Über das zweite Hauptproblem der „Factorisatio Numerorum“.

Von G. SZEKERES und P. TURÁN in Budapest.

1. Das Problem der „Factorisatio Numerorum“ ist das folgende: wir betrachten die möglichen Zerlegungen einer ganzen Zahl n in ganzzahlige Faktoren und fragen nach ihrer Anzahl. Diese Anzahl hängt natürlich von den Zerlegungen ab, welche man allein betrachtet; wir können nämlich zwei Zerlegungen, die sich nur in der Reihenfolge der Faktoren von einander unterscheiden, als verschieden betrachten oder nicht. So erhält man die zwei Hauptprobleme der „Factorisatio Numerorum“. Da in beiden Fällen die Anzahl $R(n)$ der Faktorisationen von n sich ziemlich unregelmäßig verändert (falls n eine Primzahl ist, $R(n)=1$, sonst kann sie beliebig groß werden), so hat man nicht $R(n)$, sondern den Mittelwert $\frac{R(1)+R(2)+\ldots+R(n)}{n}$ zu untersuchen.

Das erstgenannte Problem wurde von Herrn L. KALMÁR behandelt, von dem übrigens die ganze Problemstellung stammt, dabei erhielt er folgendes Resultat[1])

$$R(1)+R(2)+\ldots+R(n)=-\frac{n^{\varrho}}{\varrho\zeta'(\varrho)}+O\left(n^{\varrho}(\log n)^{-\alpha\log\log\log n}\right)$$

für jedes $\alpha<\frac{1}{2(\varrho-1)\log 2}$, wobei ϱ die einzige positive reelle Wurzel der Gleichung $\zeta(s)=2$ ist. Die vorliegende Arbeit behandelt das andere Hauptproblem, indem wir zwei Zerlegungen, die sich nur in der Reihenfolge der Faktoren unterscheiden, als

1) L. KALMÁR, Über die mittlere Anzahl der Produktdarstellungen der Zahlen, erste Mitteilung, *diese Acta*, **5** (1930—32), S. 95—107.

identisch betrachten. Es bedeute also $R(n)$ für $n>1$ die Anzahl der ganzzahligen Lösungen der Gleichung

$$(1) \qquad n = n_1 n_2 \dots n_\alpha$$
$$(2 \leqq n_1 \leqq n_2 \leqq \dots \leqq n_\alpha, \qquad \alpha = 1, 2, 3, \dots);$$

es sei ferner $R(1) = 1$. Dann gelangen wir zum Resultat

$$\frac{R(1)+R(2)+\dots+R(n)}{n} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{e^{2\sqrt{\log n}}}{\log^{\frac{3}{4}} n} + A_1 \frac{e^{2\sqrt{\log n}}}{\log^{\frac{5}{4}} n} + \dots + A_{k-1} \frac{e^{2\sqrt{\log n}}}{\log^{\frac{2k+1}{4}} n} + O\left(\frac{e^{2\sqrt{\log n}}}{\log^{\frac{2k+3}{4}} n}\right),$$

wo $A_1, A_2, \dots$ gewisse Konstante bezeichnen und k beliebig groß gewählt werden kann.

2. Wir wollen zunächst für $\sigma > 1$ $(s = \sigma + ti)$ die Identität

$$(2) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{R(n)}{n^s} = e^{\psi(s)}$$

beweisen, wobei

$$(3) \qquad \psi(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} [\zeta(ks) - 1].$$

Wir betrachten zu diesem Zwecke das Produkt

$$P(s) = \left(1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{2^{2s}} + \frac{1}{2^{3s}} + \dots\right)\left(1 + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{3^{2s}} + \frac{1}{3^{3s}} + \dots\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{4^{2s}} + \frac{1}{4^{3s}} + \dots\right) \dots$$

Die Faktoren dieses Produktes sind für $\sigma > 1$ absolut konvergente Reihen; auch das Produkt selbst ist für $\sigma > 1$ absolut konvergent, wie dies aus der Form

$$(4) \qquad P(s) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2^s}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{3^s}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{4^s}} \dots$$

klar ist. Folglich kann man das Produkt in der üblichen Weise in eine Dirichletsche Reihe umordnen; jeder Zerlegung

$$n = \overbrace{2 \cdot 2 \dots 2}^{\alpha_1} \cdot \overbrace{3 \cdot 3 \dots 3}^{\alpha_2} \cdot \overbrace{4 \cdot 4 \dots 4}^{\alpha_3} \dots$$

entspricht in der Dirichletschen Reihe das Glied

$$\frac{1}{(2^{\alpha_1}3^{\alpha_2}4^{\alpha_3}\ldots)^s}$$

und umgekehrt. Auf diese Weise trägt jede einzelne Faktorisation von n zum Koeffizienten von $\frac{1}{n^s}$ genau 1 bei. Daraus folgt

$$(5)\qquad P(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{R(n)}{n^s}.$$

Aus (4) erhalten wir

$$P(s)=e^{-\sum\limits_{k=2}^{\infty}\log\left(1-\frac{1}{k^s}\right)}=e^{\sum\limits_{k=2}^{\infty}\sum\limits_{l=1}^{\infty}\frac{1}{l}\cdot\frac{1}{k^{ls}}}.$$

Die in dem Exponenten stehende Doppelreihe ist für $\sigma>1$ absolut konvergent, folglich können wir die Reihenfolge der Summationen vertauschen:

$$P(s)=e^{\sum\limits_{l=1}^{\infty}\frac{1}{l}\sum\limits_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k^{ls}}}=e^{\sum\limits_{l=1}^{\infty}\frac{1}{l}[\zeta(ls)-1]},$$

woraus unter Berücksichtigung von (5) und (3) die zu beweisende Gleichung (2) folgt.

3. Wir untersuchen jetzt die Funktion $\psi(s)$ und beweisen den Hilfssatz: *Die Funktion*

$$\varphi(s)=\psi(s)-\frac{1}{s-1}$$

ist für $\sigma>\frac{1}{2}$ *regulär und es ist* $\varphi(1)=0$.

In der Tat ist

$$(6)\quad \varphi(s)=\frac{1}{1}\left[\zeta(s)-\frac{1}{s-1}-1\right]+\frac{1}{2}[\zeta(2s)-1]+\frac{1}{3}[\zeta(3s)-1]+\ldots$$

Die Glieder dieser Funktionenreihe sind für $\sigma>\frac{1}{2}$ regulär; die Reihe selbst ist gleichmäßig konvergent, da für $l\geqq 4$

$$\left|\frac{1}{l}(\zeta(ls)-1)\right|=\frac{1}{l}\left|\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^{ls}}\right|\leqq\frac{1}{l}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^{l\sigma}}<\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{l}{2}}}$$

ist und die Reihe mit positiven Gliedern

$$\sum_{l=4}^{\infty}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{l}{2}}}$$

wegen der für jedes N gültigen Ungleichung

$$\sum_2^N\frac{1}{n^{4/2}}+\sum_2^N\frac{1}{n^{5/2}}+\sum_2^N\frac{1}{n^{6/2}}+\sum_2^N\frac{1}{n^{7/2}}+\ldots<$$

$$<\sum_2^N\frac{1}{n^{4/2}}+\sum_2^N\frac{1}{n^{4/2}}+\sum_2^N\frac{1}{n^{6/2}}+\sum_2^N\frac{1}{n^{6/2}}+\ldots=$$

$$=2\left[\sum_2^N\frac{1}{n^2}+\sum_2^N\frac{1}{n^3}+\ldots\right]=2\sum_{n=2}^N\frac{1}{n(n-1)}<2$$

konvergiert. Die zweite Behauptung beweisen wir folgenderweise: es ist bekanntlich

$$\lim_{s\to 1}\left[\zeta(s)-\frac{1}{s-1}\right]=C,$$

wo C die Eulersche Konstante ist. Daher ist wegen (6)

$$\varphi(1)=C-1+\frac{1}{2}[\zeta(2)-1]+\frac{1}{3}[\zeta(3)-1]+\ldots=\tag{7}$$

$$=C-1+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k}[\zeta(k)-1].$$

Nun ist aber

$$\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k}[\zeta(k)-1]=\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^k}=\sum_{n=2}^{\infty}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{kn^k}=$$

$$=\sum_{n=2}^{\infty}\left[-\log\left(1-\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{n}\right]=\sum_{n=2}^{\infty}\left[\log\frac{n}{n-1}-\frac{1}{n}\right]=$$

$$=\lim_{m\to\infty}\left[\log\frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdots\frac{m}{m-1}-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{m}\right)\right]=1-C,$$

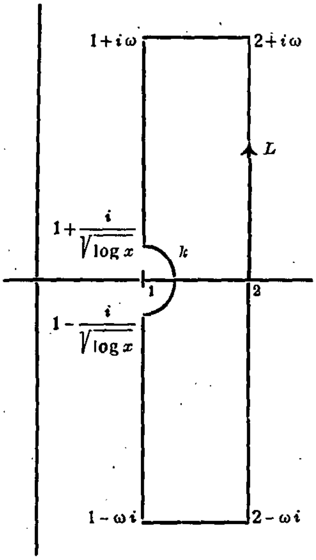
also wirklich

$$\varphi(1)=0.\tag{8}$$

4. Nach einer bekannten Formel aus der Theorie der Dirichletschen Reihen ist wegen (2)

$$\sum_{n\leq x}R(n)\log\frac{x}{n}=\frac{1}{2\pi i}\int_{(2)}\frac{x^s}{s^2}e^{\psi(s)}\,ds\tag{9}$$

wo $\int\limits_{(2)}$ das Integral $\int\limits_{2-\infty i}^{2+\infty i}$ bedeutet.



Um das Integral asymptotisch auswerten zu können, werden wir einen geeigneten Integrationsweg wählen. Betrachten wir das Integral

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(L)}\frac{x^s}{s^2}e^{\psi(s)}\,ds$$

wo (L) den aus der Figur ersichtlichen geschlossenen Weg bezeichnet. Innerhalb und längs der Kurve (L) ist der Integrand nach unserem Hilfsatze regulär; also ist der Wert des Integrals 0. Nun ist für $1\leqq\sigma\leqq 2$, $t\geqq 1$, wenn C_1 (und später $C_2, C_3, \ldots$) positive Konstanten bezeichnen,

$$(10) \qquad |e^{\zeta(s)}|<C_1 t^{\frac{1}{2}}.$$

In der Tat[2]) ist für $1\leqq\sigma\leqq 2$, $t\geqq 1$

$$|\zeta(s)|<C_2\log t, \qquad \text{also} \qquad |e^{\zeta(s)}|\leqq e^{|\zeta(s)|}<t^{C_2},$$

ferner[3]) für $\sigma=1$, $t\geqq 1$

$$|\zeta(s)|<\frac{1}{2}\log t+C_3, \qquad \text{also} \qquad |e^{\zeta(s)}|<C_4 t^{\frac{1}{2}},$$

endlich ist für $\sigma=2$

$$|\zeta(s)|<C_5 \qquad \text{also} \qquad |e^{\zeta(s)}|<C_6;$$

hieraus folgt aber nach dem Phragmén—Lindelöfschen Satz,[4]) angewendet auf die Funktion $e^{\zeta(s)}$ und auf das Halbstreifen $1\leqq\sigma\leqq 2$, $t\geqq 1$, die Ungleichung (10).

Für $\sigma\geqq 1$ ist nun offenbar (für $t\to\infty$)

$$|\psi(s)-\zeta(s)|=O(1)$$

also

$$|e^{\psi(s)-\zeta(s)}|\leqq e^{|\psi(s)-\zeta(s)|}=O(1)$$

folglich gilt für $1\leqq\sigma\leqq 2$

$$(11) \qquad |e^{\psi(s)}|=|e^{\zeta(s)}|\,|e^{\psi(s)-\zeta(s)}|=O(t^{\frac{1}{2}}).$$

---

[2]) Vgl. z. B. E. Landau, *Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen* (Leipzig und Berlin, 1909), Bd. 1, S. 171.

[3]) Dies folgt z. B. aus der Abschätzung $\zeta(1+ti)=o(\log t)$, $t\to\infty$; vgl. H. Weyl, Zur Abschätzung von $\zeta(1+ti)$, *Math. Zeitschrift*, **10** (1921), S. 88—101.

[4]) Vgl. z. B. E. Landau, *Vorlesungen über Zahlentheorie* (Leipzig, 1927) Bd. 2, Satz 405, S. 49—51.

Hieraus folgt für die Integrale längs den beiden wagerechten Wegstücken die für $\omega\to\infty$ gültige Abschätzung

$$\left|\int \frac{x^s}{s^2} e^{\psi(s)} ds\right| < C_7 \frac{x^2}{\omega^2} \omega^{\frac{1}{2}} \to 0.$$

Folglich ist

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(2)} \frac{x^s}{s^2} e^{\psi(s)} ds = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(1)} \frac{x^s}{s^2} e^{\psi(s)} ds, \tag{12}$$

wo jetzt (1) den folgenden aus fünf Stücken bestehenden Weg bedeutet $(x > e)$:

a) $\sigma = 1,\ t \leqq -1,$

b) $\sigma = 1,\ -1 \leqq t \leqq -\frac{1}{\sqrt{\log x}},$

c) den rechten Halbkreis (k) um 1 mit dem Radius $\frac{1}{\sqrt{\log x}}$,

d) $\sigma = 1,\ 1 \geqq t \geqq \frac{1}{\sqrt{\log x}},$

e) $\sigma = 1,\ t \geqq 1.$

Also ist

$$\int\limits_{(1)} \frac{x^s}{s^2} e^{\psi(s)} ds = \int\limits_{1-\infty i}^{1-i} + \int\limits_{1-i}^{1-\frac{i}{\sqrt{\log x}}} + \int\limits_{(k)} + \int\limits_{1+\frac{i}{\sqrt{\log x}}}^{1+i} + \int\limits_{1+i}^{1+\infty i} \equiv \tag{13}$$

$$\equiv I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5.$$

Hier ist[5]) wegen (11)

$$|I_1| = |I_5| < x \int\limits_1^{\infty} \frac{1}{t^2} O(\sqrt{t})\, dt = O(x), \tag{14}$$

ferner

$$|I_2| = |I_4| = \left| x \int\limits_{\frac{1}{\sqrt{\log x}}}^{1} \frac{x^{it}}{(1+it)^2} e^{\frac{1}{it} + \varphi(1+it)} dt \right| < x O(1) = O(x); \tag{15}$$

daher ist

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(2)} \frac{x^s}{s^2} e^{\psi(s)} ds = \frac{1}{2\pi i} I_3 + O(x). \tag{16}$$

---

[5]) Die O-Abschätzungen beziehen sich durchwegs auf den Grenzübergang $x\to\infty$.

5. Jetzt haben wir also noch I_3 zu untersuchen. Es ist

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{(k)}\frac{x^s}{s^2}e^{\psi(s)}ds=\frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{x^{1+e^{i\vartheta}\log^{-\frac{1}{2}}x}}{\left(1+e^{i\vartheta}\log^{-\frac{1}{2}}x\right)^2}e^{\psi\left(1+e^{i\vartheta}\log^{-\frac{1}{2}}x\right)}\frac{e^{i\vartheta}}{\sqrt{\log x}}d\vartheta=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\frac{x}{\sqrt{\log x}}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{e^{\sqrt{\log x}\,e^{i\vartheta}}}{\left(1+e^{i\vartheta}\log^{-\frac{1}{2}}x\right)^2}e^{\sqrt{\log x}\,e^{-i\vartheta}+\varphi\left(1+e^{i\vartheta}\log^{-\frac{1}{2}}x\right)}e^{i\vartheta}d\vartheta=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\frac{x}{\sqrt{\log x}}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{e^{2\sqrt{\log x}\cos\vartheta}}{\left(1+e^{i\vartheta}\log^{-\frac{1}{2}}x\right)^2}e^{\varphi\left(1+e^{i\vartheta}\log^{-\frac{1}{2}}x\right)}e^{i\vartheta}d\vartheta=$$

$$(17)\qquad =\frac{1}{2\pi}\frac{xe^{2\sqrt{\log x}}}{\sqrt{\log x}}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}e^{-4\sqrt{\log x}\sin^2\frac{\vartheta}{2}}\frac{e^{\varphi\left(1+e^{i\vartheta}\log^{-\frac{1}{2}}x\right)}}{\left(1+e^{i\vartheta}\log^{-\frac{1}{2}}x\right)^2}e^{i\vartheta}d\vartheta.$$

Da $\frac{e^{\varphi(s)}}{s^2}$ für $R(s)>\frac{1}{2}$ regulär ist, können wir die Funktion $\frac{e^{\varphi\left(1+e^{i\vartheta}\log^{-\frac{1}{2}}x\right)}}{\left(1+e^{i\vartheta}\log^{-\frac{1}{2}}x\right)^2}$ nach Potenzen von $\frac{e^{i\vartheta}}{\sqrt{\log x}}$ entwickeln. Daher gilt wegen (8)

$$\frac{e^{\varphi\left(1+e^{i\vartheta}\log^{-\frac{1}{2}}x\right)}}{\left(1+e^{i\vartheta}\log^{-\frac{1}{2}}x\right)^2}=1+a_1\frac{e^{i\vartheta}}{\sqrt{\log x}}+a_2\frac{e^{2i\vartheta}}{\sqrt{\log^2 x}}+$$
$$+\dots+a_{k-1}\frac{e^{(k-1)i\vartheta}}{\sqrt{\log^{k-1}x}}+O\left(\frac{1}{\sqrt{\log^k x}}\right),$$

also

$$(18)\qquad \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}e^{-4\sqrt{\log x}\sin^2\frac{\vartheta}{2}}\frac{e^{\varphi\left(1+e^{i\vartheta}\log^{-\frac{1}{2}}x\right)}}{\left(1+e^{i\vartheta}\log^{-\frac{1}{2}}x\right)^2}e^{i\vartheta}d\vartheta=$$
$$=J_1+\frac{a_1}{\sqrt{\log x}}J_2+\dots+\frac{a_{k-1}}{\sqrt{\log^{k-1}x}}J_k+O\left(\frac{1}{\sqrt{\log^k x}}\right),$$

wobei

$$J_m = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{-4\sqrt{\log x}\sin^2\frac{\vartheta}{2}} e^{mi\vartheta} d\vartheta = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-4\sqrt{\log x}\sin^2\frac{\vartheta}{2}} \cos m\vartheta d\vartheta =$$

$$= 2\int_0^{\sqrt[4]{4\log x}} e^{-u^2} \frac{\cos\left(2m\arcsin\frac{u}{2\sqrt[4]{\log x}}\right)}{\left(1-\frac{u^2}{4\sqrt{\log x}}\right)^{1/2}} \frac{du}{\sqrt[4]{\log x}}.$$

Hier können wir wegen

$$0 \leqq u \leqq \sqrt[4]{4\log x}, \quad \frac{u^2}{4\sqrt{\log x}} \leqq \frac{1}{2}$$

die Funktion

$$\frac{\cos\left(2m\arcsin\frac{u}{2\sqrt[4]{\log x}}\right)}{\left(1-\frac{u^2}{4\sqrt{\log x}}\right)^{1/2}}$$

nach Potenzen von $\frac{u^2}{\sqrt{\log x}}$ entwickeln, da sie eine an der Stelle 0 reguläre gerade Funktion von $\frac{u}{\sqrt[4]{\log x}}$ ist; also ist

$$J_m = \frac{2}{\sqrt[4]{\log x}} \int_0^{\sqrt[4]{4\log x}} e^{-u^2} \left\{1 + b_1\frac{u^2}{\sqrt{\log x}} + b_2\frac{u^4}{\sqrt{\log^2 x}} + \right.$$

$$\left. + \dots + b_{k-1}\frac{u^{2k-2}}{\sqrt{\log^{k-1} x}} + O\left(\frac{u^{2k}}{\sqrt{\log^k x}}\right)\right\} du,$$

wo die Koeffizienten $b_1, b_2, \dots$ von m abhängig sind. Da nun

$$\int_{\sqrt[4]{4\log x}}^{\infty} e^{-u^2} u^k du = \int_{\sqrt[4]{4\log x}}^{\infty} O(e^{-u}) du = O\left(e^{-\sqrt[4]{4\log x}}\right),$$

ferner

$$\int_0^{\infty} e^{-u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

ist und $\int\limits_0^\infty e^{-u^2} u^k \, du$ konvergiert, so wird

$$J_m = \frac{2}{\sqrt[4]{\log x}} \int\limits_0^\infty e^{-u^2} \left[1 + b_1 \frac{u^2}{\sqrt{\log x}} + b_2 \frac{u^4}{\sqrt{\log^2 x}} + \ldots + \right. \tag{19}$$

$$\left. + b_{k-1} \frac{u^{2k-2}}{\sqrt{\log^{k-1} x}} + O\left(\frac{u^{2k}}{\sqrt{\log^k x}} \right) \right] du + O\left(e^{-\sqrt[4]{4 \log x}} \right) =$$

$$= \frac{2}{\sqrt[4]{\log x}} \left[\frac{\sqrt{\pi}}{2} + \frac{c_1}{\sqrt{\log x}} + \frac{c_2}{\sqrt{\log^2 x}} + \right.$$

$$\left. + \ldots + \frac{c_{k-1}}{\sqrt{\log^{k-1} x}} \right] + O\left(\frac{1}{\log^{\frac{k}{2} + \frac{1}{4}} x} \right).$$

(9), (16), (17), (18) und (19) zusammenfassend erhalten wir

$$\sum_{n \leqq x} R(n) \log \frac{x}{n} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{x e^{2\sqrt{\log x}}}{\log^{\frac{3}{4}} x} + d_1 x \frac{e^{2\sqrt{\log x}}}{\log^{\frac{5}{4}} x} + \tag{20}$$

$$+ \ldots + d_{k-1} x \frac{e^{2\sqrt{\log x}}}{\log^{\frac{2k+1}{4}}} + O\left(\frac{x e^{2\sqrt{\log x}}}{\log^{\frac{2k+3}{4}} x} \right).$$

5. Es sei λ eine später zu bestimmende Funktion von x, von der wir vorläufig nur voraussetzen, daß $\lambda > 0$ und $\lambda = \lambda(x) \to 0$ falls $x \to \infty$. Es ist offenbar

$$\sum_{n \leqq x} R(n) \log \frac{x}{n} - \sum_{n \leqq \frac{x}{1+\lambda}} R(n) \log \frac{x}{n(1+\lambda)} = \tag{21}$$

$$= \log(1+\lambda) \sum_{n \leqq x} R(n) + \sum_{\frac{x}{1+\lambda} \leqq n \leqq x} R(n) \log \frac{x}{n(1+\lambda)} \leqq$$

$$\leqq \log(1+\lambda) \sum_{n \leqq x} R(n) \leqq$$

$$\leqq \log(1+\lambda) \sum_{n \leqq x} R(n) + \sum_{x < n \leqq x(1+\lambda)} R(n) \log \frac{x + \lambda x}{n} =$$

$$= \sum_{n \leqq x + \lambda x} R(n) \log \frac{x + \lambda x}{n} - \sum_{n \leqq x} R(n) \log \frac{x}{n}.$$

Nach (20) ist ferner, wenn wir $\frac{1}{2\sqrt{\pi}} = d_0$ setzen,

$$(22)\quad \sum_{n\leq x} R(n)\log\frac{x}{n} - \sum_{n\leq \frac{x}{1+\lambda}} R(n)\log\frac{x}{n(1+\lambda)} =$$

$$= \sum_{\nu=0}^{k-1} d_\nu \left(\frac{xe^{2\sqrt{\log x}}}{\log^{\frac{2\nu+3}{4}} x} - \frac{x}{1+\lambda}\, \frac{e^{2\sqrt{\log x - \log(1+\lambda)}}}{\log^{\frac{2\nu-3}{4}} \frac{x}{1+\lambda}} \right) + O\left(\frac{xe^{2\sqrt{\log x}}}{\log^{\frac{2k+3}{4}} x} \right).$$

Nun ist aber

$$(23)\quad \frac{xe^{2\sqrt{\log x}}}{\log^m x} - \frac{x}{1+\lambda}\, \frac{e^{2\sqrt{\log x - \log(1+\lambda)}}}{\log^m \frac{x}{1+\lambda}} =$$

$$= \frac{xe^{2\sqrt{\log x}}}{\log^m x} \left(1 - \frac{e^{2\sqrt{\log x - \log(1+\lambda)} - 2\sqrt{\log x}}}{(1+\lambda)\left(\frac{\log x - \log(1+\lambda)}{\log x} \right)^m} \right) =$$

$$= \frac{xe^{2\sqrt{\log x}}}{\log^m x} \left\{ 1 - \frac{e^{2\sqrt{\log x}\left(\left[1 - \frac{\log(1+\lambda)}{\log x} \right]^{\frac{1}{2}} - 1 \right)}}{1+\lambda} \left[1 - \frac{\log(1+\lambda)}{\log x} \right]^{-m} \right\} =$$

$$= \frac{xe^{2\sqrt{\log x}}}{\log^m x} \left\{ 1 - \frac{e^{2\sqrt{\log x}\left[-\frac{1}{2}\frac{\log(1+\lambda)}{\log x} + O\left(\frac{\lambda^2}{\log^2 x} \right) \right]}}{1+\lambda} \left[1 + \right.\right.$$

$$\left.\left. + m\frac{\log(1+\lambda)}{\log x} + O\left(\frac{\lambda^2}{\log^2 x} \right) \right] \right\} =$$

$$= \frac{xe^{2\sqrt{\log x}}}{\log^m x} \left\{ 1 - \frac{1}{1+\lambda} e^{-\log(1+\lambda)\log^{-\frac{1}{2}} x + O\left(\lambda^2 \log^{-\frac{3}{2}} x\right)} \left[1 + \right.\right.$$

$$\left.\left. + m\frac{\log(1+\lambda)}{\log x} + O\left(\frac{\lambda^2}{\log^2 x} \right) \right] \right\} =$$

$$= \frac{xe^{2\sqrt{\log x}}}{\log^m x} \left\{ 1 - [1 - \lambda + O(\lambda^2)] \left[1 - \frac{\log(1+\lambda)}{\sqrt{\log x}} + O\left(\frac{\lambda^2}{\log x} \right) \right] \left[1 + \right.\right.$$

$$\left.\left. + m\frac{\log(1+\lambda)}{\log x} + O\left(\frac{\lambda^2}{\log^2 x} \right) \right] \right\} =$$

$$= \frac{xe^{2\sqrt{\log x}}}{\log^m x} \left\{ 1 - \left[1 - \lambda - \frac{\log(1+\lambda)}{\sqrt{\log x}} + m\frac{\log(1+\lambda)}{\log x} + O(\lambda^2) \right] \right\} =$$

$$= \frac{xe^{2\sqrt{\log x}}}{\log^m x} \left\{ \lambda + \frac{\log(1+\lambda)}{\sqrt{\log x}} - m\frac{\log(1+\lambda)}{\log x} + O(\lambda^2) \right\}.$$

Wenn wir (23) in (22), dann in (21) einsetzen und durch $\log(1+\lambda)$ dividieren, so folgt unter Beachtung, daß

$$\frac{\lambda}{\log(1+\lambda)} = 1 + O(\lambda)$$

ist,

$$(24)\quad \sum_{n \leqq x} R(n) \geqq \sum_{\nu=0}^{k-1} d_\nu \frac{x e^{2\sqrt{\log x}}}{\log^{\frac{2\nu+3}{4}} x}\left[1 + \frac{1}{\sqrt{\log x}} - \right.$$
$$\left. - \frac{2\nu+3}{4}\frac{1}{\log x} + O(\lambda)\right] + O\left(\frac{x e^{2\sqrt{\log x}}}{\lambda \log^{\frac{2k+3}{4}} x}\right).$$

In genau derselben Weise sieht man ein, daß

$$\sum_{n \leqq x+\lambda x} R(n) \log \frac{x+\lambda x}{n} - \sum_{n \leqq x} R(n) \log \frac{x}{n} =$$
$$= \sum_{\nu=0}^{k-1} d_\nu \left(\frac{(1+\lambda) x e^{2\sqrt{\log x + \log(1+\lambda)}}}{\log^{\frac{2\nu+3}{4}}(x+\lambda x)} - \frac{x e^{2\sqrt{\log x}}}{\log^{\frac{2\nu+3}{4}} x}\right) + O\left(\frac{x e^{2\sqrt{\log x}}}{\log^{\frac{2k+3}{4}} x}\right)$$

und

$$\frac{x(1+\lambda) e^{2\sqrt{\log x + \log(1+\lambda)}}}{\log^m (x+\lambda x)} - \frac{x e^{2\sqrt{\log x}}}{\log^m x} =$$
$$= \frac{x e^{2\sqrt{\log x}}}{\log^m x}\left[\lambda + \frac{\log(1+\lambda)}{\sqrt{\log x}} - m \frac{\log(1+\lambda)}{\log x} + O(\lambda^2)\right],$$

also nach (21)

$$(25)\quad \sum_{n \leqq x} R(n) \leqq \sum_{\nu=0}^{k-1} d_\nu \frac{x e^{2\sqrt{\log x}}}{\log^{\frac{2\nu+3}{4}} x}\left[1 + \frac{1}{\sqrt{\log x}} - \right.$$
$$\left. - \frac{2\nu+3}{4}\frac{1}{\log x} + O(\lambda)\right] + O\left(\frac{x e^{2\sqrt{\log x}}}{\lambda \log^{\frac{2k+3}{4}} x}\right).$$

Aus (24) und (25) folgt

$$\sum_{n \leqq x} R(n) = \sum_{\nu=0}^{k-1} d_\nu \frac{x e^{2\sqrt{\log x}}}{\log^{\frac{2\nu+3}{4}} x}\left[1 + \frac{1}{\sqrt{\log x}} - \frac{2\nu+3}{4}\frac{1}{\log x}\right] +$$
$$+ O\left(\lambda \frac{x e^{2\sqrt{\log x}}}{\log^{\frac{3}{4}} x}\right) + O\left(\frac{x e^{2\sqrt{\log x}}}{\lambda \log^{\frac{2k+3}{4}} x}\right).$$

Man sieht unmittelbar ein, daß die günstigste Wahl von λ ist:

$$\lambda = \frac{1}{\log^{\frac{k}{4}} x};$$

dann erhält man

$$\sum_{n \leqq x} R(n) = \sum_{\nu=0}^{k+1} A_\nu \frac{x e^{2\sqrt{\log x}}}{\log^{\frac{2\nu+3}{4}} x} + O\left(\frac{x e^{2\sqrt{\log x}}}{\log^{\frac{k+3}{4}} x}\right).$$

Setzt man hier $k = 2l$ und unterdrückt man diejenigen Glieder der Summe rechts, deren Größenordnung die des Restgliedes nicht übertrifft, so erhält man unter Beachtung von $A_0 = d_0 = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}$

$$\sum_{n \leqq x} R(n) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{x e^{2\sqrt{\log x}}}{\log^{\frac{3}{4}} x} + A_1 \frac{x e^{2\sqrt{\log x}}}{\log^{\frac{5}{4}} x} + \\ + \dots + A_{l-1} \frac{x e^{2\sqrt{\log x}}}{\log^{\frac{2l+1}{4}} x} + O\left(\frac{x e^{2\sqrt{\log x}}}{\log^{\frac{2l+3}{4}} x}\right),$$

wie behauptet.

(Eingegangen am 29. Juli 1932.)