Komplexe euklidische Räume von beliebiger endlicher oder transfiniter Dimensionszahl.

Von Heinrich Löwig in Prag.

In dieser Abhandlung soll gezeigt werden, daß viele Sätze, welche man bisher nur für den Hilbertschen Raum bewiesen hat, auch für beliebige euklidische Räume, d. h. lineare metrische Räume, in denen ein inneres Produkt definiert ist, gelten, oder — mit andern Worten — daß die Voraussetzung der Separabilität des Raumes, die man beim Beweise dieser Sätze bisher zu machen pflegte, unwesentlich ist. Im ersten Paragraphen mögen zunächst einige Vorbemerkungen über allgemeine komplexe lineare metrische Räume vorausgeschickt werden. Im zweiten Pragraphen werden sodann Sätze über den komplexen Hilbertschen Raum angeführt, welche man auf beliebige komplexe euklidische Räume übertragen kann, ohne dabei den Wohlordnungssatz zu benützen. In § 3 werden schließlich noch einige Sätze über komplexe euklidische Räume unter Benützung des Wohlordnungssatzes abgeleitet.

§ 1. Vorbemerkungen über allgemeine komplexe lineare metrische Räume.

Eine Menge $\mathfrak{R}$ von Elementen $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}, \ldots$ heiße ein *komplexer linearer Raum,* wenn in ihr eine Addition $\mathfrak{x}+\mathfrak{y}$ und eine Multiplikation $a\mathfrak{x}$ mit einer komplexen Zahl a definiert sind und wenn diese beiden Rechenoperationen den Gesetzen der affinen Vektoralgebra genügen. (Elemente linearer Räume wollen wir im folgenden stets mit kleinen deutschen Buchstaben, komplexe Zahlen mit kleinen lateinischen oder griechischen Buchstaben bezeichnen.)

Ist außerdem jedem Element $\mathfrak{x}$ von $\mathfrak{R}$ eine nicht negative reelle Zahl $|\mathfrak{x}|$ (absoluter Betrag des Elements $\mathfrak{x}$) derart zugeordnet, daß die Bedingungen

(1) $$|\mathfrak{x}| > 0 \quad \text{für} \quad \mathfrak{x} \neq 0$$

(das Zeichen 0 soll auch das Nullelement von $\mathfrak{R}$ bedeuten)

(2) $$|\mathfrak{x} + \mathfrak{y}| \leq |\mathfrak{x}| + |\mathfrak{y}|$$

und

(3) $$|a\mathfrak{x}| = |a| \cdot |\mathfrak{x}|$$

(a beliebig komplex) erfüllt sind, dann wollen wir $\mathfrak{R}$ einen *komplexen linearen metrischen Raum* nennen.

Definition 1. *Die Teilmenge $\mathfrak{M}$ des komplexen linearen metrischen Raumes $\mathfrak{R}$ heiße isomorph mit der Teilmenge $\mathfrak{N}$ des komplexen linearen metrischen Raumes $\mathfrak{S}$, wenn zwischen $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$ eine umkehrbar eindeutige Zuordnung von der Beschaffenheit hergestellt werden kann, daß in dem Falle, daß die endlich vielen Elemente $\mathfrak{x}_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ von $\mathfrak{M}$ beziehentlich den Elementen $\mathfrak{y}_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ von $\mathfrak{N}$ zugeordnet sind, für beliebige komplexe Zahlen a_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ die Gleichung*

(4) $$\left| \sum_{k=1}^{n} a_k \mathfrak{x}_k \right| = \left| \sum_{k=1}^{n} a_k \mathfrak{y}_k \right|$$

besteht.

(Die Gesamtheit der Elemente von $\mathfrak{R}$ von der Form $\sum_{k=1}^{n} a_k \mathfrak{x}_k$ mit $\mathfrak{x}_k \in \mathfrak{M}$ wollen wir in Anlehnung an HAUSDORFF **2**, S. 295 — siehe Literaturverzeichnis am Schlusse — die „lineare Hülle" der Menge $\mathfrak{M}$ nennen. — Das Wort „isomorph" wird hier in einem andern Sinne gebraucht als bei BANACH **1**, S. 180. Was hier isomorph heißt, nennt BANACH „äquivalent".)

Definition 2. *Ist $\mathfrak{x}_0$ irgendein Element des komplexen linearen metrischen Raumes $\mathfrak{R}$ und ε eine beliebige positive reelle Zahl, dann heiße die Menge der Elemente $\mathfrak{x}$ von $\mathfrak{R}$, welche der Ungleichung*

(5) $$|\mathfrak{x} - \mathfrak{x}_0| < \varepsilon$$

genügen, eine starke Umgebung der Stelle $\mathfrak{x}_0$.

Daher heißt $\mathfrak{x}_0$ starke Häufungsstelle einer Teilmenge $\mathfrak{M}$ von $\mathfrak{R}$, wenn jede starke Umgebung von $\mathfrak{x}_0$ mindestens ein von $\mathfrak{x}_0$ verschiedenes Element von $\mathfrak{M}$ enthält. Die Menge $\mathfrak{M}$ heißt starkabgeschlossen, wenn sie alle ihre starken Häufungspunkte enthält.

Eine Folge $\mathfrak{x}_n$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ von Elementen von $\mathfrak{R}$ heißt stark konvergent gegen das Element $\mathfrak{x}$ von $\mathfrak{R}$, in Zeichen

(6) $$\lim_{n \to \infty} \mathfrak{x}_n = \mathfrak{x},$$

wenn jede starke Umgebung von $\mathfrak{x}$ von einer gewissen Stelle angefangen alle Glieder der Folge $\mathfrak{x}_n$ enthält; das bedeutet aber:

(7) $$\lim_{n \to \infty} |\mathfrak{x}_n - \mathfrak{x}| = 0.$$

Offenbar ist eine Teilmenge $\mathfrak{M}$ von $\mathfrak{R}$ dann und nur dann starkabgeschlossen, wenn aus $\mathfrak{x}_n \in \mathfrak{M}$ und $\lim\limits_{n \to \infty} \mathfrak{x}_n = \mathfrak{x}$ stets $\mathfrak{x} \in \mathfrak{M}$ folgt. Die Menge der starken Häufungsstellen der linearen Hülle einer Teilmenge $\mathfrak{M}$ von $\mathfrak{R}$ heiße — wieder in Anlehnung an HAUSDORFF **2,** S. 295 — die starkabgeschlossene lineare Hülle von $\mathfrak{M}$.

Definition 3. *Eine Folge* $\mathfrak{x}_n$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ *von Elementen von* $\mathfrak{R}$ *heiße eine starke Fundamentalfolge, wenn*

(8) $$\lim_{\substack{m \to \infty \\ n \to \infty}} |\mathfrak{x}_m - \mathfrak{x}_n| = 0$$

ist.

Definition 4. *Eine Teilmenge* $\mathfrak{M}$ *von* $\mathfrak{R}$ *heiße starkvollständig, wenn es zu jeder starken Fundamentalfolge* $\mathfrak{x}_n$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ *von* $\mathfrak{M}$ *ein Element* $\mathfrak{x}$ *von* $\mathfrak{M}$ *mit*

(6) $$\lim_{n \to \infty} \mathfrak{x}_n = \mathfrak{x}$$

gibt.

Aus der Starkvollständigkeit folgt die Starkabgeschlossenheit, aber nicht umgekehrt; ferner ist mit einer starkvollständigen Menge offenbar auch jede isomorphe Menge starkvollständig, während einer nur starkabgeschlossenen Menge diese Eigenschaft nicht zukommen muß. Ist die starkabgeschlossene lineare Hülle $\mathfrak{P}$ einer Menge $\mathfrak{M}$ starkvollständig, dann wollen wir $\mathfrak{P}$ auch die *starkvollständige lineare Hülle* von $\mathfrak{M}$ nennen. Andernfalls wollen wir sagen, daß die starkvollständige lineare Hülle von $\mathfrak{M}$ in $\mathfrak{R}$ nicht existiert. Offenbar gilt der

Satz 1. *Sind zwei Teilmengen komplexer linearer metrischer Räume isomorph, dann sind auch ihre starkvollständigen linearen Hüllen isomorph, falls sie existieren.*

Denn bei der in Definition 1 erwähnten Zuordnung entspricht jeder starken Fundamentalfolge der linearen Hülle von $\mathfrak{M}$ eine starke Fundamentalfolge der linearen Hülle von $\mathfrak{N}$ und umgekehrt.

Es folgt weiter, daß *diese Zuordnung auf genau eine Weise zu einer entsprechenden Zuordnung zwischen den starkvollständigen linearen Hüllen von $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$ erweitert werden kann.*

Ist ein komplexer linearer metrischer Raum selbst starkvollständig, dann fallen die Begriffe der Starkabgeschlossenheit und der Starkvollständigkeit einer Teilmenge zusammen; daher ist auch die starkabgeschlossene lineare Hülle einer Teilmenge von selbst starkvollständig.

Jeden komplexen linearen metrischen Raum $\mathfrak{R}$, welcher nicht starkvollständig ist, kann man zu einem starkvollständigen komplexen linearen metrischen Raum erweitern; d. h. man kann einen starkvollständigen komplexen linearen metrischen Raum $\mathfrak{R}^*$ angeben, welcher eine mit $\mathfrak{R}$ isomorphe lineare Mannigfaltigkeit enthält. Man betrachte als die Elemente von $\mathfrak{R}^*$ die Gesamtheiten äquivalenter starker Fundamentalfolgen von $\mathfrak{R}$. (Zwei starke Fundamentalfolgen $\mathfrak{x}_n^{(1)}$ und $\mathfrak{x}_n^{(2)}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ sollen äquivalent heißen, wenn $\lim\limits_{n\to\infty} |\mathfrak{x}_n^{(1)} - \mathfrak{x}_n^{(2)}| = 0$ ist.) Enthalten zwei Elemente $\mathfrak{x}^*$ und $\mathfrak{y}^*$ von $\mathfrak{R}^*$ die starken Fundamentalfolgen $\mathfrak{x}_n$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ und $\mathfrak{y}_n$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ von $\mathfrak{R}$, dann seien $\mathfrak{x}^* + \mathfrak{y}^*$ und $a\mathfrak{x}^*$ die Gesamtheiten derjenigen starken Fundamentalfolgen von $\mathfrak{R}$, welche mit $\mathfrak{x}_n + \mathfrak{y}_n$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ bzw. mit $a\mathfrak{x}_n$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ äquivalent sind, und es sei

$$|\mathfrak{x}^*| = \lim_{n\to\infty} |\mathfrak{x}_n|. \tag{9}$$

Man kann sich leicht überlegen, daß diese Definitionen alle eingangs gemachten Voraussetzungen über komplexe lineare metrische Räume erfüllen und daß der so definierte komplexe lineare metrische Raum wirklich starkvollständig ist. Diejenigen Elemente von $\mathfrak{R}^*$, welche aus starken Fundamentalfolgen von $\mathfrak{R}$ bestehen, welche in $\mathfrak{R}$ auch stark konvergieren, bilden eine lineare Mannigfaltigkeit, welche mit $\mathfrak{R}$ isomorph ist, und $\mathfrak{R}^*$ ist die starkvollständige lineare Hülle dieser linearen Mannigfaltigkeit. Ersetzt man jedes der genannten Elemente $\mathfrak{x}^*$ von $\mathfrak{R}^*$ durch das Element von $\mathfrak{R}$, gegen welches die starken Fundamentalfolgen von $\mathfrak{R}$, deren Gesamtheit $\mathfrak{x}^*$ ist, konvergieren, dann wird $\mathfrak{R}$ selbst eine lineare Mannigfaltigkeit von $\mathfrak{R}^*$ und daher $\mathfrak{R}^*$ eine Erweiterung von $\mathfrak{R}$; wir wollen diese Erweiterung die *kleinste starkvollständige Erweiterung* von $\mathfrak{R}$ nennen.

Ist jedem Element $\mathfrak{x}$ eines komplexen linearen Raumes $\mathfrak{R}$

ein Element $A\mathfrak{x}$ eines komplexen linearen Raumes $\mathfrak{S}$ zugeordnet und gelten dabei für beliebige $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ die Gleichungen

$$A(\mathfrak{x}+\mathfrak{y}) = A\mathfrak{x} + A\mathfrak{y} \tag{10}$$

und

$$A(a\mathfrak{x}) = a(A\mathfrak{x}), \tag{11}$$

dann heiße diese Zuordnung A eine lineare Abbildung von $\mathfrak{R}$ *in* $\mathfrak{S}$; wenn dabei $A\mathfrak{x}$ wirklich ganz $\mathfrak{S}$ durchläuft, eine lineare Abbildung von $\mathfrak{R}$ *auf* $\mathfrak{S}$. Sind $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{S}$ komplexe lineare *metrische* Räume und ist die Menge der Zahlen $|A\mathfrak{x}|$ mit $|\mathfrak{x}| \leqq 1$ beschränkt, dann heiße die lineare Abbildung A beschränkt und die obere Grenze von $|A\mathfrak{x}|$ für $|\mathfrak{x}| \leqq 1$ werde mit $|A|$ (absoluter Betrag der linearen Abbildung A) bezeichnet. Durch diese Festsetzung wird die Menge der beschränkten linearen Abbildungen von $\mathfrak{R}$ in $\mathfrak{S}$ selbst zu einem komplexen linearen metrischen Raume. Ist $\mathfrak{R} = \mathfrak{S}$, dann heiße A auch ein *linearer Operator* in $\mathfrak{R}$. Ist $\mathfrak{S}$ der komplexe lineare metrische Raum der komplexen Zahlen, dann heiße A ein *lineares Funktional* in $\mathfrak{R}$.

Definition 5. *Es seien L_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ endlich viele beschränkte lineare Funktionale in $\mathfrak{R}$ und ε eine beliebige positive reelle Zahl. Ferner sei $\mathfrak{x}_0$ ein beliebiges Element von $\mathfrak{R}$. Dann heiße die Gesamtheit der Stellen $\mathfrak{x}$ von $\mathfrak{R}$, welche den Ungleichungen*

$$|L_k(\mathfrak{x}-\mathfrak{x}_0)| < \varepsilon \qquad (k = 1, 2, \ldots, n) \tag{12}$$

genügen, eine schwache Umgebung der Stelle $\mathfrak{x}_0$.

(Diese Definition ist eine Verallgemeinerung der von J. v. NEUMANN **6,** S. 379 gegebenen Definition. Man kann sich leicht überzeugen, daß dieser Umgebungsbegriff im allgemeinen Falle ebenso wie in dem von J. v. NEUMANN behandelten Spezialfalle den vier Hausdorffschen Umgebungsaxiomen genügt.)

Daher heißt $\mathfrak{x}_0$ *schwache Häufungsstelle* einer Menge $\mathfrak{M}$, wenn jede schwache Umgebung von $\mathfrak{x}_0$ mindestens ein von $\mathfrak{x}_0$ verschiedenes Element von $\mathfrak{M}$ enthält. Eine Menge $\mathfrak{M}$ heißt *schwachabgeschlossen,* wenn sie alle ihre schwachen Häufungsstellen enthält. Eine Folge $\mathfrak{x}_n$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ heißt *schwach konvergent* gegen das Element $\mathfrak{x}$, in Zeichen

$$\operatorname*{Lim}_{n\to\infty} \mathfrak{x}_n = \mathfrak{x}, \tag{13}$$

wenn jede schwache Umgebung von $\mathfrak{x}$ von einer gewissen Stelle angefangen alle Glieder der Folge $\mathfrak{x}_n$ enthält. Wie man sich leicht überlegt, gilt der

Satz 2. *Für das Bestehen der Gleichung*

$$\lim_{n \to \infty} \mathfrak{x}_n = \mathfrak{x} \tag{13}$$

ist notwendig und hinreichend, daß für jedes beschränkte lineare Funktional L in $\mathfrak{R}$ die Gleichung

$$\lim_{n \to \infty} L\mathfrak{x}_n = L\mathfrak{x} \tag{14}$$

gelte.

Wie J. v. NEUMANN **6,** S. 380, 381 zeigt, muß ein schwaches Häufungselement einer Menge nicht schwaches Grenzelement einer Teilfolge der Menge sein.

Wir müssen nun einen Satz aus der Theorie der linearen metrischen Räume (S. z. B. HAUSDORFF **2,** S. 306) benützen, der folgendermaßen lautet:

Satz 3. *Es sei $\mathfrak{M}$ eine beliebige Teilmenge eines komplexen linearen metrischen Raumes $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{x}_0$ ein Element von $\mathfrak{R}$, welches nicht der starkabgeschlossenen linearen Hülle von $\mathfrak{M}$ angehört. Dann gibt es stets mindestens ein beschränktes lineares Funktional L in $\mathfrak{R}$ von der Beschaffenheit, daß für $\mathfrak{x} \in \mathfrak{M}$ $L\mathfrak{x} = 0$ ist, während $L\mathfrak{x}_0 \neq 0$ ist.*

Dieser Satz wird in den meisten Abhandlungen nur für *reelle* lineare metrische Räume ausgesprochen und bewiesen. Aus der Giltigkeit des Satzes für *reelle* lineare metrische Räume folgt aber leicht auch seine Giltigkeit für *komplexe* lineare metrische Räume. Man kann ja jeden komplexen linearen metrischen Raum auch als einen reellen linearen metrischen Raum betrachten; daher gibt es unter den Voraussetzungen des Satzes 3 ein *reelles* beschränktes lineares Funktional R (die Gleichung $R(a\mathfrak{x}) = a(R\mathfrak{x})$ gilt jetzt nur für *reelles* a) von der Beschaffenheit, daß $R\mathfrak{x} = 0$ ist, wenn $\mathfrak{x}$ in der komplexen linearen Hülle von $\mathfrak{M}$ enthalten ist, während $R\mathfrak{x}_0 \neq 0$ ist. Nun setze man

$$L\mathfrak{x} = R\mathfrak{x} - iR(i\mathfrak{x}).$$

Dann ist L ein lineares Funktional von der in Satz 3 geforderten Beschaffenheit.

Aus Satz 3 folgt sofort der

Satz 4. *Jede schwache Häufungsstelle einer Menge $\mathfrak{M}$ gehört der starkabgeschlossenen linearen Hülle von $\mathfrak{M}$ an.*

Gehört nämlich $\mathfrak{x}_0$ nicht der starkabgeschlossenen linearen Hülle von $\mathfrak{M}$ an, dann sei L ein beschränktes lineares Funktional in $\mathfrak{R}$ mit $L\mathfrak{x}=0$ für $\mathfrak{x}\in\mathfrak{M}$ und $L\mathfrak{x}_0\neq 0$. Dann ist für $\mathfrak{x}\in\mathfrak{M}$

$$|L(\mathfrak{x}-\mathfrak{x}_0)|=|L\mathfrak{x}_0|\neq 0;$$

die Ungleichung

$$|L(\mathfrak{x}-\mathfrak{x}_0)|<\varepsilon$$

kann daher nicht für jede positive reelle Zahl ε durch ein $\mathfrak{x}\in\mathfrak{M}$ erfüllt werden.

Ein Spezialfall des Satzes 4 ist der

S a t z 5. *Ist*

$$\lim_{n\to\infty}\mathfrak{x}_n=\mathfrak{x}, \tag{13}$$

dann gehört $\mathfrak{x}$ der starkabgeschlossenen linearen Hülle der Menge der Elemente $\mathfrak{x}_n$ $(n=1,2,3,\ldots)$ an.

Dieser spezielle Satz wird auch von BANACH **1**, S. 134 ausgesprochen. Sein Beweis folgt hier einfach aus der Bemerkung, daß beim Bestehen der Gleichung (13) $\mathfrak{x}$ schwache Häufungsstelle der Menge der Elemente ist, welche in der Folge $\mathfrak{x}_n$ $(n=1,2,3,\ldots)$ vorkommen, wenn diese Menge nicht nur endlich viele von $\mathfrak{x}$ verschiedene Elemente enthält.

Aus Satz 4 folgt ferner der

S a t z 6. *Jede starkabgeschlossene lineare Mannigfaltigkeit ist auch schwachabgeschlossen.*

Wir wollen daher von nun an eine starkabgeschlossene lineare Mannigfaltigkeit schlechthin als *abgeschlossen* bezeichnen. Ebenso dürfen wir statt „starkabgeschlossene lineare Hülle“ kurz „abgeschlossene lineare Hülle“ sagen. Satz 6 stellt eine Verallgemeinerung eines Satzes dar, den E. SCHMIDT **10** für den Hilbertschen Raum bewiesen hat. (Vergleiche auch J. v. NEUMANN **6**, S. 396.)

D e f i n i t i o n 6. *Eine Teilmenge $\mathfrak{M}$ von $\mathfrak{R}$ heiße s c h w a c h v o l l s t ä n d i g, wenn sie in der kleinsten starkvollständigen Erweiterung von $\mathfrak{R}$ schwachabgeschlossen ist.*

(A n m e r k u n g. Die Worte „schwachabgeschlossen“ und „schwachvollständig“ werden sonst vielfach in der Literatur in einem anderen Sinne gebraucht. Wir kommen weiter unten nochmals darauf zurück.)

Jede schwachvollständige Menge ist schwachabgeschlossen, während das Umgekehrte nicht gelten muß. Mit einer schwachvollständigen Menge ist auch jede isomorphe Menge schwachvollständig, während einer schwachabgeschlossenen Menge diese Eigenschaft nicht zukommen muß. Aus Definition 6 folgt ferner unmittelbar, daß jede starkvollständige lineare Mannigfaltigkeit auch schwachvollständig ist. Wir wollen daher von nun an eine starkvollständige lineare Mannigfaltigkeit schlechthin als „vollständig" bezeichnen. Ebenso wollen wir die Worte „starkvollständige lineare Hülle" und „kleinste starkvollständige Erweiterung" durch die Worte „vollständige lineare Hülle" und „kleinste vollständige Erweiterung" ersetzen. — In einem vollständigen komplexen linearen metrischen Raume sind die Begriffe Schwachabgeschlossenheit und Schwachvollständigkeit einer Teilmenge und ebenso die Begriffe Abgeschlossenheit und Vollständigkeit einer linearen Mannigfaltigkeit identisch.

Definition 7. *Eine Folge $\mathfrak{x}_n$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ von Elementen von $\mathfrak{R}$ heiße eine schwache Fundamentalfolge, wenn für jedes beschränkte lineare Funktional L in $\mathfrak{R}$ $\lim\limits_{n\to\infty} L\mathfrak{x}_n$ existiert.*

Jede schwache Fundamentalfolge ist beschränkt. Für reelle lineare metrische Räume ist dieser Satz bekannt; aus seiner Giltigkeit für reelle lineare metrische Räume folgt aber auch die Giltigkeit für komplexe lineare metrische Räume: man braucht nur statt der Werte der beschränkten linearen Funktionale $L\mathfrak{x}$ deren reelle Teile zu betrachten.

Es kann vorkommen, daß eine schwache Fundamentalfolge eines *vollständigen* komplexen linearen metrischen Raumes nicht schwach konvergiert. Es sei $\mathfrak{R}$ die Menge der *Nullfolgen* $\mathfrak{x} = (x_1, x_2, x_3, \ldots)$ mit $|\mathfrak{x}| = \sup\limits_{n=1,2,3,\ldots} |x_n|$. Dieser komplexe lineare metrische Raum ist vollständig; trotzdem bilden seine Elemente $\mathfrak{x}_1 = (1, 0, 0, \ldots)$, $\mathfrak{x}_2 = (1, 1, 0, 0, \ldots)$, $\mathfrak{x}_3 = (1, 1, 1, 0, 0, \ldots)$, ... eine schwache Fundamentalfolge, welche nicht schwach konvergiert. Während man einen komplexen linearen metrischen Raum stets so erweitern kann, daß jede *starke* Fundamentalfolge stark konvergiert, gilt von den *schwachen* Fundamentalfolgen das Entsprechende nicht. Es gilt vielmehr der

Satz 7. *Ist $\mathfrak{x}_n$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ eine schwache Fundamentalfolge eines vollständigen komplexen linearen metrischen Raumes $\mathfrak{R}$, welche nicht schwach konvergiert, dann ist es auch unmöglich, $\mathfrak{R}$ so* *zu erweitern, daß diese schwache Fundamentalfolge schwach konvergent wird.*

(Man kann daher $\mathfrak{R}$ auch nicht zu einem komplexen linearen metrischen Raum $\mathfrak{R}^*$ erweitern, der mit seinem bikonjugierten Raum übereinstimmt.)

Der Beweis des Satzes 7 ergibt sich unmittelbar aus Satz 5.

S. MAZUR **4** nennt einen (reellen) linearen metrischen Raum schwachvollständig, wenn in ihm jede schwache Fundamentalfolge schwach konvergiert. Unser Satz 7 sagt aus, daß ein komplexer linearer metrischer Raum, der zwar vollständig, aber nicht im Mazurschen Sinne schwachvollständig ist, nicht zu einem im Mazurschen Sinne schwachvollständigen komplexen linearen metrischen Raume erweitert werden kann.

§ 2. **Sätze über komplexe euklidische Räume, die ohne Benützung des Wohlordnungssatzes bewiesen werden können.**

Definition 8. *Eine skalare Funktion $f(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$ zweier veränderlicher Elemente eines komplexen linearen Raumes heiße eine hermiteische bilineare Funktion, wenn die Gleichungen*

$$f(\mathfrak{x}_1+\mathfrak{x}_2, \mathfrak{y}) = f(\mathfrak{x}_1, \mathfrak{y}) + f(\mathfrak{x}_2, \mathfrak{y}), \tag{14}$$

$$f(a\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = a f(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) \tag{15}$$

und

$$f(\mathfrak{y}, \mathfrak{x}) = \overline{f(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})} \tag{16}$$

($\bar{a}$ bedeutet die zu a konjugierte komplexe Zahl) *allgemein gelten.*

Ist $f(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$ eine hermiteische bilineare Funktion, dann ist, wie Gleichung (16) lehrt, $f(\mathfrak{x}, \mathfrak{x})$ stets eine *reelle* Zahl.

Satz 8. *Ist die zu einer hermiteischen bilinearen Funktion $f(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$ in einem komplexen linearen Raume $\mathfrak{R}$ gehörige hermiteische quadratische Form (oder kurz hermiteische Form) $f(\mathfrak{x}, \mathfrak{x})$ positiv definit — d. h. ist stets $f(\mathfrak{x}, \mathfrak{x}) > 0$ für $\mathfrak{x} \neq 0$ — dann gelten für beliebige Elemente $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ von $\mathfrak{R}$ die Ungleichungen*

$$|f(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})|^2 \leqq f(\mathfrak{x}, \mathfrak{x}) f(\mathfrak{y}, \mathfrak{y}) \tag{17}$$

und

$$\sqrt{f(\mathfrak{x}+\mathfrak{y}, \mathfrak{x}+\mathfrak{y})} \leqq \sqrt{f(\mathfrak{x}, \mathfrak{x})} + \sqrt{f(\mathfrak{y}, \mathfrak{y})}. \tag{18}$$

Beim Beweise der Ungleichungen (17) und (18) hat man nur die Nichtnegativdefinitheit der quadratischen Form $f(\lambda\mathfrak{x} + \mu\mathfrak{y}, \lambda\mathfrak{x} + \mu\mathfrak{y})$ in den beiden reellen Veränderlichen λ und μ zu beachten.

Die Ungleichung (18) sagt weiter aus: ist die hermiteische bilineare Funktion $f(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$ in einem komplexen linearen Raume $\mathfrak{R}$ so beschaffen, daß die hermiteische Form $f(\mathfrak{x}, \mathfrak{x})$ positiv definit ist, dann kann man $\mathfrak{R}$ dadurch zu einem komplexen linearen *metrischen* Raume machen, daß man $|\mathfrak{x}| = \sqrt{f(\mathfrak{x}, \mathfrak{x})}$ setzt. (Daß dann auch die Gleichung (3) erfüllt ist, folgt aus den Gleichungen (15) und (16).)

Definition 9. *Ein komplexer linearer metrischer Raum, der auf die eben angegebene Weise definiert werden kann, heiße ein komplexer euklidischer Raum. Die Funktion $f(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$ heiße dabei das innere Produkt der beiden Elemente $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ und werde kurz mit* $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$ *bezeichnet.*

Spezielle komplexe euklidische Räume sind der n-dimensionale komplexe euklidische Raum (n eine natürliche Zahl) und der komplexe Hilbertsche Raum. Nach der Definition des inneren Produktes besteht allgemein die Gleichung

$$(\mathfrak{x}, \mathfrak{x}) = |\mathfrak{x}|^2. \tag{19}$$

Ferner folgt aus Ungleichung (17) die Ungleichung

$$|(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})| \leqq |\mathfrak{x}| \cdot |\mathfrak{y}|, \tag{20}$$

welche man die *Schwarzsche Ungleichung* zu nennen pflegt.

Satz 9. *Ist ein komplexer linearer metrischer Raum $\mathfrak{R}$ euklidisch, dann ist auch seine kleinste vollständige Erweiterung $\mathfrak{R}^*$ euklidisch.*

Ist nämlich $\mathfrak{x}^* \in \mathfrak{R}^*$, $\mathfrak{y}^* \in \mathfrak{R}^*$, $\mathfrak{x}_n \in \mathfrak{R}$, $\mathfrak{y}_n \in \mathfrak{R}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, $\lim\limits_{n\to\infty} \mathfrak{x}_n = \mathfrak{x}^*$ und $\lim\limits_{n\to\infty} \mathfrak{y}_n = \mathfrak{y}^*$, dann braucht man, um die Richtigkeit des Satzes 9 einzusehen, nur in $\mathfrak{R}^*$ das innere Produkt durch die Gleichung

$$(\mathfrak{x}^*, \mathfrak{y}^*) = \lim_{n\to\infty} (\mathfrak{x}_n, \mathfrak{y}_n)$$

zu definieren.

Satz 10. *Zwei Teilmengen $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$ komplexer euklidischer Räume sind dann und nur dann isomorph* (Definition 1), *wenn zwischen $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$ eine umkehrbar eindeutige Zuordnung von der Beschaffenheit hergestellt werden kann, daß in dem Falle, daß den Elementen $\mathfrak{x}_1$ und $\mathfrak{x}_2$ von $\mathfrak{M}$ die Elemente $\mathfrak{y}_1$ und $\mathfrak{y}_2$ von $\mathfrak{N}$ zugeordnet sind, stets die Gleichung*

$$(\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2) = (\mathfrak{y}_1, \mathfrak{y}_2) \tag{21}$$

besteht.

Daß die angeführte Bedingung notwendig ist, folgt aus der Identität

$$(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = \left|\frac{\mathfrak{x}+\mathfrak{y}}{2}\right|^2 - \left|\frac{\mathfrak{x}-\mathfrak{y}}{2}\right|^2 + i\left|\frac{\mathfrak{x}+i\mathfrak{y}}{2}\right|^2 - i\left|\frac{\mathfrak{x}-i\mathfrak{y}}{2}\right|^2;$$

daß sie auch hinreichend ist, folgt daraus, daß man aus den Gleichungen (21) mit Hilfe von (19) das Bestehen jeder Gleichung von der Form (4) beweisen kann.

Satz 11. *Zu jedem beschränkten linearen Funktional L eines* ***vollständigen*** *komplexen euklidischen Raumes $\mathfrak{R}$ gibt es ein* (und daher auch nur ein) *erzeugendes Element, d. h. ein Element* $\mathfrak{u}$ *von $\mathfrak{R}$ von der Beschaffenheit, daß für jedes Element $\mathfrak{x}$ von $\mathfrak{R}$*

(22) $$L\mathfrak{x} = (\mathfrak{x}, \mathfrak{u})$$

ist.

Daß Satz 11 für endlichdimensionale komplexe euklidische Räume und für den komplexen Hilbertschen Raum gilt, ist bekannt. (S. z. B. F. Riesz **9,** S. 28.) Um nun den Satz auch für beliebige vollständige komplexe euklidische Räume zu beweisen, bemerken wir zunächst, daß aus der Giltigkeit des Satzes für endlichdimensionale komplexe euklidische Räume und für den komplexen Hilbertschen Raum speziell folgender Satz folgt:

Satz 12. *Ist L ein beschränktes lineares Funktional in einem endlichdimensionalen komplexen euklidischen Raume oder im komplexen Hilbertschen Raume, dann gibt es stets ein Element* $\mathfrak{u}$ *des betreffenden Raumes mit* $|\mathfrak{u}| = |L|$ *und* $L\mathfrak{u} = |\mathfrak{u}|^2$.

Weiter beweisen wir den folgenden

Satz 13. *Gibt es zu einem beschränkten linearen Funktional L in einem komplexen euklidischen Raume $\mathfrak{R}$ ein Element* $\mathfrak{u}$ *von $\mathfrak{R}$ mit* $|\mathfrak{u}| = |L|$ *und* $L\mathfrak{u} = |\mathfrak{u}|^2$, *dann ist identisch*

(22) $$L\mathfrak{x} = (\mathfrak{x}, \mathfrak{u}).$$

Es sei zunächst $(\mathfrak{x}, \mathfrak{u}) = 0$ und $\mathfrak{x} \neq 0$. Dann ist für jede komplexe Zahl λ

$$|L(\mathfrak{u} + \lambda\mathfrak{x})| \leq |L| \cdot |\mathfrak{u} + \lambda\mathfrak{x}|$$

und daher

$$\left||L|^2 + \lambda(L\mathfrak{x})\right|^2 \leq |L|^2 (|L|^2 + |\lambda|^2 |\mathfrak{x}|^2).$$

Nun setze man insbesondere $\lambda = \frac{\overline{(L\mathfrak{x})}}{|\mathfrak{x}|^2}$. Dann folgt

$$\left(|L|^2+\frac{|L\mathfrak{x}|^2}{|\mathfrak{x}|^2}\right)^2 \leqq |L|^2\left(|L|^2+\frac{|L\mathfrak{x}|^2}{|\mathfrak{x}|^2}\right)$$

oder

$$|L\mathfrak{x}|^2(|L|^2|\mathfrak{x}|^2+|L\mathfrak{x}|^2)\leqq 0,$$

also $L\mathfrak{x}=0$. Damit ist die Gleichung (22) für den Fall bewiesen, daß $(\mathfrak{x}, \mathfrak{u})=0$ ist. Ist jetzt $\mathfrak{x}$ ein beliebiges Element von $\mathfrak{R}$, dann ist

$$(|\mathfrak{u}|^2\mathfrak{x}-(\mathfrak{x}, \mathfrak{u})\mathfrak{u}, \mathfrak{u})=0,$$

daher nach dem eben Bewiesenen

$$L(|\mathfrak{u}|^2\mathfrak{x}-(\mathfrak{x}, \mathfrak{u})\mathfrak{u})=0,$$

oder

$$|\mathfrak{u}|^2L\mathfrak{x}-(\mathfrak{x}, \mathfrak{u})L\mathfrak{u}=0,$$

oder weil $L\mathfrak{u}=|\mathfrak{u}|^2$ ist,

$$L\mathfrak{x}=(\mathfrak{x}, \mathfrak{u}), \tag{22}$$

wie gezeigt werden sollte.

Andererseits kann Satz 12 auf beliebige *vollständige* komplexe euklidische Räume übertragen werden. Es sei L ein beschränktes lineares Funktional in einem vollständigen komplexen euklidischen Raume $\mathfrak{R}$. Dann gibt es eine Folge von Elementen $\mathfrak{x}_n$ $(n=1, 2, 3, \ldots)$ von $\mathfrak{R}$ mit $|\mathfrak{x}_n|=1$ $(n=1, 2, 3, \ldots)$ und $\lim\limits_{n\to\infty} L\mathfrak{x}_n=|L|$. Hierauf sei $\mathfrak{M}$ die abgeschlossene lineare Hülle der Elemente $\mathfrak{x}_n$ $(n=1, 2, 3, \ldots)$. Dann ist die obere Grenze von $|L\mathfrak{x}|$ für $\mathfrak{x}\in\mathfrak{M}$ und $|\mathfrak{x}|\leqq 1$ genau gleich $|L|$. Andererseits ist aber $\mathfrak{M}$ entweder ein endlichdimensionaler komplexer euklidischer Raum oder ein komplexer Hilbertscher Raum. Daher gibt es nach Satz 12 ein Element $\mathfrak{u}$ von $\mathfrak{M}$ mit $|\mathfrak{u}|=|L|$ und $L\mathfrak{u}=|\mathfrak{u}|^2$. Damit ist aber die zu Beginn dieses Absatzes angeführte Verallgemeinerung des Satzes 12 als richtig nachgewiesen. Aus dieser Verallgemeinerung des Satzes 12 und aus Satz 13 ergibt sich jetzt sofort der zu beweisende Satz 11.

Definition 10. *Eine lineare Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}$ eines komplexen euklidischen Raumes heiße* ***regulär****, wenn man jedes Element $\mathfrak{x}$ von $\mathfrak{R}$ in Bezug auf $\mathfrak{M}$ in eine Tangentialkomponente $\mathfrak{t}$ und eine Normalkomponente $\mathfrak{n}$ zerlegen kann, d. h. wenn man zu jedem Element $\mathfrak{x}$ von $\mathfrak{R}$ zwei ebensolche Elemente $\mathfrak{t}$ und $\mathfrak{n}$ angeben kann, so daß*

$$\mathfrak{x}=\mathfrak{t}+\mathfrak{n} \tag{23}$$

ist, $\mathfrak{t}$ $\mathfrak{M}$ angehört und $\mathfrak{n}$ zu allen Elementen von $\mathfrak{M}$ orthogonal ist.

Zwei Elemente $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ eines komplexen euklidischen Raumes werden hier orthogonal genannt, wenn $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = 0$ ist; dann ist wegen (16) auch $(\mathfrak{y}, \mathfrak{x}) = 0$. Es ist klar, daß für eine bestimmte lineare Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}$ eine Zerlegung eines Elements $\mathfrak{x}$ von $\mathfrak{R}$ von der hier betrachteten Art stets höchstens auf *eine* Weise möglich ist.

Satz 14. *Für die Regularität einer linearen Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}$ von $\mathfrak{R}$ ist notwendig, aber nicht hinreichend, daß $\mathfrak{M}$ in $\mathfrak{R}$ abgeschlossen sei.*

Beweis. Es sei $\mathfrak{M}$ regulär, $\mathfrak{x}_n \in \mathfrak{M}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ und $\lim\limits_{n\to\infty} \mathfrak{x}_n = \mathfrak{x}$. Dann sei

$$(23) \qquad \mathfrak{x} = \mathfrak{t} + \mathfrak{n}$$

die in Definition 10 angeführte Zerlegung von $\mathfrak{x}$. Aus der Gleichung $\lim\limits_{n\to\infty} \mathfrak{x}_n = \mathfrak{x}$ kann man auf bekannte Weise schließen, daß auch

$$\lim_{n\to\infty} (\mathfrak{x}_n, \mathfrak{n}) = (\mathfrak{x}, \mathfrak{n})$$

ist. Weil aber nach der Definition von $\mathfrak{n}$ für $n = 1, 2, 3, \ldots$ $(\mathfrak{x}_n, \mathfrak{n}) = 0$ ist, muß auch $(\mathfrak{x}, \mathfrak{n}) = 0$ sein. Das ergibt aber zusammen mit (23) die Gleichung $\mathfrak{x} = \mathfrak{t}$, d. h. daß $\mathfrak{x}$ $\mathfrak{M}$ angehört. Somit ist $\mathfrak{M}$ abgeschlossen; damit ist die erste Behauptung des Satzes 14 bewiesen.

Es sei andererseits $\mathfrak{R}$ die Menge aller Zahlenfolgen $\mathfrak{x} = (x_1, x_2, \ldots)$ von der Eigenschaft, daß von einer gewissen Stelle angefangen $x_k = \frac{\lambda}{k}$ (λ fest) ist; ist außerdem $(y_1, y_2, \ldots) = \mathfrak{y}$, dann sei

$$(24) \qquad \mathfrak{x} + \mathfrak{y} = (x_1 + y_1,\ x_2 + y_2,\ x_3 + y_3, \ldots)$$

$$(25) \qquad a\mathfrak{x} = (a x_1,\ a x_2,\ a x_3, \ldots)$$

und

$$(26) \qquad (\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \bar{y}_k .$$

In dieser Menge, die mit den Definitionen (24), (25) und (26) offenbar ein komplexer euklidischer Raum ist, sei $\mathfrak{M}$ die lineare Mannigfaltigkeit derjenigen Elemente $\mathfrak{x} = (x_1, x_2, x_3, \ldots)$, für welche $x_2 = x_4 = x_6 = \ldots = 0$ ist. (Für $\mathfrak{x} \in \mathfrak{M}$ müssen also insbesondere von einer gewissen Stelle angefangen alle $x_n = 0$ sein.) Diese lineare Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}$ ist offenbar in $\mathfrak{R}$ abgeschlossen; sie ist aber nicht regulär, weil das Element $\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\right)$ von $\mathfrak{R}$ nicht in der Form (23) dargestellt werden kann.

Satz 15. *Für die Regularität einer linearen Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}$ von $\mathfrak{R}$ ist hinreichend, aber nicht notwendig, daß $\mathfrak{M}$ vollständig sei.*

Beweis. Es werde zunächst angenommen, daß $\mathfrak{M}$ vollständig sei. Dann sei $\mathfrak{x}$ ein beliebiges Element von $\mathfrak{R}$. Ist nun $\mathfrak{y}$ ein in $\mathfrak{M}$ veränderliches Element, dann stellt $(\mathfrak{y}, \mathfrak{x})$ ein beschränktes lineares Funktional in $\mathfrak{M}$ dar. Weil aber $\mathfrak{M}$ ein vollständiger komplexer euklidischer Raum ist, gibt es nach Satz 11 ein Element $\mathfrak{t}$ von $\mathfrak{M}$, so daß für $\mathfrak{y} \in \mathfrak{M}$

$$(\mathfrak{y}, \mathfrak{x}) = (\mathfrak{y}, \mathfrak{t}) \tag{22a}$$

ist. Die Gleichung (22a) sagt aber aus, daß das durch die Gleichung

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{t} + \mathfrak{n} \tag{23}$$

definierte Element $\mathfrak{n}$ von $\mathfrak{R}$ zu allen Elementen $\mathfrak{y}$ von $\mathfrak{M}$ orthogonal ist. Damit ist die Regularität von $\mathfrak{M}$ bewiesen.

Es sei andererseits $\mathfrak{R}$ die Menge aller Zahlenfolgen $\mathfrak{x} = (x_1, x_2, x_3, \ldots)$ von der Eigenschaft, daß von einer gewissen Stelle angefangen $x_n = 0$ ist; ist $(y_1, y_2, \ldots) = \mathfrak{y}$, dann seien die Elemente $\mathfrak{x} + \mathfrak{y}$ und $a\mathfrak{x}$ von $\mathfrak{R}$ und die Zahl $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$ wieder durch die Gleichungen (24), (25) und (26) erklärt. In dem so definierten komplexen euklidischen Raume sei wieder $\mathfrak{M}$ die Menge aller Elemente $\mathfrak{x} = (x_1, x_2, \ldots)$ mit $x_2 = x_4 = x_6 = \ldots = 0$. Dann ist $\mathfrak{M}$ zwar regulär, aber nicht vollständig.

Es gilt also für lineare Mannigfaltigkeiten komplexer euklidischer Räume $\mathfrak{R}$ das logische Schema

$$\text{Vollständigkeit} \longrightarrow \text{Regularität} \longrightarrow \text{Abgeschlossenheit}.$$

Wenn $\mathfrak{R}$ vollständig ist, sind alle drei Eigenschaften miteinander äquivalent.

Sämtliche Ausführungen des § 1 gelten natürlich auch speziell für komplexe euklidische Räume. Man beachte aber, daß in diesem Paragraphen weder vom Satz 3 noch von einem derjenigen Sätze Gebrauch gemacht wurde, welche in § 1 aus dem Satze 3 hergeleitet wurden; denn man kann ja in diesem Paragraphen die Worte „abgeschlossen" und „vollständig", wo sie bisher vorgekommen sind, überall durch die Worte „starkabgeschlossen" und „starkvollständig" ersetzen. Zum allgemeinen Beweise des Satzes 3 für reelle lineare metrische Räume muß bekanntlich der Wohlordnungssatz herangezogen werden. Aus den bisherigen Ausführungen dieses Paragraphen ergibt sich aber für den Fall eines komplexen euklidischen Raumes ein Beweis des Satzes 3, der ohne Benützung des Wohlordnungssatzes auskommt.

Es sei also $\mathfrak{M}$ eine Teilmenge eines komplexen euklidischen Raumes $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{x}_0$ ein Element von $\mathfrak{R}$, welches nicht der starkabgeschlossenen linearen Hülle von $\mathfrak{M}$ angehört. Dann gehört $\mathfrak{x}_0$ — als Element der kleinsten starkvollständigen Erweiterung $\mathfrak{R}^*$ von $\mathfrak{R}$ betrachtet — auch nicht der (in $\mathfrak{R}^*$ existierenden) starkvollständigen linearen Hülle von $\mathfrak{M}$ an. Nach Satz 15 gibt es nun zwei Elemente $\mathfrak{t}$ und $\mathfrak{n}$ von $\mathfrak{R}^*$ von der Eigenschaft, daß

$$\mathfrak{x}_0 = \mathfrak{t} + \mathfrak{n}$$

ist, $\mathfrak{t}$ der starkvollständigen linearen Hülle von $\mathfrak{M}$ angehört und $\mathfrak{n}$ zu allen Elementen der starkvollständigen linearen Hülle von $\mathfrak{M}$ orthogonal ist. Dabei muß also $\mathfrak{n} \neq 0$ und daher auch $(\mathfrak{x}_0, \mathfrak{n}) = |\mathfrak{n}|^2 \neq 0$ sein. Ist daher $\mathfrak{x}$ ein veränderliches Element von $\mathfrak{R}$, dann stellt der Ausdruck $(\mathfrak{x}, \mathfrak{n})$ ein lineares Funktional in $\mathfrak{R}$ dar, welches den Forderungen des Satzes 3 genügt.

In den eben vorangegangenen Ausführungen ist auch folgender Satz enthalten:

S a t z 16. *Ist $\mathfrak{M}$ eine Teilmenge eines vollständigen komplexen euklidischen Raumes $\mathfrak{R}$, deren abgeschlossene lineare Hülle nicht mit $\mathfrak{R}$ zusammenfällt, dann gibt es stets mindestens ein vom Nullelement verschiedenes Element von $\mathfrak{R}$, welches zu allen Elementen von $\mathfrak{M}$ orthogonal ist.*

Für unvollständige komplexe euklidische Räume muß dieser Satz nicht gelten. Es sei $\mathfrak{R}$ der komplexe euklidische Raum, welcher im zweiten Teile des Beweises des Satzes 15 betrachtet wurde, und $\mathfrak{M}$ die Menge aller Elemente $\mathfrak{x} = (x_1, x_2, x_3, \ldots)$ von $\mathfrak{R}$ mit $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{k} = 0$. Dann ist $\mathfrak{M}$ eine in $\mathfrak{R}$ abgeschlossene lineare Mannigfaltigkeit, die nicht mit $\mathfrak{R}$ zusammenfällt. Trotzdem gibt es kein vom Nullelement verschiedenes Element von $\mathfrak{R}$, welches zu allen Elementen von $\mathfrak{M}$ orthogonal ist.

Dagegen gilt die Umkehrung des Satzes 16:

„Gibt es zu einer Teilmenge $\mathfrak{M}$ eines komplexen euklidischen Raumes $\mathfrak{R}$ ein vom Nullelement verschiedenes Element $\mathfrak{x}_0$ von $\mathfrak{R}$,

welches zu allen Elementen von $\mathfrak{M}$ orthogonal ist, dann fällt die abgeschlossene lineare Hülle von $\mathfrak{M}$ nicht mit $\mathfrak{R}$ zusammen.“ für beliebige (vollständige oder nicht vollständige) komplexe euklidische Räume. Unter den hier gemachten Voraussetzungen kann nämlich offenbar das Element $\mathfrak{x}_0$ selbst der abgeschlossenen linearen Hülle von $\mathfrak{M}$ nicht angehören.

Wir haben in § 1 ein Beispiel für die Möglichkeit angegeben, daß eine schwache Fundamentalfolge eines vollständigen komplexen linearen metrischen Raumes nicht schwach konvergiert. Ein solcher Fall kann in einem vollständigen komplexen *euklidischen* Raume nicht eintreten, sondern es gilt der

Satz 17. *In einem vollständigen komplexen euklidischen Raume ist jede schwache Fundamentalfolge schwach konvergent.*

Jeder vollständige komplexe euklidische Raum ist also auch im Sinne von Mazur 4 schwachvollständig.

Beweis. Es sei $\mathfrak{x}_n$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ eine schwache Fundamentalfolge des vollständigen komplexen euklidischen Raumes $\mathfrak{R}$. Nach Definition 7 existiert also für beliebiges $\mathfrak{y} \in \mathfrak{R}$ $\lim\limits_{n\to\infty}(\mathfrak{x}_n, \mathfrak{y})$. Dasselbe gilt daher auch von $\lim\limits_{n\to\infty}(\mathfrak{y}, \mathfrak{x}_n)$. Der letztere Ausdruck ist aber ein lineares Funktional in $\mathfrak{y}$, welches wegen der Beschränktheit der Folge $\mathfrak{x}_n$ selbst beschränkt ist. Also gibt es nach Satz 11 ein Element $\mathfrak{x}$ von $\mathfrak{R}$ von der Beschaffenheit, daß für alle $\mathfrak{y}$

$$\lim_{n\to\infty}(\mathfrak{y}, \mathfrak{x}_n) = (\mathfrak{y}, \mathfrak{x})$$

oder

$$\lim_{n\to\infty}(\mathfrak{x}_n, \mathfrak{y}) = (\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) \tag{27}$$

ist. Aus (27) folgt aber wegen der Sätze 11 und 2 die Gleichung

$$\operatorname*{Lim}_{n\to\infty} \mathfrak{x}_n = \mathfrak{x}. \tag{13}$$

Damit ist Satz 17 bewiesen.

Aus Satz 17 folgt der allgemeinere

Satz 18. *Ist eine Teilmenge $\mathfrak{M}$ eines* (vollständigen oder nicht vollständigen) *komplexen euklidischen Raumes schwachvollständig, dann gibt es zu jeder schwachen Fundamentalfolge $\mathfrak{x}_n$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ von $\mathfrak{M}$ ein Element $\mathfrak{x}$ von $\mathfrak{M}$ mit*

$$\operatorname*{Lim}_{n\to\infty} \mathfrak{x}_n = \mathfrak{x}. \tag{13}$$

Der Beweis dieses Satzes, der ein Gegenstück zur Definition 4 darstellt, ergibt sich unmittelbar aus Definition 6 und aus Satz 17. Aus Satz 17 folgt ferner, daß *man einen komplexen euklidischen Raum, in dem nicht jede schwache Fundamentalfolge schwach konvergiert, zu einem komplexen euklidischen Raume erweitern kann, in dem jede schwache Fundamentalfolge schwach konvergiert.* (Vergleiche dagegen Satz 7!)

Satz 19. *Dafür, daß eine Folge* $\mathfrak{x}_n$ $(n=1,2,3,\ldots)$ *von Elementen eines komplexen euklidischen Raumes* $\mathfrak{R}$ *eine schwache Fundamentalfolge sei, ist notwendig und hinreichend, daß erstens die Grenzwerte* $\lim\limits_{n\to\infty}(\mathfrak{x}_n, \mathfrak{x}_k)$ $(k=1,2,3,\ldots)$ *alle existieren und zweitens die Folge der Zahlen* $|\mathfrak{x}_n|$ *beschränkt sei.*

Daß die beiden hier angeführten Bedingungen für die Eigenschaft der Folge $\mathfrak{x}_n$, schwache Fundamentalfolge zu sein, notwendig sind, ist fast unmittelbar klar. Beim Beweise, daß diese Bedingungen auch hinreichend sind, kann man ohne Einschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß $\mathfrak{R}$ vollständig ist; es ist nämlich offenbar die Folge $\mathfrak{x}_n$ dann und nur dann in $\mathfrak{R}$ schwache Fundamentalfolge, wenn sie in der kleinsten vollständigen Erweiterung von $\mathfrak{R}$ schwache Fundamentalfolge ist. Wir wollen also annehmen, es sei $\mathfrak{R}$ vollständig. Nun folgt aus der Existenz der Grenzwerte $\lim\limits_{n\to\infty}(\mathfrak{x}_n, \mathfrak{x}_k)$ $(k=1,2,3,\ldots)$, daß auch $\lim\limits_{n\to\infty}(\mathfrak{x}_n, \mathfrak{y})$ stets existiert, wenn $\mathfrak{y}$ der linearen Hülle der Elemente $\mathfrak{x}_k$ $(k=1,2,3,\ldots)$ angehört. Es sei jetzt $\mathfrak{y}$ ein Element der *abgeschlossenen* linearen Hülle der Elemente $\mathfrak{x}_k$ $(k=1,2,3,\ldots)$ und g eine positive obere Schranke für die absoluten Beträge dieser Elemente. Dann kann man für jede positive Zahl ε ein Element $\mathfrak{y}^*$ der einfachen linearen Hülle der Elemente $\mathfrak{x}_k$ finden, so daß

$$|\mathfrak{y}-\mathfrak{y}^*|<\frac{\varepsilon}{4g}$$

ist. Sind andererseits die natürlichen Zahlen m und n größer als eine geeignet gewählte Zahl, dann ist wegen der bereits festgestellten Konvergenz von $(\mathfrak{x}_n, \mathfrak{y}^*)$ für $n\to\infty$

$$|(\mathfrak{x}_n, \mathfrak{y}^*)-(\mathfrak{x}_m, \mathfrak{y}^*)|<\frac{\varepsilon}{2}$$

und daher

$$|(\mathfrak{x}_n, \mathfrak{y})-(\mathfrak{x}_m, \mathfrak{y})| = |[(\mathfrak{x}_n, \mathfrak{y}^*)-(\mathfrak{x}_m, \mathfrak{y}^*)]+(\mathfrak{x}_n-\mathfrak{x}_m, \mathfrak{y}-\mathfrak{y}^*)| \leqq$$
$$\leqq |(\mathfrak{x}_n, \mathfrak{y}^*)-(\mathfrak{x}_m, \mathfrak{y}^*)|+(|\mathfrak{x}_n|+|\mathfrak{x}_m|)\,|\mathfrak{y}-\mathfrak{y}^*|<\frac{\varepsilon}{2}+2g\,\frac{\varepsilon}{4g}=\varepsilon.$$

Also existiert $\lim\limits_{n\to\infty}(\mathfrak{x}_n, \mathfrak{y})$ auch stets, wenn $\mathfrak{y}$ der abgeschlossenen linearen Hülle der Elemente $\mathfrak{x}_k$ $(k=1,2,3,\ldots)$ angehört. Ist endlich $\mathfrak{y}$ ein beliebiges Element von $\mathfrak{R}$, dann gibt es wegen der Vollständigkeit von $\mathfrak{R}$ und nach Satz 15 zwei Elemente $\mathfrak{t}$ und $\mathfrak{n}$ von $\mathfrak{R}$, so daß die Gleichung

$$\mathfrak{y}=\mathfrak{t}+\mathfrak{n}$$

besteht, $\mathfrak{t}$ der genannten abgeschlossenen linearen Hülle angehört und $\mathfrak{n}$ zu allen ihren Elementen orthogonal ist. Dann ist aber für $n=1,2,3,\ldots$

$$(\mathfrak{x}_n, \mathfrak{y})=(\mathfrak{x}_n, \mathfrak{t}).$$

Aus dieser Gleichung folgt aber, daß $\lim\limits_{n\to\infty}(\mathfrak{x}_n, \mathfrak{y})$ für beliebiges $\mathfrak{y}\in\mathfrak{R}$ existiert. Zusammen mit Satz 11 bedeutet das die Richtigkeit der Behauptung, daß die Folge $\mathfrak{x}_n$ $(n=1,2,3,\ldots)$ eine schwache Fundamentalfolge ist.

Satz 20. *Sind $\mathfrak{x}_n$ $(n=1,2,3,\ldots)$ und $\mathfrak{x}$ Elemente eines komplexen euklidischen Raumes, dann ist für das Bestehen der Gleichung*

$$\operatorname*{Lim}_{n\to\infty}\mathfrak{x}_n=\mathfrak{x} \tag{13}$$

notwendig und hinreichend, daß erstens die Gleichungen

$$\lim_{n\to\infty}(\mathfrak{x}_n, \mathfrak{x}_k)=(\mathfrak{x}, \mathfrak{x}_k) \qquad (k=1,2,3,\ldots) \tag{28}$$

und

$$\lim_{n\to\infty}(\mathfrak{x}_n, \mathfrak{x})=(\mathfrak{x}, \mathfrak{x}) \tag{29}$$

bestehen und zweitens die Folge der Zahlen $|\mathfrak{x}_n|$ beschränkt sei.

Daß die angeführten Bedingungen notwendig sind, ist wieder unmittelbar klar. Beim Beweise, daß sie auch hinreichend sind, kann man sich wieder auf den Fall beschränken, daß $\mathfrak{R}$ vollständig ist. Dann folgt aus den Gleichungen (28), aus der Beschränktheit der Folge $|\mathfrak{x}_n|$ und aus den Sätzen 19 und 17, daß diese Folge $\mathfrak{x}_n$ jedenfalls schwach konvergiert. Es werde $\operatorname*{Lim}\limits_{n\to\infty}\mathfrak{x}_n=\mathfrak{x}^*$ gesetzt. Dann folgt aus (28) $(\mathfrak{x}^*-\mathfrak{x}, \mathfrak{x}_k)=0$ und daher durch nochmaligen Grenzübergang

$$(\mathfrak{x}^*-\mathfrak{x}, \mathfrak{x}^*)=0.$$

Andererseits folgt aus (29)

$$(\mathfrak{x}^*-\mathfrak{x}, \mathfrak{x})=0.$$

Durch Subtraktion beider Gleichungen erhält man die zu beweisende Gleichung $\mathfrak{x}^* = \mathfrak{x}$.

Satz 21. *Jede beschränkte unendliche Menge $\mathfrak{M}$ eines komplexen euklidischen Raumes enthält mindestens eine schwache Fundamentalfolge.*

Beweis. Man greife aus $\mathfrak{M}$ zunächst irgendeine Folge $\mathfrak{x}_n$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ heraus. Dann sind die Zahlenfolgen $(\mathfrak{x}_n, \mathfrak{x}_k)$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ alle beschränkt. Daher kann man unter Anwendung des Diagonalverfahrens (vgl. z. B. F. RIESZ **8**, S. 57) aus der Folge $\mathfrak{x}_n$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ ein Teilfolge $\mathfrak{x}_{n_\alpha}$ $(\alpha = 1, 2, 3, \ldots)$ von der Eigenschaft herausgreifen, daß die Grenzwerte $\lim\limits_{\alpha \to \infty} (\mathfrak{x}_{n_\alpha}, \mathfrak{x}_k)$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ alle existieren. Dann existieren insbesondere alle Grenzwerte $\lim\limits_{\alpha \to \infty} (\mathfrak{x}_{n_\alpha}, \mathfrak{x}_{n_\beta})$ $(\beta = 1, 2, 3, \ldots)$. Da andererseits die $\mathfrak{x}_{n_\alpha}$ Elemente der *beschränkten* Menge $\mathfrak{M}$ sind, bilden sie nach Satz 19 eine schwache Fundamentalfolge. Damit ist Satz 21 bewiesen.

MAZUR **4** nennt eine unendliche Menge $\mathfrak{M}$ von Elementen eines (reellen) linearen metrischen Raumes *schwachkompakt,* wenn jede aus $\mathfrak{M}$ herausgegriffene Folge mindestens eine schwache Fundamentalfolge enthält. Mit dieser Benennung kann man daher Satz 21 auch so aussprechen: *in einem komplexen euklidischen Raume ist jede beschränkte unendliche Menge schwachkompakt.*

Satz 22. *$f(\mathfrak{x})$ sei eine reelle Zahl, welche Funktion des Elementes $\mathfrak{x}$ eines komplexen euklidischen Raumes ist, welches in einer beschränkten und in bezug auf die schwache Konvergenz perfekten Menge $\mathfrak{M}$ veränderlich ist. Ist dann $f(\mathfrak{x})$ in $\mathfrak{M}$ überall in bezug auf die schwache Konvergenz stetig, dann besitzt $f(\mathfrak{x})$ in $\mathfrak{M}$ eine endliche obere Grenze g und es gibt auch mindestens eine Stelle von $\mathfrak{M}$, an welcher $f(\mathfrak{x})$ den Wert g wirklich annimmt.*

Dieser Satz ist eine Verallgemeinerung des von HILBERT **3**, S. 200 ausgesprochenen Satzes. Daß die Menge $\mathfrak{M}$ in bezug auf die schwache Konvergenz perfekt ist, soll bedeuten, daß jede schwache Fundamentalfolge von $\mathfrak{M}$ gegen ein Element von $\mathfrak{M}$ schwach konvergiert und daß andererseits jedes Element $\mathfrak{x}$ von $\mathfrak{M}$ Grenzelement einer schwach konvergenten Teilfolge von $\mathfrak{x}$ verschiedener Elemente von $\mathfrak{M}$ ist. Daß $f(\mathfrak{x})$ in $\mathfrak{M}$ überall in bezug auf die schwache Konvergenz stetig ist, soll bedeuten, daß aus $\mathfrak{x}_n \in \mathfrak{M}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ und $\operatorname{Lim}\limits_{n \to \infty} \mathfrak{x}_n = \mathfrak{x}$ (nach Voraussetzung gilt also $\mathfrak{x} \in \mathfrak{M}$) stets $\lim\limits_{n \to \infty} f(\mathfrak{x}_n) = f(\mathfrak{x})$ folgt.

Beweis des Satzes 22. Es sei g die endliche oder unendliche obere Grenze von $f(\mathfrak{x})$ in $\mathfrak{M}$. Dann gibt es also eine Folge $\mathfrak{x}_n$ $(n=1, 2, 3, \ldots)$ mit $\mathfrak{x}_n \in \mathfrak{M}$ und $\lim\limits_{n\to\infty} f(\mathfrak{x}_n) = g$. Diese Folge ist beschränkt, weil die Menge $\mathfrak{M}$ beschränkt ist. Es gibt daher nach Satz 21 eine Teilfolge $\mathfrak{x}_{n_\alpha}$ $(\alpha = 1, 2, 3, \ldots)$ dieser Folge, welche schwache Fundamentalfolge ist. Diese Teilfolge konvergiert aber nach der über $\mathfrak{M}$ gemachten Voraussetzung schwach gegen ein bestimmtes Element $\mathfrak{x}_0$ von $\mathfrak{M}$. Wegen der über $f(\mathfrak{x})$ gemachten Voraussetzung muß daher g endlich und $f(\mathfrak{x}_0) = g$ sein.

Aus Satz 21 folgt speziell (siehe Satz 17) daß *jede beschränkte unendliche Menge eines vollständigen komplexen euklidischen Raumes mindestens eine schwach konvergente Teilfolge enthält.* Es gilt daher erst recht der Satz: *jede beschränkte unendliche Menge eines vollständigen komplexen euklidischen Raumes besitzt mindestens eine schwache Häufungsstelle.*

Definition 11. *Ein linearer Operator B in einem komplexen euklidischen Raume $\mathfrak{R}$ heiße zu dem linearen Operator A in $\mathfrak{R}$ adjungiert, wenn für beliebige Elemente $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ von $\mathfrak{R}$*

$$(A\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = (\mathfrak{x}, B\mathfrak{y}) \tag{30}$$

ist.

Zu einem linearen Operator A in $\mathfrak{R}$ kann es offenbar höchstens einen adjungierten linearen Operator geben. Diesen zu A adjungierten linearen Operator wollen wir, wenn er existiert, stets mit A^* bezeichnen. Wie man auf dieselbe Art wie im endlichdimensionalen komplexen euklidischen Raume und im komplexen Hilbertschen Raume leicht schließen kann, folgt aus der Beschränktheit von A die Beschränktheit von A^* und die Gleichung

$$|A^*| = |A|. \tag{31}$$

Definition 12. *Ein linearer Operator A in $\mathfrak{R}$ heiße selbstadjungiert, wenn A^* existiert und mit A identisch ist.*

Satz 23. *Ist $\mathfrak{R}$ vollständig, dann existiert zu jedem beschränkten linearen Operator A in $\mathfrak{R}$ der adjungierte lineare Operator.*

Beweis. Wenn A beschränkt ist, dann ist $(A\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$ ein beschränktes lineares Funktional in $\mathfrak{x}$. Es gibt daher nach Satz 11 zu jedem $\mathfrak{y}$ genau ein Element $\mathfrak{u}$ von $\mathfrak{R}$, so daß für alle $\mathfrak{x}$ $(A\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = (\mathfrak{x}, \mathfrak{u})$ ist. Dieses Element $\mathfrak{u}$ ist aber offenbar eine lineare Funktion von $\mathfrak{y}$.

D e f i n i t i o n 13. *Ein linearer Operator E in $\mathfrak{R}$ heiße ein* E i n z e l o p e r a t o r, *wenn er selbstadjungiert ist und der Gleichung*

$$E^2 = E \tag{32}$$

genügt.

Ist $\mathfrak{M}$ die lineare Mannigfaltigkeit aller Elemente von $\mathfrak{R}$ von der Form $E\mathfrak{y}$, dann ist $\mathfrak{M}$ regulär und in Gleichung (23) ist $\mathfrak{t} = E\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{n} = \mathfrak{x} - E\mathfrak{x}$ zu setzen. Da somit stets $|E\mathfrak{x}| \leqq |\mathfrak{x}|$ ist, ist jeder Einzeloperator beschränkt. Umgekehrt gibt es zu jeder regulären linearen Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}$ genau einen Einzeloperator, der mit $\mathfrak{M}$ in der hier auseinandergesetzten Beziehung steht. Sämtliche von J. v. NEUMANN **5**, S. 74 bis 78 über Einzeloperatoren (dort „Projektionsoperatoren") abgeleiteten Sätze lassen sich auf beliebige komplexe euklidische Räume übertragen; gewisse dieser Sätze sind allerdings nur unter der Voraussetzung der Vollständigkeit des Raumes richtig. Ein spezieller Einzeloperator ist die Identität (der Einheitsoperator, die Einheit); diese wollen wir ebenso wie J. v. NEUMANN **5** mit 1 bezeichnen.

D e f i n i t i o n 14. *Ein Einzeloperator $E(\lambda)$ in $\mathfrak{R}$, der von einer reellen Veränderlichen λ abhängt, heiße eine* Z e r l e g u n g d e r E i n h e i t, *wenn erstens für $\lambda < \mu$ und beliebiges $\mathfrak{x}$ stets*

$$(E(\lambda)\mathfrak{x}, \mathfrak{x}) \leqq (E(\mu)\mathfrak{x}, \mathfrak{x}) \tag{33}$$

ist und zweitens für beliebiges $\mathfrak{x}$

$$\lim_{\lambda \to \infty} (E(\lambda)\mathfrak{x}, \mathfrak{x}) = (\mathfrak{x}, \mathfrak{x}) \tag{34}$$

und

$$\lim_{\lambda \to -\infty} (E(\lambda)\mathfrak{x}, \mathfrak{x}) = 0 \tag{35}$$

ist.

D e f i n i t i o n 15. *Ist ein Polynom $P(\lambda)$ durch die Gleichung*

$$P(\lambda) = \sum_{k=0}^{n} c_k \lambda^k \tag{36}$$

erklärt und A ein linearer Operator in einem komplexen linearen Raume $\mathfrak{R}$, dann soll unter $P(A)$ der lineare Operator in $\mathfrak{R}$ verstanden werden, welcher durch die Gleichung

$$P(A) = \sum_{k=0}^{n} c_k A^k \qquad (A^0 = 1,\ A^k = A^{k-1}A) \tag{37}$$

definiert ist.

S a t z 24. *Genügt ein selbstadjungierter linearer Operator A in einem komplexen euklidischen Raume $\mathfrak{R}$ für beliebige $\mathfrak{x}$ vom absoluten Betrage Eins der Ungleichung*

(38) $$a \leqq (A\mathfrak{x}, \mathfrak{x}) \leqq b$$

($(A\mathfrak{x}, \mathfrak{x})$ muß reell sein) *und genügt das Polynom $P(\lambda)$ mit reellen Koeffizienten für $a \leqq \lambda \leqq b$ der Ungleichung $P(\lambda) \geqq 0$, dann ist für beliebiges $\mathfrak{x}$*

$$(P(A)\mathfrak{x}, \mathfrak{x}) \geqq 0.$$

Dieser Satz kann allgemein ebenso bewiesen werden, wie ihn F. RIESZ **9**, S. 32 und 33 für den speziellen Fall des komplexen Hilbertschen Raumes bewiesen hat. Aus dem Umstande, daß dieser Satz für beliebige komplexe euklidische Räume gilt, ergibt sich nun ohne weiteres, daß man nach Angabe eines beschränkten selbstadjungierten linearen Operators A in einem *vollständigen* komplexen euklidischen Raume $\mathfrak{R}$ jeder für $a \leqq \lambda \leqq b$ definierten reellen Funktion $f(\lambda)$, welche in diesem Intervalle beschränkt ist und Grenzfunktion einer monoton nicht abnehmenden Folge von Polynomen ist, auf die von F. RIESZ **8** und **9** auseinandergesetzte Weise eindeutig einen selbstadjungierten linearen Operator $f(A)$ in $\mathfrak{R}$ zuordnen kann; dasselbe gilt dann auch von der Differenz zweier Funktionen der betrachteten Art.

Von nun an soll in diesem Paragraphen unter $\mathfrak{R}$ stets ein *vollständiger* komplexer euklidischer Raum verstanden werden. Es soll nun die bisherige Definition des linearen Operatores in $\mathfrak{R}$ durch folgende allgemeinere Definition ersetzt werden:

D e f i n i t i o n 16. *Unter einem linearen Operator in $\mathfrak{R}$ verstehe man eine lineare Abbildung von einer in $\mathfrak{R}$ überall dichten linearen Mannigfaltigkeit $\mathfrak{S}$ in dem Raum $\mathfrak{R}$.*

Die Ausdrucksweise „$\mathfrak{S}$ ist in $\mathfrak{R}$ überall dicht" soll dasselbe bedeuten wie „die abgeschlossene lineare Hülle (es würde hier genügen zu sagen: die abgeschlossene Hülle) von $\mathfrak{S}$ fällt mit $\mathfrak{R}$ zusammen".

Ist A ein linearer Operator in $\mathfrak{R}$ und ist die lineare Mannigfaltigkeit derjenigen $\mathfrak{y}$, für welche $(A\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$ ein *beschränktes* lineares Funktional in $\mathfrak{x}$ ist, in $\mathfrak{R}$ ebenfalls überall dicht, dann wollen wir für diese $\mathfrak{y}$ den zu A *adjungierten* linearen Operator A^* definieren und unter $A^*\mathfrak{y}$ dasjenige (nach Satz 11 existierende und eindeutig bestimmte) Element $\mathfrak{u}$ von $\mathfrak{R}$ verstehen, welches für alle $\mathfrak{x} \in \mathfrak{M}$ der Gleichung

$$(A\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = (\mathfrak{x}, \mathfrak{u})$$

genügt. Auch ein linerarer Operator A in diesem allgemeineren Sinne soll *selbstadjungiert* heißen, wenn A^* existiert und gleich A ist. — Ein linearer Operator A soll mit einem überall sinnvollen linearen Operator B *vertauschbar* heißen, wenn für jedes $\mathfrak{x}$, für welches $A\mathfrak{x}$ Sinn hat (d. h. $\mathfrak{x}$ der in Definition 16 genannten linearen Mannigfaltigkeit $\mathfrak{S}$ angehört) auch $A(B\mathfrak{x})$ Sinn hat und gleich $B(A\mathfrak{x})$ ist.

Satz 25. (Zerlegungssatz von F. RIESZ.) *Zu jedem selbstadjungierten linearen Operator A in $\mathfrak{R}$ gibt es einen und nur einen Einzeloperator E_0 in $\mathfrak{R}$ von folgenden Eigenschaften:*

1. *E_0 ist mit A und mit allen mit A vertauschbaren beschränkten, überall sinnvollen Operatoren in $\mathfrak{R}$ vertauschbar.*

2. *Es ist für alle $\mathfrak{x}$, für welche $A\mathfrak{x}$ Sinn hat,*

$$(E_0 A\mathfrak{x}, \mathfrak{x}) \leqq 0 \tag{39}$$

und

$$([1 - E_0] A\mathfrak{x}, \mathfrak{x}) \geqq 0. \tag{40}$$

3. *Aus $A\mathfrak{x} = 0$ folgt $E_0\mathfrak{x} = 0$.*

Der Beweis dieses Satzes kann allgemein ebenso geführt werden, wie ihn F. RIESZ **9**, S. 31 bis 44 für den Spezialfall des komplexen Hilbertschen Raumes geführt hat.

Satz 26. *Es sei $E(\lambda)$ eine Zerlegung der Einheit.* (Definition 14.) *Wenn das Integral*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \lambda^2 d\,(E(\lambda)\mathfrak{x}, \mathfrak{x})$$

endlich ist, so gibt es immer genau ein $\mathfrak{x}^*$, so daß für alle $\mathfrak{y}$

$$(\mathfrak{x}^*, \mathfrak{y}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda d\,(E(\lambda)\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) \tag{41}$$

ist. (Das Integral rechts ist absolut konvergent.) *Wir definieren für diese $\mathfrak{x}$ eine Funktion $A\mathfrak{x}$ und zwar durch $A\mathfrak{x} = \mathfrak{x}^*$* ($\mathfrak{x}, \mathfrak{x}^*, \mathfrak{y}$ sind Elemente von $\mathfrak{R}$.)

Dann ist A ein selbstadjungierter linearer Operator in $\mathfrak{R}$ und jeder selbstadjungierte lineare Operator in $\mathfrak{R}$ kann mit Hilfe einer Zerlegung der Einheit auf diese Weise erzeugt werden. Durch die Zusatzforderung, es solle stets

$$\lim_{\mu \to \lambda - 0} (E(\mu)\mathfrak{x}, \mathfrak{x}) = (E(\lambda)\mathfrak{x}, \mathfrak{x})$$

sein, ist diese Zerlegung der Einheit auch eindeutig bestimmt.

Dieser Satz kann allgemein ebenso bewiesen werden, wie ihn J. v. NEUMANN **5** und F. RIESZ **9** für den speziellen Fall des komplexen Hilbertschen Raumes bewiesen haben. Genügt die Zerlegung der Einheit $E(\lambda)$ der zuletzt genannten Forderung, dann ist $E(\lambda)$ der nach Satz 25 bestimmte Einzeloperator E_0, welcher zu dem selbstadjungierten linearen Operator $A-\lambda\,.\,1$ gehört.

Ist $E(\lambda)$ eine Zerlegung der Einheit, dann gibt es Einzeloperatoren $G(\lambda)$, so daß stets

$$(42) \qquad (G(\lambda)\mathfrak{x}, \mathfrak{x}) = \lim_{\mu\to\lambda+0} (E(\mu)\mathfrak{x}, \mathfrak{x}) - \lim_{\mu\to\lambda-0} (E(\mu)\mathfrak{x}, \mathfrak{x})$$

ist. Die Menge der Stellen λ, für welche $G(\lambda) \neq 0$ ist, heiße das *Punktspektrum* und die genannten Stellen λ selbst die *Punkteigenwerte* des zugehörigen selbstadjungierten linearen Operators A. Das Punktspektrum eines selbstadjungierten linearen Operators A in einem beliebigen vollständigen komplexen euklidischen Raume *muß nicht abzählbar sein.*

Definition 17. *Ein linearer Operator A in einem komplexen euklidischen Raume heiße vollstetig, wenn die Gleichung*

$$(13) \qquad \operatorname*{Lim}_{n\to\infty} \mathfrak{x}_n = \mathfrak{x}$$

stets

$$\lim_{n\to\infty} A\mathfrak{x}_n = A\mathfrak{x}$$

nach sich zieht.

(In der Literatur kommen auch andere Definitionen der Vollstetigkeit eines linearen Operators in einem linearen metrischen Raume vor; diese sind aber im Falle eines euklidischen Raumes unserer Definition 17 äquivalent.)

Satz 27. *Ein selbstadjungierter linearer Operator A in $\mathfrak{R}$ ist dann und nur dann vollstetig, wenn*

1. *A kein Streckenspektrum besitzt, d. h. aus $G(\lambda)\mathfrak{x} = 0$ für alle λ $\mathfrak{x} = 0$ folgt;*

2. *die Menge der Punkteigenwerte entweder endlich ist oder zwar unendlich ist, aber nur die einzige Häufungsstelle Null besitzt* (in diesem Falle muß diese Menge daher abzählbar sein) *und*

3. *die linearen Mannigfaltigkeiten, welche zu den Einzeloperatoren $G(\lambda)$ $(\lambda \neq 0)$ gehören, endliche Dimensionszahlen besitzen.*

Auch dieser Satz kann allgemein ebenso bewiesen werden wie für den Hilbertschen Raum. (HILBERT **3,** S. 201 bis 203.) Aus den Sätzen 26 und 27 folgt, daß es zu einem vollstetigen selbstadjungierten linearen Operator A in $\mathfrak{R}$ stets eine endliche oder unendliche Folge von Elementen $\mathfrak{e}_k$ von $\mathfrak{R}$ und eine zugehörige Folge reeller Zahlen λ_k gibt, welche folgenden Gleichungen genügen:

$$(\mathfrak{e}_k, \mathfrak{e}_l) = \begin{cases} 0 & \text{für } k \neq l, \\ 1 & \text{für } k = l, \end{cases} \tag{43}$$

$$\lim_{k \to \infty} \lambda_k = 0 \qquad \text{(wenn eine unendliche Folge vorliegt),} \tag{44}$$

$$A\mathfrak{x} = \sum_k \lambda_k (\mathfrak{x}, \mathfrak{e}_k)\, \mathfrak{e}_k. \tag{45}$$

Auch die von J. v. NEUMANN **5,** S. 115 und 116 und **6,** S. 410 bis 412 ausgesprochenen Sätze über die Spektralzerlegung sogenannter *normaler* Operatoren gelten für beliebige vollständige komplexe euklidische Räume. Die in den genannten Abhandlungen geführten Beweise lassen sich nämlich fast ohne Änderung des Wortlautes auf unseren allgemeinen Fall übertragen.

§ 3 Beweis weiterer Sätze über komplexe euklidische Räume unter Anwendung des Wohlordungssatzes.

Einen vollständigen komplexen euklidischen Raum $\mathfrak{R}$ kann man auf folgende Weise definieren. Man verstehe unter den Elementen von $\mathfrak{R}$ die komplexwertigen Funktionen $\varphi(u)$, deren Argument u die Elemente irgendeiner Menge $\mathfrak{N}$ durchläuft; dabei soll jedoch $\varphi(u)$ nur für höchstens abzählbar viele solche Elemente von Null verschieden sein, und wenn u_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ Elemente von $\mathfrak{N}$ von der Beschaffenheit sind, daß für $u \neq u_n$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ $\varphi(u) = 0$ ist, dann soll außerdem die unendliche Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} |\varphi(u_n)|^2$ konvergieren. Die Summe zweier solcher Funktionen und das Produkt einer solchen Funktion mit einer komplexen Zahl sind dann wieder von derselben Beschaffenheit. Wir wollen daher die Summe zweier Elemente von $\mathfrak{R}$ und das Produkt eines Elementes von $\mathfrak{R}$ mit einer komplexen Zahl durch die Festsetzung definieren, daß diese Operationen mit den Werten der betreffenden Funktionen $\varphi(u)$ ausgeführt werden sollen. Sind ferner $\mathfrak{x} = \{\varphi(u)\}$ und $\mathfrak{y} = \{\psi(u)\}$ zwei Elemente von $\mathfrak{R}$ und ist für $u \neq u_n$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ $\varphi(u) = 0$ und $\psi(u) = 0$, dann soll das innere Produkt $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$ der beiden Elemente $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ durch die Gleichung

$$(46)\qquad (\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(u_n)\, \overline{\psi(u_n)}$$

definiert werden; es ist nämlich leicht einzusehen, daß die auf der rechten Seite von (46) stehende unendliche Reihe absolut konvergiert. Man kann unschwer erkennen, daß durch die vorstehenden Festsetzungen wirklich ein komplexer euklidischer Raum definiert ist. Ebenso kann man erkennen, daß dieser komplexe euklidische Raum auch vollständig ist; man muß nur beachten, daß einerseits die Vereinigungsmenge abzählbar vieler abzählbarer Mengen wieder abzählbar ist und daß andererseits der komplexe Hilbertsche Raum vollständig ist. Die Elemente von $\mathfrak{R}$ von der Eigenschaft, daß an einer einzigen Stelle u_0 $\varphi(u) = 1$ und sonst $\varphi(u) = 0$ ist, bilden ein System paarweise orthogonaler Elemente vom absoluten Betrage Eins. Ist daher die Menge $\mathfrak{N}$ weder endlich noch abzählbar, dann ist $\mathfrak{R}$ sicher weder ein endlichdimensionaler komplexer euklidischer Raum noch ein komplexer Hilbertscher Raum. — Komplexe euklidische Räume $\mathfrak{R}$, die äquivalenten Mengen $\mathfrak{N}$ entsprechen, sind offenbar isomorph. — Den Fall, daß $\mathfrak{N}$ die Menge der reellen Zahlen ist, behandelt J. v. NEUMANN **7**, S. 37 und 38.

Definition 18. *Ist $\aleph$ eine beliebige Kardinalzahl, dann soll ein vollständiger komplexer euklidischer Raum $\mathfrak{R}_\aleph$ folgendermaßen definiert werden: man setze irgendeine Menge $\mathfrak{N}$ von der Mächtigkeit $\aleph$ fest und ordne hierauf dieser Menge auf die eben beschriebene Art einen vollständigen komplexen euklidischen Raum zu. Dieser vollständige komplexe euklidische Raum soll $\mathfrak{R}_\aleph$ heißen.*

$\mathfrak{R}_\aleph$ ist speziell ein endlichdimensionaler komplexer euklidischer Raum, wenn $\aleph$ eine endliche Kardinalzahl, und der komplexe Hilbertsche Raum, wenn $\aleph$ die Mächtigkeit der abzählbaren Mengen ist.

Definition 19. *Unter einem vollständigen normierten Orthogonalsystem von Elementen eines vollständigen komplexen euklidischen Raumes $\mathfrak{R}$ verstehe man eine Menge $\mathfrak{M}$ von Elementen $\mathfrak{e}$ von $\mathfrak{R}$ von folgenden Eigenschaften:*

1. *es ist stets* $|\mathfrak{e}| = 1$;
2. *für* $\mathfrak{e}_1 \in \mathfrak{M}$, $\mathfrak{e}_2 \in \mathfrak{M}$, $\mathfrak{e}_1 \neq \mathfrak{e}_2$ *ist* $(\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2) = 0$ *und*
3. *es gibt kein vom Nullelement verschiedenes Element von $\mathfrak{R}$, welches zu allen $\mathfrak{e}$ orthogonal ist.*

In einem $\mathfrak{R}_{\aleph}$ bilden die bereits betrachteten Funktionen $\varphi(u)$, welche für ein Element von $\mathfrak{R}$ gleich Eins und sonst gleich Null sind, ein vollständiges normiertes Orthogonalsystem.

Satz 28. *In jedem vollständigen komplexen euklidischen Raume gibt es mindestens ein vollständiges normiertes Orthogonalsystem.*

Beweis. Man ordne jeder Teilmenge $\mathfrak{M}$ von $\mathfrak{R}$ als ausgezeichnetes Element ein Element $\mathfrak{x}(\mathfrak{M})$ von $\mathfrak{M}$ unter folgender einschränkender Bedingung zu: wenn es Elemente von $\mathfrak{M}$ gibt, welche den absoluten Betrag Eins haben und zu allen Elementen der Komplementärmenge von $\mathfrak{M}$ orthogonal sind, dann soll $\mathfrak{x}(\mathfrak{M})$ ein solches Element sein; andernfalls darf $\mathfrak{x}(\mathfrak{M})$ ein beliebiges Element von $\mathfrak{M}$ sein. Es gibt dann genau eine Wohlordnung von $\mathfrak{R}$ von der Eigenschaft, daß jedes Element $\mathfrak{x}$ das ausgezeichnete Element der Komplementärmenge des durch $\mathfrak{x}$ bestimmten Abschnittes ist. Ist in dieser Wohlordnung $\mathfrak{x}_0$ das erste Element, welches nicht die Eigenschaft hat, den absoluten Betrag Eins zu besitzen und zu allen seinen Vorgängern orthogonal zu sein, dann ist der durch $\mathfrak{x}_0$ bestimmte Abschnitt offenbar ein wohlgeordnetes vollständiges normiertes Orthogonalsystem von $\mathfrak{R}$.

Satz 29. *Ein vollständiger komplexer euklidischer Raum ist die vollständige lineare Hülle jedes seiner vollständigen normierten Orthogonalsysteme.*

Der Beweis dieses Satzes ergibt sich unmittelbar aus dem Satze 16.

Satz 30. *Besitzen zwei vollständige komplexe euklidische Räume vollständige normierte Orthogonalsysteme von gleicher Mächtigkeit, dann sind sie isomorph.*

Beweis. Nach Satz 10 sind diese beiden vollständigen normierten Orthogonalsysteme isomorph, nach den Sätzen 1 und 29 daher auch die Räume selbst.

Ein Spezialfall des Satzes 30 ist der

Satz 31. *Hat ein vollständiges normiertes Orthogonalsystem eines vollständigen komplexen euklidischen Raumes die Mächtigkeit $\aleph$, dann ist dieser Raum $\mathfrak{R}_{\aleph}$ isomorph.*

Aus der zu Satz 1 gemachten Bemerkung ergibt sich auch, wie man in diesem Falle eine unitäre Abbildung zwischen $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{R}_{\aleph}$, d. h. eine eineindeutige lineare Abbildung zwischen diesen beiden Räumen, welche die absoluten Beträge ungeändert läßt, herstellen kann. Man stelle zunächst eine eineindeutige Zuordnung zwischen dem vollständigen normierten Orthogonalsystem von $\mathfrak{R}$ und der früher betrachteten Menge $\mathfrak{N}$ her. Dasjenige Element des vollständigen normierten Orthogonalsystems von $\mathfrak{R}$, welches dabei dem Element u von $\mathfrak{N}$ zugeordnet ist, möge $\mathfrak{e}(u)$ heissen. Dasjenige Element von $\mathfrak{R}_\aleph$, dessen zugehörige Funktion $\varphi(u)$ an der Stelle $u = u_0$ gleich Eins und sonst gleich Null ist, möge $\mathfrak{f}(u_0)$ heißen. Nun ist durch die Festsetzung, daß dem Element $\mathfrak{e}(u)$ von $\mathfrak{R}$ das Element $\mathfrak{f}(u)$ von $\mathfrak{R}_\aleph$ zugeordnet sein soll, eine unitäre Abbildung zwischen $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{R}_\aleph$ eindeutig bestimmt. Man hat nämlich jeder Linearkombination endlich vieler $\mathfrak{e}(u)$ die entsprechende Linearkombination der $\mathfrak{f}(u)$ zuzuordnen. Ist aber $\mathfrak{x}$ ein beliebiges Element von $\mathfrak{R}$, dann ist $\mathfrak{x}$ starkes Grenzelement einer Folge von Linearkombinationen endlich vieler $\mathfrak{e}(u)$; die entsprechenden Linearkombinationen der $\mathfrak{f}(u)$ bilden dann eine starke Fundamentalfolge, welche wegen der Vollständigkeit von $\mathfrak{R}_\aleph$ gegen ein Element $\mathfrak{y}$ von $\mathfrak{R}_\aleph$ stark konvergiert; dieses Element $\mathfrak{y}$ ist davon unabhängig, welche gegen $\mathfrak{x}$ stark konvergente Folge von Linearkombinationen endlich vieler $\mathfrak{e}(u)$ man gewählt hat: dieses Element $\mathfrak{y}$ von $\mathfrak{R}_\aleph$ muß dem Element $\mathfrak{x}$ von $\mathfrak{R}$ zugeordnet werden.

Ist $\varphi(u)$ die Funktion, durch welche das Element $\mathfrak{y}$ von $\mathfrak{R}_\aleph$ definiert ist, und ist für $u \neq u_n$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ $\varphi(u) = 0$, dann ist offenbar

(47) $$\mathfrak{y} = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(u_n)\, \mathfrak{f}(u_n),$$

wo das Summenzeichen im Sinne der starken Konvergenz zu verstehen ist. Daher ist diesem $\mathfrak{y}$ das Element $\mathfrak{x}$ von $\mathfrak{R}$ zugeordnet, welches durch die Gleichung

(48) $$\mathfrak{x} = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(u_n)\, \mathfrak{e}(u_n)$$

gegeben ist. Andererseits hat man offenbar

(49) $$(\mathfrak{y}, \mathfrak{f}(u)) = \varphi(u),$$

daher ist auch

(50) $$(\mathfrak{x}, \mathfrak{e}(u)) = \varphi(u)$$

und man erhält auf Grund von (48) den

Satz 32. *Ist $\mathfrak{M}$ ein vollständiges normiertes Orthogonalsystem eines vollständigen komplexen euklidischen Raumes $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{x}$ ein* *beliebiges Element von* $\mathfrak{R}$, *dann sind von den Zahlen* $(\mathfrak{x}, \mathfrak{e})$ *mit* $\mathfrak{e} \in \mathfrak{M}$ *höchstens abzählbar viele von Null verschieden. Ist weiter* $\mathfrak{e}_n \in \mathfrak{M}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ *und* $(\mathfrak{x}, \mathfrak{e}) = 0$ *für* $\mathfrak{e} \in \mathfrak{M}$, $\mathfrak{e} \neq \mathfrak{e}_n$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, *dann ist*

$$\mathfrak{x} = \sum_{n=1}^{\infty} (\mathfrak{x}, \mathfrak{e}_n)\, \mathfrak{e}_n, \tag{51}$$

wobei das Summenzeichen im Sinne der starken Konvergenz zu verstehen ist.

Diesen Satz kann man übrigens auch unabhängig von den früheren Überlegungen nur unter Benützung des Satzes 28 (und der Definition des vollständigen komplexen euklidischen Raumes) beweisen. Sind nämlich $\mathfrak{e}_n$ $(n = 1, 2, \ldots, p)$ endlich viele Elemente von $\mathfrak{M}$, dann ist

$$\sum_{n=1}^{p} |(\mathfrak{x}, \mathfrak{e}_n)|^2 + \left| \mathfrak{x} - \sum_{n=1}^{p} (\mathfrak{x}, \mathfrak{e}_n)\, \mathfrak{e}_n \right|^2 = |\mathfrak{x}|^2 \tag{52}$$

und daher

$$\sum_{n=1}^{p} |(\mathfrak{x}, \mathfrak{e}_n)|^2 \leqq |\mathfrak{x}|^2. \tag{53}$$

Aus (53) folgt, daß von den Zahlen $(\mathfrak{x}, \mathfrak{e})$ mit $\mathfrak{e} \in \mathfrak{M}$ höchstens abzählbar viele von Null verschieden sein können. Ist weiter $\mathfrak{e}_n \in \mathfrak{M}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ und $(\mathfrak{x}, \mathfrak{e}) = 0$ für $\mathfrak{e} \in \mathfrak{M}$, $\mathfrak{e} \neq \mathfrak{e}_n$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, dann ist wegen (53) die unendliche Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} |(\mathfrak{x}, \mathfrak{e}_n)|^2$ konvergent und es bilden daher die Elemente $\sum_{n=1}^{p} (\mathfrak{x}, \mathfrak{e}_n)\, \mathfrak{e}_n$ $(p = 1, 2, 3, \ldots)$ eine starke Fundamentalfolge; diese muß daher wegen der Vollständigkeit von $\mathfrak{R}$ stark konvergieren. Wird ihr Grenzelement mit $\sum_{n=1}^{\infty} (\mathfrak{x}, \mathfrak{e}_n)\, \mathfrak{e}_n$ bezeichnet, dann ist $\mathfrak{x} - \sum_{n=1}^{\infty} (\mathfrak{x}, \mathfrak{e}_n)\, \mathfrak{e}_n$ zu allen Elementen von $\mathfrak{M}$ orthogonal; also muß

$$\mathfrak{x} - \sum_{n=1}^{\infty} (\mathfrak{x}, \mathfrak{e}_n)\, \mathfrak{e}_n = 0$$

sein, d. h. die in Satz 32 behauptete Gleichung (51) besteht.

Aus diesem so unabhängig von den früheren Überlegungen bewiesenen Satze 32 ergibt sich auch ein neuer Beweis des Satzes 11. Es sei L ein beschränktes lineares Funktional in $\mathfrak{R}$ und es seien wieder $\mathfrak{e}_n$ $(n = 1, 2, \ldots, p)$ endlich viele Elemente des vollständigen normierten Orthogonalsystems $\mathfrak{M}$ von $\mathfrak{R}$. Dann ist

$$L\sum_{n=1}^{p}(\overline{L\mathfrak{e}_n})\,\mathfrak{e}_n=\sum_{n=1}^{p}|L\mathfrak{e}_n|^2$$

und daher

$$\sum_{n=1}^{p}|L\mathfrak{e}_n|^2\leqq|L|\left|\sum_{n=1}^{p}(\overline{L\mathfrak{e}_n})\,\mathfrak{e}_n\right|=|L|\sqrt{\sum_{n=1}^{p}|L\mathfrak{e}_n|^2},$$

also

$$\sum_{n=1}^{p}|L\mathfrak{e}_n|^2\leqq|L|^2. \tag{54}$$

Somit sind von den Zahlen $L\mathfrak{e}$ mit $\mathfrak{e}\in\mathfrak{M}$ höchstens abzählbar viele von Null verschieden; ist $\mathfrak{e}_n\in\mathfrak{M}$ für $n=1,2,3,\ldots$ und für $\mathfrak{e}\in\mathfrak{M}$, $\mathfrak{e}\neq\mathfrak{e}_n$ $(n=1,2,3,\ldots)$ $L\mathfrak{e}=0$, dann ist die unendliche Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}|L\mathfrak{e}_n|^2$ konvergent und daher die unendliche Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}(\overline{L\mathfrak{e}_n})\,\mathfrak{e}_n$ stark konvergent. Man setze

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\overline{L\mathfrak{e}_n})\,\mathfrak{e}_n=\mathfrak{u}. \tag{55}$$

Ist jetzt $\mathfrak{x}$ irgendein Element von $\mathfrak{R}$, dann kann man ohne Einschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß für $\mathfrak{e}\in\mathfrak{M}$, $\mathfrak{e}\neq\mathfrak{e}_n$ $(n=1,2,3,\ldots)$ $(\mathfrak{x},\mathfrak{e})=0$ und daher

$$\mathfrak{x}=\sum_{n=1}^{\infty}(\mathfrak{x},\mathfrak{e}_n)\,\mathfrak{e}_n \tag{51}$$

ist. Dann ist aber

$$L\mathfrak{x}=L\sum_{n=1}^{\infty}(\mathfrak{x},\mathfrak{e}_n)\,\mathfrak{e}_n=\sum_{n=1}^{\infty}(\mathfrak{x},\mathfrak{e}_n)\,L\mathfrak{e}_n;$$

es ist aber nach (51) und (55) auch

$$(\mathfrak{x},\mathfrak{u})=\sum_{n=1}^{\infty}(\mathfrak{x},\mathfrak{e}_n)\,L\mathfrak{e}_n.$$

Also ist

$$L\mathfrak{x}=(\mathfrak{x},\mathfrak{u}), \tag{22}$$

wie in Satz 11 behauptet wird. (Der in § 2 gegebene Beweis des Satzes 11 hat gegenüber diesem Beweise den Vorzug, daß er ohne Benützung des Wohlordnungssatzes auskommt.)

Wir haben in Satz 31 festgestellt, daß jeder vollständige komplexe euklidische Raum $\mathfrak{R}$ einem $\mathfrak{R}_{\aleph}$ isomorph ist. Ich behaupte nun, daß *jedes* $\mathfrak{R}$ *auch nur einem* $\mathfrak{R}_{\aleph}$ *isomorph ist.* Um das zu beweisen, genügt es offenbar, folgenden Satz zu beweisen:

Satz 33. *Zwei verschiedene vollständige normierte Orthogonalsysteme eines vollständigen komplexen euklidischen Raumes* $\mathfrak{R}$ *haben stets die gleiche Mächtigkeit.*

Beweis. Es seien $\mathfrak{M}^{(1)}$ und $\mathfrak{M}^{(2)}$ zwei vollständige normierte Orthogonalsysteme von $\mathfrak{R}$. Ist $e^{(1)}$ ein Element von $\mathfrak{M}^{(1)}$, dann sind von den Zahlen $(e^{(1)}, e^{(2)})$ mit $e^{(2)} \in \mathfrak{M}^{(2)}$ höchstens abzählbar viele von Null verschieden; ist $e_n^{(2)} \in \mathfrak{M}^{(2)}$ für $n = 1, 2, 3, \ldots$ und ist für $e^{(2)} \in \mathfrak{M}^{(2)}$, $e^{(2)} \neq e_n^{(2)}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ $(e^{(1)}, e^{(2)}) = 0$, dann ist (vergleiche (51))

$$(56) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} |(e^{(1)}, e_n^{(2)})|^2 = 1.$$

Aus (56) folgt, daß bei festem $e^{(1)} \in \mathfrak{M}^{(1)}$ von den Zahlen $(e^{(1)}, e^{(2)})$ mit $e^{(2)} \in \mathfrak{M}^{(2)}$ mindestens eine von Null verschieden ist. Man kann nun in ganz entsprechender Weise schließen, daß auch bei festem $e^{(2)} \in \mathfrak{M}^{(2)}$ von den Zahlen $(e^{(1)}, e^{(2)})$ mit $e^{(1)} \in \mathfrak{M}^{(1)}$ mindestens eine von Null verschieden ist. Jedes Element $e^{(2)}$ von $\mathfrak{M}^{(2)}$ kommt daher mindestens in einer der oben betrachteten Folgen $e_n^{(2)}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, welche den Elementen $e^{(1)}$ von $\mathfrak{M}^{(1)}$ zugeordnet sind, wirklich vor. Also ist $\mathfrak{M}^{(2)}$ die Vereinigungsmenge einer mit $\mathfrak{M}^{(1)}$ äquivalenten Gesamtheit abzählbarer Mengen. Sind also $\aleph^{(1)}$ und $\aleph^{(2)}$ die Mächtigkeiten von $\mathfrak{M}^{(1)}$ und $\mathfrak{M}^{(2)}$ und ist $\aleph_0$ die Mächtigkeit der abzählbaren Mengen, dann ist

$$(57) \qquad \aleph^{(2)} \leqq \aleph_0 \aleph^{(1)}.$$

Man kann nun annehmen, daß die Mengen $\mathfrak{M}^{(1)}$ und $\mathfrak{M}^{(2)}$ unendlich sind, weil für den entgegengesetzten Fall Satz 33 als bekannt angesehen werden kann. Für jede *unendliche* Kardinalzahl $\aleph$ ist aber

$$(58) \qquad \aleph_0 \aleph = \aleph.$$

(S. z. B. F. Hausdorff, *Mengenlehre,* 1. Auflage (Leipzig, 1914), S. 127 oder 2. Auflage (Leipzig, 1927), S. 71.) Also folgt aus der Ungleichung (57)

$$(59) \qquad \aleph^{(2)} \leqq \aleph^{(1)}.$$

Da man ebenso die Ungleichung $\aleph^{(1)} \leqq \aleph^{(2)}$ beweisen kann, ergibt sich die Gleichung

$$(60) \qquad \aleph^{(2)} = \aleph^{(1)}.$$

Damit ist Satz 33 bewiesen. Aus Satz 33 folgt insbesondere auch, daß *die komplexen euklidischen Räume* $\mathfrak{R}_{\aleph^{(1)}}$ *und* $\mathfrak{R}_{\aleph^{(2)}}$ *mit* $\aleph^{(1)} \neq \aleph^{(2)}$ *sicher nicht isomorph sind.*

Definition 20. *Ist* $\mathfrak{R}$ *ein vollständiger komplexer euklidischer Raum und* $\mathfrak{M}$ *ein vollständiges normiertes Orthogonalsystem von* $\mathfrak{R}$, *dann heiße die Mächtigkeit von* $\mathfrak{M}$ *die Dimensionszahl von* $\mathfrak{R}$.

Der vollständige komplexe euklidische Raum $\mathfrak{R}_\aleph$ hat demnach die Dimensionszahl $\aleph$.

Definition 21. *Unter der Dimensionszahl eines beliebigen komplexen euklidischen Raumes verstehe man die Dimensionszahl seiner kleinsten vollständigen Erweiterung.*

Im Sinne dieser Definition 21 ist das Wort Dimensionszahl in der Überschrift dieser Arbeit zu verstehen.

Anmerkung. In analoger Weise, wie wir hier Satz 33 bewiesen haben, kann man auch beweisen, daß *je zwei Basen* $\mathfrak{B}^{(1)}$ *und* $\mathfrak{B}^{(2)}$ *eines komplexen linearen Raumes* $\mathfrak{R}$ *stets die gleiche Mächtigkeit haben.*

Unter einer *Basis* eines komplexen linearen Raumes $\mathfrak{R}$ soll dabei mit HAUSDORFF **2,** S. 395 eine Menge von Elementen von $\mathfrak{R}$ verstanden werden, von denen endlich viele stets linear unabhängig sind und deren lineare Hülle mit $\mathfrak{R}$ zusammenfällt.

In den Linearkombinationen endlich vieler Elemente von $\mathfrak{B}^{(2)}$, als welche man die Elemente von $\mathfrak{B}^{(1)}$ darstellen kann, muß nämlich jedes Element von $\mathfrak{B}^{(2)}$ mindestens einmal wirklich vorkommen; aus der gegenteiligen Annahme würde nämlich ein Widerspruch gegen die Voraussetzung folgen, daß endlich viele Elemente von $\mathfrak{B}^{(2)}$ stets linear unabhängig sind. Also ist $\mathfrak{B}^{(2)}$ die Vereinigungsmenge einer $\mathfrak{B}^{(1)}$ äquivalenten Gesamtheit endlicher Mengen. Man kann nun entsprechend weiter schließen wie beim Beweise des Satzes 33.

Literaturverzeichnis.

1. ST. BANACH, *Théorie des opérations linéaires* (Warschau, 1932).

2. F. HAUSDORFF, Zur Theorie der linearen metrischen Räume, *Journal für die reine und angewandte Mathematik,* **167** (1932), S. 294—311.

3. D. HILBERT, Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen, 4. Mitteilung, *Nachrichten von der königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, mathematisch-physikalische Klasse,* 1906, S. 157—227.

4. S. Mazur, Über die Nullstellen linearer Operationen, *Studia Mathematica*, **2** (1930), S. 11—20.

5. J. v. Neumann, Allgemeine Eigenwerttheorie Hermitescher Funktionaloperatoren, *Mathematische Annalen*, **102** (1930), S. 49—131.

6. J. v. Neumann, Zur Algebra der Funktionaloperationen und Theorie der normalen Operatoren, *Mathematische Annalen*, **102** (1930), S. 370—427.

7. J. v. Neumann, *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik* (Berlin, 1932).

8. F. Riesz, *Les systèmes d'équations linéaires à une infinité d'inconnues* (Paris, 1913).

9. F. Riesz, Über die linearen Transformationen des komplexen Hilbertschen Raumes, *diese Acta*, **5** (1930), S. 23—54.

10. E. Schmidt, Über die Auflösung linearer Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten, *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, **25** (1908), S. 53—77.

(Eingegangen am 24. Februar 1934.)