Über die Variationsrechnung bei mehrfachen Integralen.

Von C. CARATHÉODORY in München.

Einleitung.

1. Die WEIERSTRASSsche und die ihr verwandte JACOBI-HAMILTONsche Theorie der Variationsrechnung haben sich in zwei extremen Fällen restlos bewährt: nämlich, wenn man ein *einfaches* Integral hat und n unabhängig zu variierende Funktionen, oder, wenn man ein μ-faches Integral hat und *eine einzige* zu variierende Funktion. Das allgemeine Problem dagegen von der Gestalt

$$(1.\,1) \quad \int \dots \int f\left(x_1, \dots, x_n;\ t_1, \dots, t_\mu;\ \frac{\partial x_1}{\partial t_1}, \dots, \frac{\partial x_n}{\partial t_\mu}\right) dt_1 \dots dt_\mu$$

ist eigentlich nie recht in Angriff genommen worden, wenn man von einigen kurzen Bemerkungen HADAMARD's absieht, der auf Eigentümlichkeiten dieses Problems aufmerksam gemacht hat.[1]) Auf den folgenden Seiten werden die ersten Vorarbeiten, die für die Behandlung dieses Problems mir unerlässlich erscheinen, ausführlich auseinandergesetzt. Meine diesbezüglichen Untersuchungen liegen schon viele Jahre zurück und sind auch teilweise publiziert.[2])

Beim Studium einer wichtigen Arbeit von HAAR über adjungierte Variationsprobleme[3]) habe ich nun bemerkt, dass meine

---

[1]) J. HADAMARD, Sur quelques questions de calcul des variations, *Bull. Soc. Math. de France,* 33 (1905), p. 73—80.

[2]) C. CARATHÉODORY, Über die kanonischen Veränderlichen in der Variationsrechnung der mehrfachen Integrale, *Math. Annalen,* 85 (1922), S. 78—88.; Über ein Reziprozitätsgesetz der verallgemeinerten LEGENDREschen Transformation, *Math. Annalen,* 86 (1922), S. 272—275.

[3]) A. HAAR, Über adjungierte Variationsprobleme und adjungierte Extremalflächen, *Math. Annalen,* 100 (1928), S. 481—502.

alten Rechnungen durch eine geringfügige Modifikation in der Bezeichnung viel symmetrischer geschrieben werden können. Aus diesem Grunde wird das ganze Formelsystem noch einmal mitgeteilt. Das erste Kapitel, das der Ableitung rein formaler Identitäten gewidmet ist, enthält also lediglich die Resultate meiner früheren Arbeiten in neuer Fassung: durch die neue Bezeichnungsweise sowie auch durch einige Ratschläge, die mir Dr. T. Radó gegeben hat, hoffe ich aber, dass die Darstellung viel durchsichtiger geworden ist. Das zweite Kapitel ist der Weierstrassschen Theorie für das Problem (1. 1) gewidmet, die ich früher nur ganz unzulänglich gestreift hatte. Die diesem Probleme zugehörige E-Funktion wird hier zum ersten Male, sowohl in gewöhnlichen als auch in kanonischen Koordinaten aufgestellt Das Gleiche gilt von der Legendreschen Bedingung, sowie auch von den Differentialgleichungen, denen die „geodätischen Felder" genügen müssen. Endlich wird gezeigt, dass wenn ein geodätisches Feld eine Fläche transversal schneidet, diese notwendig eine Lösung der Euler-Lagrangeschen Gleichungen sein muss.

Das Problem dagegen, „ausgezeichnete" geodätische Felder zu konstruieren, d. h. solche, durch welche *vollständige Figuren* unserer Variationsproblems erzeugt werden, konnte noch nicht ausgeführt werden.

Kapitel I. Formale Identitäten.

2. Elementare Beispiele birationaler involutorischer Berührungstransformationen. Da im Folgenden eine Berührungstransformation uns beschäftigen wird, die birational und involutorisch ist, ist es von Interesse daran zu erinnern, dass auch andere Transformationen, die diese Eigenschaften besitzen, seit langem in der Variationsrechnung eine hervorragende Rolle gespielt haben:

Wir bezeichnen durch die Buchstaben

(2. 1) $$f,\ \varphi,\ p_i,\ \pi_i \quad (i=1, 2, \ldots, n)$$

eine Anzahl von Grössen, zwischen welchen (mit der jetzt üblichen Unterdrückung des Summenzeichens) die Relation

(2. 2) $$f+\varphi=p_i\pi_i$$

bestehen soll. Wir führen eine zweite Reihe von $2n+2$ Grössen, F, Φ, P_i, Π_i durch folgende Gleichungen ein:

(2. 3) $$F=\varphi, \quad \Phi=f, \quad P_i=\pi_i, \quad \Pi_i=p_i.$$

Diese Transformation ist nichts Anderes als die LEGENDRE*sche Transformation;* sie besitzt folgende Eigenschaften:

a) Sie ist *birational* und *involutorisch.* D. h. man löst die Gleichungen (2.3) nach den kleinen Buchstaben auf, indem man nämlich einfach die grossen mit den kleinen Buchstaben vertauscht. Dabei folgt aus (2.2) und (2.3), dass die Relation

$$F + \Phi = P_i \Pi_i \tag{2.4}$$

bestehen muss.

b) Sie ist eine *Berührungstransformation;* sind in der Tat f, φ, p_i, π_i Funktionen von irgend welchen Parametern, so besteht immer die Relation

$$dF - \Pi_i dP_i = -(df - \pi_i dp_i). \tag{2.5}$$

3. Die LEGENDREsche Transformation ist natürlich nicht die einzige Transformation, die die Eigenschaften *a)* und *b)* des § **2** besitzt. Eine ganz triviale Transformation, die dasselbe leistet, ist z. B. die folgende

$$F = -f, \quad \Phi = -\varphi, \quad P_i = -p_i, \quad \Pi_i = \pi_i. \tag{3.1}$$

4. Als drittes Beispiel betrachten wir die *verallgemeinerte Inversion,* die durch folgende Relationen definiert wird:

$$F = \frac{1}{f}, \quad \Phi = \frac{1}{\varphi}, \quad P_i = \frac{p_i}{f}, \quad \Pi_i = \frac{\pi_i}{\varphi}. \tag{4.1}$$

Die Transformation (4.1) ist offenbar involutorisch und birational; man verifiziert ausserdem, dass die Beziehung (2.4) eine Folge von (2.2) ist, sowie auch, dass eine Berührungstransformation vorliegt, mit Hilfe der sofort zu berechnenden Relationen

$$F + \Phi - P_i \Pi_i = \frac{1}{f\varphi}(f + \varphi - p_i \pi_i), \tag{4.2}$$

$$dF - \Pi_i dP_i = \frac{1}{f\varphi}(df - \pi_i dp_i). \tag{4.3}$$

Man bemerke übrigens, dass zur Aufstellung von (4.3) nicht nur (4.1) sondern auch (2.2) benutzt werden muss.

5. Die Transformation, die A. HAAR in seiner unter [3]) zitierten Arbeit benutzt hat, ist eine einfache Kombination der vorhergehenden, die man erhält, indem man setzt:

$$F = -\frac{1}{\varphi}, \quad \Phi = -\frac{1}{f}, \quad P_i = -\frac{\pi_i}{\varphi}, \quad \Pi_i = \frac{p_i}{f}. \tag{5.1}$$

6. Eine sehr interessante etwas kompliziertere birationale und involutorische Berührungstransformation hat T. Levi-Civita bei der Regularisation des Dreikörperproblems mit grossem Erfolg benutzt.[4]) Sie besteht im Folgenden: führt man die Bezeichnungen ein

(6. 1) $$a = p_i p_i, \quad b = p_i \pi_i, \quad c = \pi_i \pi_i,$$

(6. 2) $$F = f, \quad \Phi = \varphi - 2b, \quad P_i = \frac{p_i}{a}, \quad \Pi_i = a\pi_i - 2bp_i,$$

(6. 3) $$A = P_i P_i, \quad B = P_i \Pi_i, \quad C = \Pi_i \Pi_i,$$

so erhält man nach ganz elementaren Rechnungen

(6. 4) $$Aa = 1, \quad B + b = 0, \quad AC = ac.$$

Hieraus verifiziert man sehr leicht die Eigenschaften *a)* und *b)* des § **2**.

7. Die kanonischen Transformationen der Variationsrechnung. Der Hauptgegenstand unserer Untersuchung ist eine birationale, involutorische Berührungstransformation, die aus der Kombination der verallgemeinerten Inversion des § **4** mit der verallgemeinerten Legendreschen Transformation meiner alten Arbeit entsteht. Vor dieser letzteren besitzt sie den Vorteil, dass in allen Formeln die grossen mit den kleinen Buchstaben vertauscht werden können, dagegen hat sie den kleinen Nachteil, dass sie in den Grenzfällen ($n = 1$ oder $\mu = 1$) nicht in die gewöhnliche Legendresche sondern in diejenige Transformation übergeht, die Herr Haar benutzt hat.

Von jetzt ab werden wir neben den lateinischen Buchstaben $i, j, k, \ldots$, die von 1 bis n laufen sollen, auch griechische Indizes $\alpha, \beta, \gamma, \varrho, \sigma \ldots$ benutzen, die von 1 bis μ zu nehmen sind. Z. B. stellt also das Symbol $p_{i\alpha}$ eine Matrix von n Zeilen und μ Kolonnen dar.

8. Wir betrachten die Veränderlichen

(8. 1) $$f, \quad \varphi, \quad p_{i\alpha}, \quad \pi_{i\alpha},$$

zwischen welchen die Relation

(8. 2) $$f + \varphi = p_{i\alpha} \pi_{i\alpha}$$

bestehen soll.

Ferner führen wir das Symbol

(8. 3) $$a_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} f - p_{i\alpha} \pi_{i\beta}$$

ein, wobei $\delta_{\alpha\beta}$ wie üblich die Zahl Eins oder Null darstellen soll, je nachdem $\alpha = \beta$ oder $\alpha \neq \beta$ ist.

[4]) T. Levi-Civita, Sur la régularisation du problème des trois corps, *Acta Mathematica*, **42** (1920), p. 99–144.

Zur Abkürzung setzen wir die Determinante $|a_{\alpha\beta}|$ gleich a und bezeichnen mit $\bar{a}_{\alpha\beta}$ das algebraische Komplement von $a_{\alpha\beta}$ in dieser Determinante. Hiernach hat man also

(8. 4) $$a = |a_{\alpha\beta}|,$$

(8. 5) $$\delta_{\alpha\beta}\, a = a_{\alpha\varrho}\, \bar{a}_{\beta\varrho} = a_{\sigma\alpha}\, \bar{a}_{\sigma\beta}.$$

9. Jetzt führen wir eine neue Reihe von $2(n\mu + 1)$ Veränderlichen

(9. 1) $$F,\ \Phi,\ P_{i\alpha},\ \Pi_{i\alpha}$$

ein, die durch folgende Gleichungen definiert werden:

(9. 2) $$\frac{F}{f} = \frac{\Phi}{\varphi} = \frac{f^{\mu-2}}{a},$$

(9. 3) $$P_{i\alpha} = \frac{1}{a}\, \pi_{i\varrho}\, \bar{a}_{\alpha\varrho},$$

(9. 4) $$\Pi_{i\alpha} = \frac{f^{\mu-2}}{a}\, p_{i\sigma}\, a_{\alpha\sigma}.$$

Es ist sehr bemerkenswert, dass man durch successives Auflösen linearer Gleichungssysteme, aus den Relationen (9. 2) bis (9 4) die ursprünglichen Veränderlichen (8. 1) als rationale Funktionen der Grössen (9. 1) darstellen kann.

10. Wir berechnen zuerst einige Identitäten, die aus den früheren Relationen folgen. Ersetzt man erstens in (9. 3) den Summationsbuchstaben α durch σ und faltet diese Gleichung mit $a_{\sigma\alpha}$, so folgt mit Berücksichtigung von (8. 5)

(10. 1) $$\pi_{i\alpha} = P_{i\sigma}\, a_{\sigma\alpha},$$

Ganz ähnlich erhält man aus (9. 4)

(10. 2) $$p_{i\alpha} = f^{2-\mu}\, \Pi_{i\varrho}\, \bar{a}_{\varrho\alpha}.$$

Drittens folgt aus (9. 3), wenn man (8. 3) berücksichtigt:

$$\begin{aligned} P_{i\alpha}\, p_{i\beta} &= \frac{1}{a}\, \pi_{i\varrho}\, p_{i\beta}\, \bar{a}_{\alpha\varrho} \\ &= \frac{1}{a}\, \bar{a}_{\alpha\varrho}\, (\delta_{\beta\varrho}\, f - a_{\beta\varrho}) \end{aligned}$$

und hieraus folgt nach (8. 5) und (9. 2)

(10. 3) $$\bar{a}_{\alpha\beta} = \frac{f^{\mu-2}}{F}\, (\delta_{\alpha\beta} + P_{i\alpha}\, p_{i\beta}).$$

Um endlich auch die letzte der hier in Betracht kommenden Relationen aufzustellen, bilden wir mit Hilfe von (9. 3) und (9. 4) die Gleichung:

$$P_{i\alpha}\Pi_{i\beta}=\frac{f^{\mu-2}}{a^2}\pi_{i\varrho}p_{i\sigma}\bar{a}_{\alpha\varrho}a_{\beta\sigma}.$$

Dann folgt aus (8. 3) und (8. 5)

$$P_{i\alpha}\Pi_{i\beta}=\frac{f^{\mu-2}}{a^2}(\delta_{\sigma\varrho}f-a_{\sigma\varrho})\bar{a}_{\alpha\varrho}a_{\beta\sigma}=\delta_{\alpha\beta}\frac{f^{\mu-1}}{a}-\frac{f^{\mu-2}}{a}a_{\beta\alpha},$$

oder nach (9. 2)

$$P_{i\alpha}\Pi_{i\beta}=\delta_{\alpha\beta}F-\frac{F}{f}a_{\beta\alpha}. \tag{10. 4}$$

Die Relation (10. 4) kann auch nach (8. 3) symmetrischer geschrieben werden:

$$\frac{1}{F}P_{i\alpha}\Pi_{i\beta}=\frac{1}{f}p_{i\beta}\pi_{i\alpha}. \tag{10. 5}$$

11. Aus (9. 2) und (8. 2) finden wir

$$F+\Phi=\frac{F}{f}(f+\varphi)=\frac{F}{f}p_{i\alpha}\pi_{i\alpha},$$

oder nach (10. 5)

$$F+\Phi=P_{i\alpha}\Pi_{i\alpha}. \tag{11. 1}$$

12. Wir führen nun die zu (8. 3) analoge Bezeichnung ein

$$A_{\alpha\beta}=\delta_{\alpha\beta}F-P_{i\alpha}\Pi_{i\beta}; \tag{12. 1}$$

dann folgt aus (10. 4)

$$\frac{A_{\alpha\beta}}{F}=\frac{a_{\beta\alpha}}{f} \tag{12. 2}$$

und hieraus, wenn man unsere früheren Bezeichnungen auch auf die grossen Buchstaben überträgt,

$$\frac{A}{F^\mu}=\frac{a}{f^\mu}, \tag{12. 3}$$

$$\frac{\bar{A}_{\alpha\beta}}{F^{\mu-1}}=\frac{\bar{a}_{\beta\alpha}}{f^{\mu-1}} \tag{12. 4}$$

Die Vergleichung von (9. 2) mit (12. 3) liefert jetzt

$$\frac{f}{F}=\frac{\varphi}{\Phi}=\frac{F^{\mu-2}}{A}. \tag{12. 5}$$

Ferner folgt aus (10. 2), wenn man noch (12. 4) und hierauf (12. 5) benutzt,

$$p_{i\alpha}=\frac{1}{A}\Pi_{i\varrho}\bar{A}_{\alpha\varrho} \tag{12. 6}$$

und ebenso erhält man aus (10. 1), (12. 2) und (12. 3)

$$\pi_{i\alpha} = \frac{F^{n-2}}{A} P_{i\sigma} A_{\alpha\sigma}. \tag{12. 7}$$

Vergleicht man nun (8. 2) mit (11. 1) und weiter (9. 2), (9. 3) und (9. 4) bzw. mit (12. 5), (12. 6) und (12. 7), so sieht man, dass man in diesen und folglich auch in allen übrigen Gleichungen die grossen Buchstaben mit den kleinen vertauschen kann.

Unsere Transformation ist daher *birational* und *involutorisch*.

13. Einführung von $f, F, p_{i\alpha}, P_{i\alpha}$ als Veränderliche. Wir haben bisher abwechselnd die Grössensysteme (8. 1) und (9. 1) unseren Rechnungen zu Grunde gelegt. Für viele Zwecke ist es bequemer, Formeln zu entwickeln, in welchen die Grössen

$$f,\ F,\ p_{i\alpha},\ P_{i\alpha} \tag{13. 1}$$

als Grundvariablen erscheinen.

Hierzu setzen wir

$$g_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} + P_{i\alpha} p_{i\beta}, \tag{13. 2}$$

so dass nach (10. 3)

$$g_{\alpha\beta} = \frac{F}{f^{n-2}} \bar{a}_{\alpha\beta} \tag{13. 3}$$

ist. Um den Wert g der Determinante $|g_{\alpha\beta}|$ zu berechnen, bemerke man, dass $|\bar{a}_{\alpha\beta}| = a^{n-1}$ ist; dann folgt aus (13. 3) und (9. 2)

$$g = Ff \tag{13. 4}$$

und (13. 3) kann geschrieben werden

$$g_{\alpha\beta} = \frac{g}{f^{n-1}} \bar{a}_{\alpha\beta}. \tag{13. 5}$$

Aus dieser letzten Gleichung entnehmen wir

$$g_{\varrho\sigma} \bar{g}_{\varrho\beta} a_{\alpha\sigma} = \frac{g}{f^{n-1}} \bar{a}_{\varrho\sigma} \bar{g}_{\varrho\beta} a_{\alpha\sigma},$$

oder

$$a_{\alpha\beta} = \frac{a}{f^{n-1}} \bar{g}_{\alpha\beta}, \tag{13. 6}$$

also nach (9. 2)

$$\bar{g}_{\alpha\beta} = F a_{\alpha\beta}. \tag{13. 7}$$

Wegen (10. 1) folgt nun

$$F \pi_{i\alpha} = P_{i\sigma} \bar{g}_{\sigma\alpha} \tag{13. 8}$$

und wegen (9. 4)

(13. 9) $$f\Pi_{i\alpha}=p_{i\sigma}\bar{g}_{\alpha\sigma}.$$

Endlich liefern die beiden letzten Relationen nach $p_{i\alpha}$ und $P_{i\alpha}$ aufgelöst, die Relationen

(13. 10) $$Fp_{i\alpha}=\Pi_{i\varrho}g_{\varrho\alpha},$$

(13. 11) $$fP_{i\alpha}=\pi_{i\varrho}g_{\alpha\varrho}.$$

14. Die Eigenschaft der Berührungstransformation. Wir nehmen jetzt an, dass die von uns betrachteten Grössen von irgend welchen Parametern abhängen, und bilden das totale Differential von (13. 4) nach diesen Parametern. Wir erhalten auf diese Weise die Relation

(14. 1) $$F\,df+f\,dF=dg;$$

nun ist aber bekanntlich

$$dg=\bar{g}_{\alpha\beta}\,dg_{\alpha\beta}$$

und nach (13. 2)

$$dg_{\alpha\beta}=P_{i\alpha}\,dp_{i\beta}+p_{i\beta}\,dP_{i\alpha}.$$

Nach den beiden letzten Gleichungen ist also, wenn man (13. 8) und (13. 9) berücksichtigt,

(14. 2) $$dg=F\pi_{i\beta}\,dp_{i\beta}+f\Pi_{i\alpha}\,dP_{i\alpha}.$$

Die Vergleichung von (14. 2) mit (14. 1) führt schliesslich zu der Relation

(14. 3) $$F(df-\pi_{i\beta}\,dp_{i\beta})+f(dF-\Pi_{i\alpha}\,dP_{i\alpha})=0,$$

aus welcher folgt, dass unsere Transformation eine *Berührungstransformation* ist.

15. Die Reziprozität. In einer früheren Arbeit[5]) habe ich die Bemerkung gemacht, die übrigens sofort bestätigt werden kann, dass die Determinante a, die wir im § 8 eingeführt haben, auch als $(\mu+n)$-reihige Determinante folgendermassen geschrieben werden kann:

(15. 1) $$a=\begin{vmatrix}\delta_{ij}, & \pi_{i\beta}\\ p_{j\alpha}, & \delta_{\alpha\beta}f\end{vmatrix};$$

in dieser Formel sind die Zeilen mit i und α und die Kolonnen mit j und β bezeichnet. Genau ebenso sieht man, wenn man ein neues System von Veränderlichen durch die Gleichungen

(15. 2) $$b_{ij}=\delta_{ij}f-p_{i\varrho}\pi_{j\varrho}$$

5) vgl. das Zitat 2).

einführt, dass die Determinante b der b_{ij} geschrieben werden kann

$$(15.3)\qquad b = \begin{vmatrix} \delta_{ij} f, & \pi_{i\beta} \\ p_{j\alpha}, & \delta_{\alpha\beta} \end{vmatrix}.$$

Die Vergleichung von (15. 1) und (15. 3) führt zu der Relation

$$(15.4)\qquad f^n a = f^\mu b,$$

aus der wir mit Hilfe von (9. 2) entnehmen

$$(15.5)\qquad \frac{F}{f} = \frac{\Phi}{f} = \frac{f^{n-2}}{b}.$$

Ferner folgt aus (15. 2)

$$b_{si} P_{s\alpha} = f P_{i\alpha} - p_{s\varrho} \pi_{i\varrho} P_{s\alpha};$$

nach (13. 2) kann man dies schreiben

$$b_{si} P_{s\alpha} = f P_{i\alpha} - \pi_{i\varrho}(g_{\alpha\varrho} - \delta_{\alpha\varrho}),$$

oder mit Berücksichtigung von (13. 11)

$$(15.6)\qquad \pi_{i\alpha} = b_{si} P_{s\alpha}.$$

Ähnlich entnehmen wir aus (15. 2)

$$\begin{aligned} b_{it} p_{t\alpha} &= f p_{i\alpha} - p_{i\varrho} \pi_{t\varrho} p_{t\alpha} \\ &= p_{i\varrho}(\delta_{\alpha\varrho} f - p_{t\alpha} \pi_{t\varrho}), \end{aligned}$$

oder nach (8. 5)

$$(15.7)\qquad b_{it} p_{t\alpha} = p_{i\varrho} a_{\alpha\varrho}.$$

Nach (9. 4) erhält man also, wenn man noch (15. 4) beachtet,

$$(15.8)\qquad \Pi_{i\alpha} = \frac{f^{n-2}}{b} p_{t\alpha} b_{it}.$$

Endlich folgt aus (15. 6) durch Auflösung

$$(15.9)\qquad P_{i\alpha} = \frac{1}{b} \pi_{r\alpha} \bar{b}_{ir}.$$

16. Die Ähnlichkeit der Formeln (15. 2), (15. 5), (15. 9) und (15. 8) mit (8. 3), (9. 2), (9. 3) und (9. 4) zeigt, dass man in allen unseren Gleichungen die lateinischen Indizes mit den griechischen vertauschen kann, wenn man nur die $a_{\alpha\beta}$ durch die b_{ij} ersetzt.

17. Einführung der Parameter $S_{\alpha\beta}$, $S_{\alpha i}$ und $c_{\alpha\beta}$. Für die Behandlung unseres Variationsproblems ist es notwendig, neue Parameter einzuführen und ihre Verknüpfung mit den früheren Buchstaben zu untersuchen.

Wir betrachten zu diesem Zweck drei Matrizen

$$(17.1)\qquad S_{\alpha\beta},\ S_{\alpha i},\ c_{\alpha\beta},$$

die mit den früheren Grössen durch die Relationen

(17 2) $$c_{\alpha\beta} = S_{\alpha\beta} + S_{\alpha i} p_{i\beta}$$

(17. 3) $$S_{\alpha i} = P_{i\varrho} S_{\alpha\varrho}$$

(17. 4) $$\frac{1}{F} = |S_{\alpha\beta}|$$

verbunden sein sollen.

Durch Einsetzen von (17. 3) in (17. 2) erhält man nun

$$\begin{aligned} c_{\alpha\beta} &= S_{\alpha\beta} + S_{\alpha\varrho} P_{i\varrho} p_{i\beta} \\ &= S_{\alpha\varrho}(\delta_{\varrho\beta} + P_{i\varrho} p_{i\beta}), \end{aligned}$$

oder nach (13. 2)

(17. 5) $$c_{\alpha\beta} = S_{\alpha\varrho} g_{\varrho\beta}.$$

Nach dem Multiplikationsgesetz der Determinanten folgt nun, wenn man (13. 4) beachtet, $c = Ff|S_{\alpha\beta}|$ oder nach (17. 4)

(17. 6) $$c = f.$$

Ferner entnimmt man aus (17. 5)

$$c_{\lambda\sigma} \bar{c}_{\lambda\beta} \bar{g}_{\alpha\sigma} = S_{\lambda\varrho} g_{\varrho\sigma} \bar{g}_{\alpha\sigma} \bar{c}_{\lambda\beta}$$

und hieraus folgt, nach (13. 4) und (17. 6),

(17. 7) $$\bar{g}_{\alpha\beta} = F S_{\lambda\alpha} \bar{c}_{\lambda\beta}.$$

Hieraus folgt, wegen (13. 8),

$$\pi_{i\alpha} = P_{i\sigma} S_{\lambda\sigma} \bar{c}_{\lambda\alpha},$$

oder nach (17. 3)

(17. 8) $$\pi_{i\alpha} = S_{\lambda i} \bar{c}_{\lambda\alpha}.$$

18. Wir wollen nun zeigen, dass, wenn man (17. 2) voraussetzt, die Gleichungen (17. 6) und (17. 8) den Gleichungen (17. 3) und (17. 4) äquivalent sind. Wir gehen also jetzt von den Gleichungen

(18. 1) $$c_{\alpha\beta} = S_{\alpha\beta} + S_{\alpha i} p_{i\beta},$$

(18. 2) $$\pi_{i\alpha} = S_{\varrho i} \bar{c}_{\varrho\alpha},$$

(18. 3) $$c = f$$

aus und wollen (17. 3) und (17. 4) ableiten. Erstens folgt aus (18. 2)

$$\pi_{i\sigma} c_{\alpha\sigma} = S_{\varrho i} \bar{c}_{\varrho\sigma} c_{\alpha\sigma},$$

also mit Berücksichtigung von (18. 3)

(18. 4) $$f S_{\alpha i} = \pi_{i\sigma} c_{\alpha\sigma}.$$

Dies, in (18. 1) eingesetzt, liefert

$$f c_{\alpha\beta} = f S_{\alpha\beta} + c_{\alpha\sigma} p_{i\beta} \pi_{i\sigma},$$

woraus nach (8. 3) folgt

(18. 5) $$f S_{\alpha\beta} = c_{\alpha\sigma} a_{\beta\sigma}.$$

Aus (18. 5) folgt nun erstens

$$f P_{i\varrho} S_{\alpha\varrho} = c_{\alpha\sigma} P_{i\varrho} a_{\varrho\sigma}.$$

Die rechte Seite der letzten Gleichung ist nach (10. 1) gleich $c_{\alpha\sigma}\pi_{i\sigma}$ und mit Hilfe von (18. 4) erhält man schliesslich

(18. 6) $$S_{\alpha i} = P_{i\varrho} S_{\alpha\varrho},$$

d. h. die Relation (17. 3), die wir beweisen wollten. Die Gleichung (17. 4) ist ebenfalls eine Folge von (18. 5), wenn man (18. 3) und (9. 2) beachtet; denn es ist

$$f^{\mu}|S_{\alpha\beta}| = a\,c = f\frac{f^{\mu-1}}{F},$$

oder

(18. 7) $$F|S_{\alpha\beta}| = 1.$$

Kapitel II. Das Variationsproblem.

19. Definition der geodätischen Felder. Wir betrachten in einem $(n+\mu)$-dimensionalen Raum, dessen Koordinaten $(x_1 \ldots, x_n, t_1, \ldots, t_\mu)$, oder, mit den früheren Bezeichnungen, (x_i, t_α) sein mögen, eine μ-parametrige Schar von n-dimensionalen Flächen. Eine derartige Schar kann durch μ Gleichungen der Form

(19. 1) $$S_\alpha(x_i; t_\beta) = \lambda_\alpha$$

dargestellt werden. Durch die Gleichungen

(19. 2) $$x_i = \xi_i(t_\alpha) \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

werde ferner eine μ-dimensionale Mannigfaltigkeit definiert, die die Schar (19. 1) schneidet. Das ist dann und nur dann der Fall, wenn eine eineindeutige Abbildung eines Gebietes G_t des μ-dimensionalen Raumes der t_α auf ein Gebiet G_λ des μ-dimensionalen Parameterraumes der λ_α durch das Gleichungssystem

(19. 3) $$S_\alpha(\xi_i(t_\gamma); t_\beta) = \lambda_\alpha$$

erzeugt wird. Hierzu muss aber insbesondere die Funktionaldeterminante

(19. 4) $$\Delta = \left| \frac{\partial S_\alpha(\xi_i; t_\beta)}{\partial t_\beta} \right|$$

in G_t von Null verschieden sein.

Setzt man nun zur Abkürzung

$$(19.5)\qquad S_{\alpha i}=\frac{\partial S_\alpha}{\partial x_i},\quad S_{\alpha\beta}=\frac{\partial S_\alpha}{\partial t_\beta},$$

$$(19.6)\qquad p_{i\alpha}=\frac{\partial \xi_i}{\partial t_\alpha},$$

$$(19.7)\qquad c_{\alpha\beta}=S_{\alpha\beta}+S_{\alpha i}\,p_{i\beta},$$

so erscheint (19. 4) in der Gestalt

$$(19.8)\qquad \Delta=|c_{\alpha\beta}|=c.$$

Wir bemerken noch, dass das Integral

$$(19.9)\qquad \int\limits_{G_t}\!\!\ldots\!\int \Delta\, dt_1\ldots dt_\mu$$

den Inhalt des Gebietes G_λ des Parameterraumes darstellt, auf welches das Gebiet G_t durch die Relationen (19. 3) abgebildet worden ist.

Dieser Inhalt hängt aber nun von der Gestalt der Begrenzung von G_λ ab.

Wenn man also eine zweite μ-dimensionale Fläche

$$(19.10)\qquad x_i=\bar{\xi}_i(t_\alpha)$$

betrachtet, und ein Gebiet $\bar{G}_t$, das durch diese neue Fläche auf *dasselbe* Gebiet G_λ, das wir soeben betrachtet haben, abgebildet wird, so wird das Integral

$$(19.11)\qquad \int\limits_{\bar{G}_t}\!\!\ldots\!\int \bar{\Delta}\, dt_1\ldots dt_\mu,$$

das ganz analog wie (19. 9) gebildet werden soll, denselben Wert wie (19. 9) besitzen.

Wird insbesondere aus der Fläche (19. 2) durch den Rand des Gebietes G_t eine Mannigfaltigkeit ausgeschnitten, die auch auf (19. 10) liegt, so muss man die Integrale (19. 9) und (19. 11) für dasselbe Gebiet G_t berechnen, d. h. $\bar{G}_t=G_t$ setzen.

20. Die Koordinaten eines μ-dimensionalen Flächenelements des $(n+\mu)$ dimensionalen Raumes sollen jetzt durch die $n+\mu+n\mu$ Grössen

$$(20.1)\qquad x_i,\ t_\alpha,\ p_{i\alpha}$$

dargestellt werden. Wir betrachen nun eine *positive* Funktion

$$(20.2)\qquad f(x_i,\ t_\alpha,\ p_{i\alpha})$$

dieser Grössen und bilden den Ausdruck

$$(20.3)\qquad \frac{f(x_i,\, t_\alpha,\, p_{i\alpha})}{\Delta(x_i,\, t_\alpha,\, p_{i\alpha})}$$

in welchem Δ dieselbe Bedeutung, wie in (19.8) haben soll. Wir halten jetzt in (20.3) die $(x_i,\, t_\alpha)$ fest und suchen die $p_{i\alpha}$ so zu bestimmen, dass

$$(20.4)\qquad \frac{f}{\Delta} = \text{Minimum}$$

sei; von einem Flächenelement (20.1) für welches die Bedingung (20.4) gilt, sagen wir, dass es durch die Flächenschar (19.1) *transversal* geschnitten wird.

Wir nehmen nun an, dass wir in einem gewissen $(n+\mu)$-dimensionalen Gebiete des Raumes der $(x_i,\, t_\alpha)$ Funktionen

$$(20.5)\qquad p_{i\alpha} = p_{i\alpha}(x_j,\, t_\beta)$$

bestimmen konnten, die lauter Flächenelemente, die durch unsere Schar (19.1) transversal geschnitten werden, erzeugen.

Setzen wir nun die Werte (20.5) der $p_{i\alpha}$ in $f(x_i,\, t_\alpha,\, p_{i\alpha})$ und $\Delta(x_i,\, t_\alpha,\, p_{i\alpha})$ ein, und gilt in jedem Punkte des betrachteten Gebietes die Gleichung

$$(20.6)\qquad f = \Delta,$$

so wollen wir sagen, dass die Schar (19.1) ein (zu f gehörendes) *geodätisches Feld* bildet. Eine notwendige Bedingung für das Bestehen von (20.4) wird durch die Gleichungen

$$\frac{\partial}{\partial p_{i\alpha}}\left(\frac{f}{\Delta}\right) = 0$$

gegeben, die wegen (20.6) auch folgendermassen geschrieben werden können:

$$(20.7)\qquad f_{p_{i\alpha}} = \frac{\partial \Delta}{\partial p_{i\alpha}}.$$

Die Gleichungen (20.6) und (20.7) bilden die Fundamentalrelationen, durch welche ein geodätisches Feld definiert wird.

21. Lösung des Variationsproblems. Hat man auf irgend eine Weise ein geodätisches Feld konstruiert, das überdies eine Mannigfaltigkeit (19.2) transversal schneidet, so bildet diese stets eine Lösung für das Variationsproblem, das zum Integrale

$$(21.1)\qquad \int \cdots \int f(x_i,\, t_\alpha,\, p_{i\alpha})\, dt_1 \ldots dt_\mu$$

gehört. Wir betrachten nämlich ein Stück von (19.2), das sich auf ein Gebiet G_t des Raumes der t_α projiziert und ein entsprechendes Stück von (19. 10), das sich auf $\overline{G}_t$ projiziert, wobei die Beziehungen zwischen G_t und $\overline{G}_t$, die am Ende des § **19** erklärt wurden, gelten sollen. Dann ist nach den Resultaten des § **19** verbunden mit (20. 6)

$$\int_{G_t} f\,dt_1 \ldots dt_\mu = \int_{G_t} \Delta\,dt_1 \ldots dt_\mu = \int_{\overline{G}_t} \overline{\Delta}\,dt_1 \ldots dt_\mu. \tag{21.2}$$

Bezeichnet man also mit $\overline{f}$ den Wert von f auf der Fläche (19. 10), so ist nach (21. 2)

$$\int_{\overline{G}_t} \overline{f}\,dt_1 \ldots dt_\mu - \int_{G_t} f\,dt_1 \ldots dt_\mu = \int_{\overline{G}_t} (\overline{f} - \overline{\Delta})\,dt_1 \ldots dt_\mu. \tag{21.3}$$

Nun bemerke man, dass aus $f > 0$ und aus (20. 6) auch $\Delta > 0$ folgt. Für eine schwache Variation unseres ursprünglichen Flächenstückes ist daher auch $\overline{\Delta} > 0$. Hieraus folgt mit Berücksichtigung von (20. 4) und (20. 6)

$$\overline{f} - \overline{\Delta} = \overline{\Delta}\left(\frac{\overline{f}}{\overline{\Delta}} - \frac{f}{\Delta}\right) > 0, \tag{21.4}$$

wodurch unsere Behauptung bewiesen wurde.

22. Einführung kanonischer Veränderlicher. Die weitere Behandlung unseres Problems wird ausserordentlich erleichtert, wenn wir jetzt die kanonischen Grössen F, $P_{i\alpha}$, $\Pi_{i\alpha}$ einführen, die wir im ersten Kapitel untersucht haben. In der Tat ist nach (19. 7) und (19. 8)

$$\frac{\partial \Delta}{\partial p_{i\alpha}} = S_{\lambda i}\overline{c}_{\lambda\alpha} \tag{22.1}$$

und die Vergleichung dieser Formel mit (17. 8) und (20. 7) zeigt, dass wir

$$\pi_{i\alpha} = f_{p_{i\alpha}} \tag{22.2}$$

zu setzen haben. Nach den §§ **8** und **9** kann man also jetzt durch rationale Operationen die $a_{\alpha\beta}$, F, Φ, $P_{i\alpha}$, $\Pi_{i\alpha}$ als Funktionen von x_i, t_α, $p_{i\alpha}$ berechnen. Ebenso kann man die Determinante a berechnen und insbesondere verifizieren, dass sie nicht verschwindet. Falls sie identisch verschwinden sollte, so wäre die Funktion f, von der unser Variationsproblem abhängt, für unsere Theorie nicht brauchbar.

Unser Zweck ist aber x_i, t_α, $P_{i\alpha}$ als unabhängige Veränderliche zu nehmen, und wir müssen daher die Bedingung aufstellen, die verifiziert sein muss, um die $p_{i\alpha}$ durch diese Grössen ausdrücken zu können. Hierzu benutzt man am besten (10. 1), eine Gleichung, die man nach (8. 3) folgendermassen ausführlich schreiben kann:

(22. 3) $$M_{i\alpha} = \pi_{i\alpha} - P_{i\sigma}(\delta_{\sigma\alpha} f - p_{k\sigma}\pi_{k\alpha}) = 0.$$

Dieses letzte Gleichungssystem soll also nach den $p_{i\alpha}$ auflösbar sein und wir müssen dazu schreiben, dass die Funktionaldeterminante

(22. 4) $$\left| \frac{\partial M_{i\alpha}}{\partial p_{j\beta}} \right| \neq 0$$

ist. Setzt man zur Abkürzung

(22. 5) $$\frac{\partial^2 f}{\partial p_{i\alpha} \partial p_{j\beta}} = \pi_{i\alpha, j\beta},$$

so folgt aus (22. 3)

(22. 6) $$\frac{\partial M_{i\alpha}}{\partial p_{j\beta}} = \pi_{i\alpha, j\beta} - P_{i\alpha}\pi_{j\beta} + P_{i\beta}\pi_{j\alpha} + P_{i\sigma} p_{k\sigma}\pi_{k\alpha, j\beta}.$$

Aus unseren Voraussetzungen folgt nun, dass $b \neq 0$ ist; daher kann man die Bedingung (22. 4) ersetzen durch die des Nichtverschwindens einer Determinante, deren Elemente

(22. 7) $$N_{i\alpha, j\beta} = b_{ri}\,\delta_{\sigma\alpha} \frac{\partial M_{r\sigma}}{\partial p_{j\beta}} = b_{ri} \frac{\partial M_{r\alpha}}{\partial p_{j\beta}}$$

sind. Aus (22. 6) und (22. 7) folgt nun mit Hilfe von (15. 6)

(22. 8) $$N_{i\alpha, j\beta} = b_{ri}\pi_{r\alpha, j\beta} - \pi_{i\alpha}\pi_{j\beta} + \pi_{i\beta}\pi_{j\alpha} + \pi_{i\sigma} p_{k\sigma}\pi_{k\alpha, j\beta};$$

da nun $b_{ri}\pi_{r\alpha, j\beta} = b_{ki}\pi_{k\alpha, j\beta}$ ist und da $b_{ki} + \pi_{i\sigma} p_{k\sigma} = \delta_{ik} f$ ist, kann man (22. 8) auch in der Form schreiben

(22. 9) $$N_{i\alpha, j\beta} = f\pi_{i\alpha, j\beta} - \pi_{i\alpha}\pi_{j\beta} + \pi_{i\beta}\pi_{j\alpha}.$$

Die Einführung der $P_{i\alpha}$ als unabhängige Veränderliche ist also stets möglich, falls die Determinante

(22. 10) $$\left| f\frac{\partial^2 f}{\partial p_{i\alpha} \partial p_{j\beta}} + \frac{\partial f}{\partial p_{i\beta}} \frac{\partial f}{\partial p_{j\alpha}} - \frac{\partial f}{\partial p_{i\alpha}} \frac{\partial f}{\partial p_{j\beta}} \right| \neq 0$$

ist.

23. Nachdem wir die $p_{i\alpha}$ als Funktionen von x_i, t_α, $P_{i\alpha}$ dargestellt haben, können wir nach dem Kapitel I. alle übrigen Grössen, also insbesondere F, Φ, $\Pi_{i\alpha}$ als Funktionen derselben Veränderlichen bestimmen.

Setzt man nun diese Funktionen in (14. 3) ein, so folgen sofort die Relationen

$$F f_{x_i} = -f F_{x_i}, \quad F f_{t_\alpha} = -f F_{t_\alpha}, \tag{23. 1}$$

$$\Pi_{i\alpha} = \frac{\partial F}{\partial P_{i\alpha}}, \tag{23. 2}$$

die wir später benutzen werden.

24. Die ***E*****-Funktion.** Wir sind jetzt in der Lage, für jedes geodätische Feld die WEIERSTRASSsche Exzessfunktion, die zum Integral (1. 1) gehört, zu berechnen.

Es sollen also die Gleichungen (20. 6) und (20. 7) gelten; berücksichtigt man aber (19. 8), (22. 2) und (22. 1), so sieht man, dass auch die Gleichungen (18. 2) und (18. 3) gelten müssen und diese sind nach dem § **18** äquivalent mit (17. 3) und (17. 4).

Setzen wir also in

$$\bar{\Delta} = |S_{\alpha\beta} + S_{\alpha i} \bar{p}_{i\beta}| \tag{24. 1}$$

für $S_{\alpha i}$ die rechte Seite von (17. 3) ein, so folgt nach dem Multiplikationsgesetz der Determinanten, wenn man (17. 4) beachtet,

$$\bar{\Delta} = \frac{1}{F} |\delta_{\alpha\beta} + P_{i\alpha} \bar{p}_{i\beta}|. \tag{24. 2}$$

Nun definieren wir neue Grössen $h_{i\beta}$ durch die Gleichungen

$$\bar{p}_{i\beta} = p_{i\beta} + f \,.\, h_{i\beta} \tag{24. 3}$$

und erhalten aus (24. 2) mit Berücksichtigung von (13. 2)

$$\bar{\Delta} = \frac{1}{F} |g_{\alpha\beta} + f P_{i\alpha} h_{i\beta}|. \tag{24. 4}$$

Bemerken wir nun, dass aus (13. 4) und (13. 8) folgt

$$(g_{\varrho\beta} + f P_{i\varrho} h_{i\beta}) \bar{g}_{\varrho\alpha} = F f (\delta_{\alpha\beta} + \pi_{i\alpha} h_{i\beta}), \tag{24. 5}$$

so erhalten wir aus (24. 4)

$$\bar{\Delta} |\bar{g}_{\alpha\beta}| = F^{\mu-1} f^{\mu} |\delta_{\alpha\beta} + \pi_{i\alpha} h_{i\beta}|.$$

Da nun, wegen (13. 4), $|\bar{g}_{\alpha\beta}| = F^{\mu-1} f^{\mu-1}$ ist, erhält man schliesslich

$$\bar{\Delta} = f |\delta_{\alpha\beta} + \pi_{i\alpha} h_{i\beta}|. \tag{24. 6}$$

Wir berechnen nun $h_{i\beta}$ aus (24. 3) und bemerken, dass nach § **21**

$$E = \bar{f} - \bar{\Delta}$$

zu nehmen ist; man hat also schliesslich

$$\boxed{E = \bar{f} - \frac{1}{f^{\mu-1}} |\delta_{\alpha\beta} f + \pi_{i\alpha} (\bar{p}_{i\beta} - p_{i\beta})|.} \tag{24. 7}$$

Dies ist eine Formel, die für $\mu = 1$ in die übliche Gestalt der E-Funktion übergeht; es ist bemerkenswert, dass auch hier die E-Funktion nur von den Flächenelementen $p_{i\beta}$, $\overline{p}_{i\beta}$, nicht aber vom geodätischen Felde abhängt.

25. Die Legendresche Bedingung. Wir entwickeln die Determinante (24. 6) nach Potenzen von $h_{i\beta}$ und bestimmen die linearen und quadratischen Glieder dieser Entwickelung. Hierzu führen wir die Bezeichung ein

$$m_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} + \pi_{i\alpha} h_{i\beta}, \tag{25. 1}$$

aus welcher mit ähnlichen Abkürzungen, wie im § 8, folgt

$$\delta_{\alpha\beta} m = m_{\varrho\beta} \overline{m}_{\varrho\alpha}$$

und nach Differentiation

$$\delta_{\alpha\beta} dm = m_{\varrho\beta} d\overline{m}_{\varrho\alpha} + \overline{m}_{\varrho\alpha} dm_{\varrho\beta}.$$

Wir falten diese Gleichung mit $\overline{m}_{\sigma\beta}$ und erhalten, falls wir noch den Summationsbuchstaben β durch λ ersetzen

$$m d\overline{m}_{\sigma\alpha} = \overline{m}_{\sigma\alpha} dm - \overline{m}_{\varrho\alpha} \overline{m}_{\sigma\lambda} dm_{\varrho\lambda}.$$

Nun ist bekanntlich $dm = \overline{m}_{\varrho\lambda} dm_{\varrho\lambda}$ und wir haben schliesslich

$$m d\overline{m}_{\sigma\alpha} = (\overline{m}_{\sigma\alpha} \overline{m}_{\varrho\lambda} - \overline{m}_{\varrho\alpha} \overline{m}_{\sigma\lambda}) dm_{\varrho\lambda}. \tag{25. 2}$$

Nun folgt aus (24. 6)

$$\frac{\partial \overline{\Delta}}{\partial h_{i\alpha}} = f \overline{m}_{\sigma\alpha} \pi_{i\sigma} \tag{25. 3}$$

und aus (25. 2)

$$m \frac{\partial \overline{m}_{\sigma\alpha}}{\partial h_{j\beta}} = (\overline{m}_{\sigma\alpha} \overline{m}_{\varrho\beta} - \overline{m}_{\varrho\alpha} \overline{m}_{\sigma\beta}) \pi_{j\varrho}. \tag{25. 4}$$

Also ist nach (25. 3)

$$\frac{\partial^2 \overline{\Delta}}{\partial h_{i\alpha} \partial h_{j\beta}} = \frac{f}{m} (\overline{m}_{\sigma\alpha} \overline{m}_{\varrho\beta} - \overline{m}_{\varrho\alpha} \overline{m}_{\sigma\beta}) \pi_{i\sigma} \pi_{j\varrho}. \tag{25. 5}$$

Für $h_{i\beta} = 0$ ist nun $\overline{m}_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}$ und aus (25. 3) und (25. 5) folgt also

$$\left.\frac{\partial \overline{\Delta}}{\partial h_{i\alpha}}\right|_0 = f \pi_{i\alpha}, \tag{25. 6}$$

$$\left.\frac{\partial^2 \overline{\Delta}}{\partial h_{i\alpha} \partial h_{j\beta}}\right|_0 = f(\pi_{i\alpha} \pi_{j\beta} - \pi_{i\beta} \pi_{j\alpha}). \tag{25. 7}$$

Wenn wir also jetzt die E-Funktion (24. 7) nach Potenzen von

$(\bar{p}_{i\beta} - p_{i\beta})$ entwickeln, so fehlen sowohl das konstante wie auch die linearen Glieder. Die quadratischen Glieder der Entwickelung bilden eine quadratische Form, die folgendermassen lautet:

$$\boxed{\begin{aligned} 2Q = (\bar{p}_{i\alpha} - p_{i\alpha})(\bar{p}_{j\beta} - p_{j\beta}) \Big\{ & \frac{\partial^2 f}{\partial p_{i\alpha} \partial p_{j\beta}} - \\ & - \frac{1}{f}\left(\frac{\partial f}{\partial p_{i\alpha}} \frac{\partial f}{\partial p_{j\beta}} - \frac{\partial f}{\partial p_{j\alpha}} \frac{\partial f}{\partial p_{i\beta}} \right) \Big\}. \end{aligned}} \tag{25.8}$$

Die Legendre*sche Bedingung* unseres Problems besteht in der Forderung, dass die quadratische Form (25. 8) positiv definit sein soll. Es ist zu beachten, dass die Determinante dieser quadratischen Form mit dem Ausdruck (22. 10) zusammenfällt: also ist jedesmal dann, wo die Legendresche Bedingung erfüllt ist, auch die Möglichkeit gegeben, kanonische Koordinaten einzuführen.

Zu beachten ist endlich, dass in der Legendreschen Bedingung auch die ersten Ableitungen von f nach den $p_{i\alpha}$ vorkommen.

26. Die E-Funktion in kanonischen Koordinaten. Für den Fall, dass man von Anfang an das Variationsproblem in kanonischen Koordinaten durch die Funktion $F(x_i, t_\alpha, P_{i\alpha})$ vorgibt, ist es nützlich für die E-Funktion einen Ausdruck zu haben, in welchem diese Koordinaten allein vorkommen. Dazu setze man in (24. 2)

$$P_{i\alpha} = \bar{P}_{i\alpha} + \bar{F} k_{i\alpha} \tag{26.1}$$

und transformiere den Ausdruck (24. 2) ganz ähnlich, wie wir es im § 24 gemacht haben. Man findet schliesslich

$$\boxed{\frac{F}{\bar{f}} E = F - \frac{1}{\bar{F}^{\mu-1}} \left| \delta_{\alpha\beta} \bar{F} + \bar{\Pi}_{i\beta}(P_{i\alpha} - \bar{P}_{i\alpha}) \right|.} \tag{26.2}$$

Berechnet man jetzt die Legendresche Bedingung aus (26. 2), so findet man eine Formel, die der Relation (25. 8) ganz analog ist.

Endlich bemerke man, dass in Folge der Reziprozität (§ 15) die E-Funktion sowohl in den ursprünglichen als auch in den kanonischen Koordinaten auch durch n-reihige Determinanten dargestellt werden kann.

27. Die Differentialgleichungen der geodätischen Felder. Nach den §§ **20** und **22** erhält man ein geodätisches Feld, wenn man, mit den Bezeichungen des § **19**, die Gleichungen

$$f = \Delta = c, \quad f_{p_{i\alpha}} = \pi_{i\alpha} = S_{\lambda i} \bar{c}_{\lambda\alpha} \tag{27.1}$$

gleichzeitig befriedigt. Nach dem § **18** ist aber dieses System von Gleichungen vollständig gleichwertig mit den folgenden:

(27. 2) $$S_{\alpha i} = P_{i\varrho} S_{\alpha\varrho},$$

(27. 3) $$F . |S_{\alpha\beta}| = 1.$$

Hat man nun die Funktion $F(x_i, t_\alpha, P_{i\alpha})$ berechnet, so kann man ein geodätisches Feld folgendermassen finden: Man bestimme aus den Gleichungen (27. 2) die $P_{i\alpha}$ als rationale Funktionen der ersten partiellen Ableitungen der $S_\alpha(x_i, t_\beta)$ und setze die gefundenen Werte in (27. 3) ein. So erhält man *eine* partielle Differentialgleichung erster Ordnung für μ Funktionen S_α, von denen man also $(\mu - 1)$ ganz willkürlich wählen kann.

28. Durch ein beliebig gegebenes geodätisches Feld werden mit Hilfe von (27. 2) und (27. 3) die $P_{i\alpha}$ und F, und hierauf durch Anwendung der Formeln der Kapitel I. alle übrigen Grössen als Funktionen von (x_i, t_α) d. h. als Ortsfunktionen des $(n + \mu)$ dimensionalen Raumes bestimmt.

Man kann sich aber auch umgekehrt die $P_{i\alpha}$ als solche Ortsfunktionen von vornherein geben, und nach den Bedingungen fragen, die dafür notwendig und hinreichend sind, dass Funktionen $S_\alpha(x_i, t_\beta)$ gefunden werden können, für welche die Relationen (27. 2) und (27. 3) bestehen.

Wir führen den linearen Operator

(28. 1) $$L_i(\ ) = \frac{\partial}{\partial x_i}(\ ) - P_{i\varrho}\frac{\partial}{\partial t_\varrho}(\ )$$

ein. Die Gleichungen (27. 2) besagen dann, dass das System von Differentialgleichungen

(28. 2) $$L_i S_\alpha = 0$$

für die μ unabhängigen Funktionen S_α gelten soll, und daher ein Jacobi*sches System* sein muss. Die notwendige und hinreichende Bedingung hierzu ist bekanntlich die des identischen Verschwindens der Klammerausdrücke $(L_i L_j - L_j L_i) S$; sie ist den folgenden Relationen äquivalent

(28. 3) $$L_j P_{i\varrho} - L_i P_{j\varrho} = 0.$$

Setzen wir also zur Abkürzung

(28. 4) $$\boxed{[i\,j\,\varrho] = \frac{\partial P_{i\varrho}}{\partial x_j} - \frac{\partial P_{j\varrho}}{\partial x_i} - \left(P_{j\sigma}\frac{\partial P_{i\varrho}}{\partial t_\sigma} - P_{i\sigma}\frac{\partial P_{j\varrho}}{\partial t_\sigma}\right),}$$

so haben wir zu schreiben

(28. 5) $$[i\,j\,\varrho] = 0.$$

29. Es seien die Bedingungen (28. 5) alle verifiziert. Zwischen zwei Systemen S_α und T_α von je μ unabhängigen Lösungen des JACOBIschen Systems (28. 2) besteht immer die Relation

$$(29.1) \qquad |S_{\alpha\beta}| \frac{\partial (T_1 \ldots T_\mu)}{\partial (S_1 \ldots S_\mu)} = |T_{\alpha\beta}|,$$

die eine bekannte Eigenschaft der Funktionaldeterminanten darstellt. Gibt man sich die T_β, so ist also die Gleichung (27. 3) dann und nur dann lösbar, wenn man die S_α als Funktionen der T_β so bestimmen kann, dass die Gleichung

$$(29.2) \qquad \frac{\partial (T_1, \ldots, T_\mu)}{\partial (S_1, \ldots, S_\mu)} = (F)\,|T_{\alpha\beta}|$$

besteht. Hierbei bedeutet (F) diejenige Funktion der $(n+\mu)$ Veränderlichen (x_i, t_α), die man erhält, wenn man in $F(x_i, t_\alpha, P_{i\alpha})$ die $P_{i\alpha}$ als Funktionen von (x_i, t_α) einsetzt. Die Relation (29. 2) kann aber dann und nur dann befriedigt werden, wenn die rechte Seite dieser Gleichung selbst eine Funktion der T_β ist, d. h. wenn sie dem JACOBIschen System (28. 2) genügt. Die Gleichung (27. 3) ist also äquivalent dem System

$$(29.3) \qquad L_i((F) \,.\, |T_{\alpha\beta}|) = 0.$$

Durch Entwickelung von (29. 3) erhalten wir:

$$(29.4) \qquad |T_{\alpha\beta}|\, L_i(F) + (F)\, \overline{T}_{\varrho\sigma} L_i \frac{\partial T_\varrho}{\partial t_\sigma} = 0.$$

Nun ist

$$(29.5) \qquad L_i \frac{\partial T_\varrho}{\partial t_\sigma} = \frac{\partial^2 T_\varrho}{\partial x_i \partial t_\sigma} - P_{i\lambda} \frac{\partial^2 T_{\varrho\sigma}}{\partial t_\sigma \partial t_\lambda}.$$

Andererseits ist, weil T_ϱ nach Voraussetzung eine Lösung von (28. 2) ist,

$$\frac{\partial^2 T_\varrho}{\partial x_i \partial t_\sigma} = \frac{\partial}{\partial t_\sigma}\left(\frac{\partial T_\varrho}{\partial x_i}\right) = \frac{\partial}{\partial t_\sigma}\left(P_{i\lambda} \frac{\partial T_\varrho}{\partial t_\lambda}\right);$$

dies in (29. 5) eingesetzt, liefert die Gleichung

$$(29.6) \qquad L_i \frac{\partial T_\varrho}{\partial t_\sigma} = \frac{\partial P_{i\lambda}}{\partial t_\sigma} T_{\varrho\lambda}.$$

Wir setzen diesen Wert in (29. 4) ein und erhalten nach Division durch $|T_{\alpha\beta}|$ die Bedingung, die wir aufstellen wollten:

$$(29.7) \qquad L_i(F) + (F) \frac{\partial P_{i\sigma}}{\partial t_\sigma} = 0.$$

30. Wir setzen jetzt zur Abkürzung

$$[i] = L_i(F) + (F)\frac{\partial P_{i\sigma}}{\partial t_\sigma} + \Pi_{j\varrho}[ij\varrho] \tag{30.1}$$

und entwickeln $L_i(F)$ unter Berücksichtigung von (23.2). Wir erhalten

$$[i] = \frac{\partial F}{\partial x_i} + \Pi_{j\varrho}\frac{\partial P_{j\varrho}}{\partial x_i} - P_{i\sigma}\left(\frac{\partial F}{\partial t_\sigma} + \Pi_{j\varrho}\frac{\partial P_{j\varrho}}{\partial t_\sigma}\right) + \\ + F\frac{\partial P_{i\sigma}}{\partial t_\sigma} + \Pi_{j\varrho}[ij\varrho].$$

Hieraus folgt, wenn man noch (28.4) benutzt,

$$[i] = \frac{\partial F}{\partial x_i} - P_{i\sigma}\frac{\partial F}{\partial t_\sigma} + \Pi_{j\varrho}\left(\frac{\partial P_{i\varrho}}{\partial x_j} - P_{j\sigma}\frac{\partial P_{i\varrho}}{\partial t_\sigma}\right) + F\frac{\partial P_{i\sigma}}{\partial t_\sigma}, \tag{30.2}$$

eine Gleichung, die mit unseren früheren Bezeichnungen auch geschrieben werden kann

$$\boxed{[i] = \frac{\partial F}{\partial x_i} - P_{i\sigma}\frac{\partial F}{\partial t_\sigma} + \Pi_{j\varrho}\frac{\partial P_{i\varrho}}{\partial x_j} + A_{\sigma\varrho}\frac{\partial P_{i\varrho}}{\partial t_\sigma}.} \tag{30.3}$$

Die notwendigen und hinreichenden Bedingungen, für die Existenz eines geodätischen Feldes lauten schliesslich

$$[ij\varrho] = 0, \quad [i] = 0. \tag{30.4}$$

31. Die Eulerschen Gleichungen. Es ist zwar nicht schwer direkt zu beweisen, dass eine jede μ-dimensionale Mannigfaltigkeit, die durch ein geodätisches Feld transversal geschnitten wird, den Eulerschen Differentialgleichungen

$$\frac{d}{dt_\alpha}f_{p_{i\alpha}} - f_{x_i} = 0 \tag{31.1}$$

genügen muss; viel interessanter und lehrreicher ist es aber, eine allgemeine Identität aufzustellen, aus welcher diese Folgerung sofort zu entnehmen sein wird.

Wir geben uns zu diesem Zweck die $p_{i\alpha}$ als ganz beliebige Funktionen von (x_i, t_α) und berechnen die übrigen Grössen $f(x_i, t_\alpha, p_{i\alpha})$, $\pi_{i\alpha} = f_{p_{i\alpha}}$, $P_{i\alpha}$ u. s. f. mit Hülfe unserer früheren Formeln ebenfalls als Funktionen des Ortes.

Ferner führen wir für jede Funktion $\psi(x_i, t_\alpha)$ das Zeichen $\frac{d\psi}{dt_\alpha}$ ein, das insbesondere in (31.1) vorkommt und durch die

Relation

$$\frac{d\psi}{dt_\alpha} = \frac{\partial\psi}{\partial t_\alpha} + \frac{\partial\psi}{\partial x_i} p_{i\alpha} \tag{31.2}$$

definiert wird.

Nach diesen Vorbereitungen betrachten wir die Relation (13.8)

$$F\pi_{i\alpha} = P_{i\sigma}\bar{g}_{\sigma\alpha}$$

und folgern aus dieser Gleichung durch Differentiation:

$$F\,d\pi_{i\alpha} = -\pi_{i\alpha}\,dF + \bar{g}_{\sigma\alpha}\,dP_{i\sigma} + P_{i\sigma}\,d\bar{g}_{\sigma\alpha}. \tag{31.3}$$

Nach einer der Gleichung (25.2) nachgebildeten Formel ist nun

$$g\,d\bar{g}_{\sigma\alpha} = (\bar{g}_{\sigma\alpha}\bar{g}_{\varrho\lambda} - \bar{g}_{\varrho\alpha}\bar{g}_{\sigma\lambda})\,dg_{\varrho\lambda},$$

also nach (13.4), (13.8), (13.9) und (13.2)

$$Ff P_{i\sigma}d\bar{g}_{\sigma\alpha} = F(\pi_{i\alpha}\bar{g}_{\varrho\lambda} - \pi_{i\lambda}\bar{g}_{\varrho\alpha})(p_{j\lambda}\,dP_{j\varrho} + P_{j\varrho}\,dp_{j\lambda}),$$

$$\begin{aligned} fP_{i\sigma}d\bar{g}_{\sigma\alpha} = {} & (f\pi_{i\alpha}\Pi_{j\varrho} - \bar{g}_{\varrho\alpha}p_{j\lambda}\pi_{i\lambda})\,dP_{j\varrho} + \\ & + F(\pi_{i\alpha}\pi_{j\lambda} - \pi_{i\lambda}\pi_{j\alpha})\,dp_{j\lambda}. \end{aligned} \tag{31.4}$$

Durch Einsetzen dieser Relation in (31.3) erhalten wir

$$\begin{aligned} Ff\,d\pi_{i\alpha} = {} & -f\pi_{i\alpha}\,dF + (f\pi_{i\alpha}\Pi_{j\varrho} + \bar{g}_{\varrho\alpha}b_{ji})\,dP_{j\varrho} + \\ & + F(\pi_{i\alpha}\pi_{j\lambda} - \pi_{i\lambda}\pi_{j\alpha})\,dp_{j\lambda}. \end{aligned} \tag{31.5}$$

Wir führen nun die Bezeichung ein:

$$\Omega_i = Ff\left(\frac{d\pi_{i\alpha}}{dt_\alpha} - f_{x_i}\right) - F\pi_{i\alpha}\pi_{j\lambda}\left(\frac{dp_{j\lambda}}{dt_\alpha} - \frac{dp_{j\alpha}}{dt_\lambda}\right), \tag{31.6}$$

und erhalten aus (31.5)

$$\Omega_i = -Fff_{x_i} - f\pi_{i\alpha}\frac{d(F)}{dt_\alpha} + (f\pi_{i\alpha}\Pi_{j\varrho} + \bar{g}_{\varrho\alpha}b_{ji})\frac{dP_{j\varrho}}{dt_\alpha}. \tag{31.7}$$

Nun ist nach (23.1), (23.2) und (31.2)

$$-Fff_{x_i} = f^2 F_{x_i} = f^2\frac{\partial(F)}{\partial x_i} - f^2\Pi_{j\varrho}\frac{\partial P_{j\varrho}}{\partial x_i},$$

$$\frac{d(F)}{dt_\alpha} = \frac{\partial(F)}{\partial x_k}p_{k\alpha} + \frac{\partial(F)}{\partial t_\alpha},$$

$$\frac{dP_{j\varrho}}{dt_\alpha} = \frac{\partial P_{j\varrho}}{\partial x_k}p_{k\alpha} + \frac{\partial P_{j\varrho}}{\partial t_\alpha}.$$

Dies alles in (31.7) eingesetzt, liefert nach einigen Vereinfachungen:

$$\begin{aligned} \Omega_i = {} & fb_{ki}\frac{\partial(F)}{\partial x_k} + f(\Pi_{k\varrho}b_{ji} - \Pi_{j\varrho}b_{ki})\frac{\partial P_{j\varrho}}{\partial x_k} - \\ & - f\pi_{i\alpha}\frac{\partial(F)}{\partial t_\alpha} + (f\pi_{i\alpha}\Pi_{j\varrho} + \bar{g}_{\varrho\alpha}b_{ji})\frac{\partial P_{j\varrho}}{\partial t_\alpha}. \end{aligned} \tag{31.8}$$

Mit Benutzung von (15.6) und (28.1) kann nun dies geschrieben werden:

$$(31.9) \qquad \Omega_i = f b_{ki} L_k(F) - f \Pi_{j\varrho} b_{ki} \left(\frac{\partial P_{j\varrho}}{\partial x_k} - \frac{\partial P_{k\varrho}}{\partial x_j} \right) + \\ + (f \pi_{i\alpha} \Pi_{j\varrho} + \bar{g}_{\varrho\alpha} b_{ji}) \frac{\partial P_{j\varrho}}{\partial t_\alpha}.$$

Nun ist aber nach (28.4) und (30.1)

$$\frac{\partial P_{j\varrho}}{\partial x_k} - \frac{\partial P_{k\varrho}}{\partial x_j} = [j\,k\,\varrho] + P_{k\sigma} \frac{\partial P_{j\varrho}}{\partial t_\sigma} - P_{j\sigma} \frac{\partial P_{k\varrho}}{\partial t_\sigma},$$

$$L_k(F) = [k] + \Pi_{j\varrho} [j\,k\,\varrho] - (F) \frac{\partial P_{k\sigma}}{\partial t_\sigma}.$$

Setzt man diese Grössen in (31.9) ein und bemerkt noch, dass nach (15.6), (13.7), (12.2) und (12.1)

$$b_{ki} P_{k\sigma} = \pi_{i\sigma},$$

$$\bar{g}_{\varrho\sigma} = F a_{\varrho\sigma} = f A_{\sigma\varrho} = f(\delta_{\varrho\sigma} F - P_{j\varrho} \Pi_{j\sigma})$$

ist, so verschwinden fast alle Glieder und es bleibt

$$(31.10) \qquad \Omega_i = f b_{ki} [k].$$

Die Identität, die wir aufstellen wollten, erhält man durch die Vergleichung von (31.6) und (31.10); sie lautet

$$(31.11) \qquad \boxed{\frac{d\pi_{i\alpha}}{dt_\alpha} - f_{x_i} = \frac{b_{ki}}{F} [k] + \frac{\pi_{i\alpha} \pi_{j\beta}}{f} \left(\frac{dp_{j\alpha}}{dt_\beta} - \frac{dp_{j\beta}}{dt_\alpha} \right).}$$

32. Gehören nun insbesondere die Ortsfunktionen $p_{i\alpha}(x_j, t_\beta)$, die wir uns vorgegeben haben, zu einem geodätischen Feld, das eine μ-dimensionale Mannigfaltigkeit transversal schneidet, so ist in jedem Punkte dieser Mannigfaltigkeit

$$[k] = 0, \quad \frac{dp_{j\alpha}}{dt_\beta} = \frac{dp_{j\beta}}{dt_\alpha}.$$

Die linke Seite von (31.11) muss dann auf dieser Mannigfaltigkeit verschwinden, und diese ist ein Integral der Eulerschen Gleichungen (31.1).

Wir wollen das geodätische Feld ein *ausgezeichnetes Feld* nennen, wenn durch jeden Punkt dieses Feldes eine Extremale gelegt werden kann, die durch das Feld transversal geschnitten wird. Die betreffenden Extremalen bilden dann selbst ein Feld und die Figur, die aus diesen Extremalen und aus den Mannigfaltigkeiten $S_\alpha = \lambda_\alpha$ gebildet wird, heisst eine *vollständige Figur* des Variationsproblems.

33. Wir betrachten eine beliebige Schar von Extremalen, die ein Gebiet des $(n+\mu)$-dimensionalen Raumes einfach überdecken. Die linke Seite und das letzte Glied der Identität (31. 11) müssen dann verschwinden, woraus folgt, dass alle $[k] = 0$ sind.

Dafür aber, dass die Extremalen ein Feld bilden, das eine vollständige Figur des Variationsproblems erzeugt, müssen noch ausserdem alle $[j\,k\,\varrho] = 0$ sein, was bekanntlich schon für $\mu = 1$ nicht immer stattzufinden braucht.

(*Eingegangen am 20. Juli 1929.*)