Remarques sur „la meilleure approximation en moyenne“ et sur le problème de Dirichlet.

Par Gaston Julia à Versailles.

Introduction. J'ai montrè dans un mémoire inséré aux comptes rendus du Congrès International de Bologne de Septembre 1928, et exposant une communication faite à ce congrès, comment on pourrait résoudre le problème de Dirichlet relatif à l'aire bornée limitée par une *courbe de* Jordan simple fermée C, par le procédé d'approximation suivant: $f(m)$ étant la fonction donnée, continue sur C, vers laquelle doit tendre la fonction $F(x, y)$ cherchée, harmonique dans C, quand le point (x, y) tend vers m de C, on détermine le (ou les) polynome harmonique $P_n(x, y)$ de degré n dont „*l'écart à* $f(m)$ *sur* C“ est minimum; lorsque n devient infini $P_n(x, y)$ converge uniformément dans C et sur C vers la fonction $F(x, y)$ cherchée. Dans le mémoire précédent, l'écart de $f(m)$ à $P_n(m)$ sur C a été défini comme le Maximum de $|f(m)-P_n(m)|$ lorsque m décrit C.

On va résoudre maintenant le même problème en donnant de l'écart une autre définition. La courbe de Jordan C étant représentée paramétriquement par $x = x(t)$, $y = y(t)$, et la donnée $f(m)$ sur C étant une fonction du paramètre t dénommée $f(t)$, nous appellerons ici écart à $f(t)$ sur C, du polynome $P(x, y)$ l'intégrale: $\int_0^{2\pi} |f(t)-P[x(t), y(t)]|^p dt$, p étant un nombre fixe quelconque > 1. Nous montrerons l'existence d'un polynome harmonique d'ordre $\leqq n$ dont l'écart à $f(t)$ sur C est minimum, et nous montrerons qu'il tend dans C vers $F(x, y)$, solution du problème de Dirichlet relatif à la donnée $f(t)$.

Mais, *à priori,* la représentation paramétrique de C étant, dans une large mesure indéterminée, si l'on veut que cette détermination n'influe pas sur le polynome $P_n(x, y)$ d'écart minimum, il faut choisir un paramètre de représentation θ qui ait un *sens géométrique.* Une courbe de Jordan simple fermée n'étant pas rectifiable en général, il n'est pas possible de songer au paramètre s, abscisse curviligne, comme l'ont fait pour le cas particulier $p=2$, M. Serge Bernstein (*C. R. de l'Académie des Sciences de Paris,* **148,** 17 mai 1909) et, après lui, M. Marcel Brillouin et M. Picone (V. Picone, *Rendiconti della Reale Academia dei Lincei,* 1922, p. 357).

Nous choisirons ici pour paramètre θ, celui sur lequel la reprèsentation conforme a attiré l'attention, et grâce auquel on peut notamment, comme l'a montré M. Fejér, représenter paramétriquement toute courbe de Jordan simple fermée par des fonctions $x(\theta)$, $y(\theta)$, *continues et développables en série de* Fourier. Nous utiliserons ici surtout des propriétés de la représentation conforme, les travaux précédemment cités se rattachant surtout à la théorie des séries de fonctions orthogonales.

1. *Définition du paramètre θ.* Imaginons la courbe de Jordan C du plan $z=x+iy$ représentée paramétriquement à l'aide du paramètre θ $(0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$ dont le sens géométrique est le suivant:

On sait que O, origine du plan z, étant un point intérieur à C, on peut représenter l'intérieur de C d'une manière conforme sur l'intérieur d'un cercle Γ du plan Z ayant pour centre l'origine O du plan Z et pour rayon l'unité. La fonction de correspondance conforme $Z=g(z)$ est parfaitement définie si on donne l'argument de $g'(0)$; nous choisissons ici $g'(0)$ réel et positif (arg. de $g'(0)$ nul). Alors on sait (Carathéodory) que $g(z)$ est continue sur C et fait correspondre à chaque point m de C un point M et un seul de Γ, la correspondance entre m et M étant biunivoque et bicontinue. Appelons θ l'argument du point M de Γ qui correspond ainsi au point m (d'affixe z) de C. Les coordonnées de m seront ainsi des fonctions $x(\theta)$ et $y(\theta)$ continues et périodiques au moyen desquelles C sera représenté paramétriquement et correspondra d'une manière biunivoque et bicontinue au cercle Γ. On remarquera que, si l'argument de $g'(0)$ est choisi $\neq 0$, cela revient comme on sait à multiplier $g(z)$ par une constante $e^{i\alpha}$ (α réel), donc à augmenter tous les θ d'une même constante, et ceci n'a aucune importance pour ce qui va suivre.[1])

[1]) A vrai dire, le point M de Γ correspondant à un point m de C (et par suite la valeur de θ) dépend du point O choisi pour origine dans le

2. La représentation de C sur Γ par $z = x(\theta) + iy(\theta)$ étant ainsi faite, une fonction continue $f(m)$ de m sur C devient une fonction continue de θ que nous désignons par $f(\theta)$. Soit $\varphi(x, y)$ une fonction continue de x et y dans C et sur C, nous appellerons ici écart de φ à f sur C l'intégrale

$$\int_0^{2\pi} |f(\theta) - \varphi[x(\theta), y(\theta)]|^p \, d\theta$$

p étant un nombre positif > 1.

3. *Existence.* Parmi tous les polynomes harmoniques $P_n(x, y)$ de degré $\leq n$ (ils dépendent de $2n+1$ paramètres réels indépendants) en existe-t-il un ou plusieurs $P_n(x, y)$ pour lesquels l'écart à f sur C,

$$I[P_n] = \int_0^{2\pi} |f(\theta) - P_n[x(\theta), y(\theta)]|^p \, d\theta$$

soit minimum?

---

plan z. Ce que l'on dira dans la suite, p. ex. la définition du polynome harmonique P_n de degré n, qui s'écarte le moins de $f(m)$ sur C, dépendra évidemment du choix de O. Remplacer O par un autre point O_1, revient à faire correspondre à m (intérieur à C) successivement M et M_1 (intérieurs à Γ) et liés entre eux par une relation homographique conservant le cercle Γ $\left(Z_1 = \dfrac{aZ + b}{cZ + a}\right)$; cette relation donne la relation qui lie θ (argument de Z lorsque m est sur C) à θ_1 (argument de Z_1). L'intégrale définissant l'écart, avec le nouveau choix O_1 de l'origine sera

$$\int_0^{2\pi} |f(m) - g(m)|^p \, d\theta_1 = \int_0^{2\pi} |f(m) - g(m)|^p \frac{d\theta_1}{d\theta} \, d\theta.$$

On reconnaît aisément que $\theta_1(\theta)$ est toujours croissante et que l'on a, Z étant sur Γ, $\dfrac{d\theta_1}{d\theta} = \left|\dfrac{ad - bc}{(cZ + d)^2}\right|$. Lorsque z décrit C, Z décrit Γ, $cZ + d$ ne s'annule pas sur Γ, le point $Z = -\dfrac{d}{c}$ étant certainement extérieur à Γ, donc $\dfrac{d\theta_1}{d\theta}$ reste compris entre deux limites positives. Le changement de O et son remplacement par O_1 équivaut par conséquent à remplacer la moyenne qui définit l'écart par une moyenne où *chaque élément différentiel est affecté* d'un poids $\left(\dfrac{d\theta_1}{d\theta}\right)$. Cette modification, bien qu'entraînant avec elle une modification des polynomes P_n de meilleure approximation, n'infirme aucune des conclusions qui suivent: existence, unicité, convergence des polynomes de meilleure approximation.

Observons que l'écart $I[P_n]$ est fonction continue des $2n+1$ paramètres figurant dans P_n. De plus x est un polynome harmonique de degré $\leqq n$. Si donc on ne considère que les P_n dont l'écart à f est moindre que celui de x, ils seront tels que

$$\int_0^{2\pi} |f-P_n|^p d\theta \leqq \int_0^{2\pi} |f(\theta) - x(\theta)|^p d\theta = \lambda.$$

Or, on sait que, pour $p>1$

$$\left[\int_0^{2\pi} |P_n|^p d\theta\right]^{1/p} \leqq \left[\int_0^{2\pi} |P_n-f|^p d\theta\right]^{1/p} + \left[\int_0^{2\pi} |f|^p d\theta\right]^{1/p} \leqq \lambda^{1/p}+\mu^{1/p},$$

en posant

$$\int_0^{2\pi} |f|^p d\theta = \mu.$$

Les P_n entre lesquels il faut choisir sont donc tels que

$$\int_0^{2\pi} |P_n|^p d\theta \leqq [\lambda^{1/p}+\mu^{1/p}]^p.$$

Or,

$$\int_0^{2\pi} |P_n| d\theta < \int_0^{2\pi} |P_n|^p d\theta$$

puisque $p>1$. Il en résulte que les $|P_n|$ sont bornés dans tout domaine intérieur à C.

En effet, si l'on fait correspondre $z=x+iy$ intérieur à C et $Z=X+iY$ intérieur à Γ par $Z=g(z)$ ou la fonction inverse $z=h(Z)$, $P_n(x,y)$ devient une fonction $\mathcal{P}_n(X,Y)$ harmonique dans Γ et continue sur Γ; on a $P_n[x(\theta), y(\theta)] = \mathcal{P}_n(\cos\theta, \sin\theta)$. Donc:

$$\int_0^{2\pi} |\mathcal{P}_n(\cos\theta, \sin\theta)| d\theta < [\lambda^{1/p}+\mu^{1/p}]^p.$$

La fonction harmonique $\mathcal{P}_n(X,Y)$ ayant son module borné *en moyenne* sur Γ sera elle-même bornée en module dans tout domaine intérieur à Γ. En effet (X,Y) étant un point intérieur au cercle Γ et (A,B) un point de ce cercle, la fonction de Green $G(X,Y;A,B)$ et sa dérivée normale au point (A,B), $\frac{dG}{dn}$, restent uniformément bornées tant que (X,Y) appartient à un domaine fermé Δ intérieur à Γ; par suite, puisque

$$\mathcal{S}_n(X, Y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathcal{S}_n(A, B) \frac{dG}{dn} d\theta$$

on aura dans Δ

$$|\mathcal{S}_n(X, Y)| < \frac{M}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\mathcal{S}_n(A, B)| d\theta < \frac{M(\lambda^{1/p} + \mu^{1/p})^p}{2\pi}$$

si l'on a dans Δ

$$\left| \frac{dG}{dn} \right| < M.$$

Il en résulte que les P_n envisagés sont tous en module $< \mathfrak{M}$ ($\mathfrak{M}$ étant un nombre constant) lorsque (x, y) reste dans un domaine D intérieur à C Les coefficients de ces P_n sont donc, eux aussi, bornés en module; dans l'espace à $2n+1$ dimensions, le point ayant pour coordonnées ces $2n+1$ coefficients reste reste dans un domaine borné $\mathfrak{D}$. $I(P_n)$ est une fonction continue positive de ce point dans $\mathfrak{D}$, elle atteint son minimum en un point au moins de $\mathfrak{D}$. L'existence d'un polynome P_n au moins dont l'écart à f sur C soit minimum est donc établie de ce fait. (Nous appellerons ε_n l'écart minimum ainsi défini pour chaque degré n.)

4. *Unicité.* S'il y en avait deux, P_n et Q_n, tout polynome $aP_n + bQ_n$ (a et b réels) serait harmonique comme eux, en particulier $\frac{1}{2} P_n + \frac{1}{2} Q_n = R_n$.

Puisque

$$\varepsilon_n = \int_0^{2\pi} |f - P_n|^p d\theta = \int_0^{2\pi} |f - Q_n|^p d\theta$$

et puisque

$$f - \frac{P_n + Q_n}{2} = \frac{1}{2} [(f - P_n) + (f - Q_n)],$$

$$\int_0^{2\pi} |f - R_n|^p d\theta = \int_0^{2\pi} \left| \frac{(f - P_n) + (f - Q_n)}{2} \right|^p d\theta.$$

Or, pour $p > 1$, $\left| \frac{\alpha + \beta}{2} \right|^p < \frac{|\alpha|^p + |\beta|^p}{2}$ excepté si $\alpha = \beta$, car d'une part $\left| \frac{\alpha + \beta}{2} \right| \leq \frac{|\alpha| + |\beta|}{2}$, et d'autre part, pour $p > 1$, la courbe

$y = x^p$ étant concave vers le haut, on aura

$$\left|\frac{|\alpha|+|\beta|}{2}\right|^p < \frac{1}{2}\left[|\alpha|^p + |\beta|^p\right].$$

Il en résulte que

$$\int_0^{2\pi} |f-R_n|^p\, d\theta < \frac{1}{2}\left\{\int_0^{2\pi} |f-P_n|^p\, d\theta + \int_0^{2\pi} |f-Q_n|^p\, d\theta\right\}$$

ou $\int_0^{2\pi} |f-R_n|^p\, d\theta < \varepsilon_n$, sans égalité possible, à moins que P_n ne soit égal à Q_n *en tout point de* C, ce qui entraînerait $P_n \equiv Q_n$. Le polynome R_n aurait donc sur C, un écart à f moindre que celui de P_n et de Q_n, alors moindre que ε_n, ce qui est impossible puisque ε_n est l'écart minimum pour le degré n.

Le polynome P_n est donc unique, on l'appelle polynome harmonique d'écart minimum ε_n sur C.

5. En particulier supposons $p=2$ et supposons que C soit un cercle de centre O, de rayon 1. Alors $x(\theta) = \cos\theta$, $y(\theta) = \sin\theta$ puisque $z = h(Z) \equiv Z$ et $g(z) \equiv z$.

Le polynome harmonique général de degré n est

$$P_n(x, y) = P_n(r\cos\theta, r\sin\theta) =$$
$$= \frac{\alpha_0}{2} + r(\alpha_1\cos\theta + \beta_1\sin\theta) + \ldots + r^n(\alpha_n\cos n\theta + \beta_n\sin n\theta);$$

en posant

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta;$$

$f(\theta)$ étant continue, le polynome d'écart minimum est celui pour lequel l'intégrale

$$I[P_n] = \int_0^{2\pi} \Big| f(\theta) -$$
$$- \left[\frac{\alpha_0}{2} + (\alpha_1\cos\theta + \beta_1\sin\theta) + \ldots + (\alpha_n\cos n\theta + \beta_n\sin n\theta)\right]\Big|^2 d\theta$$

est minimum. Ce polynome a donc pour coefficients α_i, β_i, les *coefficients de* Fourier de $f(\theta)$. Si le développement de Fourier de $f(\theta)$ est $\frac{a_0}{2} + \Sigma(a_n\cos n\theta + b_n\sin n\theta)$, le polynome d'écart minimum sur C sera pour chaque degré n

$$P_n(r\cos\theta,\ r\sin\theta) \equiv \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} r^k (a_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta).$$

On sait que dans ce cas particulier le polynome $P_n(r\cos\theta,\ r\sin\theta)$ converge uniformément dans toute aire intérieure à C vers la somme de la série $\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} r^k (a_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta)$ qui n'est autre que la valeur au point $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ de la fonction harmonique dans C prenant sur C la valeur $f(\theta)$ au point d'argument θ. On sait d'ailleurs à priori (du Bois-Reymond, Lebesgue, Fejér) que, la série de Fourier d'une fonction continue $f(\theta)$ pouvant être divergente, $P_n(\cos\theta,\ \sin\theta)$ peut n'avoir pas de limite, c'est à dire que *le polynome P_n d'écart minimum peut n'avoir aucune limite sur C.* Nous allons maintenant étudier la convergence de P_n à l'intérieur de C dans le cas général.

6. *Convergence des P_n dans le cas général.* Prouvons d'abord que $\lim\limits_{n=\infty} \varepsilon_n = 0$. J'ai en effet démontré dans la mémoire antérieurement cité (Congrès de Bologne 1928) qu'il est possible de développer toute fonction harmonique dans C et continue sur C, en série de polynomes harmoniques convergeant uniformément dans C et sur C, c'est à dire, que pour tout ε positif donné, on peut trouver un polynome harmonique $Q_n(x, y)$ de degré n assez élévé tel que

$$|f(\theta) - Q_n[x(\theta),\ y(\theta)]| < \varepsilon$$

quelque soit θ. L'écart de ce Q_n à f sur C sera donc $< 2\pi\varepsilon^p$. L'écart minimum ε_n correspondant au degré n sera donc à fortiori $< 2\pi\varepsilon^p$ c'est à dire que $\lim\limits_{n=\infty} \varepsilon_n = 0$.

On a donc $\lim\limits_{n=\infty} \int_0^{2\pi} |f(\theta) - P_n[x(\theta),\ y(\theta)]|^p d\theta = 0$ et en appelant $\mathcal{S}_n(X, Y)$ la fonction harmonique dans Γ issue de $P_n(x, y)$ par la représentation conforme $z = h(Z)$ on aura

$$\lim_{n=\infty} \int_0^{2\pi} |f(\theta) - \mathcal{S}_n(\cos\theta,\ \sin\theta)|^p d\theta = 0.$$

Par l'exemple de $p = 2$ et C cercle unité, nous savons qu'il ne faut pas chercher à prouver la convergence de $\mathcal{S}_n$ vers $f(\theta)$

sur Γ, mais que le convergence de $\mathcal{S}_n(r\cos\theta, r\sin\theta)$ vers la fonction harmonique dans Γ, prenant sur Γ les valeurs $f(\theta)$ est plausible.

7. Démontrons en effet cette convergence. Désignons par $F(x, y)$ la fonction harmonique dans C, continue sur C, prenant sur C les valeurs données $f(\theta)$ c'est à dire telle que

$$F[x(\theta), y(\theta)] = f(\theta).$$

Par la transformation $z = x + iy = h(X + iY)$ elle devient la fonction $\mathcal{F}(X, Y)$ harmonique dans Γ, continue sur Γ, et on a:

$$\mathcal{F}(\cos\theta, \sin\theta) = f(\theta).$$

Envisageons l'intégrale

$$\varepsilon_n(r) = \int_0^{2\pi} |\mathcal{F}(r\cos\theta, r\sin\theta) - \mathcal{S}_n(r\cos\theta, r\sin\theta)|^p \, d\theta.$$

Puisque $\mathcal{F}$ et $\mathcal{S}_n$ sont uniformément continues dans et sur Γ on a

$$\lim_{r=1} \varepsilon_n(r) = \varepsilon_n.$$

Admettons, *ce que nous démontrerons plus loin,* que $U(X, Y)$ étant harmonique dans C et continue sur C, l'intégrale

$$\int_0^{2\pi} |U(r\cos\theta, r\sin\theta)|^p \, d\theta$$

est une fonction croissante de r pour $r < 1$ lorsque $p > 1$.

Ce point étant admis, on aura $\varepsilon_n(r) < \varepsilon_n$ et par conséquent, quelque soit r, $\lim\limits_{n=\infty} \varepsilon_n(r) = 0$, uniformément dans tout Γ

Il va en résulter que

$$\lim_{n=\infty} \mathcal{S}_n(X, Y) = \mathcal{F}(X, Y),$$

uniformément dans tout domaine Δ intérieur à Γ.

En effet, de la relation $\varepsilon_n = \int\limits_0^{2\pi} |f(\theta) - \mathcal{S}_n(\cos\theta, \sin\theta)|^p \, d\theta$, on a vu qu'il résulte que

$$\left[\int_0^{2\pi} |\mathcal{S}_n|^p \, d\theta\right]^{1/p} < \varepsilon_n^{1/p} + \left[\int_0^{2\pi} |f(\theta)|^p \, d\theta\right]^{1/p}.$$

Les $\int\limits_0^{2\pi} |\mathcal{S}_n|^p \, d\theta$ et par suite les $\int\limits_0^{2\pi} |\mathcal{S}_n| \, d\theta$ sont donc bornés supérieurement quel que soit n par un même nombre μ. Le raisonnement fait au N° **3.** prouve d'autre part que dans un domaine quelconque $\varDelta$ intérieur à Γ, toutes les fonctions harmoniques $\mathfrak{F}_n$ auront leur module $|\mathfrak{F}_n|$ limité supérieurement par un même nombre $\mathfrak{M}$.

Ces fonctions harmoniques $\mathfrak{F}_n$ forment donc dans tout domaine $\varDelta$ intérieur à Γ une famille également continue dont il est possible d'extraire une suite partielle $\mathfrak{F}_{n_1}, \mathfrak{F}_{n_2}, \ldots$ convergeant en l'intérieur de Γ et cela uniformément dans $\varDelta$ vers une limite $\Phi(X, Y)$ qui est nécessairement *harmonique.* (Cela se voit aisément par la formule classique $\mathfrak{F}_n(X, Y) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \mathfrak{F}_n(A, B)\frac{dG}{dn}d\theta$).

On aura évidemment:

$$\int\limits_0^{2\pi} |\mathfrak{F}(r\cos\theta, r\sin\theta) - \Phi(r\cos\theta, r\sin\theta)|^p d\theta =$$

$$= \lim_{i=\infty} \int\limits_0^{2\pi} |\mathfrak{F}(r\cos\theta, r\sin\theta) - \mathfrak{F}_{n_i}(r\cos\theta, r\sin\theta)|^p d\theta = \lim_{i=\infty} \varepsilon_{n_i}(r) = 0$$

pour toute valeur de r donnant un cercle intérieur à $\varDelta$, c'est à dire, en définitive puisque $\varDelta$ est arbitrairement voisin de Γ, pour tout $r < 1$.

Mais $\int\limits_0^{2\pi} |\mathfrak{F}(r\cos\theta, r\sin\theta) - \Phi(r\cos\theta, r\sin\theta)|^p d\theta = 0$ n'est possible pour deux fonctions continues de θ que si

$$\mathfrak{F}(r\cos\theta, r\sin\theta) \equiv \Phi(r\cos\theta, r\sin\theta)$$

pour toute valeur de θ et pour toute valeur $r < 1$. Donc, $\Phi(X, Y) \equiv \mathfrak{F}(X, Y)$ dans Γ, ce qui démontre que la suite des $\mathfrak{F}_n(X, Y)$ a pour limite $\mathfrak{F}(X, Y)$, et uniformément, dans tout domaine intérieur à Γ.

Il en résulte que, *pour $p > 1$, les polynomes harmoniques $P_n(x, y)$ d'écart minimum à $f(\theta)$ sur C ont pour limite dans C la fonction harmonique $F(x, y)$, solution du problème de* Dirichlet *relatif à la donnée $f(\theta)$ sur C, la convergence ayant lieu dans tout C et uniformément dans tout domaine intérieur à C.* L'exemple de $p = 2$, C cercle unité, nous avertit que la convergence peut ne pas se produire sur C et dépend des propriétés différentielles de $f(\theta)$.

8. Il reste, pour terminer, à prouver le lemme invoqué au N° **7.**

Pour toute fonction $U(r, \theta)$ harmonique dans Γ, la fonction de r

$$I(r) = \int_0^{2\pi} |U(r, \theta)|^p \, d\theta$$

est croissante lorsque $p > 1$. On reconnait aussitôt que la fonction $V(r, \theta) = |U(r, \theta)|^p$ est dérivable et l'on a

$$I'(r) = \int_0^{2\pi} \frac{\partial V}{\partial r} d\theta = \frac{1}{r} \int_\gamma \frac{dV}{dn_e} ds$$

γ étant le cercle de centre O de rayon r et $\dfrac{dV}{dn_e}$ la dérivée normale extérieure de V. On a d'ailleurs:

$$\int_\gamma \frac{dV}{dn_e} ds = \iint_\gamma \Delta V d\sigma.$$

Nous montrerons que $I(r)$ croît avec r, si nous prouvons que $\iint_\gamma \Delta V d\sigma > 0$, pour tout cercle γ de centre O de rayon $r < 1$.

Or ceci résulte de l'inégalité $\Delta V > 0$, vérifiée dans tout Γ comme on le reconnaît aussitôt.

En effet, un calcul simple donne

$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2} = (2p - 2)|U|^{p-2} (U_X'^2 + U_Y'^2)$$

en tenant compte de la relation $\Delta U = 0$. Du fait que $p > 1$ on a $\Delta V > 0$ et d'autre part, $p - 2$ étant > -1, il n'y a pas de difficulté réelle dans l'intégrale $\iint_\gamma \Delta V d\sigma$ le long des lignes éventuelles où U peut s'annuler.

Le lemme invoqué au N° **7.** est donc démontré. Il résulte d'ailleurs immédiatement des travaux bien connus de M. F. Riesz *sur les fonctions subharmoniques.*

(*Reçu le 3 mai 1929.*)