 nur von α und δ abhängt, jedoch mit $c_4 > \frac{1}{\delta}$.

Bemerkung: c_4 nimmt monoton ab, wenn α monoton zunimmt; wenn $\alpha \to \infty$, kann man c_4 als $\frac{1}{\delta} + \varepsilon$ wählen mit beliebig kleinem positiven ε.

Beweis. Einfachkeitshalber nehmen wir $\delta = \frac{1}{2}$ und $\alpha = 5$ an und beweisen den Satz mit $c_4 = 8$; im allgemeinen Falle ist der Beweis ähnlich.

Es ist für $\sigma > 1$

$$\sum_{n \equiv l \bmod k} \frac{\Lambda(n)}{n^s} = -\frac{1}{\varphi(k)} \sum_{\chi} \frac{1}{\overline{\chi}(l)} \frac{L'}{L}(s, \chi) \equiv f(s). \tag{3}$$

Es sei $\frac{1}{2} + \varphi(k)^8 = x$, $\omega = [2 \log \varphi(k)]$; dann ist bekanntlich wegen (3)

$$(4) \qquad \sum_{\substack{n \\ n<x}} \Lambda(n) \frac{\log^{\omega-1} \frac{x}{n}}{(\omega-1)!} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\sigma=1+\frac{1}{\log x}} \frac{x^s}{s^\omega} f(s)\, ds.$$

Es sei

$$I_1 = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\substack{4 \\ \sigma=1+\frac{1}{\log x}}}^{\infty} \frac{x^s}{s^\omega} f(s)\, ds.$$

Auf $\sigma = 1 + \dfrac{1}{\log x}$ ist

$$|f(s)| < \sum_{\substack{n \\ n\equiv l \bmod k}} \frac{\log n}{n^{1+\frac{1}{\log x}}} < 2 + \frac{1}{k^{1+\frac{1}{\log x}}} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\log k\nu}{\nu^{1+\frac{1}{\log x}}} < a_1$$

wo a_1 und später $a_2, \ldots$ von k, l, s unabhängig sind. Dann ist also

$$|I_1| < a_2 x \int_4^{\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^{\frac{\omega}{2}}} < a_2 x \int_4^{\infty} \frac{2t}{(1+t^2)^{\frac{\omega}{2}}}\, dt <$$

$$< \frac{a_3 x}{\omega \,.\, 17^{\frac{\omega}{2}}} < a_4 \varphi(k)^{8-\log 17} < a_4 \varphi(k)^6.$$

Es ist also

$$\left| \sum_{\substack{n \\ n\equiv l \bmod k}} \Lambda(n) \frac{\log^{\omega-1} \frac{x}{n}}{(\omega-1)!} - \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\substack{-4 \\ \sigma=1+\frac{1}{\log x}}}^{4} \frac{x^s}{s^\omega} f(s)\, ds \right| < a_4 \varphi(k)^6.$$

Wir wenden den Cauchyschen Integralsatz auf das Parallelogramm $\left(\dfrac{3}{4} \pm 4i,\ 1 + \dfrac{1}{\log x} \pm 4i\right)$ und die Funktion $\dfrac{x^s}{s^\omega} f(s)$ an. Das Integrand ist hier nach der Voraussetzung regulär, ausgenommen den Punkt $s = 1$, wo ein Pol erster Ordnung mit dem Residuum $\dfrac{1}{\varphi(k)}$ liegt. Da das Integrand auf der reellen Achse reel ist, gilt

$$\left|\sum_{\substack{n \\ n<x \\ n\equiv l \bmod k}} \frac{\Lambda(n)\log^{\omega-1}\frac{x}{n}}{(\omega-1)!}-\varphi(k)^7\right|<$$

$$(6)\qquad < a_5\varphi(k)^6+\frac{1}{\pi}\int\limits_{\substack{\frac{3}{4} \\ t=4}}^{1+\frac{1}{\log x}} \frac{x^\sigma|f(s)|}{(\sigma^2+16)^{\log\varphi(k)}}\,d\sigma+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int\limits_{\substack{0 \\ \sigma=\frac{3}{4}}}^{4} \frac{x^{\frac{3}{4}}|f(s)|}{\left(\frac{9}{16}+t^2\right)^{\log\varphi(k)}}\,dt\equiv a_5\varphi(k)^6+I_2+I_3.$$

Nun gilt aber, wenn $L(s,\chi)\neq 0$ für $\sigma>\frac{1}{2}$, $|t|\leqq 5$ nach Titchmarch[4]) für die Strecken $\sigma=\frac{3}{4}$, $|t|\leqq 4$ bzw. $t=4$, $\frac{3}{4}\leqq\sigma\leqq 2$

$$(7)\qquad \left|\frac{L'}{L}(s,\chi)\right|<a_6\log\varphi(k),$$

also auch

$$|f(s)|<a_7\log\varphi(k).$$

Dann ist aber

$$(8a)\quad I_3<a_8x^{\frac{3}{4}}\left(\frac{16}{9}\right)^{\log\varphi(k)}\log\varphi(k)<a_9\varphi(k)^{6+\log\frac{16}{9}}\log\varphi(k)<a_{10}\varphi(k)^{67},$$

ferner

$$(8b)\qquad I_2<a_{11}\frac{x\log\varphi(k)}{16^{\log\varphi(k)}}<a_{12}\varphi(k)^6,$$

also nach (8a), (8b) und (6)

$$(9)\qquad \left|\sum_{\substack{n \\ n\leqq\varphi(k)^8 \\ n\equiv l \bmod k}} \Lambda(n)\frac{\log^{\omega-1}\frac{x}{n}}{(\omega-1)!}-\varphi(k)^7\right|<a_{13}\varphi(k)^{67}.$$

---

[4]) E. C. Titchmarch, A Divisor Problem, *Rendiconti Palermo*, **54** (1930), p. 414—429. Die Behauptung (7) steht hier nicht explicite; es läßt sich aber leicht aus Lemma VII und Lemma V entnehmen.

Wir müssen den Beitrag der Primzahlpotenzen p^α mit $\alpha > 1$ abschätzen. Da für $1 \leqq n \leqq \varphi(k)^4$

$$\frac{\log^{\omega-1}\frac{x}{n}}{(\omega-1)!} < a_{14}\left(\frac{e\log\frac{x}{n}}{\omega}\right)^{\omega} < a_{15}(4e)^{2\log\varphi(k)} < a_{16}\varphi(k)^{4.8}$$

gilt, so ist

$$\text{(10a)}\quad \sum_{\substack{p,\,\alpha \\ p^\alpha \equiv l \bmod k \\ p^\alpha < \varphi(k)^4,\ \alpha > 1}} \log p \frac{\log^{\omega-1}\frac{x}{p^\alpha}}{(\omega-1)!} < a_{17}\varphi(k)^{4.8}\log\varphi(k) \sum_{\substack{d,\,r \\ d^r < \varphi(k)^4,\ r>1}} 1 < a_{18}\varphi(k)^{6.9}.$$

Da ferner für $\varphi(k)^4 \leqq n < \varphi(k)^6$

$$\frac{\log^{\omega-1}\frac{x}{n}}{(\omega-1)!} < a_{18}\left(\frac{e\log\frac{x}{n}}{\omega}\right)^{\omega} < a_{19}(2e)^{2\log\varphi(k)} < a_{19}\varphi(k)^{3.4},$$

so ist

$$\text{(10b)}\quad \sum_{\substack{p,\,\alpha \\ p^\alpha \equiv l \bmod k,\ \alpha>1 \\ \varphi(k)^4 \leqq p^\alpha < \varphi(k)^6}} \log p \frac{\log^{\omega-1}\frac{x}{p^\alpha}}{(\omega-1)!} < a_{20}\varphi(k)^{3.4}\log\varphi(k) \sum_{\substack{d,\,r \\ d^r < \varphi(k)^6 \\ r>1}} 1 < a_{21}\varphi(k)^{6.5}.$$

Endlich gilt für $\varphi(k)^6 \leqq n \leqq \varphi(k)^8$

$$\frac{\log^{\omega-1}\frac{x}{n}}{(\omega-1)!} < a_{22}\left(\frac{e\log\frac{x}{n}}{\omega}\right)^{\omega} < a_{22}e^{2\log\varphi(k)} = a_{22}\varphi(k)^2$$

also

$$\text{(10c)}\quad \sum_{\substack{p,\,\alpha>1 \\ p^\alpha \equiv l \bmod k \\ \varphi(k)^6 \leqq p^\alpha \leqq \varphi(k)^8}} \log p \frac{\log^{\omega-1}\frac{x}{p^\alpha}}{(\omega-1)!} < a_{23}\varphi(k)^2\log\varphi(k) \sum_{\substack{d,\,r>1 \\ d^r \leqq \varphi(k)^8}} 1 < a_{24}\varphi(k)^{6.1}.$$

Aus (9), (10a), (10b) und (10c) folgt schließlich

$$\left| \sum_{\substack{p \equiv l \bmod k \\ p \leqq \varphi(k)^8}} \log p \frac{\log^{\omega-1} \frac{x}{p}}{(\omega-1)!} - \varphi(k)^7 \right| < c_{25} \varphi(k)^{6.9},$$

also für $k > a_{26}$

$$\sum_{\substack{p \equiv l \bmod k \\ p \leqq \varphi(k)^8}} \log p \frac{\log^{\omega-1} \frac{x}{p}}{(\omega-1)!} > 0, \qquad \text{q. e. d.}$$

Weitere Ergebnisse in dieser Richtung gibt eine von HOHEISEL stammende Methode; auf deren Behandlung hoffen wir in der Kürze zurückzukehren.

(Eingegangen am 23. November 1938.)