Sur une fonction non mesurable, partout presque symétrique.

Par WACŁAW SIERPIŃSKI à Varsovie.

Nous dirons que la fonction $f(x)$ d'une variable réelle est *presque symétrique* au point a, si l'on a

$$f(a+x)=f(a-x)$$

pour tous les x réels, sauf peut-être pour un ensemble de nombres x de puissance $<2^{\aleph_0}$.

Le but de cette Note est de démontrer (à l'aide du „Wohlordungssatz" de M. ZERMELO) ce

Théorème: *Il existe une fonction $f(x)$ d'une variable réelle non mesurable et partout presque symétrique.*[1])

Je démontrerai ce théorème en modifiant la démonstration de mon théorème de la p. 27 du t. 19 des *Fundamenta Mathematicae,* dans laquelle j'ai appliqué une méthode due à M. BANACH[2]).

Soit φ le plus petit nombre ordinal de puissance du continu et soit

$$(1) \qquad x_1, x_2, x_3, \ldots, x_\omega, x_{\omega+1}, \ldots, x_\xi, \ldots \qquad (\xi<\varphi)$$

une suite transfinie du type φ formée de tous les nombres réels.

La famille de tous les ensembles linéaires parfaits étant de puissance du continu, il existe une suite transfinie du type φ,

$$(2) \qquad P_1, P_2, P_3, \ldots, P_\omega, P_{\omega+1}, \ldots, P_\xi, \ldots \qquad (\xi<\varphi)$$

formée de tous les ensembles linéaires parfaits.

---

[1]) Cf. le problème de M. HAUSDORFF, *Fundamenta Math.,* 25 (1935), p. 578 (Problème 62).

[2]) St. BANACH, Sur les transformations biunivoques, *Fundamenta Math.,* 19 (1932), p. 10—16, esp. p. 13.

Nous définirons maintenant par l'induction transfinie deux suites du type φ, $\{p_\alpha\}$ et $\{q_\alpha\}$ comme il suit.

Soit p_1 le premier terme de la suite (1) qui appartient à P_1 et soit q_1 le premier terme de la suite (1) qui appartient à P_1 et tel que $q_1 \neq p_1$.

Soit maintenant α un nombre ordinal donné >1 et $<\varphi$ et supposons que nous avons déjà défini tous les nombres p_ξ et q_ξ, où $\xi<\alpha$.

Désignons par S_α l'ensemble de tous les nombres de la forme

$$2x_{\xi_1}-2x_{\xi_2}+2x_{\xi_3}-\ldots+(-1)^{n-1}2x_{\xi_n}+(-1)^n q_\xi,$$

où $\xi, \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ est une suite finie quelconque de nombres ordinaux $<\alpha$. L'ensemble S_α est évidemment de puissance $\leqq \overline{\alpha}+\overline{\alpha}^2+\overline{\alpha}^3+\ldots$, donc, d'après $\alpha<\varphi$ (ce qui donne $\overline{\alpha}<2^{\aleph_0}$) de puissance $<2^{\aleph_0}$. L'ensemble P_α, en tant que parfait, étant de puissance $2^{\aleph_0}$, l'ensemble $P_\alpha - S_\alpha$ est donc non vide. Nous définirons p_α comme le premier terme de la suite (1) qui appartient à $P_\alpha - S_\alpha$.

Or, désignons par T_α l'ensemble de tous les nombres de la torme

$$2x_{\xi_1}-2x_{\xi_2}+2x_{\xi_3}-\ldots+(-1)^{n-1}2x_{\xi_n}+(-1)^n p_\xi,$$

où $\xi \leqq \alpha$ et où $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ est une suite finie quelconque de nombres ordinaux $<\alpha$. D'après $\alpha<\varphi$ on voit sans peine que $\overline{\overline{T}}_\alpha<2^{\aleph_0}$, d'où il résulte que $P_\alpha - T_\alpha \neq 0$. Nous définirons q_α comme le premier terme de la suite (1) qui appartient à $P_\alpha - T_\alpha$.

Les suites transfinies $\{p_\alpha\}_{\alpha<\varphi}$ et $\{q_\alpha\}_{\alpha<\varphi}$ sont ainsi définies par l'induction transfinie.

Désignons maintenant par N l'ensemble de tous les nombres

$$2x_{\xi_1}-2x_{\xi_2}+2x_{\xi_3}-\ldots+(-1)^{n-1}2x_{\xi_n}+(-1)^n p_\alpha,$$

où α est un nombre ordinal $<\varphi$ et où $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ est une suite finie quelconque de nombres ordinaux $<\alpha$.

Désignons par Q l'ensemble de tous les points q_α où $\alpha<\varphi$. Je dis que

$$NQ=0. \tag{3}$$

En effet, supposons que $p \in NQ$. Il résulte de $p \in N$ et de la définition de l'ensemble N qu'il existe un nombre ordinal $\alpha<\varphi$ et une suite finie de nombres ordinaux $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$, tous $< \alpha$, tels que

(4) $p = 2x_{\xi_1} - 2x_{\xi_2} + 2x_{\xi_3} - \ldots + (-1)^{n-1} 2x_{\xi_n} + (-1)^n p_\alpha.$

Or, de $p \in Q$ et de la définition de l'ensemble Q il s'ensuit qu'il existe un nombre ordinal $\beta < \varphi$, tel que

(5) $$p = q_\beta.$$

Il résulte de la définition du nombre q_β que q_β non $\in T_\beta$. Or, si $\alpha \leqq \beta$ on a, d'après la définition de l'ensemble T_β et d'aprés (4): $p \in T_\beta$. Donc, si $\alpha \leqq \beta$, on a $p \neq q_\beta$, contrairement à (5).

Or, d'après la définition de p_α on a p_α non $\in S_\alpha$, et, si $\alpha > \beta$, on a, d'après la définition de l'ensemble S_α (les nombres ordinaux $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ étant $< \alpha$):

$$2x_{\xi_n} - 2x_{\xi_{n-1}} + 2x_{\xi_{n-2}} - \ldots + (-1)^{n-1} 2x_{\xi_1} + (-1)^n q_\beta \in S_\alpha.$$

Donc, si $\alpha > \beta$, on a

$$p_\alpha \neq 2x_{\xi_n} - 2x_{\xi_{n-1}} + 2x_{\xi_{n-2}} - \ldots + (-1)^{n-1} 2x_{\xi_1} + (-1)^n q_\beta,$$

contrairement à (4) et (5).

L'hypothèse que $p \in NQ$ implique donc toujours une contradiction. On a donc la formule (3).

On a $2x_1 - 2x_1 + (-1)^2 p_\alpha = p_\alpha$: il résulte donc de la définition de l'ensemble N que $p_\alpha \in N$ pour $\alpha < \varphi$. D'après $p_\alpha \in P_\alpha$ et $q_\alpha \in P_\alpha$ pour $\alpha < \varphi$, on a donc $P_\alpha N \neq 0$ et $P_\alpha Q \neq 0$ pour $\alpha < \varphi$. Chacun des ensembles N et Q a donc au moins un point commun avec tout ensemble (linéaire) parfait. Les ensembles N et Q étant, d'après (3), disjoints, il en résulte qu'ils sont de puissance du continu, non mesurables L et de deuxième catégorie dans tout intervalle.

Soit maintenant a un nombre réel donné quelconque. D'après la propriété de la suite (1) on a donc $a = x_\lambda$, où λ est un nombre ordinal $< \varphi$.

Désignons par $N^*(a)$ l'ensemble symétrique de l'ensemble N par rapport au point a comme centre de symétrie. $N^*(a)$ est donc l'ensemble de tous les nombres $2a - x$, où $x \in N$.

Soit p un point de l'ensemble $N^*(a) - N$. D'après $p \in N^*(a)$ et d'après la définition de l'ensemble N, on a (vu que $a = x_\lambda$):

(6) $p = 2x_\lambda - 2x_{\xi_1} + 2x_{\xi_2} - \ldots + (-1)^n 2x_{\xi_n} + (-1)^{n+1} p_\alpha,$

où α est un nombre ordinal $< \varphi$ et où $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ est une suite finie de nombres ordinaux $< \alpha$.

S'il est $\lambda < \alpha$, le point (6) appartient évidemment à l'ensemble N (d'après la définition de N). D'après $p \in N^*(a) - N$ on a donc $\lambda \geqq \alpha$.

Donc, si $p \in N^*(a) - N$, p est de la forme (6), où α est un nombre ordinal $\leqq \lambda$ et où $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ est une suite finie de nombres ordinaux $< \alpha$.

L'ensemble de tous tels nombres p est (pour tout λ donné $< \varphi$) évidemment de puissance $\leqq \aleph_0 + \overline{\lambda}$, donc, d'après $\lambda < \varphi$, de puissance $< 2^{\aleph_0}$.

L'ensemble $R = N^*(a) - N$ est donc de puissance $< 2^{\aleph_0}$. Or, on a évidemment $N - N^*(a) = R^*(a)$: cet ensemble est donc aussi de puissance $< 2^{\aleph_0}$.

Les ensembles N et $N^*(a)$ ne diffèrent donc que par un ensemble de puissance $< 2^{\aleph_0}$. Nous avons ainsi démontré la proposition suivante:

Il existe un ensemble linéaire N non mesurable L qui est symétrique par rapport à tout point a comme centre de symétrie, quand on néglige un ensemble de puissance $< 2^{\aleph_0}$ (dépendant de a).

La fonction caractéristique de l'ensemble N satisfait évidemment aux conditions de notre théorème[3]) qui est ainsi démontré.

Nous dirons qu'une fonction $f(x)$ est au point a *approximativement symétrique au sens large,* resp. *au sens restreint,* si le point a est un point de densité extérieure 1[4]), resp. intérieure 1 de l'ensemble de tous les nombres x réels, pour lesquels $f(a+x) = f(a-x)$.

Nous dirons que la fonction $f(x)$ a au point a la *dérivée symétrique approximative au sens large,* resp. *au sens restreint* égale à A, si, pour tout $\varepsilon > 0$, le point a est un point de densité extérieure 1, resp. intérieure 1 de l'ensemble de tous les nombres réels $h \neq 0$, pour lesquels

$$\left| \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} - A \right| < \varepsilon.$$

Vu que tout ensemble linéaire de puissance $< 2^{\aleph_0}$ est de mesure

---

[3]) Cette fonction est, d'ailleurs, parfaitement discontinue (c'est-à-dire discontinue sur tout ensemble parfait).

[4]) Pour la définition de cette notion voir p. e. mes notes: Sur une généralisation de la notion de la continuité approximative, *Fundamenta Math.*, 4 (1923), p. 124—127 et Démonstration élémentaire du théorème sur la densité des ensembles, *ibidem*, p. 167—171.

intérieure nulle, il résulte tout de suite de notre théorème les deux corollaires suivants:

C o r o l l a i r e 1: *Il existe une fonction non mesurable $f(x)$ qui est partout approximativement symétrique au sens large.*

C o r o l l a i r e 2: *Il existe une fonction non mesurable $f(x)$ qui a partout la dérivée symétrique approximative au sens large égale à* 0.

M. S. RUZIEWICZ m'a communiqué récemment une démonstration directe et fort simple de ces deux corollaires qui utilise la *base hamelienne.*

Soit B une *base* de M. HAMEL[5]. Soit $b \neq 0$ un élément donné de B et désignons par Q l'ensemble de tous les nombres réels dans les développements desquels (à l'aide des éléments de la base B) ne figure pas l'élément b. On voit sans peine que si r et r' sont deux nombres rationnels distincts, et si l'on désigne par $Q(a)$ la translation de Q de longueur a, on a toujours $Q(br)\,Q(br') = 0$. Les ensembles $Q\left(\frac{b}{n}\right) (n = 1, 2, 3, \ldots)$ sont donc deux à deux disjoints.

Or, comme on voit sans peine, pour prouver qu'un ensemble linéaire E (borné ou non) est de mesure intérieure nulle, il suffit de démontrer qu'il existe une suite infinie *bornée* de nombres réels $u_1, u_2, u_3, \ldots$ telle que les ensembles $E(u_1), E(u_2), E(u_3), \ldots$ sont deux à deux disjoints. L'ensemble Q est donc de mesure intérieure nulle. Or, il ne peut pas être de mesure nulle, puisque la somme $\sum_r Q(br)$ étendue à tous les nombres rationnels r est évidemment l'ensemble de tous les nombres réels. L'ensemble Q est donc non mesurable.[6] Soit $f(x)$ la fonction caractéristique de l'ensemble Q: c'est donc une fonction non mesurable. Je dis qu'elle satisfait aux condition du Corollaire 1 (donc aussi du Corollaire 2).

En effet, soit a un nombre réel donné quelconque. Soit r_0 le coefficient (rationnel) de b dans le développement du nombre a (à l'aide des éléments de la base B). Comme plus haut pour Q,

[5]) Voir G. HAMEL, Eine Basis aller Zahlen und die unstetigen Lösungen der Funktionalgleichung $f(x+y) = f(x) + f(y)$, *Math. Annalen,* **60** (1905), p. 459—462; cf. ma note Sur la question de la mesurabilité de la base de M. Hamel, *Fundamenta Math.*, 1 (1920), p. 105—111.

[6]) Cf. ma note citée [5]), p. 108.

nous démontrons sans peine que l'ensemble $R = Q(r_0 b) + Q(-r_0 b)$ est de mesure intérieure nulle.

Soit maintenant x un nombre réel n'appartenant pas à R, et soit r le coefficient (rationnel) de b dans le développement du nombre x. On a donc $r \neq r_0$ et $r \neq -r_0$, donc $r_0 + r \neq 0$ et $r_0 - r \neq 0$. Or, $r_0 + r$, resp. $r_0 - r$, est le coefficient de b dans le développement du nombre $a + x$, resp. $a - x$. On a donc (d'après la définition de Q) $a + x$ non $\in Q$ et $a - x$ non $\in Q$, ce qui donne $f(a+x) = 0$ et $f(a-x) = 0$, donc $f(a+x) = f(a-x)$.

On a donc

$$f(a+x) = f(a-x) \quad \text{pour} \quad x \in CR;$$

l'ensemble R étant de mesure intérieure nulle, la fonction $f(x)$ satisfait aux conditions du Corollaire 1, c. q. f. d.

Il résulte tout de suite de notre théorème encore ces deux corollaires:

Corollaire 3: *Si* $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, *il existe une fonction non mesurable* $f(x)$ *qui est partout symétrique quand on néglige des ensembles dénombrables* (c'est-à-dire pour tout a réel l'ensemble de tous les nombres réels x, tels que $f(a+x) \neq f(a-x)$ est au plus dénombrable).

Corollaire 4: *Si* $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, *il existe une fonction non mesurable* $f(x)$ *qui a partout la dérivée symétrique approximative au sens restreint égale à* 0.

Quant à cette dernière proposition, il est à remarquer qu'une proposition analogue n'a pas lieu pour la dérivée approximative (au sens restreint) ordinaire, puisqu'elle contredirait à un théorème de STEPANOFF—KAMKE[7]). Or, on ne peut pas supprimer dans l'énoncé du Corollaire 4 les mots „approximative au sens restreint", puisque, d'après un théorème de M. CHARZYŃSKI, l'ensemble de points de discontinuité d'une fonction $f(x)$ dont la dérivée symétrique est partout nulle est clairsemé.[8])

(Reçu le 25 novembre 1935)

---

[7]) Voir: E. KAMKE, Zur Definition der approximativ stetigen Funktionen, *Fundamenta Math.*, **10** (1927), p. 431—433 (esp. Satz 1) et W. STEPANOFF, Sur une propriété caractéristique des fonctions mesurables, *Recueil Math. Moscou*, 31 (1924), p. 497—489.

[8]) Z. CHARZYŃSKI, Sur les fonctions dont la dérivée symétrique est partout fini, *Fundamenta Math.*, 21 (1933), p. 214—225.