Bibliographie.

Kürschák József, Matematikai versenytételek (*Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok* Könyvtára 3—5. szám), VIII + 133 oldal, Szeged Városi Nyomda és Könyvkiadó R.-T., 1929.

[**Josef Kürschák, Mathematische Wettbewerbsaufgaben** (Sammlung der *Mathematisch-Physikalischen Blätter für die Mittelschule* 3—5.), VIII + 133 S., Szeged, 1929.]

Die *Roland Eötvös Mathematisch-Physikalische Gesellschaft* pflegt seit 1894 alljährlich einen mathematischen Wettbewerb für die Abiturienten des betreffenden Jahres veranstalten. Den teilnehmenden werden drei Aufgaben vorgelegt, deren Lösung nur Vorkenntnisse aus der Schulmathematik erfordert, die aber durch ihre geistvolle Auswahl das mathematische Denkvermögen des teilnehmenden auf eine schwere Probe stellen. Die Aufgaben sind der Zahlentheorie, der elementaren Algebra und der Planimetrie (selten anderen Gebieten der Mathematik) entnommen; natürlich kommt unter diesen keine schablonenhafte Aufgabe vor. Zur Verdeutlichung der Art der Aufgaben mögen hier die folgenden Beispiele (mit geringer Abänderung des Wortlautes) angeführt werden:

Man beweise, dass die Summe der reziproken Werte von beliebigen (endlich vielen) verschiedenen positiven ganzen Zahlen, welche ausser 2 und 3 keine Primzahl als Teiler besitzen, immer kleiner als 3 ist.

Es seien a, b, c reelle Zahlen und $a^2+b^2+c^2=1$; man beweise, dass $ab+bc+ca$ zwischen $-1/2$ und 1 liegt (Grenzen zugelassen).

Hat ein Sehnenfünfeck lauter gleiche Winkel, so ist es regulär.

Das vorliegende Buch bespricht die Aufgaben der ersten 32 Wettbewerbe (bis 1928). Jeder Aufgabe ist eine lehrreiche Lösung (gelegentlich auch mehrere) beigefügt. Diese Lösungen stimmen nicht mit den der Preisgekrönten Arbeiten überein, welche ja in der Zeitschrift (*Matematikai és Fizikai Lapok*, d. h. *Mathematische und Physikalische Blätter*) der Gesellschaft abgedruckt sind; unter teilweiser Berücksichtigung dieser konstruiert Kürschák mit feinem didaktischen Sinn die dargelegten Musterlösungen. Manchen fügt er interessante Bemerkungen zu. Diese sind zum Teil einer ausführlicheren Behandlung der in der Lösung angewandeten solchen Hilfsbegriffen bzw. Hilfsmitteln gewidmet, welche einem in der Schule weniger berücksichtigten Zweige der Elementarmathematik (z. B. der Zahlentheorie) angehören. Andere Bemerkungen weisen auf die „hinter" den Aufgaben steckenden Probleme und Methoden der höheren Mathematik hin. (Z. B. die Tschebyscheffschen Polynome; die Bolyaische Geometrie; das Schachtelprinzip; die Nomographie; Jensens Satz über konvexe Funktionen usw.) Die knapp gefassten biographischen Notizen (in den Fussnoten) heben je einen geschickt gewählten charakteristischen Zug aus der Tätigkeit der im Buch genannten Mathematiker hervor.

Eine höchst interessante Lektüre für Freunde der Mathematik, lehrreiches Studium nicht nur für Schüler, sondern auch für Studenten und Lehrer!

L. Kalmár.

Ernst Lampe, Mathematik und Sport, mathematische und physikalische Aufgaben aus dem Gebiete der Leibesübungen (Math.-Phys. Bibliothek 74), II + 56 S., mit dem Plan eines Normalkernplatzes, Leipzig und Berlin, B. G. Teubner, 1929.

Das vorliegende Büchlein ist eine Sammlung von elementaren Rechenbeispielen über Laufen, Werfen, Springen, Schlagball, Tennisspiel, Handball, Radfahren und verschiedene Leibesübungen, welche zum grössten Teil vom Gesichtspunkte der betreffenden Sportart aus ein Interesse bieten, zum Teil bloss geometrische oder physikalische Bedeutung besitzen. Am ausführlichsten wird das Werfen behandelt. Hier werden auch die feinsten Umstände berücksichtigt, welche die Leistung und den Erfolg eines Sportmannes beeinflussen. Z. B. hängt nach Aufgabe 63 beim Kugelstossen die gemessene Wurfweite von 14 Variabeln ab. Einige weitere Sportarten (Springen, Schlagball, Tennisspiel, Handball) werden als Spezialfälle des Werfens angesehen.

Das Bändchen kann dem Schüler und Lehrer, hauptsächlich aber dem Sportler empfohlen werden.

F. Bukovszky.

W. Kramer, Einführung in die darstellende Geometrie, II. Teil: Senkrechte Projektion auf zwei Tafeln; Kegelschnitte (Math.-Phys. Bibliothek 67), II + 52 S., Leipzig und Berlin, B. G. Teubner, 1929.

In den beiden ersten Abschnitten dieses Bändchens werden die ersten Elemente der Zweitafelprojektion behandelt; der dritte ist der Erzeugung der Kegelschnitte und deren Eigenschaften gewidmet. Zahlreiche Aufgaben dienen zur Erläuterung; daher ist das Bändchen zum Anfangsstudium der darstellenden Geometrie sehr geeignet.

St. Lipka.

E. Pascal, Repertorium der höheren Mathematik, zweite, völlig umgearbeitete Auflage der deutschen Ausgabe, unter Mitwirkung zahlreicher Mathematiker **herausgegeben von E. Salkowski und H. E. Timerding, erster Band (Analysis), dritter Teilband,** XII + 574 S. (1025—1598), Leipzig und Berlin, B. G. Teubner, 1929.

Der vorliegende Teilband enthält acht Kapitel: Neuere Theorie der reellen Funktionen (Kamke), Neuere Entwicklungen zur Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen (Hoheisel), Die Theorie der Randwertaufgaben im Gebiete der partiellen Differentialgleichungen (Sternberg), Differenzenrechnung (Walther), Die Theorie der Integralgleichungen und Funktionen unendlichvieler Variabeln und ihre Anwendung auf die Randwertaufgaben bei gewöhnlichen und partiellen Differentialgleichungen (Hahn, Lichtenstein und Lense), Trigonometrische Reihen (Plessner), Kugelfunktionen, Besselsche und verwandte Funktionen (Hilb), Zahlentheorie (Bessel-Hagen).

Man erkennt aus diesem Inhaltsverzeichnis, dass dieser Band in der Hauptsache solche Gebiete der Analysis behandelt, welche in den letzten Jahrzehnten im erhöhten Masse das Interesse der Mathematiker angezogen haben. Aus diesem Grunde wird es der „wissenschaftlich arbeitende Mathematiker" mit besonderer Freude begrüssen, „in knappen Umrissen ein Bild" dieser Disziplinen zu erhalten. Man kann natürlich nicht erwarten, dass jeder Fachmathematiker von diesen Gebieten sich denselben Umriss entwerfen würde; es handelt sich ja trotz des enzyklopädieartigen Plans der Darstellung um eine Auswahl des ungeheuer grossen vorliegenden Materials. Mit Sicherheit kann man aber behaupten, dass es den Verfassern jedes Kapitels gelungen ist einen Überblick über den behandelten Gegenstand zu geben, auf Grund dessen sich der Mathematiker in der Literatur leicht zurecht finden wird. Dieses Ziel, das ja dem gesamten Unternehmen zu Grunde lag, ist im vorliegenden Schlussband aufs glücklichste erreicht und dadurch ist die deutsche Ausgabe von Pascals Repertorium ein unentbehrliches Hilfsmittel jedes Mathematikers.

A. H.

L. Lichtenstein, Grundlagen der Hydromechanik (Grundlehren der math. Wissenschaften XXX), XVI + 507 S., Berlin, J. Springer, 1929.

Das vorliegende Buch gehört ohne Zweifel zu den originellsten Werken der mathematischen Neuerscheinungen. Es wäre ein grosser Irrtum, wenn man das Hauptziel dieser Darstellung der Hydromechanik in den Existenztheoremen, zu denen diese Disziplin führt, erblicken würde. Diesen ist nur der elfte Kapitel gewidmet; man gewinnt in diesem Schlusskapitel einen Einblick in die hochinteressanten Untersuchungen des Verfassers über diesen Gegenstand (wobei an einigen Stellen die Beweise nur skizziert werden). Freilich ist LICHTENSTEIN in erster Reihe Mathematiker, obwohl er sich auch mit physikalischen und astronomischen Fragen beschäftigt. Seine „Grundlagen der Hydromechanik“ umfassen aber in gleichförmiger Weise alle Zweige unserer Wissenschaft, welche mit dem physikalischen Problem der Bewegung der Flüssigkeiten zusammenhängen. Man wird es als natürlich ansehen, dass auf die Behandlung von speziellen — für Technik, Hydraulik, Aviatik allerdings wichtigen — Einzelfällen (die man etwa in dem bekannten Lehrbuch von LAMB findet) weniger Wert gelegt ist, als auf die allgemeinen Gesichtspunkte, obwohl auch auf einige Untersuchungen dieser Art hingewiesen ist, z. B. die v. KÁRMÁNsche Wirbelstrassen.

Offenbar hatte der Verfasser ein zweifaches Ziel vor Auge: 1°) alles streng darzustellen, 2°) keine speziellen mathematischen und mechanischen Kenntnisse vorauszusetzen. Diese schwierige Aufgabe hatte zur Folge, dass eine weite Ausholung nötig war, bevor der eigentliche Gegenstand angegriffen wird. Man findet nicht nur eine Darstellung der Vektoranalysis (Kapitel II) und einen ausgezeichneten Abriss der Potentialtheorie (Kapitel III) — der neben den klassischen Sätzen auch verschiedene tiefere Untersuchungen von O. HÖLDER, LIAPUNOFF, LICHTENSTEIN, GÜNTHER enthält — sondern auch eine Zusammenstellung derjenigen topologischen Tatsachen (Kapitel I), welche in der Hydrodynamik eine Rolle spielen. Die stetige Bewegung einer Flüssigkeit und die einparametrige Schar von topologischen Abbildungen sind ja äquivalente Probleme; dieser Umstand macht es unentbehrlich, bei einer strengen Behandlung der Flüssigkeitsbewegungen die Ergebnisse der Analysis situs heranzuziehen. Im V. Kapitel — der Kinematik der Kontinua gewidmet — tritt dieser Umstand klar zu Tage. Dem Verfasser ist die schwierige Aufgabe gelungen, auch die tieferen mathematischen Theoreme, die mit den hier vorkommenden im Zusammenhange sind, (freilich ohne Beweis) verständlich zu machen. So findet man in diesem Kapitel Andeutungen über das STIELTJESsche und LEBESGUEsche Integral, additive Mengenfunktionen usw.; dieser in den üblichen Darstellungen der Hydrodynamik ungewöhnlicher Umstand macht das Studium dieses Lehrbuches für den Mathematiker besonders anziehend und verursacht auch für den „vorwiegend physikalisch interessierten Leser“ keine wirklichen Schwierigkeiten; es wird an verschiedenen Stellen angegeben, was dieser Leser überschlagen kann. Die Fortpflanzung von Unstetigkeiten werden im VI. Kapitel behandelt; die systematische Benutzung der EULERschen Variabeln hat viele Vorteile gegenüber der von HADAMARD benutzten LAGRANGEschen Veränderlichen. Erst im folgenden VII. Kapitel werden die allgemeinen Bewegungsgleichungen aufgestellt. Von den weiteren Kapiteln sei besonders noch auf das zehnte hingewiesen; darin wird eine ausserordentlich elegante Transformationstheorie der hydrodynamischen Gleichungen dargelegt, welche die CAUCHYschen Relationen (die Grundlage der HELMHOLTZschen Wirbeltheorie) als Spezialfall enthält; diese letzteren werden aus den von A. FRIEDMANN zuerst bewiesenen Formeln abgeleitet. Dabei werden nur die Grundtatsachen der Theorie der inkompressiblen Flüssigkeiten (nicht die EULERschen Gleichungen) benutzt und auch die sonstigen Voraussetzungen (Existenz der Ableitungen betreffend) sind auf das Minimum reduziert.

Dieses Werk LICHTENSTEINS ist nicht als Kompendium der Hydromechanik aufzufassen; manche Teile dieser Disziplin, wie z. B. die Turbulenz, sind darin nicht behandelt. Andererseits ist aber viel mehr, wie der Titel vermuten liesse. Der Student, der dieses Buch durcharbeitet, erhält nicht nur einen *Überblick* über die gesamte Hydromechanik, sondern auch einen *Einblick* in verschiedene mathematische Disziplinen. Dem Fachmann — Mathematiker oder Physiker — ist das Werk vermöge seiner klaren, durchsichtigen Darstellungsweise eine äusserst spannende Lektüre.

A. H.

Rolf Nevanlinna, Le théorème de Picard-Borel et la théorie des Fonctions Méromorphes (Collection Borel), VII + 174 pages, Paris, Gauthier-Villars et C^ie^, 1929.

Cet ouvrage est le quatrième des volumes de la Collection de M. BOREL qui indiquent dans leur titre qu'il s'agira de la théorie des fonctions entières ou méromorphes. Tous ces ouvrages avaient pour but d'étudier, pour les différentes valeurs de la constante z, les racines de l'équation $f(x)=z$ formée par une fonction méromorphe $f(x)$ et de rappocher le théorème de M. PICARD concernant les valeurs exceptionnelles à la croissance du module. C'étaient MM. HADAMARD et BOREL qui introduisaient ce point de vue dans la théorie et voici maintenant que, par M. R. NEVANLINNA, ces idées ont pris une forme — on peut dire — définitive: les deux théorèmes fondamentaux donnent des relations très précises entre la distribution des racines de l'équation $f=z$ et l'allure infinitésimal de la fonction par rapport à la valeur z, caractérisée par certaines moyennes remplaçant le module. Le premier de ces théorèmes examine le cas de deux valeurs différentes de z, le second résulte de l'étude simultanée de la distribution des racines pour plusieurs valeurs données de z.

L'ouvrage est divisé en six chapitres dont les premiers trois sont consacrés aus premier théorème fondamental et à ses conséquences, ce sont les théorèmes de MM. HADAMARD et BOREL concernant respectivement les fonctions entières ou méromorphes d'ordre fini. Chapitre IV développe le second théorème fondamental et ses applications, savoir le théorème classique de M. PICARD et ses extensions données par M. BOREL et ses successeurs, ces dernières affirmant que, pour une fonction méromorphe $f(x)$, la densité des racines de l'équation $f(x)=z$ est la même pour toute valeur de la constante z, sauf pour deux valeurs au plus pour lesquelles les raciens sont exceptionnellement rares. Parmi ces applications on doit citer les relations qui existent entre les valeurs exceptionnelles (au sens de M. NEVANLINNA) et les valeurs asymptotiques; ici, l'auteur signale beaucoup de problèmes à résoudre. Le chapitre suivant traite des relations linéaires liant plusieurs fonctions et les questions d'unicité qui s'y rattachent. Le dernier chapitre donne l'extension des théorèmes développés aux fonctions méromorphes dans le cercle d'unité.

La méthode de démonstration est ce qu'on appelle élémentaire: c'est de constater et de se servir du fait que le logarithme du module d'une fonction holomorphe est une fonction harmonique et uniforme, excepté pour les zéros et les pôles de la fonction où elle présente une singularité logarithmique. Cette méthode est la naturelle quand c'est seulement pour deux valeurs de la constante z que l'on étudie la distribution des racines de l'équation $f = z$. Dans le cas de plusieurs z, la voie la plus naturelle est celle par laquelle M. Picard est arrivé à son théorème célèbre, c'est l'emploi de certaines fonctions automorphes appropriées au problème. Dans une Note, placée à la fin de l'ouvrage, se trouve résumé un travail de M. F. Nevanlinna arrivant par cette voie aux deux théorèmes fondamentaux et à ses précisions.

Le style du livre est très clair et la lecture est facile grâce à ce que les idées directrices sont toujours mises au premiers plan. C'est un fait heureux que l'auteur a exposé ses idées dans la Collection de M. Borel, les rendant ainsi accessibles au grand public mathématique.

V. Schmidt.

Oliver Dimon Kellogg, Foundations of Potential Theory (Grundlehren der math. Wissenschaften XXXI), IX + 384 pp., Berlin, J. Springer, 1929.

Taking its origin in two courses, one elementary and one advanced, and wanting to serve the average student as well as the researcher, the present volume leads us from the first notions of potential theory up to its most recent progress. It is divided into twelve chapters: I. The force of gravity. II. Fields of force. III. The potential. IV. The divergence theorem. V. Properties of Newtonian potentials at points of free space. VI. Properties of Newtonian potentials at points occupied by masses. VII. Potentials as solutions of Laplace's equation; Electrostatics. VIII. Harmonic functions. IX. Electric images; Green's function. X. Sequences of harmonic functions. XI. Fundamental existence theorems. XII. The logarithmic potential.

The first ten chapters are devoted to a detailed, well-grounded and masterly clear exposition of the usual matter, except that the existence theorems and the connection of the logarithmic potential with the theory of functions of a complex variable are reserved for the two final chapters. According to his purpose to serve also the average student, the author took care in these ten chapters of being not too general as to his assumptions. No doubt, his hypotheses are general enough for the applications and more general than those stated in some of the best known works on potential theory. But no use is made of Stieltjes integration, a tool particulary adapted to problems dealing with attracting masses as well as to develop the mutual relations between volume, area and line integrals as stated in the divergence theorem or in STOKES' theorem. I am sure that the use of STIELTJES integrals, with the ability of the author, had been of great advantage even in didactical respect; besides the elaborate working out of some theorems, belonging rather to differential geometry, could have been omitted.

The most suggestive part of the volume is Chapter XI. It starts, after a historical introduction, with the FREDHOLM theory of integral equations and its application to the solution of the DIRICHLET and the NEUMANN problems for regions with sufficiently regular boundary. Fortwith, a broader scope is opened for the DIRICHLET problem, leading the reader from the *méthode de balayage* of POINCARÉ and the *alternierende Verfahren* of SCHWARZ up to the remarkable progress made with the DIRICHLET problem during the last years, progress in which the author has taken part not only by some important researches of his own, but also by reporting it, five years ago, in a first-rate address delivered at the annual meeting of the American Mathematical Society and printed in the *Bulletin* of the Society, volume XXXII.

Chapter XII is devoted, in connection with the logarithmic potential, to the fundamental facts on analytic functions, further to a brief consideration of FOURIER series and to conformal mapping.

F. R.

Friedrich Levi, Geometrische Konfigurationen, mit einer Einführung in die kombinatorische Flächentopologie, VIII + 310 S., Leipzig, S. Hirzel, 1929.

Das vorliegende Buch hat zum Gegenstande die geometrischen Konfigurationen in ihren engen Zusammenhängen mit der Gruppentheorie und mit der Topologie.

In der *Einleitung* wird die Konfiguration p_γ, g_π definiert. Sie besteht aus p Punkten und aus g Geraden und jeder Punkt bzw. jede Gerade der Konfiguration ist mit γ Geraden bzw. mit π Punkten inzident. Die Anzahl der Inzidenzen ist also $p\gamma = g\pi$. Sind die Konfigurationen K_1 und K_2 in solcher Weise aufeinander ein-eindeutig bezogen, dass inzidenten Elementen wieder inzidente Elemente entsprechen, so sind die Konfigurationen äquivalent bzw. reziprok, je nachdem jedem Punkte (jeder Geraden) von K_1 ein Punkt (eine Gerade) bzw. eine Gerade (ein Punkt) von K_2 entspricht. Ein Automorphismus ist eine ein-eindeutige Abbildung der Konfiguration auf sich selbst, eine Äquivalenz oder eine Reziprozität. Jeder Konfiguration gehört eine Inzidenztafel, die aus p Zeilen und g Spalten besteht. Ist der ν-te Punkt der Konfiguration mit der μ-ten Geraden inzident, so steht in der ν-ten Zeile an der μ-ten Stelle das Inzidenzzeichen $\times$.

Das *erste Kapitel* führt die Grundbegriffe der Gruppentheorie ein, so weit sie im Buche Anwendung finden. Im Zusammenhange mit dem Begriffe des Automorphismus wird die Konfigurationsgruppe eingeführt.

Das *zweite Kapitel* enthält eine knappe, aber gut lesbare Einleitung in die kombinatorische Flächentopologie.

Das *dritte Kapitel* wendet die topologische Vorkenntnisse auf die Darstellung der einfachsten projektiven Konfigurationen und auf die Konfiguration des Möbiustetraeders und der Geradennetze der projektiven Ebene an.

Das *vierte Kapitel* hat zum Gegenstande die Konfiguration des räumlichen Fünfeckes und des Satzes von Desargues und wendet die polyedrale Konfiguration auf die Kinematik und Statik an.

Das *fünfte Kapitel* ist der Pascalfigur gewidmet. Ein Rechenverfahren erleichtert die Bestimmung der merkwürdigen Punkte und Geraden dieser Konfiguration, ferner die Bestimmung der Bauerkegelschnitte.

Das letzte *(sechste) Kapitel* behandelt die regelmässigen Polyeder und ihre Beziehungen zu der Topologie, Gruppentheorie und zu der nichteuklidischen Geometrie.

Die Darstellung ist durchwegs klar und lebendig. Das Buch füllt aufs glücklichste eine Lücke in der mathematischen Literatur aus und wird sicher gute Dienste leisten. Wir können es nicht nur den Studenten, an die der Verfasser in erster Linie gedacht hat, sondern jedem Mathematiker bestens empfehlen.

Sz. Nagy.

Adolf Hurwitz, Vorlesungen über allgemeine Funktionentheorie und elliptische Funktionen, herausgegeben und ergänzt durch einen Abschnitt über **Geometrische Funktionentheorie von R. Courant** (Grundlehren der math. Wissenschaften III), dritte Auflage, XII + 534 S., Berlin, J. Springer, 1929.

Das rasche Erscheinen der dritten Auflage dieses wohlbekannten Buches ist ein Beweis dafür, dass es sich sowohl als Lehrbuch, wie als Nachschlagewerk trefflich bewährt hat.

Die im wesentlichen von Hurwitz herrührenden beiden ersten Abschnitte sind, bis auf kleine Verbesserungen und Ergänzungen, unverändert geblieben. Die Änderungen, die der von Courant herrührende dritte Abschnitt über geometrische Funktionentheorie erfahren hat, ergaben sich grösstenteils aus dem Bestreben, diesen Abschnitt möglichst vollständig und dadurch von den beiden ersten vollkommen unabhängig zu gestalten. Als wichtigste Änderung ist eine gründliche Ausarbeitung der topologischen Einzelheiten zu verzeichnen, darunter ein von B. L. van der Waerden herrührender Beweis der Möglichkeit der kanonischen Zerschneidung der algebraischen Riemannschen Flächen. Weitere bemerkenswerte Änderungen sind: die Einschaltung des Goursatschen Beweises des Cauchyschen Integralsatzes, die Verwendung des Begriffes der *stetigen Konvergenz* von Funktionenfolgen, die Aufnahme des Carathéodory—Koebe—Fejér—Riesz—Carathéodoryschen Beweises für den Riemannschen Fundamentalsatz der konformen Abbildung, ferner die Einschaltung der Phragmén—Lindelöfschen Erweiterung des Maximumprinzips, und — obzwar an verschiedenen Stellen — einiger der wichtigsten Sätze aus dem Picardschen Ideenkreise (Landau, Schottky, Bloch).

Schliesslich ist noch der auf S. 271 neu aufgenommene Satz über die stetige Änderung des Kurvenintegrals bei stetiger Deformation des Weges anzuführen. Die in der Fussnote angedeutete und dem Leser zur Ausführung empfohlene Verschärfung dieses Satzes lässt vorhersehen, dass der Satz *nicht nur* für „stückweise glatte", *sondern allgemein* für rektifizierbare Kurven besteht.

Viel Glück zur vierten Auflage!

F. R.

Wilhelm Blaschke, Vorlesungen über Differentialgeometrie und geometrische Grundlagen von Einsteins Relativitätstheorie, Band I: Elemente der Differentialgeometrie (Grundlehren der math. Wissenschaften I), dritte Auflage, bearbeitet von GERHARD THOMSEN, X + 311 S., Berlin, J. Springer, 1930.

Die dritte Auflage vom ersten Band des bekannten Werkes von BLASCHKE unterscheidet sich von den früheren darin, dass sie zwei neue Kapitel enthält, welche einen engeren Zusammenhang zwischen den verschiedenen Abschnitten des vorliegenden Bandes, sowie auch einen unmittelbaren Zugang zu den weiteren Bänden des Werkes erzielen. Das neu hinzugekommene dritte Kapitel über Flächenstreifen ergibt einen Übergang von der Kurventheorie zur Theorie der Flächen. In dem ebenfalls neu hinzugekommenen fünften Kapitel über invariante Ableitungen auf einer Fläche werden die Grundformeln der Flächentheorie in einfacher Weise, und einige weitere Anwendungen der invarianten Ableitungen dargestellt. In der Einleitung werden die Grundformeln der Vektorenrechnung zusammengestellt und ein vollständiges System von Invarianten einer Anzahl von Punkten bestimmt.

Die erwähnten Änderungen der neuen Auflage tragen zur leichteren Lesbarkeit des Werkes und zu seiner Vollständigkeit bei. Die grundlegende Bedeutung des vorliegenden Bandes besteht in der Verwirklichung des Programms, bei einem ersten Studium der klassischen Differentialgeometrie zugleich in die modernsten Forschungen einzuführen. In welchem Masse dies dem Verfasser gelungen ist, zeigt die Schule junger Differentialgeometer, welche unter dem Einfluss der BLASCHKEschen Vorlesungen entstanden, Tag bei Tag die schönsten Beiträge zur modernen Differentialgeometrie liefert.

B. v. Kerékjártó.

L. Bieberbach, Analytische Geometrie (Teubners mathematische Leitfäden 29), IV + 120 S, Leipzig und Berlin, B. G. Teubner, 1930.

Der vorliegende Band behandelt die Theorie der linearen und quadratischen Gebilde in der Ebene und im Raum. Es ist das Ziel des Verfassers, mit Zuhilfenahme der Vektorrechnung und des Matrizenkalküls die Elemente der analytischen Geometrie zu entwickeln. Die Grundelemente (z. B.

Gerade, Ebene) werden nach einer vorläufigen kinematischen Behandlung vermöge des Begriffes der linearen Abhängigkeit eingeführt. Es wird dadurch eine gewisse axiomatische Strenge erreicht, die das ganze Buch charakterisiert (z. B. werden in § 6. die Begriffe: Inhalt und Volumen mit Hilfe der charakteristischen Eigenschaften der Determinanten ganz allgemein behandelt). Das Hauptziel des Verfassers ist aber methodisch Neues zu beiten. Durch die vektor-analytische Darstellung wird eine knappe Behandlung der *Begriffe* gewonnen, nicht nur ein „stenographisches System". Mit Hilfe des Matrizenkalküls werden die Raumbewegungen, Kurven und Flächen zweiter Ordnung recht elegant und kurz behandelt. Als Beispiel erwähnen wir die Gleichung der Flächen zweiter Ordnung, welche in der Form $\mathfrak{r}'\mathfrak{A}\mathfrak{r}=0$ ($\mathfrak{r}'$, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{r}$ Matrizen) erscheint. Das Buch ist auch zur Einführung in die moderne Denkweise der Mathematiker geeignet, „denn die Begriffe, wie Vektor, Matrix, Gruppe, linearer Raum, Kalkül, die hier ihren Nutzen in lebendiger Fühlung mit der Anschauung am einfachsten Objekt bewähren, beeinflussen heute" in der Tat „weit über das rein Mathematische hinaus die Wissenschaft".

St. Lipka.

A. Duschek—W. Mayer, Lehrbuch der Differentialgeometrie, Band I: Kurven und Flächen im Euklidischen Raum und **Band II:** Riemannsche Geometrie, VI + 250 bzw. VI + 245 S., Leipzig und Berlin, B. G. Teubner, 1930.

Im ersten Band des Werkes sind die Elemente der Differentialgeometrie im Euklidischen Raum behandelt. Im Sinne Kleins Erlanger Programms liegt der Hauptton auf den verschiedenen geometrischen Invarianten, welche mit konsequenter Verwendung des Tensorkalküls behandelt werden. Ein besonderer Abschnitt wird der ersten Grundform einer Fläche gewidmet, deren Koeffizienten einen wichtigen Tensor, den kovarianten Masstensor bilden. Durch den Masstensor lassen sich alle Eigenschaften der Fläche ableiten und eine Metrik festlegen. In einem interessanten Abschnitt wird unter anderem das sogenannte Formenproblem behandelt. Darunter wird die Frage nach der Bestimmung einer Fläche durch die beiden Grundformen verstanden. Bei den einzelnen Abschnitten stehen immer die wichtigen Probleme im Vordergrund und speziellere Fragen und Aufgaben werden am Ende der Abschnitte unter „Ergänzungen und Aufgaben" behandelt. Diese Einteilung gibt dem Buch einen hohen didaktischen Wert. Einen besonderen Wert gibt dem Buch auch der Umstand, dass die Funktionen nicht wie dies in der Differentialgeometrie üblich, von vornherein als analytisch angenommen werden; z. B. wird die Existenz und Unität einer Kurve mit gegebener Krümmung und Windung unter blossen Voraussetzung deren Stetigkeit bewiesen. Ein anderes Beispiel ist der tiefligende und dabei einfach zu beweisende Satz, dass eine zweimal stetig differenzierbare reelle Minimalfläche notwendig analytisch ist, „der bisher in keinem Lehrbuch der Differentialgeometrie zu finden war".

Der zweite Band des Werkes ist aus den Vorlesungen entstanden, welche Herr W. Mayer an der Universität zu Wien über Riemannsche Geometrie gehalten hat. Dieser enthält hauptsächlich eine Verallgemeinerung der Ergebnisse des ersten Bandes auf Riemannsche Räume und ihre Hyperflächen. Das Buch beginnt mit einer systematischen Darstellung der Tensoralgebra und der Tensoranalysis. Dann wird der n-dimensionale Riemannsche Raum R_n eingeführt, das Messen und die l-dimensionalen Mannigfaltigkeiten des R_n behandelt; der n-dimensionale Euklidische Raum erscheint als Spezialfall. Ein Abschnitt ist der Variationsrechnung gewidmet; diese Theorie wird dann wiederum auf das Studium des n-dimensionalen Riemannschen Raumes angewandt. Unter den Spezialfällen werden am ausführlichsten die Räume konstanter Krümmung behandelt. Endlich wird das gewöhnliche Formenproblem für die Hyperflächen dieser Räume verallgemeinert und gelöst. Der Leser findet in diesem Bande — den man unabhängig von dem ersten lesen kann — wesentlich neue Resultate und Methoden.

Die Darstellungsweise ist durchwegs ganz modern; hier wird der Tensorkalkül — ohne welche man eine Behandlung der allgemeinen Riemannschen Räume kaum vorstellen kann — zum erstenmal in der deutschen Literatur auch in der elementaren Flächentheorie systematisch benutzt. Doch ist es den Verfassern fern gelegen, den Tensorkalkül als einen „Zweck gewordenen Formalismus“ zu treiben.

St. Lipka.

G. Wiarda, Integralgleichungen unter besonderer Berücksichtigung der Anwendungen (Sammlung mathematisch-physikalischer Lehrbücher, herausgegeben von E. Trefftz, 25), II + 183 S., Leipzig und Berlin, B. G. Teubner, 1930.

Der vorliegende Band der von E. Trefftz herausgegebenen Sammlung ist der Theorie und Anwendung der Integralgleichungen gewidmet. Die Problemstellung wird an der Bewegung der schwingenden Saite (sowie an ein optisches Problem) erklärt, wobei die grundlegenden Begriffe auseinandergesetzt werden. Die Theorie ist in den Kapiteln II (symmetrische Kerne) und IV (unsymmetrische Kerne) wesentlich nach der in der Dissertation von E. Schmidt gegebenen Methode dargelegt; auf die Fredholmsche Methode wird im Kapitel V hingewiesen. Kapitel III enthält eine Reihe von äusserst geschickt gewählten Anwendungen der Theorie.

Das Buch ist eine ausgezeichnete Einführung in die Theorie der Integralgleichungen, die sowohl von den Mathematikern, als auch von den Technikern ohne Zweifel mit Freude begrüsst wird. Die knappe Darstellung und die strenge Beweisführung machen es für Studierende besonders empfehlenswert.

A. H.

R. Courant, Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung, erster Band: Funktionen einer Veränderlichen, zweite Auflage, XIV + 410 S., Berlin, J. Springer, 1930.

Das ungewöhnlich rasche Erscheinen der zweiten Auflage in fast unveränderter Form spricht für Güte und Beliebtheit des Buches.

F. R.

Edmund Landau, Grundlagen der Analysis (das Rechnen mit ganzen, rationalen, irrationalen, komplexen Zahlen), Ergänzung zu den Lehrbüchern der Differential- und Integralrechnung, XIV + 134 S., Leipzig, Akademische Verlagsgesellschaft, 1930.

Die Untersuchungen von GRASSMANN, PEANO und DEDEKIND über den Aufbau der Theorie der natürlichen Zahlen gehören ohne Zweifel zum klassischen Schatz der Mathematik. Dennoch sind die Ergebnisse dieser Untersuchungen viel weniger bekannt und gewürdigt, als z. B. die ebenso klassische Schnittmethode DEDEKINDS zum Aufbau der reellen Zahlen. In den Anfängervorlesungen wird zumeist mit den Schnitten begonnen, dann werden vor allem die formalen Rechenregeln für reelle Zahlen sorgfältig bewiesen, wobei dieselben Regeln für rationale Zahlen als gültig angenommen werden. Der Student pflegt es nicht zu verstehen, warum diese Regeln nicht auch für *reelle* Zahlen evident sind, und wenn sie für reelle Zahlen bewiesen werden *müssen,* warum sie dann für *rationale* Zahlen evident sind. Und hatte er nicht das Glück, in einer späteren Spezialvorlesung zu lernen, dass man auch die Rechenregeln über rationale Zahlen auf viel einfachere Tatsachen, nämlich auf die PEANOschen Axiome, zurückführen kann, so blieb er bisher in der Regel ohne Antwort auf seine Fragen. Denn bisher gab es in der Literatur kein Lehrbuch, das einen lückenlosen Aufbau der Theorie der natürlichen, rationalen und reellen Zahlen auf Grund der PEANOschen Axiome enthält, ohne es durch Einbettung in viel weitergehende Gesichtspunkte oder anderswie (z. B. durch Anwendung logischer Symbolik) demjenigen Anfänger, der *nur* dies lernen will, unzugänglich zu machen.

Diese empfindliche Lücke der Literatur hat Herr LANDAU durch das vorliegende Werk ausgefüllt. Das Buch behandelt der Reihe nach die Rechenregeln und die Sätze über die Ordnung für natürliche, für positiv-rationale, für positiv-reelle, für negative und endlich für komplexe Zahlen (den DEDEKINDschen Hauptsatz (Lückenlosigkeit der reellen Zahlen) und die Definition der Summen und Produkte $\left(\sum\limits_{n=1}^{m} x_n \text{ und } \prod\limits_{n=1}^{m} x_n\right)$ inbegriffen). Die Darstellung ist streng axiomatisch; der bekannte „LANDAUstil“ bewährt sich hier als angemessenste. Dabei wird grösstmögliche Eleganz bestrebt; nur an einer einzigen Stelle tritt dieses Bestreben zu Gunsten der gedanklichen Einfachheit zurück; es werden nämlich die negativen Zahlen nicht als Paare (d. h. als Differenzen) von positiven Zahlen eingeführt, sondern als den einzelnen positiven Zahlen zugeordnete Dinge.

Das Buch wird gewiss seine Ziele erreichen, nämlich: 1. es wird dem oben angeführten Studenten eine klare, mit geringer Mühe lesbare Antwort auf seine Zweifel geben; 2. es wird die Anzahl der Studenten dieser Art rasch vermindern, indem es viel dafür beitragen wird, dass diese Sachen öfter vorgetragen werden.

Das Buch wird aber auch ein drittes leisten, das gewiss nicht zu seinen Ziele gehörte. Es wird zur besten Vorbereitung für das Studium der modernen axiomatischen Theorien dienen, mehr als die zu diesem Zwecke geschriebenen Werke. Denn diese fangen gewöhnlich sofort mit der Symbolik an, was ja nur ein Hilfsmittel, aber kein Selbstzweck ist, die man nachher ganz leicht aneignen kann, wenn man zuerst an einem Musterbeispiel — wie das vorliegende Buch — verstanden hat, wie sich eine Theorie in lückenloser Weise axiomatisch aufbauen lässt.

Würde dies drittes zu den Zielen des Verfassers gehört haben, so hatte er gewiss im „Vorwort für den Kenner" zusammengestellt, welche Regeln man ausser den Axiomen und den logischen Schlussweisen zur Aufbau der Theorie bedarf; nämlich die Regeln zur Handhabung der Begriffe „alle" und „es gibt" und die Regeln zur Bildung von Mengen und Funktionen. Dies wäre dann umsomehr am Platz, da in diesem Vorwort die Frage der Widerspruchslosigkeit der PEANOschen Axiome berührt wird und da dieser Widerspruchslosigkeitsbegriff wesentlich von den genannten Regeln abhängt; z. B. ist diese Widerspruchslosigkeit von den Herren J. v. NEUMANN und W. ACKERMANN bewiesen worden für den Fall, dass jene Regeln in geeigneter Weise eingeschränkt werden, wodurch allerdings — leider — der Beweis des DEDEKINDschen Hauptsatzes unmöglich gemacht würde. (In den Worten LANDAUS: „Gewiss beweise ich nicht die Widerspruchslosigkeit der fünf PEANOschen Axiome (weil man es nämlich nicht kann) . . ."[1]) ist natürlich Widerspruchslosigkeit in Bezug auf *alle* Regeln gemeint, welche im Buch angewandt werden.) Da aber die Vorbereitung zum Studium der HILBERTschen Beweistheorie nicht zu seinen Zielen gehört, braucht der Verfasser diese Regeln nicht einmal zu erwähnen; sie sind ja implizite enthalten in den beiden Voraussetzungen: „logisches Denken und die deutsche Sprache" (vgl. „Vorwort für den Lernenden", Nr. 2.); etwa die Regeln für „alle" und „es gibt" in der ersten, die für Mengen und Funktionen in der letzteren.

L. Kalmár.

---

[1]) Es bleibe dahingestellt, ob Herr Landau hier das augenblickliche Unbewiesensein gemeint oder die absolute Unbeweisbarkeit vermutet hat. Nach einer vorläufigen Mitteilung (K. Gödel, Einige metamathematische Resultate über Entscheidungsdefinitheit und Widerspruchsfreiheit, *Anzeiger der Akademie der Wissenschaften in Wien, Math.-Naturw. Klasse*, **67** (1930), S. 214—215.) hat Herr Gödel kürzlich diese letzte Vermutung bewiesen. (Die Ausführung wird demnächst in den *Monatshefte für Mathematik und Physik* erscheinen.) Dadurch werden m. E. die Gesichtspunkte der Beweistheorie nicht gegenstandslos; denn eine Theorie, die hinreichend kräftige Methoden besitzt, einen so tiefliegenden Satz zu beweisen, ist ohne Zweifel lebensfähig. Sie wird wohl schwierige Probleme finden, welche sie auch lösen kann; nur die Widerspruchslosigkeit der Analysis ist kein Problem mehr für sie, in gleicher Weise, wie die algebraische Auflösung der allgemeinen Gleichung fünften Grades seit dem Ruffini—Abelschen Entdeckung kein Problem mehr der Algebra ist.