Beiträge zur Reduktionstheorie des logischen Entscheidungsproblems.

Von JÓZEF PEPIS in Lwów (Polen).

Einleitung.

Vorliegende Arbeit schließt sich den Untersuchungen über das Entscheidungsproblem des engeren logischen Funktionenkalküls[1]) (Prädikatenkalküls) an. Auf Grund einer verschärften methodischen Anforderung[2]) ist man bekanntlich in den letzten Jahren zu einer Unterscheidung des mengentheoretischen Prädikatenkalküls vom sogenannten beweistheoretischen (axiomatischen) Prädikatenkalkül[3]) gelangt. Der Unterschied macht sich dadurch geltend, daß solche Begriffe wie „Individuenbereich", „erfüllbar", „allgemeingültig", die im mengentheoretischen Prädikatenkalkül eine große Rolle spielen, im beweistheoretischen Kalkül im allgemeinen nicht zugelassen werden; sie werden nämlich dort durch ihnen entsprechende finite Begriffe ersetzt. So werden z. B. die Begriffe „allgemeingültig", „erfüllbar" durch die finiten Begriffe „ableitbar", „unwiderlegbar" vertreten. Dieser Unterscheidung zwischen „mengentheoretischem Kalkül" und „beweistheoretischem Kalkül" entspricht selbstverständlich auch eine Unterscheidung zwischen „mengentheoretischem Entscheidungsproblem" und „beweistheoretischem Entscheidungsproblem".

---

[1]) Vgl. D. HILBERT—W. ACKERMANN, *Grundzüge der theoretischen Logik* (Berlin, 1928), insb. drittes Kapitel.

[2]) Bei dieser Anforderung handelt es sich hauptsächlich um eine neue (finite) Auseinandersetzung mit dem Problem des Unendlichen.

[3]) Bez. dieser Unterscheidung vgl. das Werk: D. HILBERT—P. BERNAYS, *Grundlagen der Mathematik*, I (Berlin, 1934).

Vorliegende Arbeit ist dem mengentheoretischen Entscheidungsproblem gewidmet und zwar jener Richtung der Untersuchungen über das mengentheoretische Entscheidungsproblem, welche mit dem Namen „Reduktionstheorie" bezeichnet wird. D. h. es werden hier einige Reduktionssätze aufgestellt und bewiesen, die die Lösung des mengentheoretischen Entscheidungsproblems auf die Lösung gewisser Spezialfälle desselben zurückführen.

Betreffs dieser Richtung von Untersuchungen liegt schon in der Literatur eine Reihe von interessanten Ergebnissen vor, an denen hauptsächlich folgende Autoren beteiligt sind[4]): K. Gödel, J. Herbrand, L. Kalmár, L. Löwenheim und Th. Skolem.

In I beweise ich einige allgemeinere Sätze über Abbildungen unendlicher Individuenbereiche und Sätze über in diesen Individuenbereichen geltende Darstellungen beliebiger logischer Funktionen. Diese Sätze finden dann in II, bei der Ableitung der eigentlichen Reduktionssätze, Anwendung.

Obzwar die Beweise der hier aufgestellten Reduktionssätzen eng mit dem Begriff „unendlicher Individuenbereich" verbunden sind, lassen sich doch fast alle diese Reduktionssätze unschwer in den beweistheoretischen Kalkül übertragen. Dies sei aber einer weiteren Arbeit vorbehalten.

I. Darstellungen von Funktionen in unendlichen Individuenbereichen.

Ist $\Phi(x, y, z)$ eine dreistellige logische Funktion in einem Individuenbereich $\mathfrak{J}$, so stellt für $n \geqq 2$

$$(1) \qquad (Ev_2)(Ev_3)\ldots(Ev_{n-1})\left[\sum_{i=1}^{n-1}\Phi(v_i, v_{i+1}, x_i)\right] ^{5})$$

eine $n+1$-stellige Funktion mit den Argumenten $v_1, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, v_n$ dar. Es gilt der folgende

Satz 1. *Ist $\Phi(x, y, z)$ eine Funktion, die eineindeutig die Elemente x aus $\mathfrak{J}$ auf die Paare von Elementen $[y, z]$ aus $\mathfrak{J}$ abbildet*[6]), *so bildet die Funktion*

---

[4]) Die entsprechenden Arbeiten werden im Text näher angeführt.

[5]) Das Summenzeichen soll hier und im folgenden die Konjunktion andeuten.

[6]) Eine solche Funktion existiert dann und nur dann, wenn die Kardinalzahl $\mathfrak{m}$ von $\mathfrak{J}$ der Gleichung $\mathfrak{m}^2 = \mathfrak{m}$ genügt.

$$(Ev_2)(Ev_3)\ldots(Ev_{n-1})\left[\sum_{i=1}^{n-1}\Phi(v_i, v_{i+1}, x_i)\right]$$

die Elemente v_1 *aus* $\mathfrak{J}$ *auf die n-tupel* $[x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, v_n]$ *von Elementen aus* $\mathfrak{J}$ *eineindeutig ab.*

Damit die durch (1) dargestellte Funktion zu einer eineindeutigen Abbildung des Individuenbereichs $\mathfrak{J}$ auf den Bereich aller n-tupel von Elementen aus $\mathfrak{J}$ gehöre, ist notwendig und hinreichend, daß die folgenden vier Bedingungen erfüllt seien:

a) Zu jedem Ding v_1 aus $\mathfrak{J}$ gibt es ein Bildtupel $[x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, v_n]$ von Elementen aus $\mathfrak{J}$:

$$(v_1)(Ex_\varrho)_1^{n-1}(Ev_\sigma)_2^n\left[\sum_{i=1}^{n-1}\Phi(v_i, v_{i+1}, x_i)\right].^{7)} \tag{2}$$

b) Zu jedem n-tupel $[x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, v_n]$ von Elementen aus $\mathfrak{J}$ gibt es bei der Umkehrung der Abbildung ein Bildelement v_1:

$$(x_\varrho)_1^{n-1}(v_n)(Ev_\sigma)_1^{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n-1}\Phi(v_i, v_{i+1}, x_i)\right]. \tag{3}$$

c) Die Abbildung ist eindeutig:

$$\begin{aligned}&(v_1)(\overset{*}{v}_1)(x_\varrho)_1^{n-1}(\overset{*}{x}_\varrho)_1^{n-1}(v_n)(\overset{*}{v}_n)\Bigg\{\Bigg[(v_1=\overset{*}{v}_1)\ \& \\ &\&(Ev_\sigma)_2^{n-1}\sum_{i=1}^{n-1}\Phi(v_i, v_{i+1}, x_i)\ \&(E\overset{*}{v}_\sigma)_2^{n-1}\sum_{i=1}^{n-1}\Phi(\overset{*}{v}_i, \overset{*}{v}_{i+1}, \overset{*}{x}_i)\Bigg]\rightarrow \\ &\rightarrow\left(\sum_{i=1}^{n-1}(x_i=\overset{*}{x}_i)\ \&\ (v_n=\overset{*}{v}_n)\right)\Bigg\}.\end{aligned} \tag{4}$$

d) Die Umkehrung der Abbildung ist eindeutig:

$$\begin{aligned}&(x_\varrho)_1^{n-1}(v_n)(\overset{*}{x}_\varrho)_1^{n-1}(\overset{*}{v}_n)(v_1)(\overset{*}{v}_1)\Bigg\{\Bigg[\sum_{i=1}^{n-1}(x_i=\overset{*}{x}_i)\ \&\ (v_n=\overset{*}{v}_n)\ \& \\ &\&(Ev_\varrho)_2^{n-1}\sum_{i=1}^{n-1}\Phi(v_i, v_{i+1}, x_i)\ \&(E\overset{*}{v}_\varrho)_2^{n-1}\sum_{i=1}^{n-1}\Phi(\overset{*}{v}_i, \overset{*}{v}_{i+1}, \overset{*}{x}_i)\Bigg]\rightarrow \\ &\rightarrow(v_1=\overset{*}{v}_1)\Bigg\}.\end{aligned} \tag{5}$$

Bildet die Funktion $\Phi(x, y, z)$ die Elemente x aus $\mathfrak{J}$ auf die

---

7) Wir verwenden hier und im folgenden häufig $(x_\varrho)_a^b$ bzw. $(Ex_\varrho)_a^b$ (für $b \geqq a$) als abkürzende Bezeichnung für $(x_a)(x_{a+1})\ldots(x_b)$ bzw. $(Ex_a)(Ex_{a+1})\ldots(Ex_b)$. Das Symbol ϱ, das den variablen Index angibt, darf natürlich durch jedes andere Symbol (z. B. durch σ, ν, μ, ι) ersetzt werden.

Paare $[y, z]$ aus $\mathfrak{J}$ eineindeutig ab, so sind die folgenden vier Bedingungen erfüllt:

a)* Zu jedem Ding x aus $\mathfrak{J}$ gibt es ein Bildpaar $[y, z]$:

(6) $$(x)(Ey)(Ez)\,\Phi(x, y, z).$$

b)* Zu jedem Paar von Elementen $[y, z]$ aus $\mathfrak{J}$ gibt es bei der Umkehrung der Abbildung ein Bildelement x:

(7) $$(y)(z)(Ex)\,\Phi(x, y, z).$$

c)* Die Abbildung ist eindeutig:

(8) $$(x)(y)(z)(\overset{*}{y})(\overset{*}{z})\,[\Phi(x, y, z)\,\&\,\Phi(x, \overset{*}{y}, \overset{*}{z}) \rightarrow (y = \overset{*}{y})\,\&\,(z = \overset{*}{z})].$$

d)* Die Umkehrung der Abbildung ist eindeutig:

(9) $$(x)(\overset{*}{x})(y)(z)\,[\Phi(x, y, z)\,\&\,\Phi(\overset{*}{x}, y, z) \rightarrow (x = \overset{*}{x})].$$

Zum Beweis des Satzes 1 genügt es offenbar zu zeigen, daß die vier Implikationen: (6) → (2), (7) → (3), (8) → (4), (9) → (5) allgemeingültige logische Formeln darstellen, oder, was dasselbe bedeutet, daß *a)* aus *a*)*, *b)* aus *b*)*, *c)* aus *c*)* und *d)* aus *d*)* folgt.

Hier beweisen wir die Allgemeingültigkeit der beiden ersten[8]:

Satz 2. *Für jedes* $n \geqq 2$ *ist*

$$(x)(Ey)(Ez)\,\Phi(x, y, z) \rightarrow (v_1)(Ex_\varrho)_1^{n-1}(Ev_\sigma)_2^n \left[\sum_{i=1}^{n-1} \Phi(v_i, v_{i+1}, x_i)\right]$$

allgemeingültig.

Der Beweis wird durch Induktion nach n geführt:

$$(x)(Ey)(Ez)\,\Phi(x, y, z) \rightarrow (v_1)(Ex_1)(Ev_2)\,\Phi(v_1, v_2, x_1)$$

ist allgemeingültig, denn Vorderglied und Hinterglied unterscheiden sich nur in der Bezeichnung der Variablen und in der Reihenfolge benachbarter Seinszeichen. Für $n = 2$ ist also Satz 2 richtig. Angenommen, er sei für n richtig, d. h. es sei

$$(x)(Ey)(Ez)\,\Phi(x, y, z) \rightarrow (v_1)(Ex_\varrho)_1^{n-1}(Ev_\sigma)_2^n \left[\sum_{i=1}^{n-1} \Phi(v_i, v_{i+1}, x_i)\right]$$

allgemeingültig; wir zeigen dann dasselbe für $n + 1$.

Spaltet man in der letzten Formel $(Ev_\sigma)_2^n$ in $(Ev_\sigma)_2^{n-1}(Ev_n)$ auf, so erhält man

$$(x)(Ey)(Ez)\,\Phi(x, y, z) \rightarrow (v_1)(Ex_\varrho)_1^{n-1}(Ev_\sigma)_2^{n-1}(Ev_n)\left[\sum_{i=1}^{n-1} \Phi(v_i, v_{i+1}, x_i)\right].$$

---

[8]) Der Beweis der Allgemeingültigkeit der beiden anderen Implikationen möge dem Leser überlassen bleiben.

Hieraus und aus der offenbar richtigen Formel

$$(x)(Ey)(Ez)\,\Phi(x, y, z) \to (v_n)(Ev_{n+1})(Ex_n)\,\Phi(v_n, v_{n+1}, x_n)$$

ergibt sich

$$(x)(Ey)(Ez)\,\Phi(x, y, z) \to$$

$$\to (v_1)(Ex_\varrho)_1^{n-1}(Ev_\sigma)_2^{n-1}(Ev_n)\left[\sum_{i=1}^{n-1}\Phi(v_i, v_{i+1}, x_i)\right] \& \tag{10}$$

$$\& (v_n)(Ev_{n+1})(Ex_n)\,\Phi(v_n, v_{n+1}, x_n).$$

Ferner ist

$$(v_1)(Ex_\varrho)_1^{n-1}(Ev_\sigma)_2^{n-1}(Ev_n)\left[\sum_{i=1}^{n-1}\Phi(v_i, v_{i+1}, x_i)\right] \&$$

$$\& (v_n)(Ev_{n+1})(Ex_n)\,\Phi(v_n, v_{n+1}, x_n)$$

in

$$(v_1)(Ex_\varrho)_1^{n-1}(Ev_\sigma)_2^{n-1}\Big\{(Ev_n)\left[\sum_{i=1}^{n-1}\Phi(v_i, v_{i+1}, x_i)\right] \&$$

$$\& (v_n)(Ev_{n+1})(Ex_n)\,\Phi(v_n, v_{n+1}, x_n)\Big\}$$

umformbar und hieraus, gemäß der Regel

$$(Ex)\,F(x) \& (x)\,G(x) \to (Ex)(F(x) \& G(x)),$$

ergibt sich

$$(v_1)(Ex_\varrho)_1^{n-1}(Ev_\sigma)_2^{n-1}(Ev_n)\Big\{\left[\sum_{i=1}^{n-1}\Phi(v_i, v_{i+1}, x_i)\right] \&$$

$$\& (Ev_{n+1})(Ex_n)\,\Phi(v_n, v_{n+1}, x_n)\Big\}$$

und diese Formel läßt sich, wie man es sofort einsieht, in

$$(v_1)(Ex_\varrho)_1^{n}(Ev_\sigma)_2^{n+1}\left[\sum_{i=1}^{n}\Phi(v_i, v_{i+1}, x_i)\right]$$

umformen.

Das Hinterglied der Implikation (10) impliziert also die letzte Formel. Daraus und aus Implikation (10) ergibt sich durch Kettenschluß die Formel

$$(x)(Ey)(Ez)\,\Phi(x, y, z) \to (v_1)(Ex_\varrho)_1^{n}(Ev_\sigma)_2^{n+1}\left[\sum_{i=1}^{n}\Phi(v_i, v_{i+1}, x_i)\right],$$

womit Satz 2 bewiesen ist.

Satz 3. *Für jedes* $n \geqq 2$ *ist*

$$(y)(z)(Ex)\,\Phi(x, y, z) \to (x_\varrho)_1^{n-1}(v_n)(Ev_\sigma)_1^{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n-1}\Phi(v_i, v_{i+1}, x_i)\right]$$

allgemeingültig.

Der Beweis wird durch Induktion nach n geführt.

Für $n=2$ ist der Satz richtig; denn

$$(y)(z)(Ex)\,\Phi(x, y, z) \rightarrow (x_1)(v_2)(Ev_1)\,\Phi(v_1, v_2, x_1)$$

ist offenbar allgemeingültig. Der Satz sei für n als richtig angenommen; er soll für $n+1$ bewiesen werden.

Nach der Induktionsvoraussetzung ist

$$(y)(z)(Ex)\,\Phi(x, y, z) \rightarrow (x_\varrho)_1^{n-1}(v_n)(Ev_\sigma)_1^{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n-1}\Phi(v_i, v_{i+1}, x_i)\right]$$

allgemeingültig; da aber

$$(y)(z)(Ex)\,\Phi(x, y, z) \rightarrow (v_{n+1})(x_n)(Ev_n)\,\Phi(v_n, v_{n+1}, x_n)$$

offenbar allgemeingültig ist, so ist es auch die Formel

$$(y)(z)(Ex)\,\Phi(x, y, z) \rightarrow$$

$$\rightarrow (x_\varrho)_1^{n-1}(v_n)(Ev_\sigma)_1^{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n-1}\Phi(v_i, v_{i+1}, x_i)\right] \,\&\, \tag{11}$$

$$\& \,(v_{n+1})(x_n)(Ev_n)\,\Phi(v_n, v_{n+1}, x_n).$$

Das Hinterglied dieser Formel läßt sich, wie man sofort einsieht, in

$$(x_\varrho)_1^n(v_{n+1})\left\{(v_n)(Ev_\sigma)_1^{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n-1}\Phi(v_i, v_{i+1}, x_i)\right] \,\&\, (Ev_n)\,\Phi(v_n, v_{n+1}, x_n)\right\}$$

umformen und die letzte Formel impliziert gemäß der Schlußregel $(x)\,F(x) \,\&\, (Ex)\,G(x) \rightarrow (Ex)\,(F(x) \,\&\, G(x))$ die Formel

$$(x_\varrho)_1^n(v_{n+1})(Ev_\sigma)_1^n\left[\sum_{i=1}^{n}\Phi(v_i, v_{i+1}, x_i)\right].$$

Das Hinterglied der Implikation (11) impliziert also die letzte Formel, woraus mit Rücksicht auf (11) durch Kettenschluß die Formel

$$(y)(z)(Ex)\,\Phi(x, y, z) \rightarrow (x_\varrho)_1^n(v_{n+1})(Ev_\sigma)_1^n\left[\sum_{i=1}^{n}\Phi(v_i, v_{i+1}, x_i)\right]$$

gewonnen werden kann. Damit ist unser Induktionsbeweis vollendet.

Wir beweisen jetzt den

Satz 4. *Notwendige und hinreichende Bedingung für die Darstellbarkeit einer dreistelligen logischen Funktion $\Phi(x, y, z)$ in einem Individuenbereich $\mathfrak{J}$ in der Form: $R_1(x, y) \,\&\, R_2(x, z)$ ist die Richtigkeit der Formel:*

$$(x)(y)(z)(u)(v)\,[\Phi(x, y, u) \,\&\, \Phi(x, v, z) \rightarrow \Phi(x, y, z)] \tag{12}$$

in $\mathfrak{J}$.

Die Bedingung ist notwendig, da ja die Formel

$$(x)(y)(z)(u)(v)[R_1(x, y) \mathbin{\&} R_2(x, u) \mathbin{\&} R_1(x, v) \mathbin{\&} R_2(x, z) \rightarrow \\ \rightarrow R_1(x, y) \mathbin{\&} R_2(x, z)]$$

offenbar richtig ist. Sie ist aber auch hinreichend, denn, durch zweimalige Anwendung der Regel $(x)[F(x) \rightarrow p] \rightarrow [(Ex) F(x) \rightarrow p]$ (p enthält die Variable x nicht), ergibt sich aus ihr:

$$(x)(y)(z)[(Eu)\, \Phi(x, y, u) \mathbin{\&} (Ev)\, \Phi(x, v, z) \rightarrow \Phi(x, y, z)],$$

während die Umkehrung

$$(x)(y)(z)[\Phi(x, y, z) \rightarrow (Eu)\, \Phi(x, y, u) \mathbin{\&} (Ev)\, \Phi(x, v, z)]$$

stets richtig ist.

Setzt man nun

$$R_1(x, y) \equiv (Eu)\, \Phi(x, y, u), \quad R_2(x, z) \equiv (Ev)\, \Phi(x, v, z),$$

so besteht $(x)(y)(z)[\Phi(x, y, z) \sim R_1(x, y) \mathbin{\&} R_2(x, z)]$, also

$$\Phi(x, y, z) \equiv R_1(x, y) \mathbin{\&} R_2(x, z).$$

Aus Satz 4 ergibt sich z. B. der Beweis für die Darstellbarkeit jeder Relation $\Phi(x, y, z)$, die eineindeutig die Elemente x eines Individuenbereiches auf die Elementepaare $[y, z]$ desselben abbildet, in der Form $R_1(x, y) \mathbin{\&} R_2(x, z)$.[9]) In der Tat, falls $[y, u]$ und $[v, z]$ zugleich Bildpaare von x sind, so muß wegen der Eindeutigkeit der Abbildung $y = v$ und $u = z$ sein, womit $[y, z]$ sich als Bildpaar von x erweist und somit die obige Bedingung (12) erfüllt ist.[10])

---

[9]) Diese Darstellbarkeit liegt zwar sprachlich nahe, indem man ja statt zu sagen: „$[y, z]$ ist das Bildpaar von x", auch: „y ist die erste Stelle des Bildpaares von x *und* z ist die zweite Stelle des Bildpaares von x" sagen kann; indessen ist auch ein exakter Beweis, wie der oben angegebene, notwendig.

[10]) Satz 4 läßt folgende Verallgemeinerung zu: *Notwendige und hinreichende Bedingung für die Darstellbarkeit einer $n+1$ stelligen Funktion $R(x, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ in der Form $R_1(x, x_1) \mathbin{\&} R_2(x, x_2) \mathbin{\&} \ldots \mathbin{\&} R_n(x, x_n)$ ist die Richtigkeit der Formel*

$$(x)(\overset{1}{x}_\varrho)_1^n(\overset{2}{x}_\varrho)_1^n \ldots (\overset{n}{x}_\varrho)_1^n [R(x, \overset{1}{x}_1, \overset{1}{x}_2, \ldots, \overset{1}{x}_n) \mathbin{\&} R(x, \overset{2}{x}_1, \overset{2}{x}_2, \ldots, \overset{2}{x}_n) \mathbin{\&} \ldots \mathbin{\&} \\ \mathbin{\&} R(x, \overset{n}{x}_1, \overset{n}{x}_2, \ldots, \overset{n}{x}_n) \rightarrow R(x, \overset{1}{x}_1, \overset{2}{x}_2, \ldots, \overset{n}{x}_n)].$$

Daraus folgt der exakte Beweis für den sprachlich naheliegenden Satz, daß jede Funktion $R(x, x_1, x_2, \ldots, x_n)$, die eineindeutig die Elemente x eines Individuenbereichs $\mathfrak{J}$ auf die n-tupel $[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ von Elementen aus $\mathfrak{J}$ abbildet, sich in der Form $R_1(x, x_1) \mathbin{\&} R_2(x, x_2) \mathbin{\&} \ldots \mathbin{\&} R_n(x, x_n)$ darstellen läßt.

S a t z 5. *Bildet die Funktion* $R_1(x, y) \& R_2(x, z)$ *eineindeutig die Elemente* x *aus* $\mathfrak{J}$ *auf die Paare* $[y, z]$ *von Elementen aus* $\mathfrak{J}$ *ab, so bildet die Funktion* $(Ev_\varrho)_2^{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n-1}(R_1(v_i, v_{i+1}) \& R_2(v_i, x_i))\right]$ *die Elemente* v_1 *aus* $\mathfrak{J}$ *eineindeutig auf die n-tupel* $[x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, v_n]$ *von Elementen aus* $\mathfrak{J}$ *ab.*

Dieser Satz ergibt sich unmittelbar aus Satz 1, indem wir $R_1(x, y) \& R_2(x, z)$ für $\Phi(x, y, z)$ einsetzen.

S a t z 6. *Ist* $R(x, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *eine in einem Individuenbereich* $\mathfrak{J}$ *definierte logische Funktion, für welche folgende beide Bedingungen:*

a) $(x)(x_\varrho)_1^n (y_\sigma)_1^n \left[R(x, x_1, x_2, \ldots, x_n) \& R(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \rightarrow \sum_{i=1}^{n}(y_i = x_i)\right]$,

b) $(x_\varrho)_1^n (Ex) R(x, x_1, x_2, \ldots, x_n)$

erfüllt sind[11]*), so läßt sich jede — in* $\mathfrak{J}$ *definierte — n-stellige Funktion* $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$*, mit geeigneter Funktion* $f(x)$ [12]*), in der Form* $(Ex)[f(x) \& R(x, x_1, x_2, \ldots, x_n)]$ *darstellen.*

B e w e i s: Wird die Funktion $f(x)$ durch die Festsetzung $f(x) \equiv (Ey_\varrho)_1^n [F(y_1, y_2, \ldots, y_n) \& R(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)]$ definiert, so gilt zunächst stets

$$\{f(x) \& R(x, x_1, x_2, \ldots, x_n)\} \sim$$
$$\sim \{(Ey_\varrho)_1^n [F(y_1, y_2, \ldots, y_n) \& R(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)] \& R(x, x_1, x_2, \ldots, x_n)\},$$

ferner wegen *a)*, wie man leicht einsieht, stets

$$\{(Ey_\varrho)_1^n [F(y_1, y_2, \ldots, y_n) \& R(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)] \& R(x, x_1, x_2, \ldots, x_n)\} \sim$$
$$\sim \{F(x_1, x_2, \ldots, x_n) \& R(x, x_1, x_2, \ldots, x_n)\}.$$

Die beiden erhaltenen Äquivalenzen liefern zusammen die Äquivalenz $\{f(x) \& R(x, x_1, x_2, \ldots, x_n)\} \sim \{F(x_1, x_2, \ldots, x_n) \& R(x, x_1, x_2, \ldots, x_n)\}$, aus welcher leicht

$$(Ex)\{f(x) \& R(x, x_1, x_2, \ldots, x_n)\} \sim$$
$$\sim \{F(x_1, x_2, \ldots, x_n) \& (Ex) R(x, x_1, x_2, \ldots, x_n)\}$$

gewonnen werden kann. Da aber, gemäß *b)*, $(Ex) R(x, x_1, x_2, \ldots, x_n)$

[11]) Die Bedingungen *a), b)* sind — wie man leicht einsieht — für $n \geqq 2$ dann und nur dann in einem Individuenbereich $\mathfrak{J}$ erfüllbar, falls die Kardinalzahl $\mathfrak{m}$ von $\mathfrak{J}$ der Gleichung $\mathfrak{m}^2 = \mathfrak{m}$, oder, was auf dasselbe auskommt, der Gleichung $\mathfrak{m}^n = \mathfrak{m}$ genügt.

[12]) Einstellige logische Funktionen bzw. Funktionsvariablen werden wir meistens durch kleine Buchstaben bezeichnen.

wahr ist, so folgt aus der letzten Äquivalenz sofort

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) \sim (Ex)\{f(x) \& R(x, x_1, x_2, \ldots, x_n)\},$$

womit Satz 6 bewiesen ist.

Satz 7. *Ist* $R(x, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *eine in einem Individuenbereich* $\mathfrak{J}$ *definierte logische Funktion, für welche die Bedingungen a), b) (aus Satz 6) erfüllt sind, so läßt sich jede — in* $\mathfrak{J}$ *definierte — n-stellige Funktion* $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, *mit geeigneter Funktion* $f(x)$, *in der Form* $(x)[R(x, x_1, x_2, \ldots, x_n) \rightarrow f(x)]$ *darstellen.*

Beweis: Ist $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ eine beliebig in $\mathfrak{J}$ definierte Funktion, so läßt sich $\bar{F}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ wegen Satz 6 in der Form $(Ex)[g(x) \& R(x, x_1, x_2, \ldots, x_n)]$ darstellen. Aus $\bar{F}(x_1, x_2, \ldots, x_n) \sim \sim (Ex)[g(x) \& R(x, x_1, x_2, \ldots, x_n)]$ folgt aber $F(x_1, x_2, \ldots, x_n) \sim \sim (x)[R(x, x_1, x_2, \ldots, x_n) \rightarrow \bar{g}(x)]$. $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ läßt sich also in der Form $(x)[R(x, x_1, x_2, \ldots, x_n) \rightarrow f(x)]$ darstellen (mit $f(x) \equiv \bar{g}(x)$), w. z. b. w.

Ist insbesondere $R(x, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ eine Funktion, die eineindeutig die Elemente x eines Individuenbereichs $\mathfrak{J}$ auf die n-tupel $[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ von solchen abbildet, so sind die Bedingungen *a)*, *b)* offenbar erfüllt und daher ergeben sich aus den Sätzen 6 und 7 folgende zwei Behauptungen:

Satz 8. *Ist* $R(x, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *eine Funktion, welche eineindeutig die Elemente* x *eines Individuenbereiches* $\mathfrak{J}$ *auf die n-tupel* $[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ *von solchen abbildet, so läßt sich jede, in* $\mathfrak{J}$ *definierte, n-stellige Funktion* $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, *mit geeigneter Funktion* $f(x)$ *(und zwar mit* $f(x) \equiv (Ey_\varrho)_1^n [F(y_1, y_2, \ldots, y_n) \& R(x, y_1, \ldots, y_n)]$*), in der Form* $(Ex)(f(x) \& R(x, x_1, x_2, \ldots, x_n))$ [13]*, ferner, mit geeigneter Funktion* $g(x)$ *(und zwar mit* $g(x) \equiv (y_\varrho)_1^n [R(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \rightarrow \rightarrow F(y_1, y_2, \ldots, y_n)]$*), in der Form* $(x)[R(x, x_1, x_2, \ldots, x_n) \rightarrow g(x)]$ *darstellen.*

---

[13]) Berücksichtigt man, daß $R(x, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ sich in der Form $R_1(x, x_1) \& R_2(x, x_2) \& \ldots \& R_n(x, x_n)$ darstellen läßt (vgl. darüber Fußnote [10])); so erhält man hieraus, daß jede in einem unendlichen Individuenbereich definierte Funktion sich in der Form $(Ex)[f(x) \& R_1(x, x_1) \& R_2(x, x_2) \& \ldots \& R_n(x, x_n)]$ und, indem man $S_i(x, y)$ gleich $f(x) \& R_i(x, y)$ für $i = 1, 2, \ldots, n$ setzt, auch in der Form $(Ex)[S_1(x, x_1) \& S_2(x, x_2) \& \ldots \& S_n(x, x_n)]$ darstellen läßt. Diese letzte Darstellbarkeit (in abzählbaren Individuenbereichen) wurde von K. Gödel beim Entscheidungsproblem verwendet (Zum Entscheidungsproblem des logischen Funktionenkalküls, *Monatshefte für Math. und Phys.*, 40 (1932), S. 433–443, insb. S. 441).

Die Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ sind in diesem Satz durch die Funktionen $R(x, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ und $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ sogar eindeutig bestimmt. Es genügt, dies für $f(x)$ zu zeigen. Für $R(x, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ bestehen außer *a)* und *b)* offenbar auch die folgenden beiden Tatsachen:

c) $(y_\varrho)_1^n (x)(z)[R(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \& R(z, y_1, y_2, \ldots, y_n) \rightarrow (x = z)]$,

d) $(x)(Ey_\varrho)_1^n R(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$.

Aus $F(x_1, x_2, \ldots, x_n) \sim (Ex)(f(x) \& R(x, x_1, x_2, \ldots, x_n))$ folgt zunächst

$$(Ey_\varrho)_1^n [F(y_1, y_2, \ldots, y_n) \& R(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)] \sim$$
$$\sim (Ey_\varrho)_1^n [(Ez)(f(z) \& R(z, y_1, y_2, \ldots, y_n)) \& R(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)].$$

Wegen *c)* ist aber — wie man leicht einsieht —

$$[(Ez)(f(z) \& R(z, y_1, y_2, \ldots, y_n)) \& R(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)] \sim$$
$$\sim [f(x) \& R(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)]$$

und daher ist

$$(Ey_\varrho)_1^n [F(y_1, y_2, \ldots, y_n) \& R(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)] \sim$$
$$\sim [f(x) \& (Ey_\varrho)_1^n R(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)].$$

Da aber $(Ey_\varrho)_1^n R(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$ wegen *d)* wahr ist, so folgt aus dieser Äquivalenz sofort

$$(Ey_\varrho)_1^n [F(y_1, y_2, \ldots, y_n) \& R(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)] \sim f(x)$$

womit $f(x)$ eindeutig bestimmt ist, w. z. b. w.

Aus dem Satze 8 ergibt sich gemäß Satz 1 sofort der folgende

Satz 9. *Ist $\Phi(x, y, z)$ eine Funktion, die eineindeutig die Elemente x aus dem Individuenbereich $\mathfrak{J}$ auf die Paare $[y, z]$ von Elementen aus $\mathfrak{J}$ abbildet, so läßt sich jede in $\mathfrak{J}$ definierte n-stellige Funktion ($n \geqq 2$) $F(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, v_n)$,*[14] *mit geeigneter Funktion $f(v_1)$ $\Big($und zwar mit $f(v_1) \equiv (Ey_\varrho)_1^{n-1} (Ev_\varrho)_2^n \Big[F(y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}, v_n) \& \& \sum_{i=1}^{n-1} \Phi(v_i, v_{i+1}, y_i)\Big]\Big)$, in der Form $(Ev_\varrho)_1^{n-1} \Big[f(v_1) \& \sum_{i=1}^{n-1} \Phi(v_i, v_{i+1}, x_i)\Big]$,*

[14]) Die n-te (letzte) Variable bezeichnen wir statt x_n mit v_n, um statt

$$(Ev_\varrho)_1^{n-1} \Big[f(v_1) \& \sum_{i=1}^{n-2} \Phi(v_i, v_{i+1}, x_i) \& \Phi(v_{n-1}, x_n, x_{n-1})\Big]$$

kürzer $(Ev_\varrho)_1^{n-1} \Big[f(v_1) \& \sum_{i=1}^{n-1} \Phi(v_i, v_{i+1}, x_i)\Big]$ schreiben zu können.

ferner, mit geeigneter Funktion $g(v_1)$ $\Big($ *und zwar mit* $g(v_1) \equiv$
$\equiv (y_\varrho)_1^{n-1} (v_\varrho)_2^n \left[\sum_{i=1}^{n-1} \Phi(v_i, v_{i+1}, y_i) \rightarrow F(y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}, v_n) \right] \Big)$, *in der Form* $(v_\varrho)_1^{n-1} \left[\sum_{i=1}^{n-1} \Phi(v_i, v_{i+1}, x_i) \rightarrow g(v_1) \right]$ *darstellen.*

Setzt man hier $R_1(x, y) \,\&\, R_2(x, z)$ für $\Phi(x, y, z)$ ein, so erhält man unmittelbar folgenden

Satz 10. *Ist* $R_1(x, y) \,\&\, R_2(x, z)$ *eine Funktion, die eineindeutig die Elemente* x *aus einem Individuenbereich* $\mathfrak{J}$ *auf die Paare* $[y, z]$ *von solchen abbildet, so läßt sich jede in* $\mathfrak{J}$ *definierte n-stellige Funktion* $(n \geqq 2)$ $F(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, v_n)$, *mit geeigneter Funktion* $f(v_1)$ $\Big($*und zwar mit*

$$f(v_1) \equiv (Ey_\varrho)_1^{n-1} (Ev_\varrho)_2^n \Big[F(y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}, v_n) \,\&\, \& \sum_{i=1}^{n-1} (R_1(v_i, v_{i+1}) \,\&\, R_2(v_i, y_i)) \Big] \Big),$$

in der Form $(Ev_\varrho)_1^{n-1} \left[f(v_1) \,\&\, \sum_{i=1}^{n-1} (R_1(v_i, v_{i+1}) \,\&\, R_2(v_i, x_i)) \right]$, *ferner, mit geeigneter Funktion* $g(v_1)$ $\Big($*und zwar mit*

$$g(v_1) \equiv (y_\varrho)_1^{n-1} (v_\varrho)_2^n \Big[\sum_{i=1}^{n-1} (R_1(v_i, v_{i+1}) \,\&\, R_2(v_i, y_i)) \rightarrow \rightarrow F(y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}, v_n) \Big] \Big),$$

in der Form $(v_\varrho)_1^{n-1} \left[\sum_{i=1}^{n-1} (R_1(v_i, v_{i+1}) \,\&\, R_2(v_i, x_i)) \rightarrow g(v_1) \right]$ *darstellen.*

Es gilt ferner folgender

Satz 11. *Ist* $R(x, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *eine Funktion, welche eineindeutig die Elemente* x *eines Individuenbereichs* $\mathfrak{J}$ *auf die n-tupel* $[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ *von solchen abbildet, so bestehen für jede Funktion* $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *über* $\mathfrak{J}$ *die beiden Äquivalenzen*

$$(x_\varrho)_1^n F(x_1, x_2, \ldots, x_n) \sim (x)(Ex_\varrho)_1^n [R(x, x_1, x_2, \ldots, x_n) \,\&\, F(x_1, x_2, \ldots, x_n)]$$

und

$$(Ex_\varrho)_1^n F(x_1, x_2, \ldots, x_n) \sim (Ex)(x_\varrho)_1^n [R(x, x_1, x_2, \ldots, x_n) \rightarrow F(x_1, x_2, \ldots, x_n)].$$

Beweis: Aus $(x_\varrho)_1^n F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ und aus der richtigen Formel $(x)(Ex_\varrho)_1^n R(x, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ folgt durch n-malige Anwendung der Regel $[(x)F(x) \& (Ex)G(x)] \rightarrow (Ex)(F(x) \& G(x))$ sofort $(x)(Ex_\varrho)_1^n [R(x, x_1, x_2, \ldots, x_n) \& F(x_1, x_2, \ldots, x_n)]$. Umgekehrt: aus der letzten Formel und der, wegen der über $R(x, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ gemachten Voraussetzung, richtigen Formel

$$(y_\varrho)_1^n (Ex) R(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$$

ergibt sich durch Anwendung der Regel

$$[(x) F(x) \& (Ex) G(x)] \rightarrow (Ex)(F(x) \& G(x))$$

zunächst die Formel

$$(y_\varrho)_1^n (Ex)(Ex_\varrho)_1^n [R(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \& R(x, x_1, x_2, \ldots, x_n) \& F(x_1, x_2, \ldots, x_n)],$$

aus welcher mit Berücksichtigung der Formel

$$(x)(x_\varrho)_1^n (y_\varrho)_1^n \left[R(x, x_1, x_2, \ldots, x_n) \& R(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \rightarrow \prod_{i=1}^{n} (x_i = y_i)\right]$$

leicht $(x_\varrho)_1^n F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ gewonnen werden kann. Damit ist die erste Behauptung bewiesen; die zweite ergibt sich daraus durch Anwendung auf die Funktion $\overline{F}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ nebst beiderseitigen Verneinung.

Satz 12. *Ist $\Phi(x, y, z)$ eine Funktion, welche eineindeutig die Elemente x aus $\mathfrak{J}$ auf die Paare $[y, z]$ von Elementen aus $\mathfrak{J}$ abbildet, so bestehen für jede in $\mathfrak{J}$ definierte Funktion $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ die Äquivalenzen*

$$(x_\varrho)_1^n F(x_1, x_2, \ldots, x_n) \sim$$
$$\sim (v_1)(Ex_\varrho)_1^{n-1} (Ev_\varrho)_2^n \left[\prod_{i=1}^{n-1} \Phi(v_i, v_{i+1}, x_i) \& F(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, v_n)\right]$$

und

$$(Ex_\varrho)_1^n F(x_1, x_2, \ldots, x_n) \sim$$
$$\sim (Ev_1)(x_\varrho)_1^{n-1} (v_\varrho)_2^n \left[\prod_{i=1}^{n-1} \Phi(v_i, v_{i+1}, x_i) \rightarrow F(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, v_n)\right].$$

Satz 12 ergibt sich sofort aus den Sätzen 1 und 11.

Satz 13. *Ist $R_1(x, y) \& R_2(x, z)$ eine Funktion, welche eineindeutig die Elemente x aus $\mathfrak{J}$ auf die Paare $[y, z]$ von solchen abbildet, so bestehen für jede in $\mathfrak{J}$ definierte Funktion $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ die Äquivalenzen*

$$(x_\varrho)_1^n F(x_1, x_2, \ldots, x_n) \sim (v_1)(Ex_\varrho)_1^{n-1}(Ev_\varrho)_2^n \left[\sum_{i=1}^{n-1} (R_1(v_i, v_{i+1}) \,\&\, \& R_2(v_i, x_i)) \,\&\, F(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, v_n) \right]$$

und

$$(Ex_\varrho)_1^n F(x_1, x_2, \ldots, x_n) \sim (Ev_1)(x_\varrho)_1^{n-1}(v_\varrho)_2^n \left[\sum_{i=1}^{n-1} (R_1(v_i, v_{i+1}) \,\&\, \& R_2(v_i, x_i)) \rightarrow F(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, v_n) \right].$$

Satz 13 erhält man aus Satz 12, indem man $R_1(x, y) \,\&\, R_2(x, z)$ für $\Phi(x, y, z)$ einsetzt.

In den obigen Sätzen haben wir auf verschiedene Darstellungen beliebiger logischer Funktionen hingewiesen. Diese Darstellungen gelten in einem Individuenbereich $\mathfrak{J}$, falls die Elemente x aus $\mathfrak{J}$ sich auf die Paare $[y, z]$ von Elementen aus $\mathfrak{J}$ eineindeutig abbilden lassen oder, was dasselbe bedeutet, falls die Kardinalzahl $\mathfrak{m}$ von $\mathfrak{J}$ der Gleichung $\mathfrak{m}^2 = \mathfrak{m}$ genügt. Da $\aleph_0^2 = \aleph_0$ ist, so gelten diese Darstellungen insbesondere in abzählbaren Individuenbereichen und nur aus dieser Tatsache wird im folgenden, bei Anwendung auf das Entscheidungsproblem, Gebrauch gemacht (unter Berücksichtigung des bekannten Löwenheim—Skolemschen Satzes). Beiläufig stellen wir aber fest, daß alle diese Darstellungen auch in allen anderen unendlichen Individuenbereichen gelten, da ja nach einem bekannten mengentheoretischen Satz die Beziehung $\mathfrak{m}^2 = \mathfrak{m}$ überhaupt für jede transfinite Kardinalzahl besteht.[15])

Hinsichtlich der Äquivalenzen, von denen in den Sätzen 11, 12 und 13 die Rede ist, sei vorläufig bemerkt, daß sie zu Präfixänderungen sehr geeignet sind; sie erlauben uns nämlich Komplexe von Allzeichen gewissermaßen durch ein Allzeichen und ein Komplex von Seinszeichen, bzw. Komplexe von Seinszeichen durch ein Seinszeichen und ein Komplex von Allzeichen zu ersetzen.

---

[15]) Der genannte mengentheoretische Satz wird mit Benutzung des Auswahlprinzips bewiesen; die Heranziehung des Auswahlprinzips ist dabei unvermeidlich, da wie A. Tarski (Sur quelques théorèmes qui équivalent à l'axiome du choix, *Fundamenta Math*, 5 (1924), S. 147—154) zeigte, der Satz bereits dem Auswahlprinzip äquivalent ist.

II. Reduktionssätze des mengentheoretischen Entscheidungsproblems.

Wir zeichnen eine dreistellige logische Funktionsvariable, etwa $\Phi(x, y, z)$, aus (wir nennen sie die „ausgezeichnete" dreistellige Funktionsvariable) und bilden mit ihr den Ausdruck

$$
\begin{aligned}
&(x)(Ey)(Ez)\,\Phi(x, y, z)\,\& \\
(13)\quad &\&\,(x)(y)(z)(\overset{*}{y})(\overset{*}{z})\,[\Phi(x, y, z)\,\&\,\Phi(x, \overset{*}{y}, \overset{*}{z}) \rightarrow y = \overset{*}{y}\,\&\,z = \overset{*}{z}]\,\& \\
&\&\,(y)(z)(Ex)\,\Phi(x, y, z)\,\& \\
&\&\,(x)(\overset{*}{x})(y)(z)\,[\Phi(x, y, z)\,\&\,\Phi(\overset{*}{x}, y, z) \rightarrow x = \overset{*}{x}].
\end{aligned}
$$

Ferner zeichnen wir zwei zweistellige logische Funktionsvariablen $R_1(x, y)$, $R_2(x, y)$ aus (wir nennen sie die „ausgezeichneten" zweistelligen Funktionsvariablen), und die Formel, welche aus (13) hervorgeht, indem man $R_1(x, y)\,\&\,R_2(x, z)$ für $\Phi(x, y, z)$ einsetzt, bezeichnen wir mit (14). Wir stellen folgende zwei Definitionen auf:

D e f i n i t i o n 1. *Ein Zählausdruck A, welcher die ausgezeichnete dreistellige Funktionsvariable $\Phi(x, y, z)$ enthält, möge ein γ-Ausdruck heißen, wenn er dann und nur dann erfüllbar ist, falls das gleiche für den Ausdruck $A\,\&\,(13)$ zutrifft. Es ist klar, daß ein Erfüllungssystem von $A\,\&\,(13)$ erst recht den Zählausdruck A erfüllt; ein solches Erfüllungssystem nennen wir eine ausgezeichnete Erfüllung des Zählausdrucks A.*[16])

D e f i n i t i o n 2. *Ein Zählausdruck A, der die zwei ausgezeichneten zweistelligen Funktionsvariablen $R_1(x, y)$, $R_2(x, y)$ enthält, möge ein β-Ausdruck heißen, wenn er dann und nur dann erfüllbar ist, falls das gleiche für den Ausdruck $A\,\&\,(14)$ zutrifft. Ein Erfüllungssystem von $A\,\&\,(14)$ ist zugleich ein Erfüllungssystem von A; ein solches Erfüllungssystem von A möge eine ausgezeichnete Erfüllung von A heißen.*[17])

---

[16]) Die hier angegebene Definition des Begriffs „γ-Ausdruck" kann auch anders ausgesprochen werden. Es gilt nämlich — wie man sofort einsieht —: Ein Zählausdruck A, der die ausgezeichnete Funktionsvariable Φ enthält (die übrigen Funktionsvariablen von A seien $F_1, F_2, \ldots, F_k$), ist ein γ-Ausdruck, wenn es, falls er überhaupt erfüllbar ist, einen Individuenbereich $\mathfrak{J}'$ und ein den Zählausdruck A in $\mathfrak{J}'$ erfüllendes System von Funktionen $F'_1, F'_2, \ldots, F'_k, \Phi$ gibt, so daß durch die Funktion $\Phi'(x, y, z)$ eine eineindeutige Abbildung der Elemente x aus $\mathfrak{J}'$ auf die Paare von Elementen $[y, z]$ aus $\mathfrak{J}'$ geleistet wird. Ein solches Erfüllungssystem $F'_1, F'_2, \ldots, F'_k, \Phi'$ in $\mathfrak{J}'$ ist ein ausgezeichnetes Erfüllungssystem von A.

[17]) Den Begriff des β-Ausdrucks habe ich zum ersten Mal in meiner

Es gilt folgender

S a t z 14. *Ist A ein γ-Ausdruck und geht B aus A hervor, indem man $R_1(x, y) \& R_2(x, z)$ für $\Phi(x, y, z)$ einsetzt*[18]) *so ist B ein mit A, in bezug auf die Erfüllbarkeit, gleichwertiger*[19]) *β-Ausdruck*.

B e w e i s : Sind $F_1, F_2, \ldots, F_k, \Phi$ die Funktionsvariablen aus A, so sind $F_1, F_2, \ldots, F_k, R_1, R_2$ die Funktionsvariablen aus B. Ist der Zählausdruck A erfüllbar, so hat er, als γ-Ausdruck, eine ausgezeichnete Erfüllung, etwa $F_1', F_2', \ldots, F_k', \Phi'$ in $\mathfrak{J}'$; $\Phi'(x, y, z)$ läßt sich aber in der Form $R_1'(x, y) \& R_2'(x, z)$ darstellen[20]) und, wie man sofort einsieht, ist dann $F_1', F_2', \ldots, F_k', R_1', R_2'$ eine ausgezeichnete Erfüllung von B in $\mathfrak{J}'$. Also: Ist A erfüllbar, so ist es auch B und hat sogar eine ausgezeichnete Erfüllung. Ist umgekehrt B erfüllbar und ist $F_1'', F_2'', \ldots, F_k'', R_1'', R_2''$ ein Erfüllungssystem in $\mathfrak{J}''$, so erfüllt $F_1'', F_2'', \ldots, F_k'', R_1''(x, y) \& R_2''(x, z)$ offenbar den Zählausdruck A in $\mathfrak{J}''$; also: ist B erfüllbar so ist es auch A. Mithin sind A und B gleichwertige Zählausdrücke und da B, falls überhaupt erfüllbar, dann sogar eine ausgezeichnete Erfüllung besitzt[21]), so ist B außerdem ein β-Ausdruck, w. z. b. w.

Arbeit: Über einen Gödelschen Reduktionssatz der logischen Entscheidungstheorie (erscheint demnächst) eingeführt. Ich habe dort der Definition folgende, der oben angegebenen gleichwertige, Fassung gegeben: Ein Zählausdruck, welcher die Funktionsvariablen R_1, R_2 enthält (die übrigen Funktionsvariablen desselben seien $F_1, F_2, \ldots, F_k$), ist ein β-Ausdruck, wenn es, falls er überhaupt erfüllbar ist, einen Individuenbereich $\mathfrak{J}'$ und ein den Zählausdruck in $\mathfrak{J}'$ erfüllendes System von Funktionen $F_1', F_2', \ldots, F_k', R_1', R_2'$ gibt, so daß durch die Funktion $R_1'(z, x) \& R_2'(z, y)$ eine eineindeutige Abbildung der Elemente z aus $\mathfrak{J}'$ auf die Paare von Elementen $[x, y]$ aus $\mathfrak{J}'$ geleistet wird. Ein solches Erfüllungssystem $F_1', F_2', \ldots, F_k', R_1', R_2'$ in $\mathfrak{J}'$ bildet ein ausgezeichnetes Erfüllungssystem des Zählausdrucks.

[18]) Es wird hier gemeint, daß für die Nennform $\Phi(x, y, z)$ der Funktionsvariable Φ der Ausdruck $R_1(x, y) \& R_2(x, z)$ zur Einsetzung angegeben ist. (Bez. der Einsetzungsregel für Funktionsvariable vgl. das in Fußnote [3]) zitierte Werk, S. 90.)

[19]) Zwei Zählausdrücke mögen gleichwertig in bezug auf die Erfüllbarkeit oder kurz gleichwertig heißen, wenn sie entweder beide erfüllbar oder beide nicht erfüllbar sind.

[20]) Da ja die Funktion $\Phi'(x, y, z)$ eineindeutig die Elemente x aus $\mathfrak{J}'$ auf die Paare $[y, z]$ von solchen abbildet.

[21]) Dies ergibt sich so: Ist B überhaupt erfüllbar, so ist es, nach dem oben Bewiesenen, auch A. Aus der Erfüllbarkeit von A folgt aber, wie wir ebenfalls oben bewiesen haben, die Existenz einer ausgezeichneten Erfüllung von B.

Satz 15. *Zu jedem Zählausdruck A läßt sich ein gleichwertiger γ-Ausdruck B angeben, der außer der ausgezeichneten Funktionsvariable Φ nur einstellige Funktionsvariablen enthält.*

Beweis. Es sei A ein vorgegebener Zählausdruck, $F_1, F_2, \ldots, F_k$ die in ihm figurierenden mehrstelligen Funktionsvariablen und $g_1, g_2, \ldots, g_l$ seine einstelligen Funktionsvariablen; F_i soll r_i-stellig sein ($r_i > 1$ für $i = 1, 2, \ldots, k$). $f_1, f_2, \ldots, f_k$ seien k einstellige Funktionsvariablen, die voneinander und von $g_1, g_2, \ldots, g_l$ verschieden sind, ferner sei B der Zählausdruck, welcher aus A entsteht, indem man für die Funktionsvariable $F_i(x_1, x_2, \ldots, x_{r_i-1}, v_{r_i})$ [22]) den Ausdruck $(Ev_\varrho)_1^{r_i-1}\left[f_i(v_1) \mathbin{\&} \sum_{j=1}^{r_i-1} \Phi(v_j, v_{j+1}, x_j)\right]$ einsetzt (für $i = 1, 2, \ldots, k$).

Der Zählausdruck B enthält außer der ausgezeichneten Funktionsvariable Φ nur noch einstellige Funktionsvariablen, nämlich $f_1, f_2, \ldots, f_k, g_1, g_2, \ldots, g_l$; wir zeigen, daß B ein mit A gleichwertiger γ-Ausdruck ist. Ist A erfüllbar, so ist es, nach dem bekannten Löwenheim—Skolemschen Satz[23]), auch im Bereich der natürlichen Zahlen $\mathfrak{Z}$ erfüllbar. $F_1', F_2', \ldots, F_k', g_1', g_2', \ldots, g_l'$ sei dann ein den Zählausdruck A in $\mathfrak{Z}$ erfüllendes System. $\Phi'(x, y, z)$ sei eine Funktion, die eineindeutig die Zahlen x auf die Zahlenpaare $[y, z]$ abbildet; es genügt etwa $\Phi'(x, y, z) \equiv [x = 2^{y-1} . (2z-1)]$ zu setzen. Wir definieren die Funktionen $f_1', f_2', \ldots, f_k'$ durch die Festsetzung

$$f_i'(v_1) \equiv (Ey_\varrho)_1^{r_i-1} (Ev_\varrho)_2^{r_i}\left[F_i'(y_1, y_2, \ldots, y_{r_i-1}, v_{r_i}) \mathbin{\&} \sum_{j=1}^{r_i-1} \Phi'(v_j, v_{j+1}, y_j)\right],$$

für $i = 1, 2, \ldots, k$.

Die Funktionen $f_1', f_2', \ldots, f_k', g_1', g_2', \ldots, g_l', \Phi'$ bilden dann eine ausgezeichnete Erfüllung des Zählausdrucks B, da ja wegen Satz 9 offenbar

$$F_i'(x_1, x_2, \ldots, x_{r_i-1}, v_{r_i}) \equiv (Ev_\varrho)_1^{r_i-1}\left[f_i'(v_1) \mathbin{\&} \sum_{j=1}^{r_i-1} \Phi'(v_j, v_{j+1}, x_j)\right].$$

---

[22]) Bez. der Bezeichnung der letzten Variable der Nennform von F_i mit v_{r_i} statt x_{r_i} vgl. Fußnote [14]).

[23]) L. Löwenheim, Über Möglichkeiten im Relativkalkül, *Math. Annalen*, 76 (1915), S. 447—470, insb. Satz 2; Th. Skolem, Logisch-kombinatorische Untersuchungen über Erfüllbarkeit oder Beweisbarkeit mathematischer Sätze usw., *Vidensk.-Selsk. Skrifter, Mat.-Naturw. Klasse*, 1920, Nr. 4, S. 1—36, insb. S. 3—10.

besteht (für $i = 1, 2, \ldots, k$). Also: Ist A erfüllbar, so hat B eine ausgezeichnete Erfüllung. Ist nun umgekehrt B erfüllbar, $f_1'', f_2'', \ldots, f_k'', g_1'', g_2'', \ldots, g_l'', \Phi''$ ein Erfüllungssystem von B in $\mathfrak{J}''$ und werden die Funktionen $F_1'', F_2'', \ldots, F_k''$ durch die Festsetzungen

$$F_i''(x_1, x_2, \ldots, x_{r_i-1}, v_{r_i}) \equiv (E v_\varrho)_1^{r_i-1}\left[f_i''(v_1) \,\&\, \sum_{j=1}^{r_i-1} \Phi''(v_j, v_{j+1}, x_j)\right],$$

für $i = 1, 2, \ldots, k$ definiert, so erfüllt das System $F_1'', F_2'', \ldots, F_k''$, $g_1'', g_2'', \ldots, g_l''$ offenbar A. Also: Ist B erfüllbar, so ist es auch A. Aus diesen beiden Tatsachen folgt die Gleichwertigkeit der Ausdrücke A und B und außerdem, daß B γ-Ausdruck ist, w. z. b. w.[24])

Satz 16. *Zu jedem Zählausdruck A läßt sich ein gleichwertiger β-Ausdruck B angeben, der außer den ausgezeichneten Funktionsvariablen R_1, R_2 nur einstellige Funktionsvariablen enthält.*[25])

Sei A ein vorgegebener Zählausdruck, $F_1, F_2, \ldots, F_k$ seine mehrstelligen und $g_1, g_2, \ldots, g_l$ seine einstelligen Funktionsvariablen; F_i soll r_i-stellig sein. $f_1, f_2, \ldots, f_k$ seien k einstellige Funktionsvariablen, die voneinander und von $g_1, g_2, \ldots, g_l$ verschieden sind, ferner sei B der Zählausdruck, welcher aus A entsteht, indem man für die Funktionsvariable $F_i(x_1, x_2, \ldots, x_{r-1}, v_{r_i})$ den Ausdruck

$$(E v_\varrho)_1^{r_i-1}\left[f_i(v_1) \,\&\, \sum_{j=1}^{r_i-1} (R_1(v_j, v_{j+1}) \,\&\, R_2(v_j, x_j))\right]$$

einsetzt (für $i = 1, 2, \ldots, k$).

Der Zählausdruck B enthält außer den ausgezeichneten Funktionsvariablen R_1, R_2 nur noch einstellige Funktionsvariablen, nämlich $f_1, f_2, \ldots, f_k, g_1, g_2, \ldots, g_l$ und man zeigt leicht, indem man ähnlich wie beim Beweis von Satz 15 vorgeht, aber jetzt statt Satz 9 den Satz 10 berücksichtigt, daß A mit B gleichwertig

---

24) Zum Beweise des Satzes 15 könnte man für $F_i(x_1, x_2, \ldots, x_{r_i-1}, v_{r_i})$, statt den Ausdruck $(E v_\varrho)_1^{r_i-1}\left[f_i(v_1) \,\&\, \sum_{j=1}^{r_i-1} \Phi(v_j, v_{j+1}, x_j)\right]$, mit gleichem Erfolg auch $(v_\varrho)_1^{r_i-1}\left[\sum_{j=1}^{r_i-1} \Phi(v_j, v_{j+1}, x_j) \to f_i(v_1)\right]$ einsetzen. Nur müßte man sich dann mit der zweiten Darstellung in Satz 9 bedienen.

25) In Satz 16 ist schon der bekannte Löwenheimsche Reduktionssatz (Vgl. die in Fußnote 23) angeführte Arbeit, insb. § 4) enthalten, da ja B nur einstellige und (zwei) zweistellige ~~Funktionsvariablen~~ besitzt.

ist und B außerdem ein β-Ausdruck ist. Einen anderen Beweis erhält man, indem man auf Satz 15 unmittelbar Satz 14 anwendet.

Satz 17. *Zu jedem Zählausdruck A läßt sich ein gleichwertiger γ-Ausdruck B angeben, der außer der ausgezeichneten Funktionsvariable $\Phi(x, y, z)$ nur einstellige Funktionsvariablen enthält und außerdem ein Skolemsches Präfix besitzt:* $(x_1)(x_2)\dots(x_r)(Ey_1)(Ey_2)\dots(Ey_s)$.[26])

Wegen Satz 15 genügt es Satz 17, statt für beliebige Zählausdrücke A, für γ-Ausdrücke, in denen außer der ausgezeichneten Funktionsvariable Φ nur noch einstellige vorkommen, zu beweisen. Sei nun A ein solcher Zählausdruck. A können wir uns ohne Einschränkung der Allgemeinheit in der pränexen Normalform denken. Es kann auch vorausgesetzt werden, daß das Präfix von A mit einem Allzeichen beginnt und mit einem Seinszeichen endet[27]). Das Präfix von A hat dann einen Grad [28]) n. Zum Beweise von Satz 17 genügt es also nur noch zu zeigen:

Satz 18. *Zu jedem γ-Ausdruck n-ten Grades $(n > 1)$, welcher außer Φ nur einstellige Funktionsvariablen enthält, läßt sich ein gleichwertiger γ-Ausdruck $(n-1)$-ten Grades angeben, der außer Φ nur einstellige Funktionsvariablen enthält.*

Sei

$(x_\varrho)_1^{r_1}(Ex_\varrho)_{r_1+1}^{s_1}(x_\varrho)_{s_1+1}^{r_2}(Ex_\varrho)_{r_2+1}^{s_2}\dots(x_\varrho)_{s_{n-1}+1}^{r_n}(Ex_\varrho)_{r_n+1}^{s_n}\mathfrak{A}(x_1, x_2, \dots, x_{s_n})$ $(r_1 < s_1 < r_2 < s_2 < \dots < r_n < s_n)$ ein γ-Ausdruck n-ten Grades, der außer Φ nur noch die einstelligen Funktionsvariablen $f_1, f_2, \dots, f_k$ enthält. Auf diesen wende man das bekannte Skolemsche Ver-

[26]) Bekanntlich kann man jeden Zählausdruck auf eine Art Normalform bringen (pränexe Normalform), in der am Anfang ein System von unverneinten Quantoren (All- und Seinszeichen) steht; das voranstehende Quantorensystem nennen wir nach K. Gödel (Die Vollständigkeit der Axiome des logischen Funktionenkalküls, *Monatshefte für Math. und Phys.*, 37 (1930), S. 349—360) das Präfix des Zählausdrucks. Eine pränexe Normalform, in der die Allzeichen sämtlich den Seinszeichen vorangehen, nennen wir eine Skolemsche Normalform und das entsprechende Präfix nennen wir ein Skolemsches Präfix.

[27]) Vgl. darüber S. 352 der in Fußnote [26]) zitierten Arbeit von Gödel. Für $F(x)$ braucht man aber keine neue Funktionsvariable zu nehmen; es genügt eine schon in A vorkommende.

[28]) Der Begriff „Grad eines Präfixes" soll im selben Sinn verstanden werden wie in der in Fußnote [26]) zitierten Arbeit von Gödel (S. 352). Präfixe ersten Grades sind die Skolemschen Präfixe. Pränexe Normalformen, die ein Präfix n-ten Grades besitzen, sollen Ausdrücke bzw. Normalformen n-ten Grades heißen.

fahren[29]) an, nur mit der Modifikation, daß man statt der dabei üblicherweise verwendeten s_1-stelligen Funktionsvariablen $F(x_1, x_2, \ldots, x_{s_1-1}, v_{s_1})$ den Ausdruck

$$(Ev_\varrho)_1^{s_1-1}\left[f_{k+1}(v_1) \,\&\, \sum_{j=1}^{s_1-1} \Phi(v_j, v_{j+1}, x_j)\right]$$

setzen soll[30]), wobei f_{k+1} eine von $f_1, f_2, \ldots, f_k$ verschiedene Funktionsvariable ist. Der erhaltene Zählausdruck enthält dann, außer Φ, nur die einstelligen Funktionsvariablen $f_1, f_2, \ldots, f_k, f_{k+1}$, läßt sich auf die pränexe Normalform $(n-1)$-ten Grades bringen und ist außerdem ein mit dem vorgegebenen Ausdruck gleichwertiger γ-Ausdruck. Das letztere ergibt sich folgendermaßen: Ist der vorgegebene Zählausdruck erfüllbar, so hat er, als γ-Ausdruck, eine ausgezeichnete Erfüllung, etwa $f_1', f_2', \ldots, f_k', \Phi'$ über $\mathfrak{J}'$. Wir setzen

$$f_{k+1}'(v_1) \equiv (Ey_\varrho)_1^{s_1-1}(Ev_\varrho)_2^{s_1}(x_\varrho)_{s_1+1}^{r_2}(Ex_\varrho)_{r_2+1}^{s_2}\ldots(x_\varrho)_{s_{n-1}+1}^{r_n}(Ex_\varrho)_{r_n+1}^{s_n}\Bigg[\mathfrak{A}'(y_1, y_2, \ldots, y_{s_1-1}, v_{s_1}, x_{s_1+1}, \ldots, x_{s_n}) \,\&\, \sum_{i=1}^{s_1-1} \Phi'(v_i, v_{i+1}, y_i)\Bigg],$$

wobei $\mathfrak{A}'$ den durch Einsetzung der f_i', Φ' an Stelle der f_i, Φ aus $\mathfrak{A}$ entstehenden Ausdruck bedeutet. Man zeigt leicht, indem man Satz 9 berücksichtigt, daß $f_1', f_2', \ldots, f_k', f_{k+1}', \Phi'$ eine ausgezeichnete Erfüllung des erhaltenen Zählausdrucks ist. Ist umgekehrt der erhaltene Zählausdruck erfüllbar und $f_1'', f_2'', \ldots, f_k'', f_{k+1}'', \Phi''$ irgendein Erfüllungssystem, so zeigt man leicht, indem man ähnlich wie beim unmodifizierten Skolemschen Verfahren argumentiert, daß $f_1'', f_2'', \ldots, f_k'', \Phi''$ den ursprünglichen (vorgegebenen) Zählausdruck erfüllt. Damit ist aber Satz 18 und daher auch Satz 17 bewiesen.

Satz 19. *Zu jedem Zählausdruck läßt sich ein gleichwertiger β-Ausdruck angeben, der außer den ausgezeichneten Funktionsvariablen R_1, R_2 nur einstellige Funktionsvariablen enthält und außerdem das Skolemsche Präfix besitzt.*

Der Satz 19 wird ähnlich wie Satz 17 bewiesen. Nur soll jetzt,

---

[29]) Vgl. die in Fußnote [23]) zitierte Arbeit von SKOLEM, insb. S. 4—6. Vgl. auch die in Fußnote [26]) zitierte Arbeit von GÖDEL, insb. S. 353.

[30]) Diese an das Skolemsche Verfahren angebrachte Modifikation erlaubt uns den Grad n auf $n-1$ mit Hilfe *einer einzigen einstelligen* Funktionsvariable, statt mit einer s_1-stelligen, herabzusetzen. Eine andere Modifikation hat GÖDEL an das Skolemsche Verfahren angebracht um, statt einer s_1-stelligen, mit s_1 zweistelligen Funktionsvariablen auszukommen; vgl. Fußnote [13]).

statt $(Ev_\varrho)_1^{s_1-1}\left[f_{k+1}(v_1) \,\&\, \sum_{j=1}^{s_1-1} \Phi(v_j, v_{j+1}, x_j)\right]$, beim Skolemschen Verfahren der Ausdruck $(Ev_\varrho)_1^{s_1-1}\left[f_{k+1}(v_1) \,\&\, \sum_{j=1}^{s_1-1} (R_1(v_j, v_{j+1}) \,\&\, R_2(v_j, x_j))\right]$ verwendet werden und statt Satz 9 soll jetzt Satz 10 berücksichtigt werden. Einen anderen Beweis erhält man, indem man auf Satz 17 unmittelbar Satz 14 anwendet.

Die Sätze 15, 16, 17 und 19 können selbstverständlich auch als Reduktionssätze des Entscheidungsproblems aufgefaßt werden. Satz 17, als Reduktionssatz aufgefaßt, besagt, daß man sich beim Erfüllbarkeitsproblem, ohne Beeinträchtigung der Allgemeinheit, auf solche Zählausdrücke beschränken kann, die die Skolemsche Normalform haben, γ-Ausdrücke sind und, außer der dreistelligen ausgezeichneten Funktionsvariable Φ, nur einstellige Funktionsvariablen enthalten. Satz 19 besagt, daß man sich beim Erfüllbarkeitsproblem auf solche Zählausdrücke beschränken kann, die die Skolemsche Normalform haben, β-Ausdrücke sind und, außer den ausgezeichneten Funktionsvariablen R_1, R_2, nur einstellige Funktionsvariablen enthalten.

Diese Reduktionssätze lassen sich in verschiedenen Richtungen verschärfen. Eine Verschärfung besteht darin, daß wir die Anzahl der einstelligen Funktionsvariablen, die in diesen Reduktionssätzen unbestimmt ist, näher bestimmen. Dies gelingt, indem wir ein Resultat von J. HERBRAND[31]) berücksichtigen. Dieses Resultat besagt, daß man sich beim Erfüllbarkeitsproblem, ohne Beeinträchtigung der Allgemeinheit, auf solche Zählausdrücke beschränken kann, die eine einzige, und zwar dreistellige Funktionsvariable enthalten. Sei A ein solcher Zählausdruck und $\Psi(x, y, z)$ die einzige vorkommende Funktionsvariable. Wir setzen in A für $\Psi(x, y, z)$ den Ausdruck $(Ev_1)(Ev_2)[f(v_1) \,\&\, \Phi(v_1, v_2, x) \,\&\, \Phi(v_2, z, y)]$ ein, wobei f eine beliebige einstellige und Φ die ausgezeichnete dreistellige Funktionsvariable ist. Der so aus A entstehende Zählausdruck B enthält dann außer Φ nur die einzige einstellige Funktionsvariable f und ist ein mit A gleichwertiger γ-Ausdruck. Dies letztere wird genau so wie Satz 15 bewiesen. Wir haben damit den

[31]) J. HERBRAND, Sur le problème fondamental de la logique mathématique, *Sprawozdania z posiedzeń Towarzystwa Naukowego Warszawskiego, Wydział III*, **24** (1931), S. 12—56, insb. S. 39—41.

Satz 20. *Beim Erfüllbarkeitsproblem darf man sich auf solche Zählausdrücke beschränken, die γ-Ausdrücke sind und außer der ausgezeichneten Funktionsvariable Φ nur eine einstellige Funktionsvariable enthalten.*

Aus Satz 20 und Satz 14 folgt sofort

Satz 21. *Beim Erfüllbarkeitsproblem darf man sich auf solche Zählausdrücke beschränken, die β-Ausdrücke sind und außer den ausgezeichneten Funktionsvariablen R_1, R_2 nur eine einzige einstellige Funktionsvariable enthalten.*

Wir wollen jetzt zeigen:

Satz 22. *Beim Erfüllbarkeitsproblem darf man sich auf solche Zählausdrücke beschränken, die γ-Ausdrücke sind, das Skolemsche Präfix $(x_1)(x_2)\ldots(x_r)(Ey_1)(Ey_2)\ldots(Ey_s)$ besitzen und außer der ausgezeichneten Funktionsvariable Φ nur noch drei einstellige Funktionsvariablen enthalten.*

Zu diesem Zweck zeigen wir zunächst:

Satz 23. *Zu jedem Zählausdruck läßt sich ein gleichwertiger γ-Ausdruck angeben, der ein Präfix dritten Grades besitzt und außer der ausgezeichneten Funktionsvariable Φ nur noch eine einstellige Funktionsvariable enthält.*

Sei A ein beliebiger Zählausdruck. Nach einem von GÖDEL[32]) herrührenden Satz läßt sich zunächst zu A ein gleichwertiger Zählausdruck mit nur zweistelligen Funktionsvariablen und mit Skolemschen Präfix angeben.[33]) Es sei

$$(x_\varrho)_1^p (Ex_\varrho)_{p+1}^q \mathfrak{A}(x_1, x_2, \ldots, x_q) \quad (p<q)$$

dieser Zählausdruck und $F_1(x, y), F_2(x, y), \ldots, F_n(x, y)$ seine Funktionsvariablen. Es sei $\Psi(x, y, z)$ eine dreistellige Funktionsvariable und $y_1, y_2, \ldots, y_n$ seien n gebundene Variablen, die voneinander und von den $x_1, x_2, \ldots, x_q$ verschieden sind. Es bezeichne $\mathfrak{B}(x_1, x_2, \ldots, x_q; y_1, y_2, \ldots, y_n)$ den Ausdruck, der durch Einsetzung der $\Psi(x_k, x_l, y_i)$ an Stelle der $F_i(x_k, x_l)$ (für $k, l = 1, 2, \ldots, q$ und $i = 1, 2, \ldots, n$) aus $\mathfrak{A}(x_1, x_2, \ldots, x_q)$ entsteht. Der Zählausdruck

$$(Ey_\varrho)_1^n (x_\varrho)_1^p (Ex_\varrho)_{p+1}^q \left[\sum_{i=1}^{p} \Psi(x_i, x_i, x_i) \rightarrow \left(\sum_{i=p+1}^{q} \Psi(x_i, x_i, x_i) \,\& \right.\right.$$
$$\left.\left. \& \, \mathfrak{B}(x_1, x_2, \ldots, x_q; y_1, y_2, \ldots, y_n) \right) \right] \& (Ex)\, \Psi(x, x, x)$$

32) Vgl. die in Fußnote 13) zitierte Arbeit, insb. S. 441.

33) Man könnte an dieser Stelle Satz 19 anwenden; es genügt aber der schwächere Gödelsche.

ist dann, wie man leicht beweisen kann,[34]) ein mit

$$(x_\varrho)_1^p (Ex_\varrho)_{p+1}^q \mathfrak{A}(x_1, x_2, \ldots, x_q),$$

also auch mit A gleichwertiger Zählausdruck, enthält nur die Funktionsvariable Ψ und läßt sich auf eine pränexe Normalform zweiten Grades bringen. Wird in diesem Zählausdruck für $\Psi(x,y,z)$ der Ausdruck $(Ev_1)(Ev_2)\,[f_1(v_1) \,\&\, \Phi(v_1, v_2, x) \,\&\, \Phi(v_2, z, y)]$ eingesetzt, so entsteht ein mit A gleichwertiger Zählausdruck B, der ein γ-Ausdruck ist, außer Φ nur noch eine (einstellige) Funktionsvariable f_1 enthält und der sich außerdem auf eine pränexe Normalform dritten Grades bringen läßt. Dies letztere sieht man leicht ein, indem man den Kern[35]) des vorletzten Zählausdrucks (mit der einzigen Funktionsvariable Ψ) auf die konjunktive oder disjunktive Normalform bringt. Damit ist aber Satz 23 bewiesen. Aus Satz 23 folgt aber auch sofort Satz 22. Ist nämlich A ein beliebig vorgegebener Zählausdruck, so finden wir, wegen Satz 23, zunächst einen gleichwertigen γ-Ausdruck dritten Grades B mit einer einzigen (nämlich einstelligen) Funktionsvariable außer Φ. Um nun einen mit B, also auch mit A, gleichwertigen Zählausdruck ersten Grades, mit drei einstelligen Funktionsvariablen und der dreistelligen ausgezeichneten Φ, zu erhalten, genügt es auf B zweimal das Skolemsche Verfahren anzuwenden, nur aber in der modifizierten Form, wie wir es beim Beweis des Satzes 18 verwendet haben.

Satz 24. *Beim Erfüllbarkeitsproblem darf man sich auf solche Zählausdrücke beschränken, die β-Ausdrücke sind, das Skolemsche Präfix besitzen und außer den zwei zweistelligen Funktionsvariablen R_1, R_2 nur noch drei einstellige Funktionsvariablen enthalten.*

Dieser Satz folgt sofort aus den Sätzen 22 und 14.

Satz 25. *Beim Erfüllbarkeitsproblem darf man sich auf solche Zählausdrücke beschränken, die β-Ausdrücke sind, das Gödelsche[36])*

---

[34]) Vgl. darüber L. Kalmár, Zum Entscheidungsproblem der mathematischen Logik, *Verhandlungen des Internationalen Mathematiker-Kongresses Zürich*, 1932, Bd. II, S. 337—338.

[35]) So nennt man nach L. Kalmár den von Quantoren freien Bestandteil einer pränexen Normalform. [Über die Erfüllbarkeit derjenigen Zählausdrücke, welche in der Normalform zwei benachbarte Allzeichen enthalten, *Math. Annalen*, **108** (1933), S. 466—484.]

[36]) Gödel hat gezeigt, daß man sich beim Erfüllbarkeitsproblem auf Zählausdrücke mit einem Präfix der Form $(x_1)(x_2)(x_3)(Ey_1)(Ey_2)\ldots(Ey_s)$ beschränken darf (Vgl. die in Fußnote [13]) zitierte Arbeit).

Präfix $(x_1)(x_2)(x_3)(Ey_1)(Ey_2)\ldots(Ey_s)$ *besitzen und nur 6 Funktionsvariablen enthalten, nämlich drei einstellige und drei zweistellige.*

Sei A ein beliebiger Zählausdruck. Wegen Satz 24 finden wir zu demselben einen gleichwertigen Zählausdruck B, der ein β-Ausdruck ist, ein Skolemsches Präfix besitzt und außer den ausgezeichneten Funktionsvariablen R_1, R_2 nur noch drei, nämlich einstellige, Funktionsvariablen enthält. Zum Beweise des Satzes 25 genügt es nur noch zu zeigen, daß zu B ein gleichwertiger β-Ausdruck D konstruiert werden kann, der ein Gödelsches Präfix besitzt und nur sechs Funktionsvariablen enthält, nämlich drei einstellige und drei zweistellige.

Sei $(x_\varrho)_1^r (Ey_\varrho)_1^s \mathfrak{A}(x_1, x_2, \ldots, x_r; y_1, y_2, \ldots, y_s)$ der β-Ausdruck B; seine Funktionsvariablen (außer R_1, R_2) seien f_1, f_2, f_3. Wir bezeichnen mit C die Konjunktion der folgenden drei Formeln:

$$(C_1)\qquad (v_1)(Ev_\varrho)_2^r(Ew_\varrho)_2^r(Ey_\varrho)_1^s\Big[\sum_{i=1}^{r-1}(R_1(v_i, v_{i+1})\mathbin{\&} R_2(v_i, w_{i+1}))\mathbin{\&}$$
$$\mathbin{\&}\mathfrak{A}(v_r, w_2, w_3, \ldots, w_r; y_1, y_2, \ldots, y_s)\Big],$$

$$(C_2)\qquad (x)(y)(Ez)[R_1(z,x)\mathbin{\&} R_2(z,y)],$$

$$(C_3)\quad (x)(y)(z)[(R_1(x,y)\mathbin{\&}R_1(x,z)\to y=z)\mathbin{\&}(R_2(x,y)\mathbin{\&}R_2(x,z)\to y=z)].$$

Der Ausdruck C enthält dann dieselben Funktionsvariablen f_1, f_2, f_3, R_1, R_2 und außerdem aber noch das Identitätszeichen. Wir zeigen jetzt, daß B mit C gleichwertig ist.

Ist der Zählausdruck B erfüllbar, so hat er, als β-Ausdruck, sogar eine ausgezeichnete Erfüllung, etwa $f_1', f_2', f_3', R_1', R_2'$ über $\mathfrak{J}'$. Dieses Erfüllungssystem bildet dann auch eine ausgezeichnete Erfüllung von C. Sei nämlich v_1 ein beliebig aus $\mathfrak{J}'$ vorgegebenes Element. Wir bestimmen zunächst weitere $2.(r-1)$ Elemente v_i, w_i $(i=2, 3, \ldots, r)$ rekursiv in $\mathfrak{J}'$, indem wir für $i=1, 2, \ldots, r-1$ das dem Elemente v_i in der durch die Relation $R_1'(z,x)\mathbin{\&}R_2'(z,y)$ geleisteten Abbildung zugeordnete Elementepaar mit $[v_{i+1}, w_{i+1}]$ bezeichnen, wodurch $\sum_{i=1}^{r-1}(R_1'(v_i, v_{i+1})\mathbin{\&} R_2'(v_i, w_{i+1}))$ richtig wird. Wegen der vorausgesetzten Erfüllbarkeit des Zählausdrucks B durch das System $f_1', f_2', f_3', R_1', R_2'$ können wir weiter zu den Elementen $v_r, w_2, w_3, \ldots, w_r$ s Elemente $y_1, y_2, \ldots, y_s$ in $\mathfrak{J}'$ finden, so daß $\mathfrak{A}'(v_r, w_2, w_3, \ldots, w_r; y_1, y_2, \ldots, y_s)$ besteht[37]); hiermit ist aber C_1 als eine durch das System $f_1', f_2', f_3', R_1', R_2'$ erfüllbare Formel nachgewiesen[38]) und da ja C_2, C_3 bei dieser Erfüllung offenbar richtig sind, so gilt dasselbe auch für C.

Es sei nun umgekehrt $f_1'', f_2'', f_3'', R_1'', R_2''$ ein den Ausdruck C in einem Individuenbereich $\mathfrak{J}''$ erfüllendes System und $x_1, x_2, \ldots, x_r$ irgendwelche r Elemente aus $\mathfrak{J}''$; wir bestimmen zunächst weitere r Elemente $t_1, t_2, \ldots, t_r$ aus $\mathfrak{J}''$ rekursiv folgendermaßen:

Wir setzen

$$t_1 = x_1 \tag{15}$$

und unter den gemäß C_2 existierenden Elementen greifen wir für jedes Paar $t_i, x_{(r+1)-i}$ $(i = 1, 2, \ldots, r-1)$ ein Element heraus und bezeichnen es mit t_{i+1}.

Dadurch sind die Elemente $t_1, t_2, \ldots, t_r$ in $\mathfrak{J}''$ definiert und es gilt

$$R_1''(t_{i+1}, t_i) \mathbin{\&} R_2''(t_{i+1}, x_{(r+1)-i}) \tag{16}$$

für $i = 1, 2, \ldots, r-1$. Setzt man hier $r-i$ für i ein, so ergibt sich

$$R_1''(t_{(r+1)-i}, t_{r-i}), \tag{17·1}$$

$$R_2''(t_{(r+1)-i}, x_{i+1}) \tag{17·2}$$

für $i = 1, 2, \ldots, r-1$. Wegen C_1 gibt es weiter für

$$v_1 = t_r \tag{18}$$

Elemente v_i, w_i $(i = 2, 3, \ldots, r)$ und y_i $(i = 1, 2, \ldots, s)$ in $\mathfrak{J}''$, so daß

$$R_1''(v_i, v_{i+1}), \tag{19·1}$$

$$R_2''(v_i, w_{i+1}) \tag{19·2}$$

für $i = 1, 2, \ldots, r-1$ und

$$\mathfrak{A}''(v_r, w_2, w_3, \ldots, w_r; y_1, y_2, \ldots, y_s) \tag{20}$$

bestehen.

Zwischen den v_i und den früher definierten t_i besteht aber die Beziehung

$$v_i = t_{(r+1)-i} \tag{21}$$

für $i = 1, 2, \ldots, r$. Für $i = 1$ besteht sie wegen (18). Angenommen, es sei $v_i = t_{(r+1)-i}$ bei einem $i \leqq r-1$, dann gilt wegen (17·1)

---

37) $\mathfrak{A}'$ bedeute den durch Einsetzung von $f_1', f_2', f_3', R_1', R_2'$ bzw. an Stelle von f_1, f_2, f_3, R_1, R_2 aus $\mathfrak{A}$ entstehenden Ausdruck. Analog unten $\mathfrak{A}''$.

38) Die Tatsache, daß die ausgezeichnete Erfüllung von B auch den Ausdruck C_1 erfüllt, kann auch leicht aus Satz 13 entnommen werden.

$R_1''(v_i, t_{r-i})$, was zusammen mit (19·1) gemäß C_3 $v_{i+1} = t_{r-i} = t_{(r+1)-(i+1)}$ ergibt. Hiermit ist aber (21) durch Induktion bewiesen.

Tragen wir (21) in (17·2) ein, so erhalten wir $R_2''(v_i, x_{i+1})$ für $i = 1, 2, \ldots, r-1$ und dies in Verbindung mit (19·2) ergibt wegen C_3

(22) $$w_{i+1} = x_{i+1}$$

für $i = 1, 2, \ldots, r-1$. Setzen wir weiter in (21) $i = r$, so erhalten wir $v_r = t_1$, was zusammen mit (15)

$$v_r = x_1$$

ergibt. Dieses und (22) in (20) eingetragen liefern $\mathfrak{A}''(x_1, x_2, \ldots, x_r; y_1, y_2, \ldots, y_s)$, womit (da ja $x_1, x_2, \ldots, x_r$ beliebige Elemente aus $\mathfrak{J}''$ waren) B als in $\mathfrak{J}''$ erfüllbare Formel nachgewiesen ist.

Die Ausdrücke B und C sind also gleichwertig und C läßt sich auf eine Skolemsche Normalform mit nur 3 Allzeichen bringen, die aber noch das $=$-Zeichen enthält. Eliminiert man dieses nach dem Kalmár—Gödelschen Verfahren[39]) und führt statt dessen die Funktionsvariable R_3 ein, so erhält man einen mit C, also auch mit A, gleichwertigen Zählausdruck D, welcher nur die sechs Funktionsvariablen $f_1, f_2, f_3, R_1, R_2, R_3$ enthält und sich auf eine Normalform mit einem Gödelschen Präfix bringen läßt,[40]) w. z. b. w.

Satz 26. *Beim Erfüllbarkeitsproblem darf man sich auf solche Zählausdrücke beschränken, die ein Präfix der Form* $(x_1)(x_2)(Ey_1)(Ey_2)\ldots(Ey_n)(x_3)$ *besitzen und nur 6 Funktionsvariablen enthalten, nämlich drei einstellige und drei zweistellige.*

Satz 27. *Beim Erfüllbarkeitsproblem darf man sich auf solche Zählausdrücke beschränken, die ein Präfix der Form* $(x_1)(Ey_1)(Ey_2)\ldots(Ey_{n-1})(x_2)(x_3)(Ey_n)$ *haben und nur 6 Funktionsvariablen enthalten, nämlich drei einstellige und drei zweistellige.*

Die Beweise der Sätze 26 und 27 ergeben sich leicht aus dem Beweise des Satzes 25. Es ist nur zu beachten, daß die Konjunktionsformel $C_1 \& C_2 \& C_3$ sich auch auf eine pränexe Normalform mit einem Präfix der Gestalt $(x_1)(x_2)(Ey_1)(Ey_2)\ldots(Ey_n)(x_3)$ bzw. der Gestalt $(x_1)(Ey_1)(Ey_2)\ldots(Ey_{n-1})(x_2)(x_3)(Ey_n)$ bringen

---

[39]) Vgl. L. Kalmár, Eine Bemerkung zur Entscheidungstheorie, *diese Acta*, 4 (1929), S. 248—252; vgl. auch die in Fußnote [26]) zitierte Arbeit von Gödel, insb. S. 356—357.

[40]) Aus dem Beweis ist ersichtlich, daß D sogar ein β-Ausdruck ist.

läßt[41]) und daß das Kalmár—Gödelsche Verfahren diese Präfixe beizubehalten erlaubt.

Satz 28. *Beim Erfüllbarkeitsproblem darf man sich auf Zählausdrücke beschränken, die γ-Ausdrücke sind, die pränexe Normalform mit nur drei Seinszeichen besitzen und außer der ausgezeichneten Funktionsvariable Φ nur noch drei einstellige Funktionsvariablen enthalten.*

Zum Beweis genügt es, wegen Satz 22, zu zeigen, daß zu jedem γ-Ausdruck A mit Skolemschen Präfix und nur drei einstelligen Funktionsvariablen (außer der ausgezeichneten Φ) ein gleichwertiger γ-Ausdruck B angegeben werden kann, der genau dieselben Funktionsvariablen besitzt und im Präfix nur drei Seinszeichen enthält.

Sei nun A gleich $(x_\varrho)_1^r (Ey_\varrho)_1^s \mathfrak{A}(x_1, x_2, \ldots, x_r; y_1, y_2, \ldots, y_s)$. Die Funktionsvariablen aus A seien f_1, f_2, f_3, Φ. Sei B die Konjunktion der folgenden beiden Formeln B_1, B_2:

$$(B_1) \qquad (x_\varrho)_1^r (Ev_1)(v_\varrho)_2^s (w_\varrho)_1^{s-1} \left[\sum_{i=1}^{s-1} \Phi(v_i, v_{i+1}, w_i) \rightarrow \right. \\ \left. \rightarrow \mathfrak{A}(x_1, x_2, \ldots, x_r; w_1, w_2, \ldots, w_{s-1}, v_s) \right],$$

$$(B_2) \qquad (x)(Ey)(Ez)\, \Phi(x, y, z).$$

Ist A erfüllbar, so hat es, als γ-Ausdruck, sogar eine ausgezeichnete Erfüllung, etwa f_1', f_2', f_3', Φ' in $\mathfrak{J}'$. Dieses Erfüllungssystem bildet dann auch eine ausgezeichnete Erfüllung von B. In der Tat, — wie man leicht einsieht — besteht wegen Satz 12 für je r Elemente $x_1, x_2, \ldots, x_r$ aus $\mathfrak{J}'$ die Äquivalenz

$$(Ey_\varrho)_1^s \mathfrak{A}'(x_1, x_2, \ldots, x_r; y_1, y_2, \ldots, y_s) \sim \\ \sim (Ev_1)(v_\varrho)_2^s (w_\varrho)_1^{s-1} \left[\sum_{i=1}^{s-1} \Phi'(v_i, v_{i+1}, w_i) \rightarrow \right. \\ \left. \rightarrow \mathfrak{A}'(x_1, x_2, \ldots, x_r; w_1, w_2, \ldots, w_{s-1}, v_s) \right],$$

aus welcher sofort die Äquivalenz

$$(x_\varrho)_1^r (Ey_\varrho)_1^s \mathfrak{A}'(x_1, x_2, \ldots, x_r; y_1, y_2, \ldots, y_s) \sim \\ \sim (x_\varrho)_1^r (Ev_1)(v_\varrho)_2^s (w_\varrho)_1^{s-1} \left[\sum_{i=1}^{s-1} \Phi'(v_i, v_{i+1}, w_i) \rightarrow \right. \\ \left. \rightarrow \mathfrak{A}'(x_1, x_2, \ldots, x_r; w_1, w_2, \ldots, w_{s-1}, v_s) \right]$$

[41]) An dieser Stelle, wie auch am Ende des Beweises von Satz 25, ist die Äquivalenz $(x)[f(x) \,\&\, g(x)] \equiv [(x) f(x) \,\&\, (y) g(y)]$ zu berücksichtigen.

folgt. Da aber, gemäß der gemachten Voraussetzung

$$(x_\varrho)_1^r\,(Ey_\varrho)_1^s\,\mathfrak{A}'(x_1, x_2, \ldots, x_r;\, y_1, y_2, \ldots, y_s)$$

besteht ($\mathfrak{A}'$ bedeutet ja den aus $\mathfrak{A}$ durch Einsetzung von f_1', f_2', f_3', Φ' an Stelle von f_1, f_2, f_3, Φ entstehenden Ausdruck), so folgt aus der letzten Äquivalenz unmittelbar

$$(x_\varrho)_1^r\,(Ev_1)\,(v_\varrho)_2^s\,(w_\varrho)_1^{s-1}\left[\sum_{i=1}^{s-1}\Phi'(v_i, v_{i+1}, w_i) \rightarrow \mathfrak{A}'(x_1, x_2, \ldots, x_r;\, w_1, w_2, w_3, \ldots, w_{s-1}, v_s)\right].$$

f_1', f_2', f_3', Φ' erfüllt also den Ausdruck B_1, und da dasselbe offenbar auch für B_2 besteht, so erfüllt das obige System auch B und bildet dessen ausgezeichnete Erfüllung. Ist umgekehrt B erfüllbar, $f_1'', f_2'', f_3'', \Phi''$ ein Erfüllungssystem in $\mathfrak{J}''$, so erfüllt dieses System auch A. Denn aus

$$(x_\varrho)_1^r(Ev_1)\,(v_\varrho)_2^s\,(w_\varrho)_1^{s-1}\left[\sum_{i=1}^{s-1}\Phi''(v_i, v_{i+1}, w_i) \rightarrow \mathfrak{A}''(x_1, x_2, \ldots, x_r;\, w_1, w_2, \ldots, w_{s-1}\ v_s)\right]$$

folgt einerseits leicht

$$(v_1)\,(Ev_\varrho)_2^s\,(Ew_\varrho)_1^{s-1}\left[\sum_{i=1}^{s-1}\Phi''(v_i, v_{i+1}, w_i)\right] \rightarrow$$
$$\rightarrow (x_\varrho)_1^r(Ev_s)\,(Ew_\varrho)_1^{s-1}\,\mathfrak{A}''(x_1, x_2, \ldots, x_r;\, w_1, w_2, \ldots, w_{s-1}, v_s);$$

andererseits folgt aus $(x)\,(Ey)\,(Ez)\,\Phi''(x, y, z)$, wegen Satz 2, leicht $(v_1)\,(Ev_\varrho)_2^s\,(Ew_\varrho)_1^{s-1}\left[\sum_{i=1}^{s-1}\Phi''(v_i, v_{i+1}, w_i)\right]$. Daher besteht also die Formel $(x_\varrho)_1^r(Ev_s)\,(Ew_\varrho)_1^{s-1}\mathfrak{A}''(x_1, x_2, \ldots, x_r;\, w_1, w_2, \ldots, w_{s-1}, v_s)$, aus welcher, durch Unbenennung der Variablen,

$$(x_\varrho)_1^r(Ey_\varrho)_1^s\,\mathfrak{A}''(x_1, x_2, \ldots, x_r;\, y_1, y_2, \ldots, y_s)$$

gewonnen werden kann. B ist also ein mit A gleichwertiger γ-Ausdruck und läßt sich außerdem auf die pränexe Normalform, mit nur drei Seinszeichen im Präfix, bringen, w. z. b. w. Was die Gestalt des Präfixes von B anbetrifft, so ist sie übrigens im großen Maße willkürlich; sie kann z. B. $(x_\varrho)_1^r(Ev_1)\,(Ey)\,(Ez)\,(v_\varrho)_2^s(w_\varrho)_1^{s-1}$ oder $(x_\varrho)_1^r(Ev_1)\,(v_\varrho)_2^s(w_\varrho)_1^{s-1}\,(Ey)\,(Ez)$ — je nach Verlangen — lauten.

Satz 29. *Beim Erfüllbarkeitsproblem darf man sich auf Zählausdrücke beschränken, die β-Ausdrücke sind, ein Präfix der Form*

$(x_1)(x_2)\ldots(x_m)(Ey_1)(Ey_2)(Ey_3)(x_{m+1})(x_{m+2})\ldots(x_{m+n})$ *besitzen und außer* R_1, R_2 *nur noch drei einstellige Funktionsvariablen enthalten.*

Satz 30. *Beim Erfüllbarkeitsproblem darf man sich auf solche Zählausdrücke beschränken, die β-Ausdrücke sind, ein Präfix der Form* $(x_1)(x_2)\ldots(x_m)(Ey_1)(x_{m+1})(x_{m+2})\ldots(x_{m+n})(Ey_2)Ey_3)$ *besitzen und außer* R_1, R_2 *nur noch drei einstellige Funktionsvariablen enthalten.*

Die Sätze 29, 30 gewinnt man leicht aus den Sätzen 28 und 14, nebst obiger Bemerkung betreffend der Gestalt des Präfixes.

Satz 31. *Beim Erfüllbarkeitsproblem darf man sich auf Zählausdrücke beschränken, die außer fünf zweistelligen Funktionsvariablen nur noch einstellige enthalten und ein Präfix der Form* $(Ex_1)(Ex_2)(Ex_3)(Ex_4)(y_1)(y_2)(Ex_5)(y_3)(y_4)\ldots(y_n)$ *besitzen*

L. Kalmár hat bewiesen[42], daß man sich beim Erfüllbarkeitsproblem auf binäre[43] Zählausdrücke mit einem Präfix der Gestalt $(Ex_1)(Ex_2)\ldots(Ex_{m-1})(y_1)(y_2)(Ex_m)(y_3)(y_4)\ldots(y_n)$ beschränken darf. Nun sind wir imstande, indem wir sein Verfahren überhaupt nicht ändern, sondern es statt auf allgemeine, nur auf spezielle Zählausdrücke von der in Satz 30 genannten Gestalt anwenden, zu zeigen, daß der Spezialfall $m=5$ und nur 5 zweistellige Funktionsvariablen, statt einer unbestimmten Anzahl, bereits mit dem allgemeinen Entscheidungsproblem äquivalent ist. Es genügt nur zu bemerken, daß falls $\mathfrak{A}$ (a. a. O. [42]), S. 231) nur drei Seinszeichen enthält ($n_k=3$) und die Anzahl der in $\mathfrak{A}$ figurierenden zweistelligen Funktionsvariablen gleich zwei ist (was wegen unseres Satzes 30 ausreicht), dann besitzt der mit $\mathfrak{A}$ gleichwertige Zählausdruck $\mathfrak{B}$ (a. a. O. [42]), S. 234) nur 5 Seinszeichen und enthält außer einstelligen Funktionsvariablen nur 5 zweistellige Funktionsvariablen.

Satz 32. *Beim Erfüllbarkeitsproblem darf man sich auf solche Zählausdrücke beschränken, die β-Ausdrücke sind, ein Präfix der Form* $(x_1)(x_2)\ldots(x_r)(Ey_1)(Ey_2)(Ey_3)$[44]) *besitzen und außer* R_1, R_2

[42]) L. Kalmár, Ein Beitrag zum Entscheidungsproblem, *diese Acta,* **5** (1932), S. 222—236. Vgl. auch die Fußnote [5]) der Arbeit: L. Kalmár, Über einen Löwenheimschen Satz, *diese Acta,* **7** (1934), S. 112—121.

[43]) D. h. die nur Funktionsvariablen von höchstens zwei Argumenten enthalten.

[44]) Dieses Präfix kann in gewissem Sinne als Gegenteil des Gödelschen betrachtet werden.

nur noch eine mehrstellige und drei einstellige Funktionsvariablen enthalten.

Sei A ein beliebiger Zählausdruck. Wegen Satz 30 läßt sich zu A ein gleichwertiger β-Ausdruck B angeben, der ein Präfix der Form $(x_1)(x_2)\ldots(x_m)(Ey_1)(x_{m+1})(x_{m+2})\ldots(x_{m+n})(Ey_2)(Ey_3)$ besitzt und außer R_1, R_2 nur noch drei einstellige Funktionsvariablen, etwa f_1, f_2, f_3, enthält. Das Präfix von B ist von zweitem Grade. Wenden wir nun auf B das Skolemsche Verfahren an (in unmodifizierter Form), so erhalten wir einen mit B, also auch mit A, gleichwertigen Zählausdruck C, welcher außer f_1, f_2, f_3, R_1, R_2 nur noch eine, nämlich eine $(m+1)$-stellige Funktionsvariable enthält und welcher ein Präfix der Form $(x_1)(x_2)\ldots(x_r)(Ey_1)(Ey_2)(Ey_3)$ besitzt. C ist übrigens — wie man leicht einsieht — sogar ein β-Ausdruck. Damit ist Satz 32 bewiesen.

S a t z 33. *Beim Erfüllbarkeitsproblem darf man sich auf solche Zählausdrücke beschränken, die γ-Ausdrücke sind, ein Präfix der Form $(x_1)(x_2)\ldots(x_r)(Ey_1)(Ey_2)(Ey_3)$ besitzen und außer Φ nur noch eine mehrstellige und drei einstellige Funktionsvariablen enthalten.*

Satz 33 ergibt sich aus Satz 28 (nebst Bemerkung zu Ende des Beweises) genau so, wie Satz 32 aus 30.

S a t z 34. *Beim Erfüllbarkeitsproblem darf man sich auf Zählausdrücke beschränken, die β-Ausdrücke sind, ein Präfix der Form $(x_1)(x_2)(x_3)(Ey_1)(Ey_2)(Ey_3)(x_4)(x_5)\ldots(x_n)$ besitzen und nur 6 Funktionsvariablen enthalten, nämlich drei einstellige und drei zweistellige.*

Zum Beweise des Satzes 34 genügt es, wegen Satz 25, zu zeigen, daß zu jedem β-Ausdruck A mit Gödelschem Präfix und nur drei einstelligen und drei zweistelligen Funktionsvariablen ein gleichwertiger β-Ausdruck B angegeben werden kann, der genau dieselben Funktionsvariablen enthält und ein Präfix der Form $(x_1)(x_2)(x_3)(Ey_1)(Ey_2)(Ey_3)(x_4)(x_5)\ldots(x_n)$ besitzt. Sei nun A gleich $(x_1)(x_2)(x_3)(Ey_\varrho)_1^s\,\mathfrak{A}(x_1, x_2, x_3; y_1, y_2, \ldots, y_s)$. Die Funktionsvariablen aus A seien $f_1, f_2, f_3, R_1, R_2, R_3$. Wir setzen B gleich der Konjunktion der folgenden zwei Formeln B_1, B_2

$$(B_1)\qquad (x_1)(x_2)(x_3)(Ev_1)(v_\varrho)_2^s(w_\varrho)_1^{s-1}\left[\sum_{i=1}^{s-1}(R_1(v_i, v_{i+1})\,\&\,R_2(v_i, w_i)) \rightarrow \rightarrow \mathfrak{A}(x_1, x_2, x_3; w_1, w_2, \ldots, w_{s-1}, v_s)\right],$$

$$(B_2)\qquad (x)(Ey)(Ez)(R_1(x, y)\,\&\,R_2(x, z)).$$

Die Zählausdrücke A und B sind dann gleichwertig; dies wird ganz analog wie bei Satz 28 bewiesen, nur soll jetzt statt der zweiten Äquivalenz aus Satz 12 die aus Satz 13 berücksichtigt werden. B läßt sich weiter auf pränexe Normalform mit einem Präfix $(x_1)(x_2)(x_3)(Ev_1)(Ey)(Ez)(v_\varrho)_2^s(w_\varrho)_1^{s-1}$ bringen, womit Satz 34 bewiesen ist. Da aber B sich auch auf pränexe Normalform mit einem Präfix $(x_1)(x_2)(x_3)(Ev_1)(v_\varrho)_2^s(w_\varrho)_1^{s-1}(Ey)(Ez)$ bringen läßt, so gilt auch folgender

Satz 35. *Beim Erfüllbarkeitsproblem darf man sich auf Zählausdrücke beschränken, die β-Ausdrücke sind, ein Präfix der Form $(x_1)(x_2)(x_3)(Ey_1)(x_4)(x_5)\ldots(x_n)(Ey_2)(Ey_3)$ besitzen und nur 6 Funktionsvariablen enthalten, nämlich drei einstellige und drei zweistellige.*

Wir beweisen jetzt den

Satz 36. *Beim Erfüllbarkeitsproblem darf man sich auf solche Zählausdrücke beschränken, die β-Ausdrücke sind, ein Präfix der Form $(x_1)(x_2)\ldots(x_r)(Ey_1)(Ey_2)(Ey_3)$ besitzen und nur 7 Funktionsvariablen enthalten, nämlich drei einstellige, drei zweistellige und eine vierstellige.*[45])

Sei A ein beliebiger Zählausdruck. Wegen Satz 35 läßt sich zu A ein gleichwertiger β-Ausdruck B angeben, der ein Präfix der Form $(x_1)(x_2)(x_3)(Ey_1)(x_4)(x_5)\ldots(x_n)(Ey_2)(Ey_3)$ besitzt und nur 6 Funktionsvariablen enthält, nämlich drei einstellige und drei zweistellige. Das Präfix von B ist von zweitem Grade. Wenden wir nun auf B das Skolemsche Verfahren an (in unmodifizierter Form), so erhalten wir einen mit B, also auch mit A, gleichwertigen Zählausdruck C, der außer den 6 Funktionsvariablen, die schon in B vorkommen, noch eine vierstellige Funktionsvariable enthält und sich auf die pränexe Normalform mit einem Präfix der Form $(x_1)(x_2)\ldots(x_r)(Ey_1)(Ey_2)(Ey_3)$ bringen läßt, w. z. b. w.

Satz 37. *Beim Erfüllbarkeitsproblem darf man sich auf solche Zählausdrücke beschränken, die binäre β-Ausdrücke sind, ein Präfix der Form $(x_1)(x_2)\ldots(x_r)(Ey_1)(Ey_2)(Ey_3)(Ey_4)$ besitzen und nur 3 einstellige und 7 zweistellige Funktionsvariablen enthalten.*

Dieser Satz ergibt sich, ähnlich wie Satz 36, aus Satz 35.

---

[45]) Satz 33 besagt, daß man sich beim Erfüllbarkeitsproblem auf Zählausdrücke der Form $(x_1)(x_2)\ldots(x_r)(Ey_1)(Ey_2)(Ey_3)$ beschränken darf, die, statt 7, nur 5 Funktionsvariablen enthalten. Satz 33 ist aber doch schwächer, weil dort die Anzahl der Leerstellen einer Funktionsvariablen unbestimmt ist.

Nur soll jetzt auf B, statt des unmodifizierten Skolemschen Verfahrens, das durch Gödel modifizierte Verfahren[46]) angewendet werden. Dadurch werden statt einer vierstelligen Funktionsvariable vier zweistellige Funktionsvariablen herangezogen; im Präfix erscheint aber jetzt noch ein Seinszeichen.

Satz 38. *Beim Erfüllbarkeitsproblem darf man sich auf solche β-Ausdrücke beschränken, die ein Präfix der Form* $(x_1)(Ey_1)(Ey_2)\ldots(Ey_{n-1})(x_2)(Ey_n)$ *(nur zwei Allzeichen!) besitzen und außer den ausgezeichneten Variablen R_1, R_2 und drei einstelligen Funktionsvariablen noch das $=$-Zeichen enthalten.*

Zum Beweise dieses Satzes genügt es, wegen Satz 24, nur zu zeigen, daß es zu jedem β-Ausdruck A mit Skolemschem Präfix und nur drei einstelligen Funktionsvariablen (außer R_1, R_2) ein gleichwertiger β-Ausdruck B angegeben werden kann, der ein Präfix der Gestalt $(x_1)(Ey_1)(Ey_2)\ldots(Ey_{n-1})(x_2)(Ey_n)$ besitzt und außer den Funktionsvariablen, die schon in A vorkommen, nur noch das $=$-Zeichen enthält.

Sei nun A gleich $(x_\varrho)_1^r(Ey_\varrho)_1^s\mathfrak{A}(x_1, x_2, \ldots, x_r; y_1, y_2, \ldots, y_s)$. Die Funktionsvariablen aus A seien f_1, f_2, f_3, R_1, R_2. Wir setzen B gleich der Konjunktion der folgenden beiden Formeln:[47])

$$(B_1)\quad \begin{aligned}&(v_1)(Ev_\varrho)_2^r(Ew_\varrho)_2^r(Ey_\varrho)_1^s(t)\Big[\sum_{i=1}^{r-1}\big((R_1(v_i, t)\to v_{i+1}=t)\ \&\\ &\quad \&\ (R_2(v_i, t)\to w_{i+1}=t)\big)\ \&\ \mathfrak{A}(v_r, w_2, w_3, \ldots, w_r; y_1, y_2, \ldots, y_s)\Big],\end{aligned}$$

$$(B_2)\quad (x)(y)(Ez)[R_1(z, x)\ \&\ R_2(z, y)].$$

Wir zeigen zunächst, daß A mit B gleichwertig ist.

Ist A erfüllbar, so hat er, als β-Ausdruck, sogar eine ausgezeichnete Erfüllung, etwa $f_1', f_2', f_3', R_1', R_2'$ über $\mathfrak{J}'$. Dieses Erfüllungssystem bildet dann auch eine ausgezeichnete Erfüllung von B. Sei nämlich v_1 ein beliebig aus $\mathfrak{J}'$ vorgegebenes Element. Wir bestimmen zunächst weitere $2.(r-1)$ Elemente v_i, w_i $(i=2, 3, \ldots, r)$ rekursiv in $\mathfrak{J}'$, indem wir für $i=1, 2, \ldots, r-1$ das dem Elemente v_i bei der durch die Relation $R_1'(z, x)\ \&\ R_2'(z, y)$ geleisteten Abbildung zugeordnete Elementepaar mit $[v_{i+1}, w_{i+1}]$ bezeichnen, wo-

---

46) Vgl. die Fußnoten 13) und 30).

47) Die Formel B_1 hat nur für $r > 1$ einen Sinn; es genügt aber nur diesen Fall zu betrachten, da ja der Fall $r=1$ sich in trivialer Weise erledigt.

durch $\sum_{i=1}^{r-1}(R_1'(v_i, v_{i+1}) \& R_2'(v_i, w_{i+1}))$ und daher, wegen der Eindeutigkeit der Abildung, auch

$$(t)\sum_{i=1}^{r-1}((R_1'(v_i, t) \rightarrow v_{i+1} = t) \& (R_2'(v_i, t) \rightarrow w_{i+1} = t))$$

richtig wird. Wegen der vorausgesetzten Erfüllbarkeit des Zählausdrucks A durch das System $f_1', f_2', f_3', R_1', R_2'$ können wir aber zu den Elementen $v_r, w_2, w_3, \ldots, w_r$ s Elemente $y_1, y_2, \ldots, y_s$ in $\mathfrak{J}'$ finden, so daß $\mathfrak{A}'(v_r, w_2, w_3, \ldots, w_r; y_1, y_2, \ldots, y_s)$ besteht; hiermit ist aber B_1 als durch das System $f_1', f_2', f_3', R_1', R_2'$ erfüllbare Formel nachgewiesen und da ja B_2 bei dieser Erfüllung offenbar richtig ist, so gilt dasselbe auch für B.

Es sei nun umgekehrt $f_1'', f_2'', f_3'', R_1'', R_2''$ ein den Ausdruck B in einem Individuenbereich $\mathfrak{J}''$ erfüllendes System und $x_1, x_2, \ldots, x_r$ irgendwelche r Elemente aus $\mathfrak{J}''$; wir bestimmen zunächst weitere r Elemente $t_1, t_2, \ldots, t_r$ aus $\mathfrak{J}''$ rekursiv folgendermaßen:

Wir setzen

(23) $$t_1 = x_1$$

und unter den gemäß B_2 existierenden Elementen greifen wir für jedes Paar $t_i, x_{(r+1)-i}$ $(i = 1, 2, \ldots, r-1)$ ein Element heraus und bezeichnen es mit t_{i+1}.

Dadurch sind die Elemente $t_1, t_2, \ldots, t_r$ in $\mathfrak{J}''$ definiert und es gilt

(24) $$R_1''(t_{i+1}, t_i) \& R_2''(t_{i+1}, x_{(r+1)-i})$$

für $i = 1, 2, \ldots, r-1$. Setzt man hier $r-i$ für i ein, so ergibt sich

(25·1) $$R_1''(t_{(r+1)-i}, t_{r-i}),$$

(25·2) $$R_2''(t_{(r+1)-i}, x_{i+1})$$

für $i = 1, 2, \ldots, r-1$. Wegen B_1 gibt es weiter für

(26) $$v_1 = t_r$$

Elemente v_i, w_i $(i = 2, 3, \ldots, r)$ und y_i $(i = 1, 2, \ldots, s)$ in $\mathfrak{J}''$, so daß

(27·1) $$(t)(R_1''(v_i, t) \rightarrow v_{i+1} = t),$$

(27·2) $$(t)(R_2''(v_i, t) \rightarrow w_{i+1} = t)$$

für $i = 1, 2, \ldots, r-1$ und

(28) $$\mathfrak{A}''(v_r, w_2, w_3, \ldots, w_r; y_1, y_2, \ldots, y_s)$$

bestehen.

Zwischen den v_i und den früher definierten t_i besteht aber die Beziehung

(29) $$v_i = t_{(r+1)-i}$$

für $i = 1, 2, \ldots, r$. Für $i = 1$ besteht sie wegen (26). Angenommen, es sei $v_i = t_{(r+1)-i}$ bei einem $i \leqq r-1$, dann ist wegen (25·1) zunächst

(30) $$R_1''(v_i, t_{r-i}).$$

Aus (27·1) folgt aber $R_1''(v_i, t_{r-i}) \rightarrow v_{i+1} = t_{r-i}$, was zusammen mit (30) $v_{i+1} = t_{r-i} = t_{(r+1)-(i+1)}$ ergibt. Hiermit ist aber (29) durch Induktion bewiesen.

Tragen wir (29) in (25·2) ein, so erhalten wir

(31) $$R_2''(v_i, x_{i+1})$$

für $i = 1, 2, \ldots, r-1$.

Aus (27·2) folgt aber $R_2''(v_i, x_{i+1}) \rightarrow w_{i+1} = x_{i+1}$ für $i = 1, 2, \ldots, r-1$, was zusammen mit (31)

(32) $$w_{i+1} = x_{i+1}$$

für $i = 1, 2, \ldots, r-1$ ergibt.

Setzen wir weiter in (29) $i = r$, so erhalten wir $v_r = t_1$, was zusammen mit (23) $v_r = x_1$ ergibt.

Dieses und (32) in (28) eingetragen liefern $\mathfrak{A}''(x_1, x_2, \ldots, x_r; y_1, y_2, \ldots, y_s)$, womit (da ja $x_1, x_2, \ldots, x_r$ beliebige Elemente aus $\mathfrak{J}''$ waren) A als in $\mathfrak{J}''$ erfüllbare Formel nachgewiesen ist.

Die Ausdrücke A und B sind also gleichwertige β-Ausdrücke und B läßt sich, unter Berücksichtigung der Äquivalenz

$$(x)\,[F(x)\,\&\,G(x)] \sim [(x)\,F(x)\,\&\,(y)\,G(y)],$$

auf die pränexe Normalform mit einem Präfix $(v_1)\,(Ev_\varrho)_2^r\,(Ew_\varrho)_2^r\,(Ey_\varrho)_1^s\,(t)\,(Ez)$, also der gesuchten Gestalt, bringen, w. z. b. w.

Zum Schluß beweisen wir noch

S a t z 39. *Beim Erfüllbarkeitsproblem darf man sich auf solche Ausdrücke beschränken, die außer dem $=$-Zeichen nur zwei, nämlich zweistellige, Funktionsvariablen enthalten und ein Präfix der Form* $(Ey_1)\,(x_1)\,(Ey_2)\,(Ey_3) \ldots (Ey_{n-1})\,(x_2)\,(Ey_n)$ *besitzen.*

Zum Beweise genügt es, wegen Satz 38, zu zeigen, daß zu jedem Ausdruck A mit einem Präfix der Gestalt $(x_1)\,(Ey_1)\,(Ey_2) \ldots (Ey_{n-1})\,(x_2)\,(Ey_n)$, der außer dem $=$-Zeichen nur 5 Funktionsvariablen, nämlich zwei zweistellige und drei einstellige, enthält, ein gleichwertiger Ausdruck B angegeben werden kann, welcher außer dem $=$-Zeichen nur zwei zweistellige Funktionsvariablen enthält und ein Präfix der Form $(Ey_1)(x_1)(Ey_2)(Ey_3)\ldots(Ey_{n-1})(x_2)(Ey_n)$ besitzt.

Sei nun A gleich $(x_1)(Ex_\varrho)_2^{m-2}(x_{m-1})(Ex_m)\mathfrak{A}(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ und f_1, f_2, f_3, R_1, R_2 seien dessen Funktionsvariablen. Sei ferner y eine von $x_1, x_2, \ldots, x_m$ verschiedene gebundene Variable und $\mathfrak{B}(x_1, x_2, \ldots, x_m; y)$ der Ausdruck, welcher aus $\mathfrak{A}(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ hervorgeht indem man (für $i=1, 2, \ldots, m$) $R_1(y, x_i)$ statt $f_1(x_i)$, $R_1(x_i, y)$ statt $f_2(x_i)$ und $R_2(y, x_i)$ statt $f_3(x_i)$ setzt. Der Ausdruck $\mathfrak{B}(x_1, x_2, \ldots, x_m; y)$ enthält dann, außer dem $=$-Zeichen, nur zwei Funktionsvariablen, nämlich R_1, R_2. Wir bezeichnen mit B folgenden Ausdruck:

$$(Ey)(x_1)(Ex_\varrho)_2^{m-2}(x_{m-1})(Ex_m)\Big\{\Big(\overline{x_1 = y} \rightarrow \Big[\sum_{i=2}^{m-2}\overline{x_i = y}\ \& \\ \& \big(\overline{x_{m-1} = y} \rightarrow (\overline{x_m = y}\ \&\ \mathfrak{B}(x_1, x_2, \ldots, x_m; y))\big)\Big]\Big)\ \&\ (Ez)(\overline{z = y})\Big\}.$$

Die Ausdrücke A und B sind dann gleichwertig. Ist nämlich A erfüllbar und $f_1', f_2', f_3', R_1', R_2'$ ein Erfüllungssystem über $\mathfrak{J}'$, a irgendein von allen Elementen aus $\mathfrak{J}'$ verschiedener Gegenstand und werden die Funktionen $R_1'(x, y)$, $R_2'(x, y)$ auf den durch das Element a vermehrten Bereich $\mathfrak{J}' + \{a\}$ durch die Festsetzungen $R_1'(a, x) \sim f_1'(x)$, $R_1'(x, a) \sim f_2'(x)$, $R_2'(a, x) \sim f_3'(x)$ für $x \in \mathfrak{J}'$ erweitert ($R_1'(a, a)$, $R_2'(a, a)$, sowie $R_2'(x, a)$ für $x \in \mathfrak{J}'$ können beliebig definiert werden), so erfüllen die so erweiterten Funktionen R_1', R_2' offenbar den Ausdruck B in $\mathfrak{J}' + \{a\}$. Falls umgekehrt R_1'', R_2'' den Ausdruck B in einem Individuenbereich $\mathfrak{J}''$ erfüllen, dann gibt es ein Element b in $\mathfrak{J}''$, so daß

$$(x_1)(Ex_\varrho)_2^{m-2}(x_{m-1})(Ex_m)\Big\{\Big(\overline{x_1 = b} \rightarrow \Big[\sum_{i=2}^{m-2}\overline{x_i = b}\ \& \\ \& \big(\overline{x_{m-1} = b} \rightarrow (\overline{x_m = b}\ \&\ \mathfrak{B}''(x_1, x_2, \ldots, x_m; b))\big)\Big]\Big)\ \&\ (Ez)(\overline{z = b})\Big\}$$

besteht.

Werden die Funktionen $f_1''(x), f_2''(x), f_3''(x)$ durch die Festsetzungen $f_1''(x) \sim R_1''(b, x)$, $f_2''(x) \sim R_1''(x, b)$, $f_3''(x) \sim R_2''(b, x)$ definiert, so erfüllen die, auf den Bereich $\mathfrak{J}'' - \{b\}$ beschränkten, Funktionen $f_1'', f_2'', f_3'', R_1'', R_2''$ offensichtlich den Ausdruck A ($\mathfrak{J}'' - \{b\}$ ist nicht leer, weil ja $(Ez)(\overline{z = b})$ in $\mathfrak{J}''$ besteht).

Die Ausdrücke A und B sind also gleichwertig und da B sich — wie man leicht einsieht — auf die pränexe Normalform mit einem Präfix $(Ey)(x_1)(Ez)(Ex_0)_2^{m-2}(x_{m-1})(Ex_m)$ (also der verlangten Form) bringen läßt, so ist damit Satz 39 bewiesen.

Zusatz bei der Korrektur (28. April 1936).

Es ist mir inzwischen gelungen, die in vorliegender Arbeit angegebenen Reduktionssätze des mengentheoretischen Entscheidungsproblems zu verschärfen und einige völlig neuen aufzustellen. Auch einige in I enthaltenen Sätze, wie 8, 9 und 10, haben sich verschärfen lassen. Die Verschärfungen der Sätze aus I stehen übrigens mit den der Sätze aus II in gewisser Beziehung, da die zweiten eben auf den ersten und auf einem völlig neuen Satz beruhen. Nach diesen Verschärfungen kann man ausnahmslos in allen Sätzen vom 22 bis 39 die Anzahl der einstelligen Funktionsvariablen (dort wo sie überhaupt bestimmt ist) um zwei vermindern. So zeigt z. B. die Verschärfung des Satzes 25, daß das Erfüllbarkeitsproblem für β-Ausdrücke mit Gödelschem Präfix und (außer R_1, R_2 und dem $=$-Zeichen, oder außer R_3 statt des $=$-Zeichens) mit einer einstelligen Funktionsvariable bereits dem allgemeinen Entscheidungsproblem äquivalent ist. Diese Resultate beabsichtige ich in einer demnächst erscheinenden Fortsetzung zu beweisen. Die in der Einleitung angekündigte Übertragung in den beweistheoretischen Kalkül wird später in einer besonderen Arbeit geschehen.

(Eingegangen am 23. März 1935.)