Sur les majorantes harmoniques d'une fonction sousharmonique.

Par OTTO FROSTMAN à Lund.

Soit $f(P)$ une fonction sousharmonique du point P, définie dans un domaine quelconque D de l'espace à m dimensions, $m \geqq 2$. S'il existe des fonctions harmoniques dans ce domaine qui sont $\geqq f(P)$ en tout point P, on peut démontrer l'existence d'une fonction harmonique $H_D(P)$ dans D, telle que $f(P) \leqq H_D(P) \leqq h(P)$ pour toute fonction harmonique $h(P) \geqq f(P)$ dans D. La fonction $H_D(P)$ est appelée par M. F. RIESZ *la plus petite majorante harmonique de $f(P)$ dans D.*[1]) Soit encore D' un domaine du type de DIRICHLET intérieur avec sa frontière à D, et supposons que $f_n(P)$, $n = 1, 2, \ldots$, soient une suite de fonctions continues sur la frontière de D', qui tendent en décroissant vers les valeurs de $f(P)$ sur cette même frontière. Les solutions du problème de DIRICHLET dans le domaine D' pour les valeurs frontières successives $f_n(P)$ tendent en décroissant vers une fonction harmonique $H^*_{D'}(P) \geqq f(P)$ dans D' qui s'appelle *la meilleure majorante harmonique de $f(P)$ dans D'.*[2]) Évidemment il existe aussi dans le domaine D' une majorante harmonique $H_{D'}(P)$ qui est la plus petite, et l'on a $H_{D'}(P) \leqq H^*_{D'}(P)$. Si la fonction donnée $f(P)$ est continue, il est presque évident que ces deux majorantes sont identiques, mais il est un peu plus difficile de le voir dans le cas

---

[1]) F. RIESZ, Sur les fonctions subharmoniques et leur rapport à la théorie du potentiel, seconde partie, *Acta Math.*, 54 (1930), p. 321—360, spéc. p. 357.

[2]) F. RIESZ, Sur les fonctions subharmoniques et leur rapport à la théorie du potentiel, première partie, *Acta Math.*, 48 (1926), p. 329—343, spéc. p. 334.

discontinu[3]). Cependant, on peut énoncer le théorème général suivant.

La plus petite majorante harmonique $H_{D'}(P)$ est identique à la meilleure majorante harmonique $H^*_{D'}(P)$ appartenant au même domaine.

En effet, désignons par F la frontière du domaine D', et par μ_P la distribution de masse positive sur F, obtenue par le balayage de la masse unité placée au point intérieur P de D'. La solution du probléme de DIRICHLET dans le domaine D', pour des valeurs continues $g(S)$ données sur F, peut alors être exprimée par l'intégrale

$$\int_F g(S)\, d\mu_P(S),$$

P étant le point variable dans D'. En choisissant successivement $g(S)=f_n(S)$, $n=1, 2, \ldots$, on obtient une suite de fonctions harmoniques tendant vers la meilleure majorante harmonique $H^*_{D'}(P)$ en même temps que $f_n(S)$ tend vers $f(S)$. C'est-à-dire qu'on a

$$H^*_{D'}(P)=\lim_{n\to\infty}\int_F f_n(S)\, d\mu_P(S).$$

Or, la suite $f_n(S)$ étant monotone, on peut faire le passage à la limite sous le signe $\int$, ce qui donne

$$H^*_{D'}(P)=\int_F f(S)\, d\mu_P(S).$$

Rappelons maintenant les théorèmes bien connus de M. F. RIESZ sur la représentation des fonctions sousharmoniques par des potentiels. Supposons pour fixer les idées $m=3$, et soit D'' un second domaine contenu avec sa frontière à D mais contenant D' tout à fait dans son intérieur. Il existe alors dans D'' une distribution de masse négative $-\mu$, telle que

$$f(P)=-\int_{D''}\frac{1}{r_{PQ}}\, d\mu(Q)+h(P),$$

r_{PQ} désignant la distance euclidienne des points P et Q et $h(P)$ étant une fonction harmonique dans D''.[4]) On doit à M. RIESZ

---

[3]) *Cf.* M. BRELOT, Étude des fonctions sousharmoniques au voisinage d'un point, *Actualités scientifiques et industrielles*, **139** (Paris, 1934), p. 18.

[4]) F. RIESZ, loc. cit., *Acta Math.*, **54**, p. 350.

une seconde formule donnant $f(P)$ moyennant la fonction de GREEN. En écrivant cette formule pour le domaine D', on aura[5])

$$f(P) = -\int_{D'} G(P, Q)\, d\mu(Q) + H_{D'}(P),$$

où $G(P, Q)$ est la fonction de GREEN relative au domaine D' et au pôle P. On doit observer que c'est la même distribution $-\mu$ qui entre dans les deux formules écrites, cette distribution étant uniquement déterminée par la fonction donnée $f(P)$. D'ailleurs, on peut dans la dernière formule étendre le domaine d'intégration à embrasser tout le domaine D'', puisque $G(P, Q)$ s'annule identiquement sur la frontière F et en tout point extérieur. En tenant compte de l'expression explicite de la fonction de GREEN,

$$G(P, Q) = \frac{1}{r_{PQ}} - \int_F \frac{1}{r_{QS}}\, d\mu_P(S),$$

on aura donc

$$\begin{aligned} H_{D'}(P) &= f(P) + \int_{D''} G(P, Q)\, d\mu(Q) = \\ &= f(P) + \int_{D''} \frac{1}{r_{PQ}}\, d\mu(Q) - \int_{D''} d\mu(Q) \int_F \frac{1}{r_{QS}}\, d\mu_P(S) = \\ &= h(P) - \int_F d\mu_P(S) \int_{D''} \frac{1}{r_{QS}}\, d\mu(Q). \end{aligned}$$

Or on a aussi, la fonction harmonique $h(P)$ étant continue sur F,

$$h(P) = \int_F h(S)\, d\mu_P(S).$$

D'où il vient immédiatement

$$\begin{aligned} H_{D'}(P) &= \int_F \left\{ h(S) - \int_{D''} \frac{1}{r_{SQ}}\, d\mu(Q) \right\} d\mu_P(S) = \\ &= \int_F f(S)\, d\mu_P(S) = H^*_{D'}(P). \end{aligned}$$

C. Q. F. D.

(Reçu le 4 décembre 1936)

[5]) F. RIESZ, loc. cit., *Acta Math.*, **54**, p. 357.