Sur le balayage des masses.

Par OTTO FROSTMAN à Lund.

1. Soit F un ensemble fermé dans l'espace Ω à m dimensions et supposons qu'une masse positive $=1$ soit concentrée en un point P extérieur à F. On sait par les travaux de M. M. RIESZ[1]) et de l'auteur[2]) qu'il est possible de „balayer" cette masse sur F, c'est-à-dire de faire une répartition $\mu_P(e)$ d'une masse positive $\leqq 1$ sur F de manière que son potentiel d'ordre α

$$\int_F r_{QS}^{\alpha-m}\, d\mu_P(S)$$

soit $=r_{PQ}^{\alpha-m}$ en tout point de F sauf au plus dans un ensemble de capacité nulle. Ici, l'exposant α peut être un nombre réel quelconque dans l'intervalle $0<\alpha\leqq 2$, l'exposant limite $\alpha=2$ donnant le cas classique des potentiels newtoniens. M. RIESZ, qui le premier a démontré ce théorème pour un exposant général, donna à la distribution $\mu_P(e)$ le nom de „masses de GREEN". Les points Q de F dans lesquels le potentiel des masses $\mu_P(e)$ a la valeur visée $r_{PQ}^{\alpha-m}$ pour toute position de P s'appellent les points *réguliers* de F; ils embrassent en particulier tout point intérieur de F. Les points de F qui ne sont pas réguliers s'appellent points *irréguliers;* en un tel point le potentiel dû à $\mu_P(e)$ est $<r_{PQ}^{\alpha-m}$ pour certaines positions de P (non nécessairement pour toutes). Notons encore que les masses de GREEN satisfont à la loi fondamentale de *réciprocité*

---

1) M. RIESZ, Intégrales de Riemann-Liouville et potentiels, *ces Acta,* 9 (1938), p. 1—42.

2) O. FROSTMAN, Potentiel d'équilibre et capacité des ensembles avec quelques applications à la théorie des fonctions, *Meddel. Lunds Univ. Mat. Sem.,* 3 (1935), p. 1—118.

$$(1) \qquad \int_F r_{QS}^{\alpha-m}\, d\mu_P(S) = \int_F r_{PS}^{\alpha-m}\, d\mu_Q(S),$$

où P et Q sont deux points quelconques extérieurs à F. Cette relation est une conséquence immédiate de la formule générale

$$(2) \qquad \int_\Omega v\, d\mu = \int_\Omega u\, d\nu,$$

μ et ν étant deux distributions quelconques de masses positives, u et v leurs potentiels respectifs.

Le but du présent travail est d'étendre la notion de masses de GREEN aux points P appartenant à l'ensemble F et d'en faire une application importante concernant l'ensemble irrégulier de F. Quant au balayage des masses situées sur F, on serait à première vue tenté de dire qu'il n'y a ici aucun problème; en effet, en plaçant la masse unité en un point P de F on aurait sans aucun balayage une répartition de masse positive sur F dont le potentiel est, même partout, $= r_{PQ}^{\alpha-m}$. On pourrait donc définir les masses de GREEN relatives à un point appartenant à F tout simplement comme la masse unité concentrée en ce point-là. Or les masses de GREEN définies de cette manière ne satisfont pas à la loi de réciprocité (1), car s'il en était ainsi, la relation

$$(3) \qquad r_{PQ}^{\alpha-m} = \int_F r_{PS}^{\alpha-m}\, d\mu_Q(S)$$

aurait lieu quels que soient le point P de F et le point Q extérieur à F, chose qui est impossible si P est irrégulier. Cependant, *nous allons indiquer un procédé par lequel les masses de Green* $\mu_P(e)$ *peuvent être définies, non seulement pour les points* P *extérieurs à* F *mais aussi pour les points* P *appartenant à* F, *de manière que la relation de réciprocité subsiste. Ces masses sont ou la masse unité concentrée au point* P *lui-même ou une répartition continue sur* F, *s'annulant sur tout ensemble de capacité nulle.* En effet, enlevons d'abord à l'ensemble F les points qui peuvent se trouver dans une petite sphère $s(P, \varrho)$ de centre P et de rayon ϱ. En balayant la masse unité au point P sur la partie restante de F, on y obtient une répartition de masse positive qui sera désignée par $\mu_P^{(\varrho)}(e)$. Il est maintenant bien clair que pour $\varrho_1 < \varrho_2$ on a $\mu_P^{(\varrho_1)}(e) \leqq \mu_P^{(\varrho_2)}(e)$ pour tout ensemble e (mesurable B) à distance $\geqq \varrho_2$ du point P, car le balayage $\mu_P^{(\varrho_2)}$ peut s'interpréter comme la somme du balayage $\mu_P^{(\varrho_1)}$ et du balayage suivant de la couronne entre les deux sphères $s(P, \varrho_1)$ et $s(P, \varrho_2)$.[3]) C'est-à-dire que, pour ϱ tendant vers zéro, la fonction d'ensemble $\mu_P^{(\varrho)}(e)$ tend finalement en décroissant vers une fonction limite $\mu_P(e)$ sur tout ensemble e à distance positive de P. D'autre part, on trouve d'une manière analogue, s étant une sphère quelconque de centre P et de rayon $> \varrho_2 > \varrho_1$, $\mu_P^{(\varrho_1)}(s) \geqq \mu_P^{(\varrho_2)}(s)$, de façon que pour toute sphère s de centre P, $\mu_P^{(\varrho)}(s)$ tend finalement en croissant vers une limite déterminée $\mu_P(s)$. Ces considérations nous apprennent qu'il existe une répartition $\mu_P(e)$ bien déterminée qui dans le sens usuel de la convergence des fonctions additives d'ensemble est la limite pour $\varrho = 0$ des répartitions $\mu_P^{(\varrho)}(e)$.

L'existence d'une répartition limite μ_P étant démontrée, il nous reste à faire connaître de plus près ses propriétés. Observons d'abord que son potentiel est $= r_{PQ}^{\alpha-m}$ en tout point Q de F sauf au plus dans un ensemble de capacité nulle. En effet, on démontre par un raisonnement tout à fait élémentaire que la limite d'une suite de potentiels $\{u_n(Q)\}$, dus à des répartitions de masses positives qui tendent vers une répartition limite et qui sont décroissantes au voisinage de Q, est égale au potentiel de la répartition limite. Dans le cas actuel, le potentiel dû à $\mu_P^{(\varrho)}$ est $= r_{PQ}^{\alpha-m}$ aux points de F extérieurs à $s(P, \varrho)$; le potentiel dû à μ_P est donc $= r_{PQ}^{\alpha-m}$ en tout point différent de P, exception toujours faite d'un ensemble de capacité nulle[4]). Supposons maintenant que la distribution μ_P ait une masse positive k concentrée au point P. Faisons dans ce cas un second balayage en balayant la masse $\mu_P[s(P, \varrho)]$ sur la partie de F extérieure à la sphère $s(P, \varrho)$. Or la nouvelle distribution ainsi obtenue, engendrant aux points de F extérieurs à $s(P, \varrho)$ un potentiel $= r_{PQ}^{\alpha-m}$, est identique à la distribution $\mu_P^{(\varrho)}$ obtenue par le balayage primordial de la masse unité au point P.[5]) Par suite, e étant un ensemble quelconque mesurable B extérieur à $s(P, \varrho)$,

---

[3]) M. Riesz, *loc. cit.*, n° 15 et n° 25.

[4]) La capacité d'une infinité dénombrable d'ensembles de capacité nulle est nulle. On en conclut que l'ensemble exceptionnel total provenant du balayage μ_P est de capacité nulle, car on peut toujours admettre que ϱ parcourt une suite dénombrable de valeurs tendant vers zéro.

[5]) *Cf.* note 3.

$$\mu_P^{(\varrho)}(e) \geqq \mu_P(e) + k\mu_P^{(\varrho)}(e),$$

et à la limite pour $\varrho = 0$,

$$\mu_P(e) \geqq (1+k)\mu_P(e).$$

Cette inégalité n'est cependant possible que si 1) $\mu_P(e) = 0$ ou 2) $k = 0$. Dans le premier cas, $\mu_P(e)$ s'annule sur tout ensemble ne contenant pas le point P, tandis qu'on a nécessairement $k = \mu_P(P) = 1$, le potentiel de μ_P étant $r_{PQ}^{\alpha-m}$. Dans le second cas, $\mu_P(e)$ est continu au point P et par conséquent partout, le potentiel engendré étant fini sauf peut-être en ce point-là. Pour la même raison, on conclut encore que $\mu_P(e)$ s'annule sur tout ensemble fermé de capacité nulle extérieur à P,[6] et alors, puisque $k = \mu_P(P) = 0$, que $\mu_P(e)$ s'annule sur un ensemble *quelconque* de capacité nulle.

Nous démontrons enfin que les masses de Green qu'on vient de construire satisfont à la loi de réciprocité (1). En effet, en appliquant la formule (2) aux distributions $\mu_P^{(\varrho)}$ et $\mu_Q^{(\varrho)}$, dont nous désignons un moment les potentiels par $u_P^{(\varrho)}$ et $u_Q^{(\varrho)}$, nous aurons

$$\int_F u_Q^{(\varrho)}(S)\,d\mu_P^{(\varrho)}(S) = \int_F u_P^{(\varrho)}(S)\,d\mu_Q^{(\varrho)}(S). \tag{4}$$

Or $u_Q^{(\varrho)}(S) = r_{QS}^{\alpha-m}$ en tout point de F extérieur à la sphère $s(Q,\varrho)$, sauf au plus dans un ensemble de capacité nulle sur lequel $\mu_P^{(\varrho)}(e)$ s'annule, et dans la sphère $s(Q,\varrho)$ on a $u_Q^{(\varrho)}(S) \leqq r_{QS}^{\alpha-m}$. Par conséquent, ϱ_0 étant un nombre fixe mais suffisamment petit,

$$\underline{\lim}_{\varrho\to 0} \int_F u_Q^{(\varrho)}(S)\,d\mu_P^{(\varrho)}(S) \geqq \lim_{\varrho\to 0} \int_{F-s(Q,\varrho_0)} u_Q^{(\varrho)}(S)\,d\mu_P^{(\varrho)}(S) =$$

$$= \lim_{\varrho\to 0} \int_{F-s(Q,\varrho_0)} r_{QS}^{\alpha-m}\,d\mu_P^{(\varrho)}(S) = \int_{F-s(Q,\varrho_0)} r_{QS}^{\alpha-m}\,d\mu_P(S) >$$

$$> \int_F r_{QS}^{\alpha-m}\,d\mu_P(S) - \varepsilon.$$

D'autre part, on a

$$\overline{\lim}_{\varrho\to 0} \int_F u_Q^{(\varrho)}(S)\,d\mu_P^{(\varrho)}(S) \leqq \lim_{\varrho\to 0} \int_F r_{QS}^{\alpha-m}\,d\mu_P^{(\varrho)}(S) = \int_F r_{QS}^{\alpha-m}\,d\mu_P(S).$$

Le premier membre de (4) tend donc vers la limite

$$\int_F r_{QS}^{\alpha-m}\,d\mu_P(S),$$

[6] O. Frostman, *loc. cit.*, p. 83.

et on voit de la même façon que le second membre tend vers

$$\int_F r_{PS}^{\alpha-m}\, d\mu_Q(S).$$

L'égalité (4) entraîne donc à la limite la relation (1).

Remarque. *Les masses de Green $\mu_P(e)$ ne dépendent pas du procédé particulier par lequel elles sont obtenues, mais sont uniquement déterminées par les deux conditions d'avoir un potentiel $= r_{PQ}^{\alpha-m}$ en tout point de F, sauf au plus dans un ensemble de capacité nulle, et de satisfaire à la loi de réciprocité.*

En effet, si P est un point extérieur à F, la distribution $\mu_P(e)$ est uniquement déterminée déjà par la première condition; si d'autre part P appartient à F et s'il y avait une seconde distribution $\nu_P(e)$ satisfaisant auxdites conditions, on aurait pour tout point Q extérieur à F

$$\int_F r_{QS}^{\alpha-m}\, d\nu_P(S) = \int_F r_{PS}^{\alpha-m}\, d\mu_Q(S) = \int_F r_{QS}^{\alpha-m}\, d\mu_P(S).$$

Or l'égalité du premier et du dernier membre de cette relation a lieu encore en tout point Q de F, sauf au plus dans un ensemble de capacité nulle, chaque membre étant par la première condition $= r_{PQ}^{\alpha-m}$. Dès lors, par un théorème connu[7]) d'unicité, $\nu_P(e) \equiv \mu_P(e)$.

2. Comme nous l'avons déjà indiqué dans le numéro précédent, la loi de réciprocité (1) donne lieu à la relation (3) si P est un point de F tel que $\mu_P(P) = 1$, et cela indépendamment de la position de Q. Le point P est donc dans ce cas un point *régulier* de F. Inversement, si P est régulier, on conclut facilement par le théorème d'unicité, de la même façon que dans la remarque ci-dessus, que $\mu_P(P) = 1$. *Les points réguliers de F sont donc caractérisés par le fait que $\mu_P(P) = 1$, tandis qu'en un point irrégulier on a $\mu_P(P) = 0$.* La dernière propriété revient évidemment aussi aux points extérieurs à F; les points irréguliers sont donc à ce point de vue à regarder comme n'appartenant pas à l'ensemble.

Les allures différentes que présentent les masses de Green aux points réguliers et irréguliers de F nous donnent immédiatement une démonstration du fait connu[8]) que *les points irréguliers*

---

[7]) M. Riesz, *loc. cit.*, n° 10.

[8]) M. Riesz, *loc. cit.*, n° 18.

forment un ensemble E de capacité nulle. Désignons en effet par $E^{(\varrho)}$ l'ensemble des points P de F tels que $\mu_P[s(P,\varrho)] < 1$. Si cet ensemble était de capacité positive, il en existerait un sous-ensemble fermé A de capacité positive et on pourrait encore supposer que A soit contenu dans une sphère de rayon $\frac{\varrho}{2}$. Considérons maintenant la distribution d'équilibre ν sur A, dont le potentiel v est $=1$ en tout point de A sauf au plus dans un ensemble de capacité nulle. La distribution ν s'annulant sur tout ensemble de capacité nulle, on a pour tout point P de A

$$v(P) = \int_A r_{PS}^{\alpha-m}\, d\nu(S) = \int_A d\nu(S) \int_F r_{ST}^{\alpha-m} d\mu_P(T) = \int_F v(T)\, d\mu_P(T) \leqq$$
$$\leqq \mu_P[s(P,\varrho)] + \gamma\mu_P[F - s(P,\varrho)],$$

où γ est le maximum du potentiel v à l'extérieur de la sphère $s(P,\varrho)$. Ce maximum est nécessairement < 1, et on en conclurait, puisque $\mu_P[s(P,\varrho)] + \mu_P[F - s(P,\varrho)] \leqq 1$, que $v(P) < 1$. Or cela est impossible; la capacité de $E^{(\varrho)}$ est donc nulle quel que soit ϱ positif. De plus, pour $\varrho_1 > \varrho_2 > \ldots$ on a $E^{(\varrho_1)} \subset E^{(\varrho_2)} \subset \ldots$, et si ϱ_n tend vers zéro, $E = E^{(\varrho_1)} + E^{(\varrho_2)} + \ldots + E^{(\varrho_n)} + \ldots$ D'où il suit que la capacité de E est aussi nulle.

Du théorème qu'on vient de démontrer on tire immédiatement, ce qui nous sera utile dans la suite, que les masses de Green $\mu_P(e)$ s'annulent toujours sur l'ensemble irrégulier E. Car, si P est régulier, toute la masse est concentrée en ce point et s'annule sur tout ensemble extérieur à P; d'autre part, si P est irrégulier ou à l'extérieur de F, $\mu_P(e)$ s'annule sur tout ensemble de capacité nulle, donc en particulier sur E.

En supposant l'ensemble e mesurable B, $\mu_P(e)$ est, considéré comme fonction de P, une fonction de point définie dans tout l'espace, qui en général est discontinue mais évidemment mesurable B.[9]) Soit maintenant σ une distribution de masses à variation

---

[9]) On trouve facilement qu'aux points P extérieurs à F, $\mu_P(e)$ est continue (même analytique; voir l'ouvrage souvent cité de M. Riesz, nº 25), et qu'aux points P de F à distance positive de l'ensemble e, $\mu_P(e)$ est *semi-continu supérieurement.* Car, pour ϱ suffisamment petit, on a

$$\mu_P(e) \leqq \mu_P^{(\varrho)}(e) < \mu_P(e) + \varepsilon,$$

et si P' est un point très voisin de P, de sorte que la masse $\mu_{P'}^{(P,\varrho)}$ balayée du point P' sur $F - s(P,\varrho)$ diffère au plus de ε de la masse $\mu_P^{(\varrho)}$, on a encore bornée; dès lors l'intégrale

$$(5) \qquad \sigma_F(e) = \int_\Omega \mu_P(e)\, d\sigma(P)$$

a un sens bien déterminé et définit une nouvelle distribution de masses sur l'ensemble F qui sera appelée *le balayage de σ par rapport à F.* Le potentiel dû à σ_F est égal au potentiel dû à σ en tout point de F, sauf peut-être dans l'ensemble irrégulier E. Observons encore que les masses $\sigma_F(e)$ s'annulent toujours sur cet ensemble puisqu'il en est ainsi des masses $\mu_P(e)$ pour toute position de P.

Nous définissons enfin *la fonction de Green $G(P, Q)$ de l'ensemble F par l'équation*

$$(6) \qquad G(P, Q) = r_{PQ}^{\alpha-m} - \int_F r_{SQ}^{\alpha-m}\, d\mu_P(S),$$

P et Q étant deux points *quelconques* dans l'espace. Si le pôle P se trouve à l'extérieur de F, cette définition devient identique à celle donnée par M. Riesz[10]), elle en est donc une extension directe pour des pôles appartenant à F. Remarquons tout de suite que la relation classique $G(P, Q) = G(Q, P)$ subsiste, conséquence immédiate de la formule de réciprocité (1). La fonction de Green est toujours non-négative; de plus, elle s'annule certainement si l'un au moins des points P ou Q est un point régulier de F. En effet, si le pôle P est régulier, la masse de Green μ_P est concentrée en ce point et l'intégrale se réduit à $r_{PQ}^{\alpha-m}$; $G(P, Q)$ est donc identiquement nul. Le cas où le point d'argument Q

$$\mu_{P'}(e) \leqq \mu_{P'}^{(P,\varrho)}(e) \leqq \mu_P^{(\varrho)}(e) + \varepsilon < \mu_P(e) + 2\varepsilon,$$

ce qui démontre la proposition.

De cette propriété on obtient d'ailleurs une démonstration immédiate du fait que si M est un point extérieur à F tendant vers un point frontière régulier P de F, on a pour tout ϱ positif

$$\lim_{M \to P} \mu_M[s(P, \varrho)] = 1.$$

Cela est en effet une conséquence des inégalités évidentes

$$\overline{\lim_{M \to P}}\, \mu_M[F - s(P, \varrho)] \leqq \mu_P[F - s(P, \varrho)] = 0;$$

$$\underline{\lim_{M \to P}}\, \mu_M(F) \geqq \mu_P^{(\varrho)}(F) > 1 - \varepsilon.$$

10) M. Riesz, *loc. cit.*, n° 15.

est régulier se ramène au cas précédent par la relation de symétrie.

3. L'avantage de la notion de masses de GREEN pour des pôles appartenant à F se manifeste surtout dans l'étude des points irréguliers. Ainsi, nous pouvons facilement répondre à une question soulevée par M. RIESZ au sujet d'une formule importante, donnant la valeur d'un potentiel en un point extérieur à l'ensemble qui porte les masses, par les valeurs que le potentiel admet dans cet ensemble. Soit en effet u un potentiel engendré par des masses σ situées sur l'ensemble F, on a en tout point P extérieur à F[11])

$$u(P) = \int_F u(Q)\, d\mu_P(Q) + \int_E G(P, Q)\, d\sigma(Q), \tag{7}$$

où E est comme plus haut le sous-ensemble irrégulier de F. Si la dernière intégrale est nulle, la formule se réduit à

$$u(P) = \int_F u(Q)\, d\mu_P(Q), \tag{8}$$

et pour que cela ait lieu il suffit évidemment que les masses σ s'annulent sur E. *La question est de savoir si cette condition suffisante est aussi nécessaire, c'est-à-dire si, étant donnée une distribution σ sur F telle que*

$$\int_E G(P, Q)\, d\sigma(Q) = 0$$

pour tout point P extérieur à F, on peut en conclure que cette distribution est identiquement nulle sur E. La réponse est affirmative. En effet, P étant un point *quelconque* de l'espace, nous tirons de la définition (6) de la fonction de GREEN

$$\begin{aligned}\int_F r_{PQ}^{\alpha-m}\, d\sigma(Q) &= \int_F d\sigma(Q) \int_F r_{QS}^{\alpha-m}\, d\mu_P(S) + \int_E G(P, Q)\, d\sigma(Q) = \\ &= \int_F d\sigma(Q) \int_F r_{PS}^{\alpha-m}\, d\mu_Q(S) + \int_E G(P, Q)\, d\sigma(Q),\end{aligned}$$

où la dernière intégrale est nulle pour tout P extérieur à F, par hypothèse. Or elle est nulle aussi en tout point P de F sauf au plus dans l'ensemble E. En intervertissant l'ordre des intégrations dans le premier terme du second membre, ce qui est légitime, on obtient donc pour tout P, exception faite au plus des points

---

11) M. RIESZ, *loc. cit.*, n° 19.

irréguliers et d'un ensemble de capacité nulle où le potentiel de σ peut être indéterminé,

$$\int_F r_{PQ}^{\alpha-m}\, d\sigma(Q) = \int_F r_{PS}^{\alpha-m}\, d\sigma_F(S).$$

L'ensemble exceptionnel étant de capacité nulle, il en résulte immédiatement par le théorème d'unicité (*cf.* note 7) $\sigma \equiv \sigma_F$. Or σ_F s'annule sur l'ensemble E (*cf.* (5)); il en est donc de même de σ.

Il est manifeste que la formule (7) reste valide en tout point P appartenant à F où $u(P)$ est bien déterminé, et de même que la formule simplifiée (8) a lieu dans la même condition que plus haut.

(Reçu le 1 novembre 1937)