Über die Primzahlen der arithmetischen Progression.

Von PAUL TURÁN in Budapest.

§ 1.

In den folgenden Zeilen wird stets vorausgesetzt, daß die für $\sigma > 1$ üblicherweise durch

$$L(s, \chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s} \qquad (s = \sigma + ti)$$

definierte Dirichletsche Funktion für $\sigma > \frac{1}{2}$ für kein k und χ verschwindet. Diese Annahme bezeichnen wir kurz mit HL, da HARDY und LITTLEWOOD ähnliche Annahmen in ihren Arbeiten über den Goldbachschen Satz benützen. Die zu betrachtende Progression sei $kx+l$ $(x=0, 1, \ldots)$, $(k, l)=1$, $1 \leqq l \leqq k-1$, die kleinste Primzahl dargestellt von $kx+l$ sei $P(k, l)$, die Anzahl der Primzahlen in $kx+l$ bis N sei $\pi(N, k, l)$, ferner seien $a_1, a_2, \ldots$ von k und l; $b_1, b_2, \ldots$ von N, k, l und endlich $c_1, c_2, \ldots$ von s, N, k, l unabhängige Konstante, $\varphi(k)$ die Eulersche Funktion.

In § 2 beschäftigen wir uns mit der Größenordnung in Bezug auf k von $P(k, l)$. Das Problem wurde meines Wissens zuerst von S. CHOWLA[1]) gestellt; es handelt sich offenbar lediglich um die Abhängigkeit von k des Restgliedes im Primzahlsatz für die arithmetische Progression. Aus der, unter der Annahme HL geltenden Formel von TITCHMARCH[2])

---

[1]) S. CHOWLA, On the Least Prime in the Arithmetical Progression, *Journal Indian Math. Society,* (2) 1 (1934), S. 1—3. Ich kenne diese Arbeit nur aus dem Referat in *Zentralblatt für Math.,* 9 (1934), S. 8.

[2]) E. C. TITCHMARCH, A Divisor Problem, *Rendiconti Palermo,* 54 (1930), S. 414—429.

$$(1) \qquad \left|\pi(N,k,l)-\frac{1}{\varphi(k)}\int\limits_2^N \frac{dt}{\log t}\right| < b_1\sqrt{N}\log N$$

folgt, wie auch CHOWLA bemerkt, daß für jedes $\varepsilon>0$

$$(2) \qquad P(k,l) < a_1(\varepsilon)\varphi(k)^2\log^{4+\varepsilon}k$$

ist. Ohne irgendwelche Vermutungen bewies CHOWLA nur $P(k,l)<e^{a_2 k}$. Resultate über das Restglied erhält auch A. PAGE[3]).

CHOWLA vermutet a. a. O. [1]), daß $P(k,l)<a_3k^{1+\varepsilon}$ ist. Im § 2 beweisen wir, daß unter der Annahme HL diese Vermutung für fast alle Progressionen mod k wahr ist. Genauer: bei festem k und $\delta>0$ ist die Anzahl derjenigen l, für welche $P(k,l)<$ $<\varphi(k)\log^{2+\delta}k$ gilt, asymptotisch gleich $\varphi(k)$ (Satz II). Aus dem Primzahlsatz folgt unmittelbar, daß schon $P(k,l)<\frac{1}{2}\varphi(k)\log k$ nicht mehr für fast alle Progressionen mod k gilt. Wie es mir aber Herr P. ERDŐS freundlicherweise mitteilte, ist die Anzahl derjenigen Progressionen mod k, für welche $P(k,l)<a_4\varphi(k)\log k$ gilt, größer als $a_5\varphi(k)$, wo natürlich a_5 von a_4 abhängt. Diesen Satz bewies er ohne irgendwelche Vermutungen mittelst der Brunschen Methode.

Wenn wir auch die gleichmäßige Verteilung der Primzahlen betrachten, erhalten wir — wir benötigen dies in § 3 — daß für $N>\varphi(k)\log^{4+\delta}k$

$$(3) \qquad \pi(N,k,l)>\frac{1-\varepsilon}{\varphi(k)}\,\frac{N}{\log N} \qquad k>k_0(\varepsilon,\delta)$$

gilt für festes, aber beliebig kleines positives ε und δ und für fast alle l (Satz I). Wir werden nur Satz I beweisen und den Beweis von Satz II nur skizzieren, weil der Beweis von II leichter, aber ähnlich jenem von I ist. Für $N>\varphi(k)^{2+\varepsilon}$ folgt (3) offenbar aus (1).

In § 3 beschäftigen wir uns mit einer älteren Vermutung von P. ERDŐS; diese besagt, daß für ein beliebiges, festes ϑ die Folge $2\vartheta, 3\vartheta, 5\vartheta, \ldots, p\vartheta \ldots$, wo p alle Primzahlen durchläuft, mod 1 gleichverteilt ist. In dem Beweis unterscheiden wir zwei Fälle; der zweite wurde von P. ERDŐS erledigt. Wenn wir nur die Überalldichtigkeit feststellen wollen, verfahren wir folgendermaßen. Für jedes feste ϑ gibt es bekanntlich unendlich viele

[3]) A. PAGE, On the Number of Primes in an Arithmetic Progression, *Proceedings London Math. Society*, (2) 39 (1935), S. 116—141.

$\frac{u_r}{v_r}$ $(r=1,2,\ldots)$ mit $(u_r, v_r)=1$ und $\left|\vartheta-\frac{u_r}{v_r}\right| \leqq \frac{1}{v_r^2}$. Wir betrachten ein bestimmtes $r=n$ und lassen p die Primzahlen $\leqq v_n^{2-\eta}$ durchlaufen $\left(\eta \text{ positiv, kleiner als } \frac{1}{4} \text{ und fest gegeben.}\right)$ Es sei $[\alpha, \beta]$ das zu betrachtende Intervall, wobei $0 \leqq \alpha < \beta \leqq 1$ ist. Da

$$\left|p\vartheta - p\frac{u_n}{v_n}\right| < \frac{v_n^{2-\eta}}{v_n^2} \to 0 \qquad (n \to \infty),$$

so genügt es zu zeigen, daß für $p \leqq v_n^{2-\eta}$ im Intervall $[\alpha+\varepsilon, \beta-\varepsilon]$, $\varepsilon \leqq \frac{\beta-\alpha}{4}$, für $n > n_0(\varepsilon)$ mindestens ein $p\frac{u_n}{v_n}$ liegt mod 1. In diesem Intervall liegen aber mehr als $\frac{\beta-\alpha}{5}\varphi(v_n)$ Zahlen von der Form $\frac{l}{v_n}$ mit $(l, v_n)=1$; also gibt es mehr als $\frac{\beta-\alpha}{5}\varphi(v_n)$ Zahlen $\nu \leqq v_n$ so, daß für die Primzahlen $p \equiv \nu \pmod{v_n}$ die Zahlen $p\frac{u_n}{v_n}$ im Intervall $[\alpha+\varepsilon, \beta-\varepsilon]$ liegen mod 1. Nach Satz II existieren aber unter der Annahme HL in *fast allen* Progressionen mod k Primzahlen z. B. unterhalb $v_n^{3/2}$; also auch gewiß in einem unserer Progressionen $v_n x + \nu$, w. z. b. w. Wie ersichtlich, wäre die Chowlasche Behauptung $P(k, l) < a_6 \varphi(k)^{2+\varepsilon}$ auch für die Überalldichtigkeit nicht genügend.

Wir könnten alles unter der schwächeren Annahme: $L(s,\chi) \neq 0$ für $\sigma > \frac{3}{4}$ mit einigen geringen Modifikationen beweisen; doch beschäftigen wir uns damit nicht.

§ 2.

Wir beweisen zuerst den

Hilfssatz. Unter der Annahme HL ist

$$\sum_{\substack{l \\ (l,k)=1}} \left[\sum_{\substack{n \leqq N \\ n \equiv l \pmod{k}}} \Lambda(n) - \frac{N}{\varphi(k)}\right]^2 < b_2 N \log^4 kN. \tag{4}$$

Beweis. Bekanntlich ist für $\sigma > 1$

$$\sum_{\substack{n \\ n \equiv l}} \frac{\Lambda(n)}{n^s} = -\frac{1}{\varphi(k)} \sum_{\chi} \bar{\chi}(l) \frac{L'}{L}(s,\chi) = f(s). \tag{5}$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei N nicht ganz und $[N]+1$ sei keine Primzahlpotenz. Wegen der absoluten Konvergenz gewinnen wir durch gliedweise Integration

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(2)}\frac{(N+1)^s-N^s}{s^2}f(s)\,ds=\sum_{\substack{n<N+1\\ n\equiv l}}\Lambda(n)\log\frac{N+1}{n}-$$
$$-\sum_{\substack{n<N\\ n\equiv l}}\Lambda(n)\log\frac{N}{n}=\sum_{\substack{n<N\\ n\equiv l}}\Lambda(n)\log\left(1+\frac{1}{N}\right),$$

also

$$(6)\qquad \sum_{\substack{n<N\\ n\equiv l}}\Lambda(n)=\frac{1}{2\pi i\log\left(1+\frac{1}{N}\right)}\int\limits_{(2)}\frac{(N+1)^s-N^s}{s^2}f(s)\,ds.$$

Wir benötigen einige Ergebnisse über die L-Funktionen diese finden wir bei TITCHMARCH a. a. O. [2]), sie lauten:

Unter der Annahme HL gilt für $\frac{1}{4}\leqq\sigma\leqq 2$, wenn $\varrho=\frac{1}{2}+\gamma i$ die Wurzeln von $L(s,\chi)$ bedeuten,

$$(7)\qquad \left|\frac{L'}{L}(s,\chi)-\sum_{|t-\gamma|\leqq 2}\frac{1}{s-\varrho}\right|<c_1\log k(|t|+2).$$

Unter der Annahme HL ist, wenn $N_\chi(T)$ die Anzahl der Wurzeln von $L(s,\chi)$ im Rechtecke $0,\ 1,\ Ti,\ 1+Ti$ bedeutet $(T\geqq 0)$,

$$(8)\qquad N_\chi(T+1)-N_\chi(T)<c_2\log k(T+2).$$

Aus (7) und (8) folgt leicht, daß es in jedem Intervall $\nu\leqq t<\nu+1$ ein $t=T_\nu$ gibt so, daß für $\frac{1}{4}\leqq\sigma\leqq 2$

$$(9)\qquad \left|\frac{L'}{L}(\sigma+T_\nu i)\right|<c_3\log^2(T_\nu+2),$$

ferner für $\sigma=\frac{1}{4}$

$$(10)\qquad \left|\frac{L'}{L}(s,\chi)\right|<c_4\log^2 k(|t|+2)$$

gilt. Durch den Cauchyschen Integralsatz folgt, wegen (9),

$$(11)\qquad \begin{aligned}R_l(N)\equiv\sum_{\substack{n<N\\ n\equiv l}}\Lambda(n)-\frac{1}{\varphi(k)}\frac{1}{\log\left(1+\frac{1}{N}\right)}&=\\ =\frac{1}{2\pi i\log\left(1+\frac{1}{N}\right)}\int\limits_{(3/4)}\frac{(N+1)^s-N^s}{s^2}f(s)\,ds,\end{aligned}$$

also wegen der absoluten Konvergenz des Integrals

$$
\begin{aligned}
R_l(N)^2 = & -\frac{1}{4\pi^2 \log^2\left(1+\frac{1}{N}\right)} \int\limits_{(3/4)} \int\limits_{(3/4)} \frac{(N+1)^{s_1}-N^{s_1}}{s_1^2}\,\frac{(N+1)^{s_2}-N^{s_2}}{s_2^2} \times \\
(12) \qquad & \times \frac{1}{\varphi(k)^2} \sum_{\chi_1} \sum_{\chi_2} \overline{\chi}_1(l)\,\overline{\chi}_2(l)\, \frac{L'}{L}(s_1,\chi_1)\,\frac{L'}{L}(s_2,\chi_2)\, ds_1\, ds_2 .
\end{aligned}
$$

Jetzt summieren wir in Bezug auf l. Auf Grund der bekannten Orthogonalitätseigenschaft der Charaktere ergibt sich dann

$$
\begin{aligned}
\sum_{\substack{l \\ (l,k)=1}} R_l(N)^2 = & \frac{1}{\varphi(k)} \frac{1}{\log^2\left(1+\frac{1}{N}\right)} \times \\
(13) \qquad & \times \sum_{\chi} \left[\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{(3/4)} \frac{(N+1)^s-N^s}{s^2}\, \frac{L'}{L}(s,\chi)\, ds\right] \times \\
& \times \left[\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{(3/4)} \frac{(N+1)^s-N^s}{s^2}\, \frac{L'}{L}(s,\overline{\chi})\, ds\right].
\end{aligned}
$$

Es sei

$$
(14) \qquad I = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{(3/4)} \frac{(N+1)^s-N^s}{s^2}\, \frac{L'}{L}(s,\chi)\, ds .
$$

Wegen (9) ist

$$
(15) \quad I = \sum_{\varrho} \frac{(N+1)^{\varrho}-N^{\varrho}}{\varrho^2} + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{(1/4)} \frac{(N+1)^s-N^s}{s^2}\, \frac{L'}{L}(s,\chi)\, ds .
$$

Da aber wegen (8)

$$
\begin{aligned}
(16) \quad & \left|\sum_{\varrho} \frac{(N+1)^{\varrho}-N^{\varrho}}{\varrho^2}\right| < \left|\sum_{|\gamma| \le N^3}\right| + \left|\sum_{|\gamma| > N^3}\right| < \\
& < \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{|\gamma| \le N^3} \frac{1}{|\varrho|} + 2\sqrt{N} \sum_{\gamma > N^3} \frac{1}{|\varrho|^2} < c_5 \frac{\log^2 kN}{\sqrt{N}}
\end{aligned}
$$

und wegen (10)

$$
\begin{aligned}
& \left|\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{(1/4)} \frac{(N+1)^{\varrho}-N^{\varrho}}{\varrho^2}\, \frac{L'}{L}(s,\chi)\, ds\right| < \\
& < \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-N^3}^{N^3} \frac{|(N+1)^{1/4+ti}-N^{1/4+ti}|}{|s|^2} \left|\frac{L'}{L}(s,\chi)\right| dt + \\
& + \frac{1}{2\pi} \int\limits_{N^3}^{\infty} + \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{-N^3} < c_6 \frac{\log^3 kN}{N^{3/4}} ,
\end{aligned}
$$

so folgt, daß

$$(17)\qquad |I| < c_7 \frac{\log^2 kN}{\sqrt{N}}.$$

Dies in (13) eingesetzt gelangen wir wegen $(a+b)^2 \leqq 2(a^2+b^2)$ zu

$$\sum_{\substack{l \\ (l,\,k)=1}} \Bigg[\sum_{\substack{n \leqq N \\ n \equiv l}} \Lambda(n) - \frac{N}{\varphi(k)}\Bigg]^2 <$$

$$< 2 \sum_{\substack{l \\ (l,\,k)=1}} R_l(N)^2 + \frac{c_8}{\varphi(k)} < c_9 N \log^4 kN,$$

w. z. b. w.

Aus

$$\sum_{\substack{n \leqq N \\ n \equiv l}} \Lambda(n) \log \frac{N}{n} = \frac{1}{2\pi i} \int_{(2)} \frac{N^s}{s^2} f(s)\, ds$$

folgern wir ähnlich, wie oben

$$(18)\qquad \sum_{\substack{l \\ (l,\,k)=1}} \Bigg[\sum_{\substack{n \leqq N \\ n \equiv l}} \Lambda(n) \log \frac{N}{n} - \frac{N}{\varphi(k)}\Bigg]^2 < c_{10} N \log^2 k;$$

dies benötigen wir beim Beweis des Satzes II.

Aus dem Hilfssatz folgt, daß die Anzahl derjenigen Progressionen mod k, für welche

$$\Bigg|\sum_{\substack{n \leqq N \\ n \equiv l}} \Lambda(n) - \frac{N}{\varphi(k)}\Bigg| > \sqrt{\frac{N}{\varphi(k)}} \log^{2+\frac{\delta}{2}} kN$$

gilt, $o(\varphi(k))$ ist. Wenn also $N > \varphi(k) \log^{4+5/2\,\delta} k$ ist, überwiegt der Hauptteil, daher gilt für fast alle l

$$\sum_{\substack{n \leqq N \\ n \equiv l}} \Lambda(n) > \frac{N}{\varphi(k)} - \sqrt{\frac{N}{\varphi(k)}} \log^{2+\frac{\delta}{2}} kN;$$

für diese l ist also

$$(19)\qquad \sum_{\substack{p,\,\alpha \\ p^\alpha \leqq N \\ p^\alpha \equiv l}} 1 > \frac{1}{\log N} \sum_{\substack{n \leqq N \\ n \equiv l}} \Lambda(n) >$$

$$> \frac{1}{\varphi(k)} \frac{N}{\log N} - 10 \sqrt{\frac{N}{\varphi(k)}} \log^{1+\frac{\delta}{2}} N > \frac{1-\varepsilon}{\varphi(k)} \frac{N}{\log N}$$

für $k > a_7(\varepsilon)$. Nun wollen wir aber entsprechendes für

$$\pi(N, k, l) = \sum_{\substack{p \\ p \leqq N \\ p \equiv l}} 1$$

beweisen; wir müssen also diejenigen l weglassen, für welche die in (19) linksstehende Summe „zu viele" $\left(\text{z. B. mehr als } \left(\frac{N}{\varphi(k)}\right)^{2/3}\right)$ p^α mit $\alpha > 1$ enthält. Diese l nennen wir kurz „schlechte l". Die Anzahl derselben ist aber $o(\varphi(k))$. Wenn wir nämlich zuerst $\varphi(k)^{3/2} \geqq N \geqq \varphi(k) \log^{4+5/2\delta} k$ annehmen, so gibt es überhaupt höchstens $2\varphi(k)^{3/4}$ Primzahlpotenzen p^α mit $\alpha > 1$ unterhalb N; diese sind in höchstens $2\varphi(k)^{3/4}$ arithmetischen Progressionen mod k enthalten, also liefern höchstens ebensoviele, folglich $o(\varphi(k))$ schlechte l. Es sei ferner $\varphi(k)^{3/2} \leqq N \leqq \varphi(k)^{7/6}$. Dann ist die Anzahl der fraglichen Primzahlpotenzen p^α mit $\alpha \geqq 1$ unterhalb N nach (19), ganz grob abgeschätzt, größer als $\varphi(k)^{1/3}$ für $k > a_8(\varepsilon)$; also ist die Anzahl D derjenigen Progressionen mod k, welche unterhalb N mehr als $\varphi(k)^{1/3}$ Primzahlpotenzen p^α mit $\alpha > 1$ darstellen, kleiner als $\frac{2\varphi(k)^{7/6}}{\varphi(k)^{1/3}} =$ $= 2\varphi(k)^{5/6} = o(\varphi(k))$ (unterhalb N gibt es ja höchstens $2\sqrt{N}$ Primzahlpotenzen p^α mit $\alpha > 1$). Die Anzahl der schlechten l ist aber offenbar kleiner als D. Endlich besteht für $N > \varphi(k)^{7/6}$, wegen (1), Gleichverteilung in *allen* Progressionen mod k. Damit haben wir bewiesen

Satz I. *Es seien ε und δ beliebig kleine gegebene positive Zahlen und $N = N(k)$ irgendwelche Funktion von k, für welche $N > \varphi(k) \log^{4+\delta} k$ besteht. Dann ist die Anzahl derjenigen Progressionen* mod k, *für welche*

$$\pi(N(k), k, l) > \frac{1-\varepsilon}{\varphi(k)} \frac{N(k)}{\log N(k)}$$

gilt, asymptotisch gleich $\varphi(k)$ für $k \to \infty$.

Wir skizzieren nun kurz, wie man aus (18) zu Satz II gelangt. $N = \varphi(k) \log^{2+\delta} k$ gesetzt, ist

$$\sum_{\substack{l \\ (k,l)=1}} \left\{ \sum_{\substack{n \leqq \varphi(k) \log^{2+\delta} k \\ n \equiv l}} \Lambda(n) \log \frac{\varphi(k) \log^{2+\delta} k}{n} - \log^{2+\delta} k \right\}^2 <$$
$$< c_{10} \varphi(k) \log^{4+\delta} k,$$

also gilt für fast ~~alle~~ l und $k > k_1(\delta)$

$$\left| \sum_{\substack{n \leq \varphi(k) \log^{2+\delta} k \\ n \equiv l}} \Lambda(n) \log \frac{\varphi(k) \log^{2+\delta} k}{n} - \log^{2+\delta} k \right| < \log^{2+\frac{2}{3}\delta} k.$$

Für diese l kann also die Summe in (20) nicht leer sein. Zwar können auch hier „schlechte l" auftreten; die Anzahl derselben ist aber, wie oben, kleiner als $2\sqrt{\varphi(k)} \log^{1+\frac{\delta}{2}} k = o(\varphi(k))$; also gilt

Satz II. *Es sei δ eine gegebene, beliebig kleine positive Zahl. Dann ist die Anzahl derjenigen arithmetischen Progressionen* mod k, *für welche*

$$P(k, l) < \varphi(k) \log^{2+\delta} k$$

gilt, asymptotisch gleich $\varphi(k)$ für $k \to \infty$.

§ 3.

Wir beweisen nun unter der Annahme HL, daß *für jedes feste ϑ die Folge $2\vartheta, 3\vartheta, 5\vartheta, \ldots, p\vartheta \ldots$* mod 1 *gleichverteilt ist.*

Wir betrachten das Intervall $[a, b]$ mit $0 < a < b < 1$; es sei $\varepsilon < \min\left(\frac{a}{2}, \frac{1-b}{2}\right)$, sonst beliebig klein. Dann werden wir beweisen, daß

$$S(\vartheta, N, a, b) = \sum_{\substack{a \leq p\vartheta \leq b \pmod 1 \\ p \leq N}} 1$$

gesetzt, für $N > n_1(\varepsilon)$

$$(b-a-4\varepsilon)(1-\varepsilon)\frac{N}{\log N} < S(\vartheta, N, a, b) <$$

$$< [(b-a+6\varepsilon)(1-\varepsilon)+\varepsilon]\frac{N}{\log N},$$

woraus offenbar die Behauptung folgt.

Wir können bekanntlich ϑ durch einem Bruch $\frac{u}{v}$, $(u, v) = 1$, $v \leq \left[\frac{N}{\log^8 N}\right] + 1$ so approximieren, daß

$$\left|\vartheta - \frac{u}{v}\right| \leq \frac{\log^8 N}{vN}. \tag{21}$$

Fall I: $v \geq \log^{10} N$. Dann ist $\left|p\vartheta - p\frac{u}{v}\right| \leq \frac{1}{\log^2 N} \leq \varepsilon$ für $N \geq n_2(\varepsilon)$ wegen (21), es ist also

$$(22)\qquad S\left(\frac{u}{v}, N, a+\varepsilon, b-\varepsilon\right) < S(\vartheta, N, a, b) < S\left(\frac{u}{v}, a-\varepsilon, b+\varepsilon\right).$$

Es genügt also $S\left(\frac{u}{v}, N, \alpha, \beta\right)$ mit $0<\alpha<\beta<1$ abzuschätzen. Von den reduzierten Brüchen mit dem Nenner v fallen für $v>v_0(\varepsilon)$ mehr als $(\beta-\alpha-\varepsilon)\,\varphi(v)$ in $[\alpha, \beta]$; es gibt also genau so viele, also mehr als $(\beta-\alpha-\varepsilon)\,\varphi(v)$ Progressionen $vx+l$, $(l, v)=1$, so, daß $p\frac{u}{v}$ für die Primzahlen $p\equiv l \pmod v$ in $[\alpha, \beta]$ liegt mod 1. Für die Primzahlen dieser Progressionen gilt aber, da $v<\frac{N}{\log^8 N}$ die Forderung des Satzes I reichlich erfüllt, für $N>n_3(\varepsilon)$

$$(23)\qquad S\left(\frac{u}{v}, N, \alpha, \beta\right) > (\beta-\alpha-2\varepsilon)\,\varphi(v)\,\frac{1-\varepsilon}{\varphi(v)}\,\frac{N}{\log N}.$$

(23) angewendet einmal auf $\alpha=a+\varepsilon$, $\beta=b-\varepsilon$, einmal auf das komplementäre Gebiet von $[a-\varepsilon, b+\varepsilon]$, ergibt das gewünschte Resultat.

Fall II: $v<\log^{10} N$ (P. Erdős). Wir betrachten die Primzahlen in den Intervallen $\left[1, \frac{N}{\log^{10} N}\right]$, $\left[\frac{N}{\log^{10} N}, 2\frac{N}{\log^{10} N}\right]$, $\ldots, \left[(d-1)\frac{N}{\log^{10} N}, d\frac{N}{\log^{10} N}\right], \ldots$, wo also $d\leqq \log^{10} N$ ist. Für die Primzahlen des ersten Intervalls ist nach (21)

$$\left|p\vartheta - p\frac{u}{v}\right| < \frac{N}{\log^{10} N}\,\frac{\log^8 N}{vN} < \frac{1}{\log^2 N},$$

also ist für $N>n_4(\varepsilon)$ wieder

$$(24)\qquad \begin{aligned} S\left(\frac{u}{v}, \frac{N}{\log^{10} N}, a+\varepsilon, b-\varepsilon\right) &< S\left(\vartheta, \frac{N}{\log^{10} N}, a, b\right) < \\ &< S\left(\frac{u}{v}, \frac{N}{\log^{10} N}, a-\varepsilon, b+\varepsilon\right). \end{aligned}$$

Jetzt betrachten wir das d-te Intervall und es sei $p_{\min}$ die kleinste, $p_{\max}$ die größte Primzahl in diesem; da

$$\left|p_{\max}\left(\vartheta-\frac{u}{v}\right) - p_{\min}\left(\vartheta-\frac{u}{v}\right)\right| < \frac{N}{\log^{10} N}\left|\vartheta-\frac{u}{v}\right| < \frac{1}{\log^2 N},$$

so ist der Fehler, welchen man durch Ersetzen von ϑ durch $\frac{u}{v}$

begeht, nahezu gleich für alle Primzahlen des d-ten Intervalls. Es existiert also ein δ so, daß

$$\sum_{\substack{(d-1)\frac{N}{\log^{10}N}<p<d\frac{N}{\log^{10}N} \\ a+\delta+\varepsilon\leqq p\frac{u}{v}\leqq b+\delta-\varepsilon \pmod 1}} 1 < S\left(\vartheta, d\frac{N}{\log^{10}N}, a, b\right) - \tag{25}$$

$$- S\left(\vartheta, (d-1)\frac{N}{\log^{10}N}, a, b\right) < \sum_{\substack{(d-1)\frac{N}{\log^{10}N}<p<d\frac{N}{\log^{10}N} \\ a+\delta-\varepsilon\leqq p\frac{u}{v}\leqq b+\delta+\varepsilon \pmod 1}} 1.$$

Da aber nach (1) für $1\leqq d\leqq \log^{10}N$, $N>n_5(\varepsilon)$ wegen $v<\log^{10}N$

$$\sum_{\substack{(d-1)\frac{N}{\log^{10}N}<p<d\frac{N}{\log^{10}N} \\ p\equiv g \pmod v \\ (g,v)=1}} 1 > \frac{1}{\varphi(v)} \int\limits_{(d-1)\frac{N}{\log^{10}N}}^{d\frac{N}{\log^{10}N}} \frac{dt}{\log t} - 2b_1\sqrt{N}\log N >$$

$$> \frac{1}{\varphi(v)} \frac{N}{\log^{10}N} \frac{1}{\log\left(d\frac{N}{\log^{10}N}\right)} - 2b_1\sqrt{N}\log N > \frac{(1-\varepsilon)}{\varphi(v)} \frac{N}{\log^{11}N},$$

besteht, erhalten wir, wie bei Fall I, aus (25)

$$(b-a-4\varepsilon)\,\varphi(v)\frac{(1-\varepsilon)}{\varphi(v)}\frac{N}{\log^{11}N} < S\left(\vartheta, d\frac{N}{\log^{10}N}, a, b\right) -$$

$$- S\left(\vartheta, (d-1)\frac{N}{\log^{10}N}, a, b\right) < [1-(1-b+a-6\varepsilon)(1-\varepsilon)]\frac{N}{\log^{11}N} =$$

$$= [(b-a+6\varepsilon)(1-\varepsilon)+\varepsilon]\frac{N}{\log^{11}N},$$

also durch Summation nach d für $N>n_6(\varepsilon)$

$$(b-a-4\varepsilon)(1-\varepsilon)\frac{N}{\log N} < S(\vartheta, N, a, b) <$$

$$< [(b-a+6\varepsilon)(1-\varepsilon)+\varepsilon]\frac{N}{\log N},$$

w. z. b. w.

(Eingegangen am 26. Juni 1936)