Bibliographie.

L. Bieberbach, Theorie der Differentialgleichungen. (Grundlehren der math. Wissenschaften VI.) VIII + 317 S, Berlin, J. Springer, 1923.

Handelt es sich darum, ein Lehrbuch über Differentialgleichungen zu schreiben, insbesondere eines vom beschränkten Umfange, so besteht die Hauptschwierigkeit in der Auswahl des Stoffes, da diese Disciplin wohl die umfangreichste der ganzen Mathematik ist. Dieser Schwierigkeit begegnet jeder Verfasser eines solchen Lehrbuches und wohl jeder Dozent, der über diesen Gegenstand eine Vorlesung hält, zumal er darauf bedacht sein muss, die wesentlichsten Resultate, die in der Mechanik, theoretischen Physik, Differentialgeometrie etc. zur Anwendung gelangen, vorzutragen. Überaus glücklich ist diese Auswahl in dem neu erschienenen Lehrbuche Bieberbachs getroffen, das auf diese Weise zu dem empfehlungswertesten Lehrbuch dieser Theorie geworden ist, das sowohl zum Selbststudium, wie auch als Nachschlagewerk bei Vorlesungen zu gebrauchen ist. Neben den allgemeinen klassischen Sätzen finden daselbst manche Resultate der neueren Forschung Platz, alles nach einem einheitlichen Plan in strenger Weise durchgearbeitet. Einzelne Untersuchungen werden zwar nur beiläufig gestreift, jedoch in einer Weise, dass der Leser einen klaren Überblick über die entsprechenden Forschungen bekommt. Ausser Acht gelassen wird die Liesche Theorie der Transformationsgruppen, die auch wohl schwer in den Plan des Buches hineinpassen würde.

Die ersten beiden Abschnitte sind den gewöhnlichen Differentialgleichungen gewidmet. Der erste Abschnitt beschäftigt sich mit den Differentialgleichungen erster Ordnung; nach rascher Erledigung der elementaren Integrationsmethoden (Kap. I.) werden die drei hauptsächlichen Existenzbeweise (successive Approximation, Cauchysche Polygonmethode, Potenzreihen) dargelegt (Kap. II). In interessanter Weise wird die Konvergenz der Polygonmethode begründet durch eine allgemeine Überlegung über die Beurteilung der Annäherung einer Differentialgleichung durch eine andere. Es werden in diesem Kapitel noch die Sätze über die Abhängigkeit der Lösungen von den Parametern besprochen. Der Diskussion des Verlaufes der Integralkurven ist das nächste (III.) Kapitel gewidmet. Hier finden in strenger Weise die schönen Untersuchungen von Poincaré und Bendixson Platz in einem Umfange, wie es bisher wohl in keinem Lehrbuche der Fall war, was hoffentlich die Verbreitung dieser Theorie zur Folge haben wird. Das letzte Kapitel dieses Abschnittes ist den Differentialgleichungen erster Ordnung im komplexen Gebiet gewidmet. Ausser dem bekannten Satz, dass unter den rationalen Differentialgleichungen erster Ordnung nur die Riccatische feste Verzweigungspunkte besitzt, wird das neuerdings von Malmquist bewiesene Theorem abgeleitet, dass jedes eindeutige Integral einer rationalen Differentialgleichung erster Ordnung notwendigerweise eine rationale Funktion sein muss, falls die vorgelegte Differentialgleichung keine Riccatische ist.

Der zweite Abschnitt handelt von den Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Ausser den allgemeinen Existenzsätzen und den elementaren Integrationsmethoden (Kap. I, II) wird hier die Diskussion des Verlaufes der reellen

Integralkurve (Kap. III) und die lineare Differentialgleichung im komplexen Gebiet (Kap. IV) behandelt. Im Zusammenhange mit dem erstern Gegenstand werden die Untersuchungen von Birkhoff über geschlossene Integralkurven dargelegt, sodann die verschiedenen Randwertaufgaben, die Oscillationstheoreme, die in der Theorie der linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung aufgestellt sind. Daran schliesst der Begriff der Eigenfunktionen und eine kurze Darlegung des Zusammenhanges mit der Theorie der linearen Integralgleichungen. Die Theorie der linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung im komplexen Gebiet wird mit dem Studium der Singularitäten der verschiedenen Arten in Angriff genommen, sodann die hypergeometrische Differentialgleichung und ihre Anwendung auf die Funktionentheorie untersucht.

Im dritten Abschnitt werden die partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung eingeführt. Man findet hier ausser der Charakteristikentheorie, nebst Anwendungen auf Mechanik, eine sehr übersichtliche Darstellung der Theorie der Berührungstransformationen und ihre Anwendung auf partielle Differentialgleichungen.

Der vierte und letzte Abschnitt beschäftigt sich mit den partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Es wird mit den Existenztheoremen begonnen und daran anschliessend die Charakteristiken eingeführt. Als Beispiel dient die Monge-Ampèresche Differentialgleichung (Kap. I). Sodann wird (Kap. II) die hyperbolische Differentialgleichung studiert und die Riemannsche Integrationsmethode, sowie die Methode der successiven Approximation darauf angewandt. Als Beispiel für die elliptische Differentialgleichung wird die Potentialgleichung und die Gleichung $\Delta u + \lambda u = 0$ behandelt (Kap. III); es werden verschiedene Methoden kurz angedeutet, die bei diesen Differentialgleichungen angewandt werden, insbesondere geschieht die Behandlung der zweiten Differentialgleichung mit den neueren Methoden, die zur Begründung des Dirichletschen Prinzips ausgebaut wurden. Am Ende dieses Kapitels wird das asymptotische Verhalten der Eigenwerte zur Sprache gebracht. Das Buch schliesst mit einigen kurzen Andeutungen über die Theorie der parabolischen Differentialgleichungen.

A. H.

W. Blaschke, Vorlesungen über Differentialgeometrie und geometrische Grundlagen von Einsteins Relativitätstheorie. Band II. **Affine Differentialgeometrie.** Bearbeitet von **K. Reidemeister.** (Grundlehren der math. Wissenschaften VII). IX + 259 S., Berlin, J. Springer, 1923.

Während der erste Band dieser Vorlesungen, eine fesselnde und anregende Einführung in die klassischen Kapitel der Differentialgeometrie, nur hie und da vom wohlmarkierten Wege abschweift, wendet sich hier der Verfasser seinem Lieblingsthema, der affinen Differentialgeometrie zu. Eine lange Reihe von Abhandlungen „Über affine Geometrie", grösstenteils in den sächsischen Berichten erschienen, zeugt von der regen Tätigkeit, mit welcher Verfasser und ein freundschaftlicher Kreis in den letzten 7 Jahren dieses Thema bearbeiteten. Es ist mit grösster Freude zu begrüssen, dass Herr Blaschke den nicht allzuleichten Entschluss fasste, das reiche Material, das nach vereinzelten Vorgängern er, seine Freunde und andere Geometer, so z. B. Fubini, Levi-Civita, zusammentrugen, systematisch zu verarbeiten. Es ist wohl fast überflüssig zu sagen, dass er diese Aufgabe mit der von ihm gewohnten Geschicklichkeit bewältigte.

Das Buch gliedert sich in 7 Kapitel: 1. Ebene Kurven im Kleinen. 2. Ebene Kurven im Grossen. 3. Raumkurven. 4. Flächentheorie, niederer Teil. 5. Allgemeine Flächentheorie. 6. Extreme bei Flächen. 7. Besondere Flächen.

Bei der Fülle des Stoffes wäre es kaum möglich, über den Inhalt sämtlicher Kapitel näher zu berichten. Greifen wir lieber Kap. 6. heraus: nicht aufs Geratewohl, sondern weil dessen Inhalt — on revient toujours — auf die verführerischen Extremalprobleme aus „Kreis und Kugel" erinnert. Es handelt sich in diesem Kapitel, wenn man von den Affinminimalflächen, die eine merkwürdige, ja manchmal unerwartete Analogie mit den gewöhnlichen Minimalflächen aufweisen, absieht, um Variationsprobleme, die sich fast ohne oder mit sehr wenig Rechenapparat mittels geometrischer Methoden behandeln lassen, von der Art, wie sie für die klassischen isoperimetrischen Probleme aus Steiners unstrengen Ansätzen allmählich durch Schwarz, Carathéodory, Study, Blaschke, Tonelli und Gross ausgebildet wurden. Es werden hier folgende Probleme behandelt: Unter allen Eiflächen mit vorgegebenem Volumen diejenige zu bestimmen, für welche das Volumen des grössten einbeschriebenen Tetraeders am kleinsten wird, wie auch — unter Beschränkung auf die positiv gekrümmten Eiflächen — jene, deren Affinoberfläche, d. i. das Integral $\int\int | EG-F^2 |^{1/4}\, du dv$, am grössten ausfällt. Als Lösung beider Probleme erhält man die Kugel, was sich voraussehen lässt, sobald man erkannt hat, dass bei wiederholter Symmetrisierung des Eikörpers ausser dem Volumen desselben, das bekanntlich ungeändert bleibt, die übrigen in Betracht kommenden Grössen im Allgemeinen sich monoton ändern. Da es sich um affine Invarianten handelt, so sind selbstverständlich die Ellipsoide der Kugel aequivalent und ergeben die allgemeine Lösung beider Probleme. Damit ist freilich nur ein Beweisansatz angedeutet, und bis zur strengen Ausführung ist es kein leichter Weg; wir können den Verfasser nicht überallhin begleiten und erwähnen nur eine merkwürdige Ungleichung zwischen Affinoberfläche Ω und gewöhnlicher Oberfläche O eines konvexen Körpers, auf welcher beim zweiten Problem der sehr einfache Beweis für die Existenz eines Maximums fusst. Die Ungleichung wurde durch Herrn Winternitz entdeckt und lautet: $\Omega^4 \leq 4\pi O^3$. Das Gleichheitszeichen gilt nur für die Kugel. Es ist bemerkenswert, dass die Ungleichung unmittelbar aus der Schwarz'schen Ungleichung folgt, im Gegensatz zu dem klassischen isoperimetrischen Problem (Volumen und Oberfläche), wo die entsprechende Ungleichung viel tiefer verborgen liegt. Im Anschluss an diese Überlegungen wird schliesslich gezeigt, dass die Ellipsoide die einzigen überall elliptisch gekrümmten Eiflächen mit fester mittlerer Affinkrümmung sind.

Ebenso, wie in Band I, folgt auch hier jedem Kapitel eine lange Reihe von Bemerkungen, Aufgaben und Lehrsätzen, die zum Nachdenken anregen.

F. R.

Émile Borel, Méthodes et problèmes de Théorie des fonctions (Collection Borel), IX + 148 pages, Paris, Gauthier-Villars et Cie, 1922.

„La lecture des Mémoires originaux devient chaque jour plus difficile pour celui qui connaît seulement de la Théorie des fonctions les parties regardées actuellement comme classiques ; il m'a dès lors semblé qu'on pouvait chercher à faire oeuvre utile en tentant d'exposer, d'une manière élémentaire, certaines recherches qui, bien que relativement récentes, prennent chaque jour une importance plus considérable.“ „Je n'ai d'ailleurs pas cherché à remplacer la lecture des Mémoires originaux, mais seulement les faciliter; aussi ai-je laissé des lacunes qu'il aurait été aisé de combler en transcrivant presque textuellement un certain nombre de pages de tel ou tel Mémoire: il y a toujours avantage, pour le lecteur qui désire approfondir une question, à recourir lui-même au Mémoire original.“

Ces deux phrases, tirées de la préface du premier volume de la Collection, imprimé en 1898, donnent déjà un véritable programme sans que, peut-être, à ce temps-là, M. Borel eût songé à y faire suivre toute cette petite bibliothèque, montant à ce moment à 26 volumes, dont 9 de M. Borel lui-même, les 17 autres de 14 collaborateurs et embrassant — comme le dit la préface de ce dernier volume — „toutes les parties les plus importantes et les plus vivantes de la théorie moderne des fonctions, tant d'une variable réelle que d'une variable complexe.“ Par son oeuvre personnel et en laissant travailler ses collaborateurs en pleine indépendence, M. Borel a su accomplir sa tâche de la meilleure façon; sans exagérer, nous pouvons dire que sa Collection, en traitant les questions du jour et en rapprochant les derniers résultats acquis aux théories classiques, a enseigné, animé et aidé tous les chercheurs en Analyse de ce dernier quart de siècle. Sa tâche n'est pas encore finie; „de nouveaux collaborateurs ne tarderont pas à combler les lacunes qui subsistent forcément: car la Science ne s'arrète pas.“

Dans le présent volume, M. Borel a réuni un grand nombre de ses Notes et Mémoires qui lui paraissaient pouvoir être le point de départ de recherches nouvelles. Il les groupe en 4 chapitres dont voilà les titres: I. Les domaines et la théorie des ensembles. II. Les opèrations et les développements en série. III. La théorie de la croissance et le rôle des constantes arbitraires. IV. Les fonctions de variable complexe en général et les fonctions particulières. Il y a là, dans ces quatre chapitres, une telle variété de questions soulevées, tant de remarques fines et de réflexions profondes qu'il est impossible de donner une idée du livre entier en ces quelques lignes; il faut le lire.

F. R.

H. Weyl, Mathematische Analyse des Raumproblems. Vorlesungen, gehalten in Barcelona und Madrid. VII+117 S Berlin, J. Springer 1923.

Während in seinem bekannten Buche *Raum-Zeit-Materie* Weyl die Geometrie der unserer Erfahrungswelt zugrunde liegenden Mannigfaltigkeit mit Berücksichtigung der Bedürfnisse des theoretischen Physikers behandelt, kommen in dem vorliegenden Werk ausschliesslich die Gesichtspunkte des abstrakten Mathematikers zur Geltung.

Nach einer Einleitung, in dem die euklidisch-minkowskische Raum-Zeit Mannigfaltigkeit mit Hülfe der Begriffe der Geraden und des Nullelementes axiomatisch charakterisiert wird, wendet er sich allgemeinen, durch Aussagen im Infinitesimalen bestimmten metrischen Räumen zu. Der für das folgende grundlegende Begriff der Parallelverschiebung wird rein interngeometrisch eingeführt, und mit seiner Hülfe der „affine" Zusammenhang, geodetische Linie etc. definiert und der Satz bewiesen, dass die Metrik einer Riemann'schen d. h. durch ein quadratisches Linienelement bestimmten Raumes den affinen Zusammenhang eindeutig determiniert.

Aus den allgemeinen metrischen Räumen scheiden die Riemann'sche durch die Forderung der Integrabilität der Streckenübertragung, der Euklidische durch Integrabilität der Vektorübertragung. Es wird sodann das Helmholtz'sche Raumproblem d. h. Bestimmung aller homogenen, eine freie kongruente Übertragung gestattende Raumformen behandelt. Unter den sich ergebenden „Kugelräumen" ist der enklidische Fall als derjenige hervorgehoben, in dem auch ähnliche Abbildung uneingeschränkt möglich ist.

Nach diesen Erörterungen wendet sich *Weyl* zu dem Hauptproblem des Buches: Es sei eine allgemeine metrische Mannigfaltigkeit gegeben, von dem nur vorausgesetzt wird, dass die Metrik den affinen Zusammenhang eindeutig determiniere. Dann gehört zu dem in einer quantitativ bestimmten Ausgestaltung vorliegenden metrischen Felde an jeder Stelle eine nicht-ausgeartete quadratische Differentialform $\Sigma g_{ik}\, dx_i\, dx_k$ deren Koeffizienten g_{ik} noch einen willkürlichen gemeinsamen Proportionalitätsfaktor enthalten. Wird die Mannigfaltigkeit geeicht d. h. über den Proportionalitätsfaktor an jeder Stelle verfügt, so wird der metrische Zusammenhang durch eine lineare Form der Verschiebungen $\Sigma \varphi_i\, d x_i$ gekennzeichnet. Im Rahmen der Bedingung, dass die quadratische Form niemals ausarten darf und den vorgeschriebenen Trägheitsindex besitzen muss, sind die Koeffizienten g_{ik} und φ_i frei veränderlich und bestimmen den quantitativen Verlauf des metrischen Feldes vollständig. Im Infinitesimalen gilt der Satz von Pythagoras dementsprechend. Der Beweis dieses Satzes bildet den Hauptinhalt des vorliegenden Werkes und wird mit Heranziehung der Lie'schen Gruppentheorie geführt.

RUDOLF ORTVAY.

Wissenschaftliche Vorträge, gehalten auf dem fünften Kongress der skandinavischen Mathematiker in Helsingfors vom 4. bis 7. Juli 1922, 315 S., Helsingfors, Akad. Buchhandlung, 1923.

Die Mathematiker des Nordens, die sich von Zeit zu Zeit zu behaglichen, freundschaftlichen Kongressen versammeln, berichten nun über ihren 5. Kongress in einem äusserst inhaltsreichen Bande. Der Band enthält Arbeiten von R. Birkeland, H. Bohr (Bericht über diophantische Approximationen und Anwendungen auf Dirichlet'sche Reihen und die Zetafunktion), Brun, Carleman, Cramér, Ekman, Fredholm. Holmgren, Iversen, Juel (Studie über v. Staudt's Geometrie der Lage), Kramers (Bericht über Atombau), Lindeberg, Malmquist (B. ü. Differentialgleichungen mit festen kritischen Punkten), Mellin, Mittag-Leffler, Myrberg, Nagel, F. u. R. Nevanlinna, Oystein, Skolem, Steffensen, Störmgren (B. ü. periodische Bewegungen beim 3 Körper-Problem), Störmer (B. ü. Nordlichterscheinungen und verwandte Probleme), Sundman, Thalberg, Wiman.

F. R.