Über trennende Knotenpunkte in Graphen (nebst Anwendungen auf Determinanten und Matrizen).

Von DÉNES KÖNIG in Budapest.

Unter einem *Graphen* versteht man eine endliche oder unendliche Menge von Elementen, die *Knotenpunkte (Punkte)* genannt werden und von denen gewisse Paare durch eine oder mehrere (eventuell unendlich viele) *Kanten* „verbunden sind." Eine Kante, die P und Q verbindet, wird manchmal durch PQ bezeichnet; P und Q sind die *Endpunkte* dieser Kante. Im Gegensatz zur kontiunierlich-geometrischen Auffassung wird in der *kombinatorischen* (abstrakten) Auffassung der Graphentheorie — und im Folgenden wird ausschließlich diese Auffassung zur Geltung kommen — eine Kante nicht als Punktmenge aufgefaßt: eine Kante PQ ist einfach eine *Zusammenfassung* der verschiedenen[1]) Elemente P und Q; sie besitzt die *einzige* definierende Eigenschaft ihre Endpunkte P, Q zu bestimmen. Ein Graph wird schon durch seine Kanten bestimmt, als Knotenpunkte gelten stets die Endpunkte seiner Kanten.

Ein Knotenpunkt heißt ein *Endpunkt* eines Graphen, wenn in ihm eine einzige Kante (eine *Endkante*) endet. Ein Graph heißt *endlich* oder *unendlich*, je nach dem er endlich oder unendlich viele Kanten besitzt. Sind alle Kanten (also auch alle Knotenpunkte) des Graphen G' im Graphen G enthalten, so heißt G' ein *Teilgraph* von G. Zwei Arten von Graphen spielen als Teilgraphen eine besondere Rolle: sind die Punkte $P_1, P_2, \ldots, P_n$ sämtlich von einander verschieden, so bilden Kanten vom Typus P_1P_2, $P_2P_3, \ldots,$ $P_{n-1}P_n$ einen *Weg* $(P_1P_2 \ldots P_n)$ und verschiedene Kanten vom Typus P_1P_2, $P_2P_3, \ldots, P_{n-1}P_n$, P_nP_1 einen *Kreis*. Hier ist $n \geqq 2$

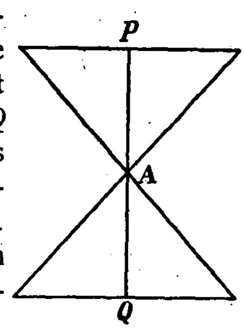
[1]) Sog. „Schlingen" werden also hier ausgeschlossen.

eine beliebige endliche Zahl. Ein Graph heißt *zusammenhängend,* wenn für irgend zwei seiner Knotenpunkte ein Weg existiert, welcher diese „verbindet." Werden die Kanten eines Graphen derart in Klassen eingeteilt, daß zwei Kanten dann und nur dann derselben Klasse zugeteilt werden, wenn ein und derselbe Weg des Graphen diese zwei Kanten enthält, so bilden die Kanten derselben Klasse je einen *zusammenhängenden Bestandteil* des Graphen. Jeder Graph zerfällt auf eine eindeutige Weise in seine zusammenhängenden Bestandteile. Zwei Graphen (Wege, Kreise) heißen *fremd,* wenn sie keinen gemeinsamen Knotenpunkt (also auch keine gemeinsame Kante) besitzen.

Im Folgenden werden aus den ersten Elementen der Graphentheorie noch folgende zwei leicht beweisbare Sätze angewendet werden. Verbindet ein Weg W_1 die Knotenpunkte P_1 und P_2 und ein Weg W_2 die Knotenpunkte P_2 und P_3, so bilden gewisse Kanten von W_1 und W_2 einen Weg, der P_1 und P_3 verbindet. Enthält ein Kreis K_1 die Kanten k_1 und k_2 und ein Kreis K_2 die Kanten k_2 und k_3, so bilden gewisse Kanten von K_1 und K_2 einen Kreis, der k_1 und k_3 enthält.

§ 1. Artikulationen und Glieder.

In der Theorie der endlichen und der unendlichen Graphen spielt eine Art von Knotenpunkten — Artikulation genannt — eine besondere Rolle. Sie sind durch eine analoge Eigenschaft ausgezeichnet, wie unter den Kanten die sog. Brücken.[2]) Ein Knotenpunkt A eines Graphen G heiße nämlich eine *Artikulation* von G, wenn G zwei nach A laufende Kanten AP und AQ von der Beschaffenheit besitzt, daß jeder Weg von G, der P mit Q verbindet, auch A enthält (s. die Figur). Dies besagt m. a. W., daß kein Kreis von G zugleich die drei Knotenpunkte A, P, Q enthält. Aus dieser Definition folgt unmittelbar: ein Endpunkt des Graphen ist niemals eine Artikulation; derjenige Endpunkt einer Endkante, der kein Endpunkt des Graphen ist, ist eine Artikulation; jeder Knotenpunkt eines kreislosen Graphen (eines „Baumes") ist ent-



[2]) Eine Kante eines zusammenhängenden Graphen heißt eine *Brücke,* falls die übrigen Kanten einen nicht-zusammenhängenden Graphen bilden.

weder ein Endpunkt oder eine Artikulation; die Endpunkte einer Brücke sind Artikulationen. Es gilt der Satz:

1. *Ein Knotenpunkt A eines Graphen G ist dann und nur dann eine Artikulation, wenn man die übrigen Knotenpunkte von G so in zwei nichtleere Klassen Π_1 und Π_2 einteilen kann, daß jeder $\Pi_1\Pi_2$-Weg*[3]) *den Punkt A enthält.*

Sei nämlich erstens A eine Artikulation, also AP und AQ zwei solche Kanten, daß jeder Weg von P nach Q den Punkt A enthält. Betrachten wir sämtliche Wege $W_1 = AP \ldots X$, die mit der Kante AP beginnen. Die zweiten Endpunkte X von allen solchen Wegen sollen die Menge Π_1 bilden. Dann gehört also P zu Π_1, jedoch Q zur komplementären Menge Π_2. Gäbe es nun einen Weg W von einem Punkte X aus Π_1 nach einem Punkt Y aus Π_2, welcher A nicht enthält, so könnte man aus den Kanten der Wege W_1 und W einen von A nach Y führenden Weg zusammensetzen; dieser würde mit der Kante AP beginnen (da aus W und aus W_1 keine andere Kante in A endet) und Y würde nicht zu Π_2, sondern zu Π_1 gehören.

Zweitens nehmen wir an, die Mengen Π_1 und Π_2 seien von der genannten Beschaffenheit, X sei ein beliebiger Punkt aus Π_1 und Y aus Π_2. Gibt es keinen Weg von A nach X, so kann natürlich kein Weg von X nach Y den Punkt A enthalten. Wir dürfen also voraussetzen, daß ein Weg $AR_1R_2 \ldots X$ von A nach X und ebenso auch ein Weg $AS_1S_2 \ldots Y$ von A nach Y existiert. Hier ist $R_1 \neq S_1$, da man sonst aus den Kanten der Teilwege $R_1R_2 \ldots X$ und $S_1S_2 \ldots Y$ einen A nicht enthaltenden Weg von X nach Y bilden könnte, was unserer Annahme widerspricht. Dann ist aber A in der Tat eine Artikulation, da jeder Weg W von R_1 nach S_1 den Punkt A enthält, sonst könnte man nämlich aus den Kanten der drei Wege $X \ldots R_2R_1$, W und $S_1S_2 \ldots Y$ einen Weg von X nach Y bilden, der A nicht enthält.

Der Begriff der Artikulation wurde, und zwar durch die im Satz 1 ausgesprochene Eigenschaft von SAINTE-LAGUË [9][4]) eingeführt.

Durch seine Artikulationen wird der Graph — anschaulich

---

[3]) Ein Weg heißt ein $\Pi_1\Pi_2$-Weg, wenn er einen Punkt aus Π_1 mit einem Punkt aus Π_2 verbindet. Im entsprechenden Sinne wird die Bezeichnung $\Pi_1\Pi_2$-Kante benützt werden.

[4]) Die Zahlen in Klammern beziehen sich auf die *Bibliographie*, die sich am Ende dieser Abhandlung befindet.

ausgedrückt — „in seine Glieder zerlegt". Wie diese Ausdrucksweise zu verstehen ist, soll im Folgenden genau beschrieben werden.

Enthält ein Kreis des Graphen G die Kanten k_1 und k_2, so soll dies übergangsweise durch $k_1 \circ k_2$ ausgedrückt werden. Wir setzen außerdem $k \circ k$ für jede Kante k von G. Die für die Kantenmenge K von G so definierte binäre Relation $\circ$ besitzt folgende Eigenschaften:

α) Es ist stets $k \circ k$ (Reflexivität).

β) Aus $k_1 \circ k_2$ folgt $k_2 \circ k_1$ (Symmetrie).

γ) Aus $k_1 \circ k_2$ und $k_2 \circ k_3$ folgt $k_1 \circ k_3$ (Transitivität).

Die Eigenschaften α) und β) sind trivial, aber auch die Eigenschaft γ) läßt sich — wie in der Einleitung schon erwähnt wurde — unmittelbar einsehen. Es folgt bekannter Weise aus diesen drei Eigenschaften, daß man die Kantenmenge K von G — und zwar in eindeutiger Weise — so in paarweise elementenfremde Klassen K_α einteilen kann, daß zwei Kanten k_1 und k_2 dann und nur dann zur selben Klasse gehören, falls $k_1 \circ k_2$ besteht. Die Kanten von G, die einer und derselben Klasse angehören, bilden ein *Glied* von G.[5])

Jedes Glied ist ein zusammenhängender Teilgraph von G. Die Endkanten und Brücken bilden — da sie in keinem Kreis enthalten sind — an sich je ein Glied. Alle übrigen Glieder enthalten wenigstens zwei Kanten. Jede Kante gehört einem und nur einem Gliede an. Zwei Kanten, welche dasselbe Punktepaar verbinden, gehören — da sie zusammen einen Kreis bilden — demselben Gliede an.[6]) Jeder Knotenpunkt gehört wenigstens einem Gliede an. Weiter gilt der Satz:

2. *Ein Knotenpunkt gehört mehreren oder nur einem Gliede an, je nach dem er eine Artikulation ist oder nicht.*

Ist nämlich A eine Artikulation, so gibt es zwei Kanten AP

[5]) Ein ähnlicher Begriff (*membre*) wurde von Sainte-Laguë [9] eingeführt: ein *membre* ist ein Glied, welches nur eine Artikulation des ursprünglichen Graphen enthält. Der von Whitney [11] eingeführte Begriff *component* deckt sich inhaltlich mit dem hier eingeführten Begriff des Gliedes. Für Artikulation benützt Whitney — in Anschluß an Ayres — die Bezeichnung *cut-point*.

[6]) Wenn also in den hier folgenden Untersuchungen davon die Rede sein wird, ob die Kante PQ einem oder anderen Gliede angehört, dürfen wir schlechtweg von *der Kante PQ* sprechen, auch wenn mehrere Kanten P mit Q verbinden.

und AQ, die keinem Kreise zugleich angehören, also verschiedenen Gliedern angehören; beide Glieder enthalten A. Gehört andererseits A zu zwei Gliedern, so muß das eine Glied eine Kante AP, das andere eine Kante AQ enthalten, wobei kein Kreis zugleich AP und AQ enthält; dann ist aber A eine Artikulation.

3. *Besitzt ein Graph keine Artikulationen, so sind seine Glieder mit seinen zusammenhängenden Bestandteilen identisch.*

Gehören nämlich die Kanten k_1 und k_2 von G demselben Gliede von G an, so gehören sie — da ein Glied stets zusammenhängend ist — auch demselben zusammenhängenden Bestandteile von G an. Gehören andererseits k_1 und k_2 demselben zusammenhängenden Bestandteile an, so existiert ein Weg $P_1P_2\ldots P_n$ wo $P_1P_2 = k_1$ und $P_{n-1}P_n = k_2$ ist. Da P_2 keine Artikulation ist, gehört, laut Satz 2, P_2P_3 demselben Gliede an, wie $P_1P_2 = k_1$. Da auch $P_3, P_4, \ldots$ keine Artikulationen sind, gehören, der Reihe nach, ebenso auch P_3P_4, $P_4P_5, \ldots$ und endlich $P_{n-1}P_n = k_2$ demselben Gliede an. Damit ist der Satz bewiesen. Als Spezialfall ergibt sich der Satz:

4. *Besitzt ein zusammenhängender Graph keine Artikulationen, so ist er sein einziges Glied.*

5. *Besteht ein zusammenhängender Graph nicht aus einer einzigen Kante und besitzt er keine Artikulation, so gibt es für irgend zwei Knotenpunkte P, Q des Graphen zwei Wege, die P und Q miteinander verbinden und außer P und Q keinen gemeinsamen Knotenpunkt besitzen.*[7])

Sei nämlich k_1 eine Kante, die in P und k_2 eine Kante, die in Q endet. Da der Graph nicht aus einer einzigen Kante PQ besteht, lassen sich k_1 und k_2 als verschiedene Kanten wählen. Laut Satz 4 gibt es einen Kreis, der k_1 und k_2 enthält; dieser enthält auch P und Q und wird durch P und Q in zwei Wege von der verlangten Eigenschaft zerlegt.

Nun beweisen wir:

6. *Kein Knotenpunkt eines Gliedes G_α ist eine Artikulation von G_α.*

Sonst würde es nämlich in G_α zwei Kanten, AP und AQ geben, die nicht im selben Kreise von G_α enthalten wären; dann wären aber AP und AQ auch in keinem Kreise von G enthalten,

[7]) Vgl. Whitney [11], Theorem 7.

da alle Kanten eines Kreises demselben Gliede G_α angehören. Und dies widerspricht der Definition des Gliedes.

7. *Zwei verschiedene Glieder eines Graphen besitzen höchstens einen gemeinsamen Knotenpunkt.*

Nehmen wir an, P und Q wären gemeinsame Knotenpunkte der Glieder G_α und G_β von G. Es führt dann sowohl ein Weg $PR_1R_2\ldots Q$ von G_α, wie auch ein Weg $PS_1S_2\ldots Q$ von G_β aus P nach Q. Es sei in der Folge $R_1, R_2, \ldots, Q$ der erste Punkt, der auch im Wege $PS_1S_2\ldots Q$ enthalten ist, R_k, also $R_k = S_l$ (oder Q). Dann haben die beiden Wege $PR_1R_2\ldots R_k$ und $PS_1S_2\ldots S_l$ keinen gemeinsamen inneren Knotenpunkt, bilden also zusammen einen Kreis und dies widerspricht der Tatsache, daß PS_1 und PR_1 zu verschiedenen Gliedern gehören.

Gehören die Kanten $P_{k-1}P_k$ und P_kP_{k+1} $(1<k<n)$ des Weges $W = P_1P_2\ldots P_k\ldots P_n$ zu verschiedenen Gliedern, so ist, laut Satz 2, P_k eine Artikulation. Sie soll als eine *Durchgangsartikulation* von W bezeichnet werden.

8. *Gehören die Endpunkte eines Weges $W = P_1P_2\ldots P_n$ nicht demselben Gliede an, so ist wenigstens ein innerer Knotenpunkt dieses Weges W eine Durchgangsartikulation von W.*

Da nämlich P_1P_2 und $P_{n-1}P_n$ zu verschiedenen Gliedern gehören, muß es im Wege $P_1P_2\ldots P_n$ zwei Nachbarkanten $P_{k-1}P_k$ und P_kP_{k+1} geben, die ebenfalls zu verschiedenen Gliedern gehören, so daß P_k tatsächlich eine Durchgangsartikulation von W ist.

9. *Enthält der Weg $P_1P_2\ldots P_k\ldots P_n$ die Durchgangsartikulation P_k, so ist P_k in jedem Wege W enthalten, der P_1 mit P_n verbindet.*

Nehmen wir an, dies wäre nicht der Fall. Man kann aus gewissen Kanten von $P_{k+1}P_{k+2}\ldots P_n$ und von W einen Weg W_1 bilden, der P_{k+1} mit P_1 verbindet und P_k nicht enthält, da P_k in keinem der „vereinigten" Wege enthalten ist. Aus demselben Grunde kann man aus gewissen Kanten von W_1 und von $P_1P_2\ldots P_{k-1}$ einen Weg W_2 bilden, der P_{k+1} mit P_{k-1} verbindet und der P_k ebenfalls nicht enthält. Der Teilweg $P_{k-1}P_kP_{k+1}$ von $P_1P_2\ldots P_k\ldots P_n$ hat also mit W_2 nur ihre Endpunkte gemein. Die Vereinigung dieser Wege $P_{k-1}P_kP_{k+1}$ und W_2 ergibt also einen Kreis, der $P_{k-1}P_k$ und P_kP_{k+1} enthält. Dies ist aber unmöglich, da diese zwei Kanten verschiedenen Gliedern angehören, womit der Satz bewiesen ist.

Also hat W die Form $P_1Q_1Q_2\ldots Q_\nu P_kR_1R_2\ldots R_\mu P_n$. Wir zeigen, daß $Q_\nu P_k$ demselben Gliede G_α angehört, wie $P_{k-1}P_k$. Dies ist klar, wenn $Q_\nu = P_{k-1}$ ist. Ist aber $Q_\nu \neq P_{k-1}$, so kann man aus gewissen Kanten der Wege $P_{k-1}P_{k-2}\ldots P_2P_1$ und $P_1Q_1Q_2\ldots Q_\nu$ einen Weg bilden, der von P_{k-1} nach Q_ν führt und P_k nicht enthält. Fügt man also diesem Wege die Kanten $P_{k-1}P_k$ und P_kQ_ν hinzu, so ergibt sich ein Kreis. Als Kanten dieses Kreises, gehören also $P_{k-1}P_k$ und P_kQ_ν wahrhaftig demselben Gliede an. Ebenso sieht man, daß P_kP_{k+1} und P_kR_1 einem und demselben Gliede angehören. Da aber $P_{k-1}P_k$ und P_kP_{k+1} verschiedenen Gliedern angehören, so gilt dasselbe für $Q_\nu P_k$ und P_kR_1. So ist bewiesen, daß P_k auch für W eine Durchgangsartikulation ist. Damit haben wir folgende Verschärfung des Satzes 9 erhalten:

10. *Zwei Wege mit gemeinsamen Endpunkten besitzen dieselben Durchgangsartikulationen.*

Der soeben ausgeführte Gedankengang zeigt sogar, daß diese Durchgangsartikulationen in beiden Wegen in derselben Reihenfolge aufeinander folgen.

Seien P und Q zwei beliebige Knotenpunkte eines beliebigen Graphen G. Liegen *erstens* P und Q im selben Gliede G_α von G, so sind zwei Fälle möglich: entweder besteht G_α aus einer einzigen Kante PQ, so daß PQ in keinem Kreise von G enthalten ist, also diese Kante PQ der einzige Weg von P nach Q ist; oder gibt es, da G_α zusammenhängend ist und (Satz 6) keine Artikulation (von G_α) besitzt, — laut Satz 5 — (in G_α) zwei Wege von P nach Q, die außer P und Q keinen gemeinsamen Knotenpunkt besitzen. Gehören *zweitens* P und Q nicht demselben Gliede an, so haben alle Wege, die P mit Q verbinden, einen gemeinsamen inneren Knotenpunkt, da (Satz 8) jeder solche Weg eine Durchgangsartikulation besitzt und diese Artikulation (Satz 9) auch in jedem anderen Weg von P nach Q enthalten ist. Ohne die Begriffe „Artikulation" und „Glied" kann man unser Resultat folgendermaßen formulieren:

11. *Für irgend zwei Knotenpunkte P, Q eines Graphen gibt es — wenn nur nicht eine Kante PQ der einzige von P nach Q führende Weg ist*[8]) *— nur folgende zwei Möglichkeiten:*

[8]) In der kontinuierlichen Auffassung der Graphen, wo Kanten auch „innere Punkte" besitzen, darf diese Bedingung wegbleiben; ist nämlich diese Bedingung nicht erfüllt, so ist jeder „innere" Punkt dieser Kante PQ ein gemeinsamer innerer Punkt „sämtlicher" Wege von P nach Q (Fall β)).

α) es gibt zwei Wege von P nach Q, die außer P und Q keinen gemeinsamen Knotenpunkt besitzen oder

β) alle Wege von P nach Q enthalten einen gemeinsamen inneren Knotenpunkt.

Hieraus ergibt sich noch folgender Satz:

12. *Seien Π_1 und Π_2 zwei fremde Teilmengen der Knotenpunktmenge eines Graphen G. Entweder gibt es zwei elementenfremde $\Pi_1\Pi_2$-Wege in G, oder besitzen alle $\Pi_1\Pi_2$-Wege von G einen gemeinsamen Knotenpunkt.*

Zum Beweis seien die Punkte P_α, bzw. die Punkte Q_β die Elemente von Π_1 bzw. von Π_2. Wir ergänzen G zu einem Graphen G^* indem wir zu G zwei neue Knotenpunkte P und Q und für alle Werte von α und β je eine Kante der Form PP_α und QQ_β hinzufügen. Da G^* keine Kante der Form PQ enthält, kann man auf G^* und auf das Punktepaar P, Q den Satz 11 anwenden. Enthält G^* zwei Wege von P nach Q: $PP_\alpha \ldots Q_\beta Q$ und $PP_{\alpha'} \ldots Q_{\beta'} Q$, die außer P und Q keinen gemeinsamen Punkt besitzen, so sind die Teilwege $P_\alpha \ldots Q_\beta$ und $P_{\alpha'} \ldots Q_{\beta'}$ zwei $\Pi_1\Pi_2$-Wege von G mit der verlangten Eigenschaft. Enthält andererseits jeder Weg $P \ldots Q$ von G^* einen von P und Q verschiedenen Punkt, welcher also auch Knotenpunkt von G ist, so muß dieser in jedem $\Pi_1\Pi_2$-Weg $P_\alpha \ldots Q_\beta$ von G enthalten sein, da dieser Weg zu einem Weg $PP_\alpha \ldots Q_\beta Q$ von G^* ergänzt werden kann.

[Die vorangehend entwickelten Begriffe und Sätze haben in der *kontinuierlichen* Auffassung der Graphen ihre Analoga. Dort entspricht dem Graphenbegriff der Begriff des *Peanoschen Raumes,* welcher als stetiges Bild der Strecke definiert wird und dem Begriff des Gliedes der von WHYBURN in 1927 eingeführte Begriff des *zyklischen Elementes.* Das Analogon unseres Satzes 11 ist der von AYRES bewiesene folgende Satz: werden die Punkte a und b eines Peanoschen Raumes durch keinen Punkt getrennt, so liegen sie auf einer einfachen geschlossenen Kurve dieses Raumes. Die Bibliographie dieser Untersuchungen (WHYBURN, AYRES, R. L. MOORE, KURATOWSKI) findet man in der Arbeit KURATOWSKI und WHYBURN [7]. Vgl. auch die viel allgemeineren Untersuchungen von MENGER [8], auf die wir noch zurückkommen (§ 4)].

Wir wollen noch hervorheben, daß in den vorangehenden Untersuchungen nirgends die Endlichkeit des Graphen vorausgesetzt wurde.

§ 2. Trennende Knotenpunktsysteme, insbesondere für paare Graphen.

Die vorangehenden Untersuchungen, auf die wir uns im Folgenden nicht stützen werden, lassen weitgehende Verallgemeinerungen zu.

Wir haben gesehen (Satz 1), daß zu jeder Artikulation A zwei fremde Teilmengen, Π_1 und Π_2, der Knotenpunktmenge des Graphen so angegeben werden können, daß jeder $\Pi_1\Pi_2$-Weg des Graphen A enthält. Wir werden dies auch so ausdrücken, daß Π_1 und Π_2 durch A *getrennt* werden. In Verallgemeinerung dieser Ausdrucksweise führen wir folgende Bezeichnung ein. Sei Π die Menge der Knotenpunkte eines Graphen G. Sind Π_1 und Π_2 zwei fremde Punktmengen, so sagen wir, daß Π_1 und Π_2 durch die Teilmenge Π' von Π (oder auch: durch die Punkte von Π') in G *getrennt* werden, wenn jeder $\Pi_1\Pi_2$-Weg von G wenigstens einen Punkt aus Π' enthält. (Dieser Punkt kann auch ein Endpunkt des Weges sein.) Hier muß nicht vorausgesetzt werden, daß Π_1 und Π_2 Teilmengen von Π sind.[9]) Es kann hier Π' auch die Nullmenge sein: die Aussage, daß Π_1 und Π_2 durch die Nullmenge getrennt werden, bedeutet natürlich, daß G keinen $\Pi_1\Pi_2$-Weg besitzt. In der gegebenen Definition muß weiter Π' weder zu Π_1 noch zu Π_2 fremd sein. Durch Π_1 selbst wird z. B. Π_1 von jeder zu Π_1 fremden Punktmenge getrennt. Es wird natürlich die trennende Menge Π' *nur* Punkte von $\Pi_1+\Pi_2$ enthalten, falls $\Pi_1+\Pi_2$ die ganze Knotenpunktmenge des Graphen ist. Auf diesen Fall bezieht sich der folgende Satz, den wir jetzt beweisen. Auch hier braucht der Graph nicht als endlich vorausgesetzt zu werden.

13. *In einem Graphen G soll jede Kante einen Punkt der Menge Π_1 mit einem Punkt der zu ihr fremden Menge Π_2 verbinden. Können Π_1 und Π_2 nicht durch weniger als n Punkte getrennt*

---

[9]) Ist z. B. G ein Teilgraph des Graphen H und sind Π_1 und Π_2 zwei fremde Teilmengen der Knotenpunktmenge von H, so hat es — laut der hier gegebenen Definition — einen Sinn, zu sagen, daß Π_1 und Π_2 in G durch eine Teilmenge Π' der Knotenpunktmenge von G getrennt werden, auch wenn nicht alle Punkte von $\Pi_1+\Pi_2$ zu G gehören. Dies ist z. B. stets der Fall, wenn kein $\Pi_1\Pi_2$-Weg von H gänzlich zu G gehört, also z. B. wenn kein Punkt von Π_1 (oder Π_2) zu G gehört.

werden (n eine beliebige endliche Zahl),[10]) *so gibt es n Kanten in G, die paarweise keinen gemeinsamen Endpunkt besitzen.*

In dem Graphen G sei k die (endliche) Maximalzahl der Kanten von G, die paarweise keinen gemeinsamen Endpunkt besitzen.[11]) Wir setzen voraus, daß $k<n$ ist; dann genügt es zu zeigen, daß Π_1 und Π_2 durch weniger als n Punkte getrennt werden können. Es sei also

$$K=(P_1Q_1,\, P_2Q_2, \ldots, P_kQ_k)$$

eine Menge von k Kanten von G, wo die $2k$ Punkte P_i und Q_i sämtlich voneinander verschieden sind. Hier bedeuten die P_i Punkte von Π_1 und die Q_i Punkte von Π_2. Und zwar setzen wir:

$$\Pi_1'=(P_1, P_2, \ldots, P_k),\ \Pi_2'=(Q_1, Q_2, \ldots, Q_k).$$

Einen Weg $A_1A_2\ldots A_{2r}$ von G wollen wir als einen *K-Weg*[12]) bezeichnen, falls seine zweite (A_2A_3), vierte $(A_4A_5), \ldots, 2\nu$-te $(A_{2\nu}A_{2\nu+1}), \ldots,$ vorletzte $(A_{2r-2}A_{2r-1})$ Kante zu K gehört. Wir beweisen zunächst den *Hilfssatz:*

Ein Punkt von $\Pi_1-\Pi_1'$ *kann mit einem Punkt von* $\Pi_2-\Pi_2'$ *durch keinen K-Weg verbunden werden.*

Wäre nämlich W ein solcher Weg, so könnte man aus K diejenigen Kanten, die in W enthalten sind, entfernen und die in K nicht enthaltenen Kanten von W (ihre Anzahl ist um 1 größer) hinzufügen und auf diese Weise $k+1$ solche Kanten von G erhalten, die paarweise keinen gemeinsamen Endpunkt besitzen; dies steht aber mit der Maximaleigenschaft von k im Widerspruch.

Nun definieren wir eine Teilmenge $\Pi'=(R_1, R_2, \ldots, R_k)$ von $\Pi_1'+\Pi_2'$ folgendermaßen. Für $\alpha=1, 2, \ldots,$ oder k sei $R_\alpha=Q_\alpha$, falls ein K-Weg einen Punkt von $\Pi_1-\Pi_1'$ mit Q_α verbindet; gibt es keinen solchen K-Weg, so setzen wir $R_\alpha=P_\alpha$. Die Menge Π' enthält also je einen Endpunkt der Kanten von K. Wir beweisen, daß *die Menge* Π' *die Mengen* Π_1 *und* Π_2 *in G voneinander trennt.* Hiezu muß gezeigt werden, daß für jede Kante PQ von G (wo

[10]) Da jede Kante an sich ein $\Pi_1\Pi_2$-Weg ist, könnte man diese Bedingung in anschaulicher Weise auch so formulieren: man kann die Kanten des Graphen nicht durch weniger als n Punkte „erschöpfen“, wobei wir von einer Punktmenge Π dann die Behauptung treffen, daß sie die Kantenmenge K erschöpft, falls jede Kante von K wenigstens einen Endpunkt aus Π besitzt.

[11]) Gibt es keine solche *endliche* Maximalzahl, so besteht natürlich der Satz.

[12]) Dieser Begriff, auf dem der hier folgende Beweis basiert, wurde zu ähnlichen Zwecken in meiner Arbeit [4] eingeführt.

P zu Π_1 und Q zu Π_2 gehört), entweder P oder Q ein Punkt von Π' ist. Wir unterscheiden vier Fälle.

Fall 1. P gehört zu $\Pi_1 - \Pi_1'$ und Q zu $\Pi_2 - \Pi_2'$. Fügt man PQ zur Menge K hinzu, so erhält man, im Widerspruch zur Maximaleigenschaft von k, $k+1$ Kanten von G, die paarweise keinen gemeinsamen Endpunkt besitzen. Dieser Fall ist also unmöglich.

Fall 2. P gehört zu $\Pi_1 - \Pi_1'$ und Q zu Π_2'. Dann ist, für $\alpha = 1, 2, \ldots,$ oder $k: Q = Q_\alpha$ und die Kante PQ bildet an sich einen K-Weg, der den Punkt P von $\Pi_1 - \Pi_1'$ mit $Q = Q_\alpha$ verbindet. Also gehört $Q = Q_\alpha$ zu Π'.

Fall 3. P gehört zu Π_1' und Q zu $\Pi_2 - \Pi_2'$. Dann ist für $\alpha = 1, 2, \ldots,$ oder $k: P = P_\alpha$. Würde es einen K-Weg geben, der einen Punkt P_0 von $\Pi_1 - \Pi_1'$ mit Q_α verbindet, so könnte man, indem man diesem Weg die Kanten $P_\alpha Q_\alpha$ und $P_\alpha Q$ hinzufügt, einen K-Weg erhalten, der P_0 mit Q verbindet; dies ist aber laut des Hilfssatzes unmöglich. Es gibt also keinen K-Weg, der einen Punkt von $\Pi_1 - \Pi_1'$ mit Q_α verbindet. Somit gehört $P = P_\alpha$ zu Π'.

Fall 4. P gehört zu Π_1' und Q zu Π_2'. Es sei etwa $P = P_\alpha$ und $Q = Q_\beta$. Ist $\alpha = \beta$, so gehört natürlich entweder $P = P_\alpha$ oder $Q = Q_\alpha$ zu Π'. Wir dürfen also $\alpha \neq \beta$ voraussetzen. Entweder gehört $P = P_\alpha$ zu Π' oder führt ein K-Weg aus einem Punkte P_0 von $\Pi_1 - \Pi_1'$ nach Q_α; im letzteren Fall ergibt sich, wenn man diesem K-Weg die Kanten $Q_\alpha P_\alpha$ und $P_\alpha Q_\beta$ hinzufügt, ein K-Weg, der von P_0 nach Q_β führt, so daß in diesem Fall $Q = Q_\beta$ zu Π' gehört.

Damit ist bewiesen, daß Π_1 und Π_2 durch eine k (also weniger als n) Punkte enthaltende Menge Π' voneinander getrennt werden. Der Beweis von Satz 13 ist damit beendet.[13])

Um die Tragweite dieses Satzes zu beleuchten, wollen wir noch zeigen, daß ein von mir [5][14]) schon vor längerer Zeit bewiesener Satz über die Faktorenzerlegung von regulären endlichen paaren Graphen aus Satz 13 unmittelbar abgeleitet werden kann.

---

[13]) Einen anderen Beweis teilte mir Herr L. KALMÁR mit.

[14]) Später wurden für diesen Satz, bzw. für seine Interpretation in der Determinantentheorie und in der Kombinatorik verschiedene Beweise gegeben, so durch FROBENIUS, SAINTE-LAGUË, VAN DER WAERDEN, SPERNER, SKOLEM, EGERVÁRY.

Der betreffende Satz lautet:

14. *Jeder endliche paare reguläre Graph besitzt einen Faktor ersten Grades.*[15])

Es sei nämlich G ein endlicher regulärer paarer Graph g-ten Grades, in dem jede Kante einen der Punkte $P_1, P_2, \ldots, P_n$ mit einem der Punkte $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ verbindet ($P_i \neq Q_j$).[16]) Die beiden Mengen $(P_1, P_2, \ldots, P_n)$ und $(Q_1, Q_2, \ldots, Q_n)$ können nicht durch weniger als n Punkte getrennt werden; denn könnten sie durch $\nu < n$ Punkte getrennt werden, so daß jede Kante von G in einem dieser ν Punkte endet, so würde G höchstens νg Kanten haben, während er doch $ng > \nu g$ Kanten besitzt. Der Satz 13 besagt dann die Existenz eines Faktors ersten Grades und der Satz ist bewiesen.

In einer etwas prägnanteren Fassung läßt sich Satz 13 folgendermaßen formulieren:

15. *Für einen Graphen G sei m die (endliche) Minimalzahl der Knotenpunkte $P_1, P_2, \ldots, P_m$, die so beschaffen sind, daß jede Kante von G in einem dieser Knotenpunkte endet und es sei n die Maximalzahl der Kanten $k_1, k_2, \ldots, k_n$, die paarweise keinen gemeinsamen Endpunkt besitzen. Dann ist, falls G ein paarer Graph ist, $m = n$.*

Erstens ist nämlich $m \leqq n$; sonst gäbe es — laut Satz 13 — $n+1$ Kanten, die paarweise keinen gemeinsamen Endpunkt haben. Zweitens ist auch $m \geqq n$, da zu jeder der Kanten $k_1, k_2, \ldots, k_n$ einer der Punkte $P_1, P_2, \ldots, P_m$ als Endpunkt angehört und verschiedenen Kanten auf diese Weise verschiedene Knotenpunkte entsprechen.

Als eine weitere Anwendung des Satzes 13 wollen wir noch folgenden Satz beweisen, welcher insbesondere durch seine An-

---

[15]) Ein Graph wird als ein *paarer* Graph bezeichnet, wenn jeder Kreis des Graphen eine gerade Anzahl von Kanten enthält, oder m. a. W., wenn man seine Knotenpunkte so in zwei Klassen einteilen kann, daß die beiden Endpunkte jeder Kante zu verschieden Klassen gehören. Ein endlicher Graph heißt *regulär* (PETERSEN), wenn in jedem Knotenpunkt dieselbe Anzahl von Kanten endet. Diese konstante Anzahl wird als der *Grad* des regulären Graphen bezeichnet. Ein Teilgraph G' von G heißt ein *Faktor k-ten Grades von G*, falls, in jedem Knotenpunkt von G, k Kanten von G' enden. Ein regulärer Graph ersten Grades (also jeder Faktor ersten Grades) ist somit ein Graph, der aus Kanten ohne gemeinsamen Endpunkten besteht.

[16]) Man sieht unmittelbar ein, daß die Anzahl der P mit der Anzahl der Q übereinstimmen muß.

wendung auf Determinanten — wovon im nächsten Paragraphen die Rede sein wird — von Interesse ist.

16. *Im (paaren) Graphen G soll jede Kante einen der Punkte von $\Pi_1 = (P_1, P_2, \ldots, P_n)$ mit einem der Punkte von $\Pi_2 = (Q_1, Q_2, \ldots, Q_n)$ verbinden ($P_i \neq Q_j$) und diejenigen Kanten von G, die in einem Faktor ersten Grades von G enthalten sind, sollen einen nichtzusammenhängenden Graphen G^* bilden. Dann kann man $r\,(>0)$ Punkte aus Π_1 und $n-r\,(>0)$ Punkte aus Π_2 so auswählen, daß keine Kante von G zwei ausgewählte Punkte verbinde.*

Erstens soll jede Kante von G in einem Faktor ersten Grades von G enthalten sein, so daß $G^* = G$ ist. Wir dürfen annehmen, daß die Kanten der Kantenmenge $K = (P_1Q_1, P_2Q_2, \ldots, P_nQ_n)$ einen Faktor ersten Grades von G ergeben. Es sei G_1 ein zusammenhängender Bestandteil von G; da $G = G^*$ nicht zusammenhängend ist, enthält der aus den in G_1 *nicht* enthaltenen Kanten von G bestehender Graph G_2 wenigstens eine Kante. Mit der Kante P_iQ_j ist auch P_iQ_i in G_1 (bzw. in G_2) enthalten, also enthält sowohl G_1, wie G_2 wenigstens eine Kante aus K. Sind etwa $P_1Q_1, P_2Q_2, \ldots, P_rQ_r$ in G_1 und $P_{r+1}Q_{r+1}, P_{r+2}Q_{r+2}, \ldots, P_nQ_n$ in G_2 enthalten, so gibt es keine Kante von G, die einen der r Punkte $P_1, P_2, \ldots, P_r$ mit einem der $n-r$ Punkte $Q_{r+1}, Q_{r+2}, \ldots, Q_n$ verbinden würde und der Satz besteht.

Zweitens sei P_1Q_1 eine Kante von G, die in keinem Faktor ersten Grades von G enthalten ist. Sei G' der Graph, der aus G entsteht, wenn man alle nach P_1 und alle nach Q_1 laufenden Kanten aus ihm entfernt. In G' kann es nicht $n-1$ Kanten geben, die paarweise keinen gemeinsamen Endpunkt haben, da man sonst durch Hinzunahme von P_1Q_1 einen P_1Q_1 enthaltenden Faktor ersten Grades von G erhalten würde. Laut Satz 13, (wo jetzt $n-1$ für n zu setzen ist) können also $\Pi_1' = (P_2, P_3, \ldots, P_n)$ und $\Pi_2' = (Q_2, Q_3, \ldots, Q_n)$ in G' durch weniger als $n-1$, also sicherlich durch $n-2$ Punkte getrennt werden. Gehören von diesen $n-2$ Punkten α Punkte zu Π_1' und $n-2-\alpha$ zu Π_2', dann gibt es in G', also auch in G, keine Kante, die eine der übrigen $n-1-\alpha = r$ Punkte von Π_1' mit einem der übrigen $n-1-(n-2-\alpha) = \alpha+1 = n-r$ Punkte von Π_2' verbindet. Damit ist Satz 16 auch für diesen zweiten Fall bewiesen.

§ 3. Anwendung auf Determinanten und Matrizen.

Ich habe schon in verschiedenen Arbeiten auf den Zusammenhang zwischen der Graphentheorie und der Theorie der Determinanten und Matrizen hingewiesen (s. insbesondere [4] und [5]). Auch die Untersuchungen des vorangehenden Paragraphen gestatten eine Interpretation dieser Art. Dies beruht auf folgender Verabredung. Einer beliebigen (nicht unbedingt quadratischen) Zahlen-Matrix

$$M = \| a_{ik} \| \quad (i = 1, 2, \ldots, p;\ k = 1, 2, \ldots, q)$$

ordnen wir einen paaren Graphen G folgendermaßen zu. (Wir beschränken uns in diesem Paragraphen auf endliche Matrizen und auf endliche Graphen). Den Zeilen von M soll je einer der p Punkte $P_1, P_2, \ldots, P_p$ und den Spalten von M je einer der q Punkte $Q_1, Q_2, \ldots, Q_q$ entsprechen und wir führen *eine* Kante P_iQ_k dann und nur dann ein, wenn $a_{ik} \neq 0$ ist. Andere Kanten werden nicht eingeführt. Was besagt nun der Satz 13, wenn man ihn auf den so definierten paaren Graphen G anwendet und $\Pi_1 = (P_1, P_2, \ldots, P_p)$, $\Pi_2 = (Q_1, Q_2, \ldots, Q_q)$ setzt, über die Matrix M? Hat man n Kanten von G, die paarweise keinen gemeinsamen Endpunkt besitzen, so entsprechen ihnen n nicht verschwindende Elemente a_{ik}, die paarweise verschiedenen Reihen (Zeilen und Spalten) von M angehören, deren Produkt also (vom Vorzeichen stets abgesehn) ein Entwicklungsglied ($\neq 0$) einer Unterdeterminante n-ter Ordnung von M ergibt. Was bedeutet andererseits für eine Zahl n, die der Bedingung $n \leqq p$, $n \leqq q$ genügt, daß Π_1 und Π_2 durch weniger als n, also sicherlich durch $n-1$ Punkte in G getrennt werden können? Dies bedeutet, daß man $n-1$ Reihen (Zeilen und Spalten) von M so angeben kann, daß alle nicht-verschwindenden Elemente von M in einer dieser $n-1$ Reihen enthalten sind. Sind unter diesen $n-1$ Reihen $p-r (\geqq 0)$ Zeilen und $q-s (\geqq 0)$ Spalten enthalten, dann sind also alle Elemente, welche die übrigen r Zeilen mit den übrigen s Spalten gemein haben, gleich Null. Hier ist wegen $p-r \leqq n-1 < p$ sicherlich $r > 0$ und ebenso $s > 0$. Infolge von $(p-r)+(q-s) = n-1$ ist hier $s = (p+q-n+1)-r$ und r nimmt einen der Werte $1, 2, \ldots, p$ an. Unser Satz 13 ergibt also, in die Sprache der Matrizen übersetzt, folgendes Resultat.

17. *Verschwinden sämtliche Entwicklungsglieder aller Unter-*

determinanten n-ter Ordnung einer Matrix von p Zeilen und q Spalten (wo $n \leqq p$, $n \leqq q$ ist), so verschwinden alle Elemente, welche r Zeilen mit $(p+q-n+1)-r$ Spalten gemeinsam haben für $r=1$, oder 2, ..., oder p.

Die Übertragung des Satzes 15 ergibt ebenso folgenden Satz

18. *Die Minimalzahl der Reihen (Zeilen und Spalten), welche in ihrer Gesamtheit jedes nicht-verschwindende Element einer Matrix enthalten, ist gleich der Maximalzahl von nicht-verschwindenden Elementen, welche paarweise verschiedenen Zeilen und verschiedenen Spalten angehören.*[17])

Z. B. sind für die Matrix

$$\begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$$

beide dieser Zahlen gleich 3.

In diesem Satz darf natürlich für „nicht-verschwindend" eine beliebige Eigenschaft der Elemente gesetzt werden, so daß der Satz eine rein kombinatorische Eigenschaft der Matrizen (der zweidimensionalen Tafeln) ausspricht, wo die Elemente beliebige Gegenstände (nicht nur Zahlen) sein können.

Für $p=q=n$ ergibt sich aus Satz 17 folgender Determinantensatz von Frobenius [3]:

19. *Wenn alle Glieder einer Determinante n-ter Ordnung verschwinden, so verschwinden alle Elemente, welche r Zeilen mit $n-r+1$ Spalten gemeinsam haben, für $r=1$ oder 2, ..., oder n.*

In ähnlicher Weise wollen wir jetzt folgenden, ebenfalls von Frobenius [2][18]) stammenden Determinantensatz graphentheoretisch beweisen, bzw. auf Satz 16 zurückführen.

---

[17]) Die Sätze 17 und 18 hat der Verfasser, mit den hier gegebenen Beweisen, am 26. März 1931 in der Budapester Mathematischen und Physikalischen Gesellschaft vorgetragen, s. [6]. Hieran anschließend hat dann E. Egerváry [1] für den Satz 18 einen anderen Beweis und eine interessante Verallgemeinerung gegeben.

[18]) Dort wird dieser Satz „aus verborgenen Eigenschaften der Determinanten mit nichtnegativen Elementen" durch komplizierte Betrachtungen bewiesen. Ich gab dann in 1915 in meiner Arbeit [4] einen elementaren graphentheoretischen Beweis (welcher hier durch einen noch einfacheren ersetzt wird). In 1917 hat dann auch Frobenius [3] einen elementaren Beweis publi-

20. *In einer Determinante n-ter Ordnung D seien die nichtverschwindenden Elemente unabhängige Veränderliche. Ist D eine reduzible Funktion ihrer (nichtverschwindenden) Elemente, so verschwinden alle Elemente von D, welche r Zeilen mit n—r Spalten gemeinsam haben für* $r=1$ *oder* $2, \ldots,$ *oder* $n-1$.

Der Determinante

$$D = |a_{ik}|_{i, k = 1, 2, \ldots, n}$$

ordnen wir einen paaren Graphen G mit den Knotenpunkten $P_1, P_2, \ldots, P_n$; $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ wieder durch die Regel zu, daß G dann und nur dann eine Kante $P_i Q_k$ enthalten soll, wenn $a_{ik} \neq 0$ ist, während zwei P-Punkte, so wie zwei Q-Punkte niemals durch eine Kante verbunden werden. Jedem nichtverschwindenden Glied $a_{1i_1} a_{2i_2} \ldots a_{ni_n}$, wo $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ eine Permutation von $(1, 2, \ldots, n)$ ist, entspricht ein Faktor ersten Grades von G, nämlich $(P_1 Q_{i_1}, P_2 Q_{i_2}, \ldots, P_n Q_{i_n})$ und umgekehrt. Es sei G^* derjenige Teilgraph von G, welcher diejenigen Kanten von G enthält, die in einem

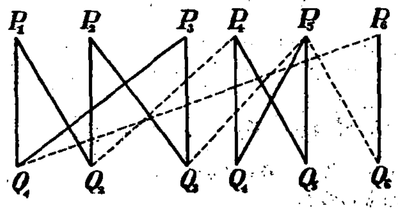
ziert, und zwar nach dem ich ihm meinen Beweis (in deutscher Übersetzung) zugeschickt hatte. FROBENIUS hat es dort unterlassen, diese Tatsache, sowie überhaupt meine Arbeit [4] zu erwähnen. Jedoch zitiert er meine Arbeit [5] und zwar mit folgender Bemerkung: „Die Theorie der Graphen, mittels deren Hr. KÖNIG den obigen Satz [dies ist die determinantentheoretische Interpretation von Satz 14] abgeleitet hat, ist nach meiner Ansicht ein wenig geeignetes Hilfsmittel für die Entwicklung der Determinantentheorie. In diesem Falle führt sie zu einem ganz speziellen Satz vom geringem Werte. Was von seinem Inhalt Wert hat, ist in dem Satze II [dies ist der Frobeniussche Satz 19] ausgesprochen."

Es ist wohl natürlich, daß der Verfasser vorliegender Abhandlung diese Meinung nicht unterschreiben wird. Die Gründe, die man für oder gegen den Wert oder Unwert eines Satzes oder einer Methode anführen könnte, haben stets, mehr oder weniger, einen subjektiven Charakter, so daß es vom geringen wissenschaftlichen Wert wäre, wenn wir hier den Standpunkt von FROBENIUS zu bekämpfen versuchten. Wollte aber FROBENIUS seine verwerfende Kritik über die Anwendbarkeit der Graphen auf Determinantentheorie damit begründen, daß sein tatsächlich „wertvoller" Satz 19 nicht graphentheoretisch bewiesen werden kann, so ist seine Begründung — wie wir gesehen haben — sicherlich nicht stichhaltig. Der graphentheoretische Beweis, den wir für Satz 19 gegeben haben, scheint uns ein einfacher und anschaulicher Beweis zu sein, der dem *kombinatorischen* Charakter des Satzes in natürlicher Weise entspricht und auch zu einer bemerkenswerten Verallgemeinerung (Satz 17) führt.

Es sei noch erwähnt, daß wir oben, im § 2, beim Beweis des Satzes 16 einen Gedanken von FROBENIUS benützt haben, den er bei seiner Zurückführung des Satzes 20 auf Satz 19 angewendet hat.

Faktor ersten Grades von G enthalten sind. (Als Illustration zeigt die Figur den Graphen G, welcher der Determinante

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & a_{23} & 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & 0 & a_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{42} & 0 & a_{44} & a_{45} & 0 \\ 0 & 0 & a_{53} & a_{54} & a_{55} & a_{56} \\ a_{61} & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{66} \end{vmatrix}$$



zugeordnet ist. Die vertikal gezeichneten Kanten entsprechen dort den Elementen der Hauptdiagonale; zum Teilgraph G^* gehören die ausgezogenen Kanten.)

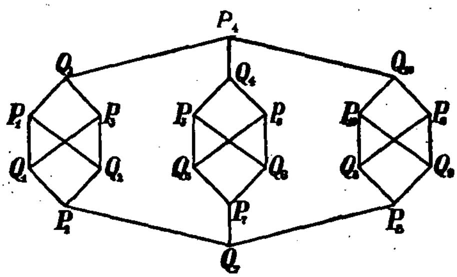
Nun sei D reduzibel. Wir beweisen, daß dann G^* *nicht zusammenhängend ist.* D hängt von einem (nichtverschwindenden) Element a_{ik} dann und nur dann ab, wenn a_{ik} in einem nichtverschwindenden Glied von D enthalten ist, wenn also P_iQ_k zu G^* gehört. Setzt man also in D alle Elemente von denen D nicht abhängt (in unserem Beispiel $a_{42}, a_{53}, a_{56}, a_{61}$) gleich Null, so entspricht der so entstandenen Determinante D^* der Graph G^*. Nun ist D^*, da sie dieselbe Funktion, wie D darstellt, ebenfalls reduzibel: $D^* = D_1 D_2$, wo sowohl D_1, wie D_2 ein Polynom ist, welches wenigstens eine Veränderliche a_{ik} enthält. Da die Determinante in Bezug auf jedes Element linear ist, kann kein Element in beiden der Faktoren D_1, D_2 enthalten sein. Die Kanten P_iQ_k, die einem in D_1 (bzw. in D_2) enthaltenen Element a_{ik} entsprechen, sollen den Teilgraphen G_1 (bzw. G_2) von G^* bilden; jede Kante von G^* ist dann in einem und nur einem der Graphen G_1 und G_2 enthalten. G_1 und G_2 besitzen auch keinen gemeinsamen Knotenpunkt, denn wäre etwa P_i ein solcher, so müßte eine Kante P_iQ_k zu G_1 und eine Kante P_iQ_l zu G_2 gehören, also a_{ik} in D_1 und a_{il} in D_2 enthalten sein. Da aber a_{ik} und a_{il} derselben Zeile von D angehören und die Determinante in Bezug auf die Elemente einer Zeile linear ist, so ist dies unmöglich. G_1 und G_2 sind also fremd zueinander. Da jede Kante von G^* entweder zu G_1, oder zu G_2 gehört, ist somit G^* in der Tat nicht zusammenhängend. (In unserem obigen Beispiel zerfällt G^* in drei zusammenhängende Bestandteile.)

Wir können also auf G Satz 16 anwenden. Dieser besagt, — in die Determinantensprache übersetzt — daß die gemeinsamen

Elemente von r Zeilen und $n-r$ Spalten lauter Nullen sind. Damit ist aber Satz 20 bewiesen.

Wir wollen noch einmal das Resultat hervorheben, daß G^* nicht zusammenhängend ist, falls D reduzibel ist. Ebenso ersieht man, daß auch umgekehrt G^* zusammenhängend ist, wenn D irreduzibel ist. Damit haben wir eine auch praktisch sehr gut anwendbare *Methode, um zu entscheiden, ob eine Determinante, die als Elemente nur Nullen und unabhängige Veränderliche enthält, reduzibel ist,* — da an einem gezeichnet vorliegenden Graphen unmittelbar zu sehen ist, ob er zusammenhängend ist, oder nicht. Betrachten wir als zweites Beispiel die Determinante 10-ten Grades:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{27} & 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{43} & a_{44} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{4,10} \\ 0 & 0 & 0 & a_{54} & a_{55} & a_{56} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{64} & a_{65} & a_{66} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{75} & a_{76} & a_{77} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{87} & a_{88} & a_{89} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{98} & a_{99} & a_{9,10} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{10,8} & a_{10,9} & a_{10,10} \end{vmatrix}$$



Auch mit Hilfe des Satzes 20 wäre es mühsam die Frage der Reduzibilität dieser Determinante zu entscheiden. Die Figur[19]) zeigt nun den entsprechenden paaren Graphen G. Da jede Zeile und jede Spalte genau 3 nicht-verschwindende Elemente besitzt, ist dies ein regulärer Graph, so daß — wie dies aus Satz 14 unmittelbar folgt — jede Kante in einem Faktoren ersten Grades

[19]) Dieser Graph wurde von SAINTE-LAGUË [9] als Beispiel für einen brückenlosen regulären paaren Graphen 3-ten Grades angegeben, für den kein Kreis existiert, welcher sämtliche Knotenpunkte enthält.

enthalten ist, also ist hier $G^* = G$. Man sieht, daß $G^* = G$ zusammenhängend ist. Deshalb ist unsere Determinante irreduzibel.

In dem für Satz 20 gegebenen Beweis wurden die charakteristischen Eigenschaften der Determinanten nur teilweise benützt. Würde man nämlich in der Determinantendefinition

$$|a_{ik}|_1^n = \sum \varepsilon_i a_{1 i_1} a_{2 i_2} \ldots a_{n i_n}$$

die Vorzeichen ε_i in beliebiger Weise modifizieren, ja sogar für die ε_i beliebige von Null verschiedene (von den a_{ik} unabhängige) Zahlen setzen und eventuell eine beliebige Konstante noch additiv hinzufügen, so würde die Richtigkeit des gegebenen Beweises hiedurch nicht beeinträchtigt. Dieser Beweis ergibt also auch folgendes allgemeineres Resultat:

21. *In einer Determinante n-ter Ordnung D seien die nicht-verschwindenden Elemente unabhängige Veränderliche. Eine mit nicht-verschwindenden Koeffizienten gebildete lineare ganze Funktion der Entwicklungsglieder von D ist (als Polynom der Elemente von D) nur dann reduzibel, wenn — für $r = 1$ oder $2, \ldots,$ oder $n-1$ — alle Elemente von D verschwinden, welche gewisse r Zeilen mit gewissen $n-r$ Spalten gemein haben.*

§ 4. Der Mengersche Satz.

Jetzt soll ein ganz allgemeiner Satz bewiesen werden, der die Sätze 12 und 13 — falls diese nur für endliche Graphen formuliert werden — als Spezialfälle in sich enthält. Er wurde von MENGER [8][20]) ausgesprochen und lautet folgendermaßen.

[20]) S. dort Satz δ. Der Beweis von MENGER enthält eine Lücke, da es vorausgesetzt wird (S. 102, Zeile 3—4), daß „K' ein punktförmiges Stück s enthält, welches in der Menge $P+Q$ nicht enthalten ist", während es recht wohl möglich ist, daß — mit der hier gewählten Bezeichnungsweise ausgedrückt — jeder Knotenpunkt von G zu $\Pi_1 + \Pi_2$ gehört. Dieser — keineswegs einfacher — Fall wurde in unserer Darstellung durch den Beweis des Satzes 13 erledigt. Die weiteren — hier folgenden — Überlegungen, die uns zum Mengerschen Satz führen werden, stimmen im Wesentlichen mit dem — sehr kurz gefaßten — Beweis von MENGER überein. In Anbetracht der Allgemeinheit und Wichtigkeit des Mengerschen Satzes wird im Folgenden auch dieser Teil ganz ausführlich und den Forderungen der *rein-kombinatorischen* Graphentheorie entsprechend dargestellt.

[Zusatz bei der Korrektur, 10.V.1933.] Herr MENGER hat die Freundlichkeit gehabt — nachdem ich ihm die Korrektur meiner vorliegenden Arbeit zugeschickt habe — mir mitzuteilen, daß ihm die oben beanstandete Lücke

21. *Seien Π_1 und Π_2 zwei fremde Teilmengen der Knotenpunktmenge Π eines endlichen Graphen G, welche nicht durch weniger als n Knotenpunkte getrennt werden können. Dann gibt es in G n paarweise fremde $\Pi_1\Pi_2$-Wege.*

Entfernt man aus G, der Reihe nach, gewisse Kanten, so muß man, wegen der endlichen Kantenzahl, schließlich einen Graphen G^* von der Beschaffenheit erhalten, daß Π_1 von Π_2 auch in G^* nicht durch weniger als n Knotenpunkte getrennt werden kann,[21] wie man aber auch noch eine Kante aus G^* entfernt, in dem so entstandenen Graphen Π_1 von Π_2 durch weniger als n Knotenpunkte getrennt werden kann. Es genügt natürlich den Satz, statt für G, für G^* zu beweisen, so daß wir von Anfang an voraussetzen dürfen, daß *in jedem echten Teilgraph von G die Mengen Π_1 und Π_2 durch weniger als n Knotenpunkte getrennt werden können.* Diese Eigenschaft von G wird im Folgenden als *Eigenschaft α* bezeichnet.

Erstens sei $\Pi_1 + \Pi_2 = \Pi$. Dann enthält jeder $\Pi_1\Pi_2$-Weg von G eine $\Pi_1\Pi_2$-Kante. Entsteht also G' aus G, indem eine Kante, die zwei Π_1-Punkte (bzw. zwei Π_2-Punkte) verbindet, entfernt wird, so wird durch eine Punktmenge, welche Π_1 von Π_2 in G trennt, Π_1 von Π_2 auch in G' getrennt. Wegen der Eigenschaft α verbindet also keine Kante von G zwei Punkte von Π_1 (bzw. von Π_2), so daß die Bedingungen des Satzes 13 erfüllt sind. Die diesem Satz entsprechenden n Kanten von G sind dann n Wege von G, welche die verlangte Eigenschaft besitzen.

Wir dürfen uns also auf den *zweiten* Fall beschränken, daß nämlich ein Knotenpunkt R_0 von G weder zu Π_1 noch zu Π_2 gehört.

Besteht G aus einer einzigen Kante, so gilt der zu beweisende Satz (es muß dann $n = 1$ sein), wir können also in Bezug auf die Kantenzahl von G vollständige Induktion anwenden.

Entfernt man aus G alle nach R_0 laufende Kanten, so kann — wegen der Eigenschaft α — in dem so entstandenen Graphen

---

seines Beweises schon bekannt war, daß jedoch sein vor Kurzem erschienenes Buch *Kurventheorie* (Leipzig, 1932) einen vollkommen lückenlosen und rein kombinatorischen Beweis des Mengerschen Satzes (des „n-Kettensatzes") enthält. Mir blieb dieser Beweis bis jetzt unbekannt.

[21]) Wie schon hervorgehoben wurde, hat diese Aussage auch dann einen Sinn, wenn gewisse Punkte von $\Pi_1 + \Pi_2$ nicht dem Teilgraphen G^* angehören.

Π_1 von Π_2 durch $r<n$ Knotenpunkte $R_1, R_2, \ldots, R_r$ getrennt werden. Dann wird Π_1 von Π_2 in G natürlich durch die Menge $M=(R_0, R_1, R_2, \ldots, R_r)$ getrennt, so daß $r+1 \geqq n$ ist; wegen $r<n$ folgt hieraus $r=n-1$. Zusammenfassend können wir also sagen: Π_1 und Π_2 werden in G durch eine Menge $M=(R_0, R_1, R_2, \ldots, R_{n-1})$ von n Punkten getrennt, wobei einer dieser Punkte, R_0, nicht zu $\Pi_1+\Pi_2$ gehört.

Ein Punkt R_i von M soll der Teilmenge M_1, bzw. M_2, bzw. M_0 zugeteilt werden, je nach dem er zu Π_1, bzw. zu Π_2, bzw. zu keiner dieser beiden Mengen gehört. Damit haben wir die Zerlegung $M=M_0+M_1+M_2$ in drei paarweise fremde Teile, wobei R_0 zu M_0 gehört.

Betrachten wir nun sämtliche Wege „vom Typus W_1", d. h. diejenigen Wege von G, die einen Punkt von Π_1-M_1 mit einem Punkt von M_0+M_2 verbinden und außer diesem Punkt von M_0+M_2 keinen Punkt von M enthalten. Diejenigen Kanten, die in einem Weg vom Typus W_1 enthalten sind, sollen den Teilgraph G_1 von G bilden. Ebenso sollen diejenigen Kanten von G, die in einem solchen Weg enthalten sind, welcher einen Punkt von Π_2-M_2 mit einem Punkt von M_0+M_1 verbindet und außer diesem Punkt von M_0+M_1 keinen Punkt von M enthält (Wege „vom Typus W_2"), den Teilgraph G_2 von G bilden.

Wir beweisen, daß *ein nicht zu M gehörender Punkt nicht gemeinsamer Knotenpunkt von G_1 und G_2 sein kann.* Hätten nämlich ein Weg $P \ldots A \ldots R_i$ vom Typus W_1 und ein Weg $Q \ldots A \ldots R_j$ vom Typus W_2 (es soll P stets einen Punkt von Π_1 und Q einen Punkt von Π_2 bezeichnen) einen gemeinsamen Knotenpunkt A, der nicht zu M gehört, so würden die Teilwege $P \ldots A$ und $Q \ldots A$ einen $\Pi_1\Pi_2$-Weg $P \ldots Q$ ergeben, der keinen M-Punkt enthält und dies ist unmöglich.

G_1 und G_2 können auch keine gemeinsame Kante besitzen, denn dann müßten beide Endpunkte dieser Kante M-Punkte sein, während — laut der Definition von G_1 und G_2 — eine Kante, die zwei M-Punkte verbindet, weder zu G_1, noch zu G_2 gehören kann.

Zu jedem Punkt R_i von M gehört ein $\Pi_1\Pi_2$-Weg von G, der aus M den Punkt R_i und nur diesen Punkt enthält; im entgegengesetzten Falle würden nämlich die von R_i verschiedenen

$n-1$ Punkte von M auch schon Π_1 von Π_2 trennen. Ist insbesondere $R_i = R_0$, so ist R_0 ein innerer Punkt des ihm auf diese Weise zugeordneten $\Pi_1\Pi_2$-Weges, so daß dieser Weg durch R_0 in zwei Wege zerlegt wird; der eine ist vom Typus W_1, der andere vom Typus W_2. Von den beiden nach R_0 laufenden Kanten dieses $\Pi_1\Pi_2$-Weges gehört also der eine zu G_1, der andere zu G_2. Somit enthält sowohl G_1, wie G_2 wenigstens eine Kante und *es enthält also sowohl G_2, wie G_1 weniger Kanten als G.*

In G_1 können $\Pi_1 - M_1$ und $M_0 + M_2$ nicht durch eine weniger als $m_0 + m_2$ Punkte enthaltende Menge M' getrennt werden (hier bezeichnen m_0, m_1, m_2 bzw. die Punktzahl der Mengen M_0, M_1, M_2), denn würde dies der Fall sein, so würde man, indem man die Menge M_1 hinzufügt, eine weniger als n Punkte enthaltende Menge $M' + M_1$ erhalten, durch die Π_1 und Π_2 in G getrennt wären. Enthält nämlich ein $\Pi_1\Pi_2$-Weg W von G keinen Punkt von M_1, beginnt er also in einem Punkt P von $\Pi_1 - M_1$ und ist R_i von P aus gerechnet der erste Punkt von W, der zu M, also zu $M_0 + M_2$ gehört, so ist der Teilweg $P \ldots R_i$ von W ein Weg vom Typus W_1, also ein Weg in G_1, der einen Punkt von $\Pi_1 - M_1$ mit einem Punkt von $M_0 + M_2$ verbindet; dieser Teilweg, also auch W, muß somit einen Punkt von M' enthalten.

Da G_1 weniger Kanten besitzt als G, dürfen wir — laut unserer Induktionsvoraussetzung — den zu beweisenden Satz, wo jetzt $m_0 + m_2$ für n zu setzen ist, auf G_1, und zwar auf die Punktmengen $\Pi_1 - M_1$ und $M_0 + M_2$ anwenden. Diese Anwendung ergibt folgendes: es gibt $m_0 + m_2$ paarweise fremde Wege in G_1, die sämtlich einen Punkt von $\Pi_1 - M_1$ mit einen Punkt von $M_0 + M_2$ verbinden. Da $m_0 + m_2$ die Punktezahl von $M_0 + M_2$ ist, so gehört jeder der Punkte von $M_0 + M_2$ einem und nur einem dieser Wege (als Endpunkt) an, während ein Punkt aus M_1, da er nicht zu G_1 gehört, keinem dieser Wege angehört. Es seien unter ihnen T_1, $T_2, \ldots, T_{m_2}$ die nach den Punkten von M_2, und $U_1', U_2', \ldots, U_{m_0}'$ die nach den Punkten von M_0 laufenden Wege. Ebenso definiert man $m_0 + m_1$ Wege von G_2: $V_1, V_2, \ldots, V_{m_1}$; $U_1'', U_2'', \ldots, U_{m_0}''$ mit entsprechenden Eigenschaften. Laufen U_i' und U_i'' nach demselben M_0-Punkt, so bestimmen diese beiden Wege einen $\Pi_1\Pi_2$-Weg U_i von G. Dies folgt aus dem Umstande, daß nur ein Punkt von M gemeinsamer Punkt von G_1 und G_2 sein kann. Aus demselben Grunde sind dann die $n = m_0 + m_1 + m_2$ $\Pi_1\Pi_2$-Wege

$U_1, U_2, \ldots, U_{m_0}$; $V_1, V_2, \ldots, V_{m_1}$; $T_1, T_2, \ldots, T_{m_2}$ paarweise fremd zueinander, womit der Mengersche Satz bewiesen ist.[22])

In einer etwas prägnanteren Fassung läßt sich der Mengersche Satz — der Formulierung des Satzes 15 entsprechend — folgendermaßen formulieren.

22. *Seien Π_1 und Π_2 zwei fremde Teilmengen der Knotenpunktmenge Π eines endlichen Graphen G. Die Minimalzahl der Knotenpunkte, durch die Π_1 und Π_2 in G voneinander getrennt werden können, ist gleich der Maximalzahl der paarweise fremden $\Pi_1\Pi_2$-Wege von G.*

Bezeichnen wir nämlich diese Maximal- und Minimalzahl durch M, bzw. m, so gibt es M paarweise fremde $\Pi_1\Pi_2$-Wege in G; da jeder dieser Wege wenigstens einen Punkt aus jedem trennenden Punktsystem enthalten muß, ist $m \geqq M$. Andererseits besagt der Mengersche Satz, daß $M \geqq m$ ist. Also ist $m = M$.

Es sei hervorgehoben, daß in dem hier gegebenen Beweis des Mengerschen Satzes — im Gegensatz zu den Beweisen, die wir oben für Satz 12 und Satz 13 gegeben haben — die Voraussetzung, daß der Graph endlich sei — wegen der Anwendung der vollständigen Induktion — wesentlich war. Man wird also hier zum Problem geführt, ob für endliches n der Mengersche Satz auch für unendliche Graphen gültig bleibt. Mir bereitete diese Frage große Schwierigkeiten. Kürzlich ist es aber Herrn Paul Erdős, den ich auf dieses Problem aufmerksam machte, gelungen, die Frage in bejahendem Sinne zu beantworten. Als Abschluß dieser Abhandlung soll jetzt noch dieser Beweis von Erdős mitgeteilt werden.

Seien Π_1 und Π_2 zwei fremde Teilmengen der Knotenpunktmenge Π des unendlichen Graphen G, welche nicht durch weniger als n Knotenpunkte in G getrennt werden können, wo n eine beliebige endliche Zahl bedeutet. Nehmen wir an, daß im Widerspruch zu dem zu beweisenden Satze, die Maximalzahl r der paarweise fremden $\Pi_1\Pi_2$-Wege von G kleiner als n sei. Es seien $W_1, W_2, \ldots, W_r$ r paarweise fremde $\Pi_1\Pi_2$-Wege von G. Wir betrachten die *endliche* Menge M der Knotenpunktsysteme $(A_1, A_2, \ldots, A_r)$, die so beschaffen sind, daß (für $i = 1, 2, \ldots, r$) A_i

[22]) Das interessante Hauptresultat einer Abhandlung von Whitney [10], nämlich sein Theorem 7, folgt unmittelbar aus diesem Mengerschen Satz, jedoch, wie es scheint, nicht umgekehrt.

zu W_i gehört. Da Π_1 von Π_2 in G nicht durch $r<n$ Punkte getrennt werden kann, gibt es zu jedem Element $S_\alpha=(A_1, A_2, \ldots, A_r)$ von M einen $\Pi_1\Pi_2$-Weg U_α von G, der keinen der Punkte $A_1, A_2, \ldots, A_r$ enthält. Werden sämtliche Kanten von allen diesen Wegen den Kanten der Wege $W_1, W_2, \ldots, W_r$ hinzugefügt, so ergibt sich ein *endlicher* Teilgraph G^* von G. In G^* kann Π_1 von Π_2 nicht durch r Punkte getrennt werden, denn ein solches trennende System müßte, da es aus jedem der Wege $W_1, W_2, \ldots, W_r$ einen Punkt enthalten muß, ein Element $S_\alpha=(A_1, A_2, \ldots, A_r)$ von M sein, und der ihm entsprechende $\Pi_1\Pi_2$-Weg U_α von G^* würde keinen der Punkte A_i enthalten. Auf dem endlichen Graphen G^* dürfen wir nun den Mengerschen Satz anwenden (wo wir jetzt $r+1$ für n setzen) und dieser besagt, daß $r+1$ paarweise fremde $\Pi_1\Pi_2$-Wege in G^*, also auch in G existieren. Und dies widerspricht der vorausgesetzten Maximaleigenschaft von r. Somit haben wir den Satz:

23. *Der Mengersche Satz* 21 *gilt, für eine beliebige endliche Zahl n, auch für unendliche Graphen.*

Natürlich gilt dann auch Satz 22 für unendliche Graphen; es muß aber (falls Π_1 oder Π_2 eine unendliche Menge ist) die dort erwähnte Maximal-, bzw. Minimalzahl als eine *endliche* Zahl vorausgesetzt werden.

Bibliographie.

[1] E. Egerváry, Matrixok kombinatórius tulajdonságairól (Über kombinatorische Eigenschaften von Matrizen), *Matematikai és Fizikai Lapok,* **38** (1931), S. 16—28 (ungarisch mit einem deutschen Auszug).

[2] G. Frobenius, Über Matrizen aus nichtnegativen Elementen, *Sitzungsberichte der preußischen Akademie,* 1912, I, S. 456—477.

[3] G. Frobenius, Über zerlegbare Determinanten, *ebenda,* 1917, I, S. 274—277.

[4] D. König, Vonalrendszerek és determinánsok (Graphen und Determinanten), *Mathematikai és Természettudományi Értesítő,* **33** (1915), S. 221—229 (ungarisch).

[5] D. König, Über Graphen und ihre Anwendung auf Determinantheorie und Mengenlehre, *Mathematische Annalen,* **77** (1916), S. 453—465.

[6] D. König, Graphok és matrixok (Graphen und Matrizen), *Matematikai és Fizikai Lapok,* **38** (1931), S. 116—119 (ungarisch mit einem deutschen Auszug).

[7] C. Kuratowski et G. T. Whyburn, Sur les éléments cycliques et leurs applications, *Fundamenta Mathematicae,* **16** (1930), S. 305—331.

[8] K. MENGER, Zur allgemeinen Kurventheorie, *ebenda,* **10** (1927), S. 96–115.
[9] A. SAINTE-LAGUË, *Les réseaux*, Toulouse, 1924.
[10] H. WHITNEY, Congruent graphs and the connectivity of graphs, *American Journal of Mathematics*, **54** (1932), S. 150—168.
[11] H. WHITNEY, Non-separable and planar graphs, *Transactions of the American Mathematical Society,* **34** (1932), S. 339—362. (Ein Auszug dieser Arbeit befindet sich in *Proceedings of the National Academy of Sciences of the U. S. A.*, **17** (1931), S. 125–127.)

(Eingegangen am 28. Januar 1933.)