Über den Blochschen Satz.

Von G. GRÜNWALD und P. TURÁN in Budapest.

Von Herrn BLOCH[1]) stammt der folgende Satz: *Es sei*

$$f(z) = z + a_2 z^2 + \ldots$$

regulär für $|z| \leqq 1$. *Dann enthält das Bild von* $f(z)$ *gewiß einen Kreis* $\mathfrak{K}$ *mit einem universellen konstanten Radius* r. (Zum Beispiel kann $r = \frac{1}{3}$ gewählt werden.) Im Folgenden geben wir für diesen Satz, aus welchem bekanntlich[2]) der Picardsche und der Schottkysche, also der große Picardsche Satz kurz folgt, einen sehr anschaulichen Beweis[3]). Die vollständig elementare Methode nützt von der Regularität — wenigstens scheinbar — sehr wenig aus; auf diesen Gegenstand hoffen wir noch zurückzukommen.

Der Beweis erfordert zwei Lemmata.

Lemma 1. *Es sei*

$$f(z) = z + a_2 z^2 + \ldots \tag{1}$$

regulär für $|z| \leqq 1$; $t(r)$ *bedeute den Inhalt,* $k(r)$ *die Bogenlänge des Bildes von* $|z| \leqq r$ *(alles mehrfache entsprechend gezählt). Dann gibt es ein* r_0, $0 < r_0 \leqq 1$, *derart, daß*

---

1) A. BLOCH, Les théorèmes de M. Valiron sur les fonctions entières et la théorie de l'uniformisation, *Annales de la Faculté de Sciences de l'Université de Toulouse,* 17 (1925), S. 1—22.

2) S. E. LANDAU, *Darstellung und Begründung einiger neuerer Ergebnisse der Funktionentheorie,* 2. Auflage (Berlin, 1929).

3) Auch der unabhängig voneinander von LANDAU und VALIRON gefundene Beweis ist sehr einfach (E. LANDAU, Der Picard—Schottkyschen Satz und die Blochsche Konstante, *Sitzungsberichte der Preußischen Akademie,* 1926, S. 467—474; G. VALIRON, Sur les théorèmes de MM. Bloch, Landau, Montel et Schottky, *Comptes Rendus Paris,* 183 (1926), S. 728—730), und zwar gibt mehr ($\mathfrak{K}$ ist schlicht bedeckt).

$$\frac{t(r_0)}{k(r_0)} \geqq \frac{1}{2\sqrt{e}} \left(> \frac{5}{17}\right).$$

Beweis. Nach der bekannten Formel ist wegen (1)

$$(2) \qquad t(r) = \int_0^r \int_0^{2\pi} |f'(\varrho e^{i\varphi})|^2 \varrho \, d\varrho \, d\varphi = \pi \left[r^2 + \sum_{\nu=2}^{\infty} \nu |a_\nu|^2 r^{2\nu} \right],$$

$$(3) \qquad \begin{aligned} k(r) &= \int_0^{2\pi} |f'(re^{i\varphi})| \, r \, d\varphi \leqq \\ &\leqq r \sqrt{2\pi \int_0^{2\pi} |f'(re^{i\varphi})|^2 \, d\varphi} = 2\pi r \sqrt{1 + \sum_{\nu=2}^{\infty} \nu^2 |a_\nu|^2 r^{2\nu-2}}, \end{aligned}$$

also

$$\frac{t(r)}{k(r)} \geqq \frac{1}{2r} \frac{r^2 + \sum_{\nu=2}^{\infty} \nu |a_\nu|^2 r^{2\nu}}{\sqrt{1 + \sum_{\nu=2}^{\infty} \nu^2 |a_\nu|^2 r^{2\nu-2}}},$$

oder für $r = \sqrt{\varrho}$

$$(4) \qquad \frac{t(\sqrt{\varrho})}{k(\sqrt{\varrho})} \geqq \frac{1}{2\sqrt{\varrho}} \frac{\sum_{\nu=1}^{\infty} \nu |a_\nu|^2 \varrho^\nu}{\sqrt{\sum_{\nu=1}^{\infty} \nu^2 |a_\nu|^2 \varrho^{\nu-1}}}, \qquad a_1 = 1.$$

Wenn wir

$$(5) \qquad \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu |a_\nu|^2 \varrho^\nu = \Phi(\varrho)$$

setzen, ist

$$(6a) \qquad \Phi(0) = 0, \quad \Phi(\varrho) \geqq \varrho, \quad \Phi'(\varrho) \geqq 1,$$

und

$$(6b) \qquad \frac{t(\sqrt{\varrho})}{k(\sqrt{\varrho})} \geqq \frac{1}{2\sqrt{\varrho}} \frac{\Phi(\varrho)}{\sqrt{\Phi'(\varrho)}}, \qquad 0 \leqq \varrho \leqq 1.$$

Wenn in diesem Intervalle überall

$$\frac{\Phi(\varrho)}{\sqrt{\varrho \Phi'(\varrho)}} < \frac{1}{\sqrt{e}}$$

gelten würde, so wäre da

$$\frac{\Phi'(\varrho)}{\Phi(\varrho)^2} > \frac{e}{\varrho}$$

und Integration von ϱ bis 1 würde

$$\frac{1}{\Phi(\varrho)}-\frac{1}{\Phi(1)}>e\log\frac{1}{\varrho}, \qquad 0\leqq\varrho\leqq 1$$

ergeben. Dann wäre aber wegen $\Phi(\varrho)\geqq\varrho$ a fortiori

$$\frac{1}{\varrho}>e\log\frac{1}{\varrho},$$

was aber für $\varrho=\frac{1}{e}$ nicht richtig ist[4]), w. z. b. w.

Lemma 2. *Es sei Γ ein Bereich mit dem Flächeninhalt t, deren Berandung eine geschlossene rektifizierbare Jordan-Kurve l von der Länge k bildet. Dann kann man in Γ einen Kreis mit dem Radius $c_2\frac{t}{k}$ einschreiben; hier ist c_2 eine absolute Konstante*[5]).

Beweis. Es sei ϱ_m das Maximum der Radien der eingeschriebenen Kreise; ein solches existiert bestimmt. Es sei P_0 ein beliebiger Punkt auf l; durch wiederholtes Auftragen der Länge ϱ_m, von P_0 ausgehend, auf der Kurve l erhalten wir die Punkte $P_1, P_2, \ldots, P_\nu$. Die Zahl ν werde dabei so gewählt, daß $\nu\varrho_m<k\leqq(\nu+1)\varrho_m$. Wir schlagen um jeden P_μ als Zentrum einen Kreis mit dem Radius $2\varrho_m$. Wir behaupten nun, daß diese Kreise unser Gebiet ganz bedecken. Wenn nämlich ein innerer Punkt A nicht bedeckt wäre, dann wäre

$$\overline{P_\mu A}>2\varrho_m, \qquad \mu=1,2,\ldots,\nu.$$

Nach der Definition von ϱ_m schneidet der Kreis um A mit dem Radius $\frac{3}{2}\varrho_m$ die Kurve l; einer der Schnittpunkte sei B, dieser liege z. B. auf dem Bogen $P_\mu P_{\mu+1}$ ($P_{\nu+1}=P_0$). Da einer der Bogen BP_μ und $BP_{\mu+1}$, z. B. der Bogen BP_μ, kleiner oder

---

4) Allgemeiner gilt: *Wenn $\Phi(x)$ für* [0, 1] *stetig differentiierbar ist und dort $\Phi(x)\geqq x$ gilt, dann gibt es zu jedem $\alpha>1$ ein $0\leqq\xi\leqq 1$ so, daß $\frac{\Phi(\xi)}{|\Phi'(\xi)|^{1/\alpha}}\geqq c_1$ ist, wo c_1 nur von α abhängt. Für $\alpha=1$ gilt der Satz nicht.*

5) Hier wird $c_2\geqq\frac{1}{4\pi+2}$ bewiesen. Nach G. Grünwald und E. Vázsonyi ist $c_2\geqq 1$ und dies ist die bestmögliche Abschätzung. Wenn Γ ein Dreieck ist, ist das Resultat mit $c_2=2$ aus den Elementen der Geometrie bekannt.

gleich $\frac{\varrho_m}{2}$ ist, wäre

$$\overline{BP}_\mu + \overline{BA} \leqq \widehat{BP}_\mu + \frac{3}{2}\varrho_m \leqq 2\varrho_m < \overline{AP}_\mu,$$

was aber unmöglich ist. Die Summe der Inhalte der Kreise ist also nicht kleiner, als der Flächeninhalt der Kurve; daher ist

$$\left(1 + \left[\frac{k}{\varrho_m}\right]\right) 4\varrho_m^2 \pi \geqq t.$$

Da der Inkreis eine kleinere Bogenlänge hat, als die Kurve l, so ist

$$2\varrho_m \pi \leqq k,$$

also

$$\left(\frac{k}{2\varrho_m \pi} + \frac{k}{\varrho_m}\right) 4\varrho_m^2 \pi \geqq \left(1 + \left[\frac{k}{\varrho_m}\right]\right) 4\varrho_m^2 \pi \geqq t,$$

$$\varrho_m \geqq \frac{1}{4\pi} \frac{1}{1 + \frac{1}{2\pi}} \frac{t}{k}, \qquad \text{w. z. b. w.}$$

B e w e i s d e s S a t z e s Es sei

$$f(z) = z + a_2 z^2 + \ldots$$

regulär für $|z| \leqq 1$, der (offenbar geschlossene) Bildbereich von $|z| = r_0$ sei $\mathfrak{B}$, wo r_0 die durch Lemma 1 gegebene Konstante bedeutet. Es sei H_ν die Menge derjenigen Punkte in $\mathfrak{B}$, welche wenigstens ν-fach bedeckt sind; dann gilt

$$H_1 \supset H_2 \supset \ldots.$$

Ferner besteht jedes H_ν aus höchstens abzählbar[6]) vielen, abgeschlossenen, fremden, durch Jordankurven begrenzten Gebieten $\Gamma_{\ \nu}, \Gamma_{2\nu}, \ldots$, von welchen einige zu Punkten oder zu doppelt zu zählenden Kurvenbogen entarten dürfen. Die Begrenzung *aller* $\Gamma_{\mu\nu}$ macht das Bild von $|z| = r_0$ durch $f(z)$ aus. Der Inhalt von $\Gamma_{\mu\nu}$ sei $t_{\mu\nu}$, der Umfang $k_{\mu\nu}$ und der Inkreisradius $\varrho_{\mu\nu}$. Da

(7a) $$\sum_{\mu,\nu} t_{\mu\nu} = t(r_0),$$

(7b) $$\sum_{\mu,\nu} k_{\mu\nu} = k(r_0)$$

[6]) Übrigens folgt bekanntlich aus der Voraussetzung der Regularität auf $|z| \leqq 1$, daß ingesamt nur endlich viele (nichtleere) $\Gamma_{\mu\nu}$ vorhanden sind. Dies wollen wir aber beim Beweise nicht ausnützen.

und nach Lemma 2

$$\varrho_{\mu\nu} \geqq \frac{1}{4\pi+2} \frac{t_{\mu\nu}}{k_{\mu\nu}}$$

ist, gelangen wir von (7a) durch Addition zu

$$\sum_{\mu,\nu} k_{\mu\nu} \varrho_{\mu\nu} \geqq \frac{1}{4\pi+2} t(r_0),$$

also folgt nach (7b) und Lemma 1, daß

$$\varrho_{11} = \max \varrho_{\mu\nu} \geqq \frac{\sum\limits_{\mu,\nu} k_{\mu\nu} \varrho_{\mu\nu}}{\sum\limits_{\mu,\nu} k_{\mu\nu}} > \frac{1}{4\pi+2} \frac{t(r_0)}{k(r_0)} \geqq \frac{1}{4\pi+2} \frac{1}{2\sqrt{e}},$$

w. z. b. w.

(Eingegangen am 30. November 1936.)