Über Faktorenfolgen für Fouriersche Reihen.

Von S. BOCHNER in München.

1. Von verschiedenen Autoren und zuletzt von Herrn M. FEKETE in einer zusammenfassenden Arbeit[1]) ist für mehrere „Klassen" (vgl. **5.**) von periodischen Funktionen (mit der gemeinsamen Periode 2π) die folgende Frage beantwortet worden. Welches sind die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Zahlenfolge

$$\mu_0,\ \mu_1,\ \mu_2,\ \mu_3,\ \ldots, \tag{1}$$

damit jede FOURIERreihe

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \tag{2}$$

einer Funktion einer bestimmten Klasse durch „Multiplikation" mit den Faktoren (1) in eine FOURIERreihe

$$\mu_0 a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \tag{3}$$

einer Funktion derselben Klasse übergeht. Die Antwort lautet, dass die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_n}{n} \sin nx$$

die FOURIERreihe einer Funktion von beschränkter Variation sein muss. Diesem Satz über „Faktoren der Klasseninvarianz" entspricht ein Parallelsatz über „Faktoren der Klassenkovarianz" (vgl. **7.**).

2. Man kann nun aber, wie schon vielfach geschehen ist, den Begriff der Faktorenfolge weiter fassen, nämlich als Zahlen

$$\gamma_0,\ \gamma_1,\ \gamma_2,\ \gamma_3,\ \ldots \text{ und } \delta_1,\ \delta_2,\ \delta_3,\ \ldots, \tag{4}$$

1) M. FEKETE, Über Faktorenfolgen, welche die „Klasse" einer FOURIERschen Reihe unverändert lassen, *diese Acta*, Bd. 1 (1923), S. 148—166.; wir werden diese Arbeit im folgenden mit F. zitieren.

von der Art, dass jede aus einer FOURIERreihe (2) hervorgegangene Reihe

$$(5) \qquad \gamma_0 a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (\gamma_n a_n \cos nx + \delta_n b_n \sin nx)$$

wiederum die FOURIERreihe einer Funktion derselben Klasse ist. Vom Standpunkt der Funktionalanalysis[2]) erscheint der Begriff der Faktorenfolge in dieser Allgemeinheit naturgemässer als der in F. zugrundegelegte Spezielfall $\gamma_n = \delta_n$. Es dürfte daher die Bemerkung am Platze sein, dass man für dieselben Klassen und mit analogem Ergebnis wie in F., das allgemeinere Problem lösen kann (vgl. **7.**), wie die Zahlen (4) beschaffen sein müssen, damit sie eine Faktorenfolge bilden.

3. Eine weitergehende Verallgemeinerung werden wir dadurch erhalten, dass wir die Funktionen allgemein *komplexwertig* annehmen, $f(x) = f_1(x) + if_2(x)$, ihre FOURIERreihen in der Gestalt

$$(6) \qquad \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n e^{inx}$$

schreiben, und unter einer Faktorenfolge irgendwelche *komplexe* Zahlen

$$\lambda_n (n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots)$$

verstehen werden, so dass die aus der FOURIERreihe (6) hervorgegangene Reihe

$$(7) \qquad \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \lambda_n A_n e^{inx}$$

wiederum eine FOURIERreihe ist. (Zur formalen Vereinfachung machen wir die unwesentliche Annahme, dass für alle von uns betrachteten Funktionen das konstante Glied der FOURIERreihe verschwindet.) Durch diese Erweiterung ins Komplexe werden insbesondere die zwei, in F. getrennten, Sätze über Faktoren für Klasseninvarianz und für Klassenkovarianz zu einem gemeinsamen Satz vereinheitlicht (vgl. **7.**).

---

[2]) Man kann die durch feste Zahlen (4) hervorgerufene Zuordnung zwischen den Funktionen (2) und (5) als eine Funktionaloperation auffassen, und die Frage stellen, welcher Art Funktionaloperationen sich umgekehrt durch Faktorenfolgen erzeugen lassen. Vgl. des Verfassers: Ein Satz über lineare Operationen, *Math. Zeitschrift*, Bd. 29 (1929), S. 737—743., wo es sich allerdings um FOURIERintegrale und nicht um FOURIERreihen handelt.

4. Unser Satz lautet folgendermassen:

Satz. *Damit für eine der in* 5. *und* 6. *erörterten Funktionenklassen die aus einer* FOURIER*reihe* (6) *hervorgegangene Reihe* (7) *wiederum eine* FOURIER*reihe ist, ist notwendig und hinreichend, dass die mit den Faktoren* λ_n *gebildete Reihe*

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\lambda_n}{n} e^{-inx} \tag{8}$$

die FOURIER*reihe einer Funktion von beschränkter Variation ist.*

5. Die von uns betrachteten Funktionen $f(x)=f_1(x)+if_2(x)$ sollen jedenfalls nach LEBESGUE integrierbar sein. Wir nennen eine Funktion kurzerhand beschränkt, wenn es eine zu ihr im LEBESGUEschen Sinne äquivalente Funktion gibt welche im üblichen Sinne beschränkt ist. Wir betrachten, wie in F.: 1) die Klasse *(B)* aller beschränkten Funktionen, 2) die Klasse *(BR)* aller Funktionen, welche beschränkt und nach RIEMANN integrierbar sind, 3) die Klasse *(S)* aller (durchweg) stetigen Funktionen, 4) die Klasse *(V)* aller Funktionen von beschränkter Variation.

Unter dem n-ten FEJÉRpolynom $f_n(x)$ der Funktion $f(x)$ verstehen wir, wie üblich, das mit Fouriertermen von $f(x)$ gebildete trigonometrische Polynom

$$f_n(x) = \sum_{\nu=-n}^{+n} \left(1-\frac{|\nu|}{n}\right) A_\nu e^{i\nu x}.$$

Die FEJÉRpolynome einer Funktion $f(x)$ aus einer unserer vier Klassen sind in bezug auf die Klasseneigenschaft gleichartig, also: gleichartig beschränkt, gleichartig stetig, gleichartig nach RIEMANN integrierbar, von gleichartig beschränkter Variation; und umgekehrt, falls die Gesamtheit der FEJÉRpolynome einer Funktion $f(x)$ eine dieser Klasseneigenschaften gleichartig besitzt, so gibt es eine zu $f(x)$ äquivalente Funktion, welche zur betreffenden Klasse gehört.[8])

Mit der Faktorenfolge λ_n bilden wir formal die Reihe (8) und deren FEJÉRpolynome

$$\Lambda_n(x) = \sum_{\nu=-n}^{+n} \left(1-\frac{|\nu|}{n}\right) \frac{\lambda_\nu}{\nu} e^{-i\nu x}.$$

[8]) Dass wir es jetzt mit komplexwertigen Funktionen zu tun haben, ändert nur sehr wenig an den in F. gegebenen Definitionen und Beweisen.

Die mit irgendeiner Funktion $f(x)$ gebildeten Polynome

$$\Lambda f_n(x) = \frac{i}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x+t)\Lambda'_n(t)\,dt$$

sind die FEJÉRpolynome der (vorderhand nur formal gedachten) Reihe

(9) $$\Lambda f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \lambda_n A_n e^{inx}.$$

Wir können daher, wie in F., folgendermassen schliessen. Gibt es eine Funktion von beschränkter Variation, deren FOURIERreihe mit (8) übereinstimmt, so sind die Integrale

(10) $$\int_0^{2\pi} |\Lambda'_n(t)|\,dt$$

beschränkt, eine jede Klasseneigenschaft von $f(x)$ überträgt sich demnach gleichartig auf die Funktionen $\Lambda f_n(x)$, also gibt es eine Funktion derselben Klasse wie $f(x)$, deren FOURIERreihe mit (9) übereinstimmt; und wenn umgekehrt für eine Funktion $f(x)$ die Polynome $\Lambda f_n(x)$ gleichartig beschränkt sind, so muss auf Grund desselben HAARschen Hilfssatzes wie in F. die Folge (10) beschränkt, also (8) die FOURIERreihe einer Funktion von beschränkter Variation sein. Also besteht unser Satz für die Klassen (B), (BR), (S) und (V).

6. Abweichend von F. kann man auch die Klasse (DL) aller Funktionen, welche nach LEBESGUE differenzierbar sind, ganz ebenso wie die bisherigen Klassen behandeln. Damit nämlich $f(x)$ zu (DL) gehört, ist notwendig und hinreichend, dass es eine Funktion $\varepsilon(\delta) > 0$, mit $\lim\limits_{\delta \to 0} \varepsilon(\delta) = 0$, gibt, so dass für irgendwelche reelle Zahlen $\alpha_1 < \beta_1 < \alpha_2 < \beta_2 < \ldots < \alpha_k < \beta_k$, $\beta_k - \alpha_1 \leqq 2\pi$, aus

$$\sum_{\nu=1}^{k} (\beta_\nu - \alpha_\nu) \leqq \delta$$

folgt

$$\sum_{\nu=1}^{k} |f(\beta_\nu) - f(\alpha_\nu)| \leqq \varepsilon.$$

Bleibt noch die Klasse (L) aller nach LEBESGUE integrierbaren Funktionen. Der in F. angewandte Satz von H. STEINHAUS lässt sich, worauf wir nicht im einzelnen eingehen, Schritt für Schritt ins Komplexe erweitern, so dass unser Satz auch für die Funktionenklasse (L) Gültigkeit hat.

7. Nehmen wir die Spezialisierung vor

$$A_n = \frac{a_n - ib_n}{2}$$

$$A_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2}$$

$$\lambda_{-n} = \lambda_n = \mu_n, \tag{11}$$

$n = 1, 2, 3, \ldots$, wo a_n, b_n, μ_n reelle Zahlen sind, so ergibt unser Satz den in 1. angeführten Satz aus F. Setzen wir statt (11)

$$\lambda_{-n} = -\lambda_n = -i\nu_n$$

so erhalten wir den Satz aus F. über Faktoren der Klassenkovarianz, dass nämlich die aus der Fourierreihe (2) hervorgegangene Reihe

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \nu_n (b_n \cos nx - a_n \sin nx)$$

dann und nur dann die Fourierreihe einer Funktion derselben Klasse ist, wenn die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\nu_n \cos nx}{n}$$

die Fourierreihe einer Funktion von beschränkter Variation ist. Hierbei haben wir, über F. hinausgehend, letzteren Satz auch für die Funktionenklasse *(L)* gewonnen.[4]

(Eingegangen am 14. Oktober 1928.)

[4]) Diese Ausdehnung des Satzes von Fekete auf die Funktionenklasse (*L*) ist bereits von A. Zygmund, *Bulletin de l'Académie Polonaise des Sciences et des Lettres*, (1927), S. 343—347., bewiesen worden.