

## Ein Satz über Zähl ausdrücke.

Von TH. SKOLEM in Bergen (Norwegen).

In einer Abhandlung „Zum Entscheidungsproblem des logischen Funktionenkalküls“<sup>1)</sup> hat K. GÖDEL u. a. den Satz bewiesen, daß zu jedem Zähl ausdruck  $Z$  ein anderer  $Z'$  gefunden werden kann, der zugleich mit  $Z$  erfüllbar oder widerspruchsvoll ist und außerdem die Form

$$(x_1, x_2, x_3) (Ey_1, \dots, y_n) K(x_1, x_2, x_3, y_1, \dots, y_n)$$

hat mit lauter ein- und zweistelligen Prädikaten in  $K$ .<sup>2)</sup> Nach mündlicher Mitteilung hatte auch L. KALMÁR in Szeged einen Beweis dieses Satzes gefunden, der aber nicht so einfach war wie der Gödelsche. Wenn ich unten einen weiteren Beweis dieses Satzes veröffentliche, so tue ich das, weil dieser Beweis mir noch wesentlich einfacher erscheint, und zwar aus folgenden Gründen: Erstens bekomme ich mit einem Schlage den neuen Ausdruck  $Z'$  und nicht erst durch allmähliche Verminderung der Zahl der Allzeichen wie GÖDEL. Zweitens ist die Anwendung des Satzes von LÖWENHEIM zur Bildung gleichwertiger Ausdrücke mit lauter zweistelligen Prädikaten für meinen Beweis nicht nötig. Der Satz, den ich beweisen will, lautet so:

*Zu jedem Zähl ausdruck  $Z$  kann ein anderer  $Z'$  gefunden werden, der in bezug auf Erfüllbarkeit mit  $Z$  gleichwertig ist und als eine dreigliedrige Konjunktion  $Z_1 \& Z_2 \& Z_3$  geschrieben werden kann, wobei  $Z_1, Z_2$  und  $Z_3$  bzw. die Form*

$$(\xi_1) (E\xi_2, \dots, \xi_h) K_1(\xi_1, \dots, \xi_h), (\xi_1, \xi_2) (E\xi_3, \dots, \xi_k) K_2(\xi_1, \dots, \xi_k), \\ (\xi_1, \xi_2, \xi_3) K_3(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$$

*haben, und ausschließlich ein- und zweistellige Prädikate in den*

<sup>1)</sup> Monatshefte für Math. und Phys., 40 (1933), S. 433—443.

<sup>2)</sup> Statt  $(x_1)(x_2)\dots(x_m)$  schreibe ich kürzer  $(x_1, x_2, \dots, x_m)$  und ebenso statt  $(Ey_1)(Ey_2)\dots(Ey_n)$  immer  $(Ey_1, y_2, \dots, y_n)$ .

Kernen  $K_1, K_2, K_3$  vorkommen. Übrigens kann der Ausdruck  $Z_2$  auch geschrieben werden als eine Konjunktion mit  $k$  Gliedern, deren Präfixe alle die Form  $(\xi_1, \xi_2)(E\eta)$  besitzen.

Beweis. Natürlich kann ich annehmen, daß der gegebene Ausdruck  $Z$  schon die Form  $(x_1, \dots, x_m)(Ey_1, \dots, y_n)K(x_1, \dots, y_n)$  hat; denn wie ich einmal früher bewiesen habe, gibt es zu jedem willkürlich gegebenen Zähl Ausdruck einen gleichwertigen von dieser Gestalt.<sup>3)</sup> Ich kann auch annehmen, daß im Kern  $K$  höchstens  $m$ -stellige Prädikate vorkommen.<sup>4)</sup> Sollten nämlich auch  $(m+1)$ -, ...,  $m+h = m'$ -stellige Prädikate in  $K$  vorkommen, so kann ich  $Z$  auch in der Form

$(x_1, \dots, x_m, x_{m+1}, \dots, x_{m'}) (Ey_1, \dots, y_n) K(x_1, \dots, x_{m'}, y_1, \dots, y_n)$  schreiben, wobei  $K$  hier speziell von  $x_{m+1}, \dots, x_{m'}$  unabhängig ist; d. h. man hat einen Sonderfall der Aussage der Form

$$(x_1, \dots, x_{m'}) (Ey_1, \dots, y_n) K(x_1, \dots, x_{m'}, y_1, \dots, y_n)$$

mit höchstens  $m'$ -stelligen Prädikaten in  $K$ . Weiter wird es bequem sein, sich auf den Fall zu beschränken, daß in  $K$  ausschließlich  $m$ -stellige Prädikate auftreten, wenn  $m$  Allzeichen im Präfix vorkommen. Daß auch das möglich ist, erkennt man so: Kommt etwa in  $K$  ein  $r$ -stelliges Prädikat  $A(z_1, \dots, z_r)$  vor,  $r < m$ , wobei  $z_1, \dots, z_r$  also  $r$  verschiedene oder (teilweise) gleiche der Variablen  $x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n$  darstellen, so kann ich statt  $A(z_1, \dots, z_r)$  schreiben  $A(z_1, \dots, z_r, \dots, z_r)$  mit  $m$  Argumenten. Mittels solcher Umformungen erhält man einen Ausdruck  $Z$  der Form

$$(1) \quad (x_1, \dots, x_m) (Ex_{m+1}, \dots, x_{m+n}) K(x_1, \dots, x_{m+n}),$$

wobei in  $K$  jetzt ausschließlich  $m$ -stellige Prädikate vorkommen. Diese seien

$$A_1, A_2, \dots, A_l.$$

Nun sei  $\mathfrak{B}$  ein Individuenbereich, worin (1) erfüllt ist. Der Bereich aller geordneten  $m$ -tupel aus  $\mathfrak{B}$  heiße  $\mathfrak{B}^m$ . Dann gilt in  $\mathfrak{B}^m$  die Aussage

$$(2) \quad (\xi_1) (E\xi_2, \dots, \xi_M) (K(\xi_1, \dots, \xi_M) \& \mathfrak{F}_0(\xi_1, \dots, \xi_M)),$$

<sup>3)</sup> Logisch-kombinatorische Untersuchungen über die Erfüllbarkeit oder Beweisbarkeit mathematischer Sätze etc., *Videnskapsselskapets skrifter, I. Mat. Naturv. Klasse*, Oslo 1920, No. 4, insb. S. 4.

<sup>4)</sup> Wollte man den erwähnten Satz von LÖWENHEIM anwenden, so konnte man annehmen, daß höchstens zweistellige Prädikate in  $K$  vorkämen; allein das hat hier keinen Zweck. Im Gegenteil wird dieser Löwenheimsche Satz mittels der folgenden Überlegungen zugleich mit bewiesen.

wobei  $\xi_1$  ein beliebiges  $m$ -tupel  $x_1, \dots, x_m$  sein kann, und  $\xi_2, \dots, \xi_M$  die übrigen  $m$ -tupel sind, die als Argumentreihen der Prädikate  $A$  in  $K(x_1, \dots, x_{m+n})$  auftreten; weiter ist  $\mathfrak{F}_0$  die Konjunktion aller gültigen Aussagen der Form  $F_{ij}(\xi_a, \xi_b)$ , wobei  $F_{ij}(\xi_a, \xi_b)$  bedeutet, daß das  $i^{\text{te}}$  Glied des  $m$ -tupels  $\xi_a$  mit dem  $j^{\text{ten}}$  des  $m$ -tupels  $\xi_b$  übereinstimmt. In  $K(\xi_1, \dots, \xi_M)$  treten jetzt nur einstellige Prädikate auf. Zur Erläuterung gebe ich ein Beispiel. Der gegebene Ausdruck (1) sei

$$(1') \quad (x_1, x_2) (E x_3) ((A(x_1, x_2) \& \bar{A}(x_2, x_1)) \vee \vee A(x_1, x_3) \vee \bar{A}(x_2, x_3) \vee A(x_3, x_3)).$$

Dann wird (2) das Aussehen haben

$$(2') \quad (\xi_1) (E \xi_2, \xi_3, \xi_4, \xi_5) \{ [(A(\xi_1) \& \bar{A}(\xi_2)) \vee A(\xi_3) \vee \bar{A}(\xi_4) \vee A(\xi_5)] \& \\ \& F_{21}(\xi_1, \xi_2) \& F_{12}(\xi_1, \xi_2) \& F_{11}(\xi_1, \xi_3) \& F_{21}(\xi_1, \xi_4) \& \\ \& F_{21}(\xi_2, \xi_3) \& F_{11}(\xi_2, \xi_4) \& F_{22}(\xi_3, \xi_4) \& F_{21}(\xi_3, \xi_5) \& \\ \& F_{22}(\xi_3, \xi_5) \& F_{21}(\xi_4, \xi_5) \& F_{22}(\xi_4, \xi_5) \}.$$

Man kann aber in (2') einige der konjunktiven Glieder mit den Prädikaten  $F$  entfernen, wenn man, wie ich es im folgenden mache, zu (2') und allgemein zu (2) die Aussage hinzufügt, welche die Gesamtheit der  $m$ -tupel und die Funktionen  $F$  charakterisiert. Diese Aussage ist

$$(3) \quad (\eta_1, \eta_2) \mathfrak{F}_1(\eta_1, \eta_2) \& (\eta_1, \eta_2, \eta_3) \mathfrak{F}_2(\eta_1, \eta_2, \eta_3) \& \\ \& (\xi) (E \eta_1, \dots, \eta_m) \mathfrak{F}_3(\xi, \eta_1, \dots, \eta_m) \& \\ \& (\xi_1, \xi_2) (E \eta_1, \dots, \eta_m) \mathfrak{F}_4(\xi_1, \xi_2, \eta_1, \dots, \eta_m) \& (\eta_1, \eta_2) \mathfrak{F}_5(\eta_1, \eta_2),$$

wobei  $\mathfrak{F}_1$  die Konjunktion aller Aussagen  $F_{ij}(\eta_1, \eta_2) \sim F_{ji}(\eta_2, \eta_1)$  für  $i, j = 1, 2, \dots, m$  ist,  $\mathfrak{F}_2$  die Konjunktion aller Aussagen  $F_{ih}(\eta_1, \eta_2) \& F_{hj}(\eta_2, \eta_3) \rightarrow F_{ij}(\eta_1, \eta_3)$  für  $i, h, j = 1, 2, \dots, m$ ,  $\mathfrak{F}_3$  die Konjunktion der Aussagen  $F_{i1}(\xi, \eta_i)$ ,  $\mathfrak{F}_4$  die Konjunktion der Aussagen  $F_{i1}(\xi_1, \eta_i) \& \dots \& F_{i-1, i-1}(\xi_1, \eta_i) \& F_{1i}(\xi_2, \eta_i)$  für  $i = 1, 2, \dots, m$  und endlich  $\mathfrak{F}_5$  die Konjunktion der Aussagen  $F_{11}(\eta_1, \eta_2) \& \dots \& F_{mm}(\eta_1, \eta_2) \rightarrow (A_j(\eta_1) \sim A_j(\eta_2))$  für  $j = 1, 2, \dots, l$ . Aus der Wahrheit von (1) in  $\mathfrak{B}$  bei passender Wahl der Funktionen  $A$  folgt also die Wahrheit der Konjunktion von (2) und (3) in  $\mathfrak{B}^m$ , d. h. die Wahrheit von

$$(4) \quad (\xi_1) (E \xi_2, \dots, \xi_M) (K(\xi_1, \dots, \xi_M) \& \mathfrak{F}_0(\xi_1, \dots, \xi_M)) \& \\ \& (\eta_1, \eta_2) \mathfrak{F}_1(\eta_1, \eta_2) \& (\eta_1, \eta_2, \eta_3) \mathfrak{F}_2(\eta_1, \eta_2, \eta_3) \& \\ \& (\xi) (E \eta_1, \dots, \eta_m) \mathfrak{F}_3(\xi, \eta_1, \dots, \eta_m) \& \\ \& (\xi_1, \xi_2) (E \eta_1, \dots, \eta_m) \mathfrak{F}_4(\xi_1, \xi_2, \eta_1, \dots, \eta_m) \& (\eta_1, \eta_2) \mathfrak{F}_5(\eta_1, \eta_2).$$

Nun ist (4) wieder ein Zählausdruck, wenn die darin vorkommenden Prädikate  $A$  und  $F$  als variable Satzfunktionen betrachtet werden. Ich werde nun zeigen, daß wenn (4) in einem Bereiche  $\mathfrak{B}_1$  erfüllt ist bei passender Wahl der Funktionen  $A$  und  $F$ , auch (1) erfüllt ist in einem gewissen Bereiche  $\mathfrak{B}_2$ , der aus  $\mathfrak{B}_1$  in einer Weise abgeleitet ist, die ich näher erklären werde.

Um das zu zeigen, bemerke ich zuerst, daß aus (4), nämlich schon aus

$(\eta_1, \eta_2, \eta_3) \mathfrak{F}_2(\eta_1, \eta_2, \eta_3) \& (\xi_1, \xi_2) (E\eta_1, \dots, \eta_m) \mathfrak{F}_4(\xi_1, \xi_2, \eta_1, \dots, \eta_m)$   
für alle  $s \leq m$

(5)  $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_s) (E\eta) (F_{11}(\xi_1, \eta) \& F_{12}(\xi_2, \eta) \& \dots \& F_{1s}(\xi_s, \eta))$

folgt. Denn schon aus

$(\xi_1, \xi_2) (E\eta_1, \dots, \eta_m) \mathfrak{F}_4(\xi_1, \xi_2, \eta_1, \dots, \eta_m)$

folgt ja erstens  $(\xi_1, \xi_2) (E\eta) F_{11}(\xi_1, \eta)$ , woraus  $(\xi) (E\eta) F_{11}(\xi, \eta)$ , d. h. (5) gilt für  $s=1$ . Nun nehme ich an, daß (5) für ein gewisses  $s < m$  gilt. Es seien  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{s+1}$  beliebige Individuen in  $\mathfrak{B}_1$ . Nach der Annahme gibt es dann ein  $\eta$  derart, daß

(6)  $F_{11}(\xi_1, \eta) \& \dots \& F_{1s}(\xi_s, \eta)$

gilt. Aus

$(\xi_1, \xi_2) (E\eta_1, \dots, \eta_m) \mathfrak{F}_4(\xi_1, \xi_2, \eta_1, \dots, \eta_m)$

folgt aber, wenn man  $\eta$  statt  $\xi_1$  und  $\xi_{s+1}$  statt  $\xi_2$  einsetzt, daß es ein  $\zeta$  gibt, so daß

(7)  $F_{11}(\eta, \zeta) \& F_{22}(\eta, \zeta) \& \dots \& F_{ss}(\eta, \zeta) \& F_{1, s+1}(\xi_{s+1}, \zeta)$ .

Aus (6) und (7) folgt aber unter Berücksichtigung der Aussage  $(\eta_1, \eta_2, \eta_3) \mathfrak{F}_2(\eta_1, \eta_2, \eta_3)$  sofort

$F_{11}(\xi_1, \zeta) \& \dots \& F_{1s}(\xi_s, \zeta) \& F_{1, s+1}(\xi_{s+1}, \zeta)$ ,

wodurch die Richtigkeit von (5) für  $s+1$  erkannt ist. Also gilt (5) für alle  $s \geq 1$  und  $\leq m$  und also speziell für  $s=m$ , was im folgenden benutzt wird.

Wegen der Symmetrie und der Transitivität der Beziehung  $F_{rr}$  ( $r=1, 2, \dots, m$ ) kann man alle Individuen von  $\mathfrak{B}_1$  in bekannter Art in Klassen einteilen; ich nenne sie die  $r$ -Klassen. Die Menge der 1-Klassen soll  $\mathfrak{B}_2$  heißen. Auch die  $r$ -Klassen mit  $r > 1$  können durch die 1-Klassen dargestellt werden im folgenden Sinne: Zu einer  $r$ -Klasse, wozu  $\xi$  gehört, wird stets und nur dann die 1-Klasse,

wozu  $\eta$  gehört, zugeordnet, wenn  $F_{r_1}(\xi, \eta)$  wahr ist. Offenbar ist dies möglich, weil diese Zuordnung von der Wahl der Elemente  $\xi$  und  $\eta$  unabhängig ist. Dann besteht aber eine gegenseitige Zuordnung zwischen den Individuen von  $\mathfrak{B}_1$  einerseits und den geordneten  $m$ -tupeln der Individuen von  $\mathfrak{B}_2$  andererseits, die in folgender Weise erklärt werden kann.

Es sei  $(x_1, x_2, \dots, x_m)$  ein  $m$ -tupel von Elementen aus  $\mathfrak{B}_2$ . Dann ist  $x_r, r=1, 2, \dots, m$ , eine 1-Klasse von Elementen des Bereiches  $\mathfrak{B}_1$ ; es sei  $\xi_r$  ein Element dieser Klasse. Nach dem eben bewiesenen Hilfssatze gibt es dann ein Element  $\eta$  von  $\mathfrak{B}_1$  derart, daß  $F_{11}(\xi_1, \eta) \& \dots \& F_{1m}(\xi_m, \eta)$  stattfindet. Ich sage, daß  $\eta$  dem  $m$ -tupel  $(x_1, x_2, \dots, x_m)$  zugeordnet ist. Ist umgekehrt das Element  $\xi$  von  $\mathfrak{B}_1$  beliebig gegeben, so gibt es ein eindeutig bestimmtes  $m$ -tupel  $(x_1, \dots, x_m)$ , wozu  $\xi$  in diesem Sinne zugeordnet ist; denn zufolge

$$(\xi) (E\eta_1, \dots, \eta_m) (F_{11}(\xi, \eta_1) \& \dots \& F_{m1}(\xi, \eta_m))$$

gibt es 1-Klassen, nämlich die durch solche Elemente  $\eta_1, \dots, \eta_m$  gegebenen — sie können wieder  $x_1, \dots, x_m$  heißen —, so daß  $\xi$  zugeordnet  $(x_1, \dots, x_m)$  ist. Zu jedem  $\xi$  aus  $\mathfrak{B}_1$  ist in dieser Weise ein eindeutig bestimmtes  $m$ -tupel aus  $\mathfrak{B}_2$  zugeordnet. Umgekehrt können zu einem  $m$ -tupel wohl mehrere  $\xi$  gehören; allein diese stehen zu einander in der Beziehung  $F_{11} \& F_{22} \& \dots \& F_{mm}$ , woraus wegen der Gültigkeit von  $(\eta_1, \eta_2) \mathfrak{F}_s(\eta_1, \eta_2)$  offenbar folgt, daß wenn  $\Phi(\xi)$  irgendein Prädikat ist, das aus den  $A_j$  und den  $F_{ij}$  ableitbar ist,  $\Phi(\xi)$  denselben Wahrheitswert hat für alle diesen  $\xi$ . Sie können deshalb ohne Schaden identifiziert werden. Wird das gemacht, so hat man also eine eineindeutige Zuordnung zwischen den Individuen  $\xi$  von  $\mathfrak{B}_1$  und den  $m$ -tupeln der Individuen von  $\mathfrak{B}_2$ .

Übrigens kann man auch so sagen: Die Elemente von  $\mathfrak{B}_1$  können in Klassen eingeteilt werden, wobei zwei Elemente zu derselben bzw. zu verschiedenen Klassen gerechnet werden, je nachdem die Beziehung  $F_{11} \& F_{22} \& \dots \& F_{mm}$  zwischen beiden Elementen stattfindet oder nicht. Die Menge dieser Klassen heiße  $\mathfrak{B}'_1$ . Dann gilt (4) auch für  $\mathfrak{B}'_1$ , wenn man festsetzt, daß  $A_j(\xi')$ , wo  $\xi'$  ein beliebiges Element von  $\mathfrak{B}'_1$  ist, dann und nur dann gilt, wenn  $A_j(\xi)$  gilt in  $\mathfrak{B}_1$  für ein Individuum  $\xi$  der Klasse  $\xi'$ . Ebenso soll  $F_{ij}(\xi', \eta')$  dann und nur dann gelten, wenn  $F_{ij}(\xi, \eta)$  gilt in  $\mathfrak{B}_1$  für Individuen  $\xi$  und  $\eta$  der Klassen  $\xi'$  und  $\eta'$ . Dies ist ja alles

möglich, weil zufolge  $(\eta_1, \eta_2) \mathfrak{F}_0(\eta_1, \eta_2)$  der Wahrheitswert von  $A_j(\xi)$  derselbe ist für alle  $\xi$ , die zu derselben Klasse  $\xi'$  gehören, und ebenso ist der Wahrheitswert von  $F_{ij}(\xi, \eta)$  derselbe für alle  $\xi, \eta$  aus den Klassen  $\xi', \eta'$ . Zwischen den Individuen von  $\mathfrak{B}_1$  und den  $m$ -tupeln der Individuen von  $\mathfrak{B}_2$  hat man dann eine gegenseitig eindeutige Zuordnung.

Aus dem angenommenen Erfülltsein von (4) in  $\mathfrak{B}_1$  folgt nun u. a. die Wahrheit von

$$(8) \quad (\xi_1) (E\xi_2, \dots, \xi_M) (K(\xi_1, \dots, \xi_M) \& \mathfrak{F}_0(\xi_1, \dots, \xi_M))$$

in  $\mathfrak{B}_1$  — und also, wenn man will, in  $\mathfrak{B}'_1$  —, und daraus ist es jetzt leicht durch eine Übersetzung die Gültigkeit von (1) in  $\mathfrak{B}_2$  abzuleiten. Sind nämlich  $x_1, \dots, x_m$  beliebige Individuen in  $\mathfrak{B}_2$ , so kann man  $\xi_1$  als das Element von  $\mathfrak{B}_1$  — oder wenn man will  $\mathfrak{B}'_1$  — wählen, das dem  $m$ -tupel  $(x_1, \dots, x_m)$  entspricht. Nach (8) gibt es dann weitere Elemente  $\xi_2, \dots, \xi_M$  von  $\mathfrak{B}_1$ , für welche sowohl  $\mathfrak{F}_0(\xi_1, \dots, \xi_M)$  wie  $K(\xi_1, \dots, \xi_M)$  stattfinden. Aber  $\mathfrak{F}_0$  bedeutet, daß die Elemente  $\xi_2, \dots, \xi_M$  eben denjenigen  $m$ -tupeln entsprechen, die in (1) auftreten und von  $x_1, \dots, x_m$  und gewissen anderen Elementen  $x_{m+1}, \dots, x_{m+n}$  gebildet sind. Infolgedessen muß (1) wahr werden in  $\mathfrak{B}_2$ , wenn man  $A_j(\xi)$  als  $A_j(z_1, \dots, z_m)$  schreibt, so oft das  $m$ -tupel  $(z_1, \dots, z_m)$  dem  $\xi$  entspricht.

Hierdurch ist also bewiesen, daß (4) mit (1) in bezug auf Erfüllbarkeit gleichwertig ist. Nach dem Satze

$$(x) A(x) \& (y) B(y) \sim (x) (A(x) \& B(x))$$

kann man aber augenscheinlich das erste und vierte konjunktive Glied in (4) und ebenso das zweite, dritte und sechste Glied darin derart zusammenziehen, daß man eine dreigliedrige Konjunktion von der im Satze erwähnten Form bekommt. Andererseits kann das fünfte Glied als eine Konjunktion mit  $m$  Gliedern geschrieben werden, deren Präfixe die Form  $(\xi_1, \xi_2) (E\eta)$  haben. Es kann nämlich so geschrieben werden:

$$\begin{aligned} (\xi_1, \xi_2) (E\eta_1) F_{11}(\xi_2, \eta_1) \& (\xi_1, \xi_2) (E\eta_2) (F_{11}(\xi_1, \eta_2) \& F_{12}(\xi_2, \eta_2)) \& \dots \& \\ & \& (\xi_1, \xi_2) (E\eta_m) (F_{11}(\xi_1, \eta_m) \& F_{22}(\xi_1, \eta_m) \& \dots \& \\ & \& F_{m-1, m-1}(\xi_1, \eta_m) \& F_{1m}(\xi_2, \eta_m)). \end{aligned}$$

Der Satz ist also jetzt vollständig bewiesen.

Wenn man will, kann man auch die dreigliedrige Konjunktion  $Z_1 \& Z_2 \& Z_3$  zusammenziehen zu einem Zähl Ausdruck der Form

(9)  $(x_1, x_2, x_3) (Ey_1, \dots, y_n) K(x_1, x_2, x_3, y_1, \dots, y_n),$

d. h. man bekommt den Gödelschen Satz.

Wendet man den hier bewiesenen Satz wiederum auf (9) an, so erkennt man, daß (9) mit einer 5-gliedrigen Konjunktion gleichwertig ist, deren 1<sup>tes</sup> bzw. 2<sup>tes</sup>, 3<sup>tes</sup>, 4<sup>tes</sup> bzw. 5<sup>tes</sup> Glied Präfixe der Formen  $(x) (Ey_1, \dots, y_n)$  bzw.  $(x_1, x_2) (Ey)$  bzw.  $(x_1, x_2, x_3)$  haben. Also ist jeder Zähl ausdruck mit einem Ausdruck der letzten Gestalt gleichwertig.

*(Eingegangen am 15. April 1935.)*