Über die Bedeutung der Jensenschen Formel für einige Fragen der komplexen Funktionentheorie.

Von ALEXANDER OSTROWSKI in Hamburg.

(Aus einem Briefe an Herrn F. Riesz.)

Ihrem Wunsche gern entsprechend, lege ich im Folgenden den Gedankengang der an die *Jensen*sche Formel anknüpfenden Untersuchung dar, die ich in meinem Vortrag auf der diesjährigen Naturforscherversammlung in Leipzig, sowie in unseren anschliessenden Unterhaltungen gestreift habe. Es handelt sich bei dieser Untersuchung erstens darum, die zentrale Stellung, die der *Jensen*schen Integralformel als analytischem Hilfsmittel bei Untersuchung des Verhaltens analytischer Funktionen am Rande des Existenzbereiches zukommt, klarzulegen; zweitens darum, die Voraussetzungen, unter denen die betreffenden Ergebnisse bisher hergeleitet wurden, in dem durch den Gebrauch der *Jensen*schen Formel nahegelegten Sinne zu erweitern: Fast alle diese Ergebnisse gelten bereits unter der Annahme, dass für die betrachtete Funktion $f(z)$ die Integrale $\int_0^{2\pi} |\log|f(\varrho e^{i\vartheta})|| \, d\vartheta$ für $\varrho < 1$ gleichmässig beschränkt sind, einiges gilt sogar, wenn die Integrale $\int_0^{2\pi} \log|f(\varrho e^{i\vartheta})| \, d\vartheta$ beschränkt bleiben. (Diese erweiterte Fassung der Voraussetzungen habe ich Ihnen bereits in Leipzig für einige dieser Ergebnisse mitgeteilt.)

Es sei $f(z)$ für $|z| < 1$ regulär und $f(o) \neq o$ (diese letzte Annahme ist für die im folgenden herzuleitenden Ergebnisse durchaus unwesentlich, vereinfacht aber die Formeln). Es gebe eine Zahl G, für die die Integrale

$$I_\rho(f) = \frac{1}{2\pi}\int_o^{2\pi} \log|f(\varrho e^{i\vartheta})| \, d\vartheta < G \qquad o < \varrho < 1$$

sind. Aus der *Jensen*schen Formel $(o < \varrho < 1)$

$$(1) \quad \log|f(o)| + \log \prod_{|z_\kappa| < \rho} \left|\frac{\varrho}{|z_\kappa|}\right| = \frac{1}{2\pi}\int_o^{2\pi} \log|f(\varrho e^{i\vartheta})| \, d\vartheta = I_\rho,$$

wo z_κ alle Nullstellen von f für $|z| < \varrho$ durchlaufen, folgt

$$\frac{1}{\prod\limits_{|z_\kappa|<\rho} |z_\kappa|} \leq \frac{e^{I_\rho}}{\varrho^n\,|f(o)|},$$

unter n die Anzahl der Nullstellen von f für $|z| < \varrho$ verstanden. Und dies gilt bekanntlich auch dann, wenn das Produkt linker Hand über n *beliebige* Nullstellen von $f(z)$ erstreckt wird. Daraus folgt aber leicht die Konvergenz des Produktes $\Pi |z_\kappa|$ für eine Funktion $f \not\equiv o$ mit beschränkten I_ρ.[1]) Für beschränkte f hat dies Hr. *Blaschke* bewiesen, für den Fall beschränkter $\int_o^{2\pi} |f(\varrho e^{i\vartheta})|^\delta d\vartheta$ $(\delta > o)$ haben Sie den Beweis geführt.[2])

Nunmehr bilde ich das nach Hrn. *Blaschke* für $|z| \leq \varrho < 1$ gleichmässig konvergierende Produkt

$$B(z) = \prod_1^\infty \left\{ |z_\kappa| \frac{1 - \dfrac{z}{z_\kappa}}{1 - z\,\overline{z_\kappa}} \right\}, \qquad B(o) = \Pi(|z_\kappa|).$$

Wie Sie bewiesen haben, haben die Randwerte von $B(z)$ fast überall den absoluten Betrag 1. Man kann den Beweis übrigens auch mit Hilfe der *Jensen*schen Formel führen, wobei er in einem Punkte einfacher wird.

Bildet man nun den Quotienten

$$Q(z) = \frac{f(z)}{B(z)},$$

so ist $Q(z)$ offenbar für $|z| < 1$ regulär und nullstellenfrei, und die Punktmengen auf der Peripherie des Einheitskreises, in denen $f(z)$ und $Q(z)$ Randwerte besitzen, stimmen bis auf Nullmengen überein. Auch die Randwerte selbst stimmen, bis auf eine Null-

---

[1]) Daraus folgt insbesondere, dass wenn die z_κ nach den wachsenden absoluten Beträgen geordnet sind, $1 - |z_\kappa| = o\left(\frac{1}{\kappa}\right)$ ist. Will man auch im Falle nicht beschränkter I_ρ Aufschluss über die Stärke der Konvergenz der $|z_\kappa|$ gegen 1 erhalten, so wird man $\frac{e^{I_\rho}}{\rho^n}$ bei gegebenem n zu Minimum zu machen suchen, nach demselben Verfahren, das Hr. E. *Lindelöf* in seinen Untersuchungen über ganze transzendente Funktionen angewandt hat.

[2]) In Ihren Briefen an Hrn. G. *Szegő*. Ich bin heute in der Lage, eine mir dank der Liebenswürdigkeit von Hrn. *Szegő* zur Verfügung gestellte deutsche Übersetzung dieser Briefe zu benutzen, die am 17. XI. 22 in meine Hände gelangte.

menge, in ihren absoluten Beträgen überein. Ferner erfüllt auch $Q(z)$ die Bedingung der Beschränktheit der $I_\rho(Q)$. Man sieht auch leicht ein, dass wenn für $f(z)$ die Integrale $I_\rho(f) = \frac{1}{2\pi}\int_o^{2\pi} |\log|f(\varrho e^{i\vartheta})||\, d\vartheta$ für $o < \varrho < 1$ gleichmässig beschränkt sind, dasselbe auch für $Q(z)$ der Fall ist. (Man kann auch zeigen, dass wenn $f(z)$ beschränkt ist, dasselbe auch für $Q(z)$ gilt).[3])

Nunmehr mache ich die weitere Voraussetzung, dass für $f(z)$ (und daher auch für $Q(z)$) die Integrale

$$\bar{I}_\rho(f) = \frac{1}{2\pi}\int_o^{2\pi} |\log|f(\varrho e^{i\vartheta})||\, d\vartheta$$

gleichmässig für $o < \varrho < 1$ beschränkt sind. — Diese Voraussetzung ist, wie man leicht sieht, mit der Annahme vollständig äquivalent, dass die Integrale

$$I_\rho^*(f) = \frac{1}{2\pi}\int \log|f(\varrho e^{i\vartheta})|\, d\vartheta$$

über diejenigen ϑ erstreckt, für die der Integrand positiv ist, für $o < \varrho < 1$ gleichmässig beschränkt sind. — Setzen wir nun $R(z) = \Re \log Q(z)$, so folgt aus unserer Annahme die gleichmässige Beschränktheit der Integrale $\frac{1}{2\pi}\int_o^{2\pi} |R(\varrho e^{i\vartheta})|\, d\vartheta$ für $o < \varrho < 1$. Es sei etwa E ihre gemeinsame Schranke. Ist

$$R(\varrho e^{i\vartheta}) = a_o + (a_1 \cos\vartheta + b_1 \sin\vartheta)\varrho + \dots + (a_n \cos n\vartheta + b_n \sin n\vartheta)\varrho^n + \dots,$$

so sieht man leicht, dass alle a_i, b_i absolut $\leqq E$ sind. Da aber daraus folgt, dass

$$\varphi(\vartheta) = (a_1 \sin\vartheta - b_1\cos\vartheta) + \dots + \frac{1}{n}(a_n \sin n\vartheta - b_n \cos n\vartheta) + \dots$$

fast überall konvergiert, ergibt sich nach dem *Abel*schen Stetigkeitssatz, dass

$$\Theta(\varrho, \vartheta) = (a_1 \sin\vartheta - b_1\cos\vartheta)\varrho + \dots + \frac{1}{n}(a_n \sin n\vartheta - b_n\cos n\vartheta)\varrho^n + \dots$$

für $\varrho \to 1$ fast überall einen Grenzwert besitzt.

---

[3]) Damit ist die von Ihnen für den Fall beschränkter $\int |f(\rho e^{i\vartheta})|^\delta\, d\vartheta$ hergeleitete Zerlegung auf den Fall beschränkter I_ρ verallgemeinert — eine Frage, die ich in einer Diskussionsbemerkung zu Ihrem Vortrag in Leipzig berührt habe.

Nun ist aber $\frac{\partial \Theta}{\partial \vartheta} = R(\varrho e^{i\vartheta})$. Daher ist Θ auf jedem Kreise $|z| = \varrho < 1$ von beschränkter Schwankung ($\leq E$) und folglich auch beschränkt ($\leq E$), da Θ als eine Potentialfunktion auf jedem Kreise $|z| = \varrho < 1$ nach dem *Gauss*schen Mittelwertsatz Nullstellen hat. Daraus folgt, dass auch $\varphi(\vartheta)$ zunächst in den Konvergenzpunkten und dann nach geeigneter Festsetzung der Werte in den Divergenzpunkten im ganzen Intervall $0 \ldots 2\pi$ beschränkt und von beschränkter Schwankung ist. Daher existiert $\varphi'(\vartheta)$ nach *Lebesgue* fast überall und ist integrabel, und $\frac{\partial \Theta}{\partial \vartheta} = R(\varrho e^{i\vartheta})$ konvergiert nach *Fatou* für $\varrho \to 1$ gegen $\varphi'(\vartheta)$ überall, wo $\varphi'(\vartheta)$ existiert. Damit haben wir bewiesen, *dass* $|Q(z)|$, daher auch $|f(z)|$ *fast in jedem Punkt der Kreisperipherie bei radialer Annäherung einen Grenzwert* $\psi(\vartheta)$ *besitzt, und dass* $\log \psi(\vartheta)$ *integrabel ist.* Und zwar ist dies gezeigt unter der Annahme der Beschränktheit der Integrale $I_\varrho^* = \int \log |f(\varrho e^{i\vartheta})|\, d\vartheta$ nur über ϑ erstreckt, denen positiver Integrand entspricht. Hierin ist, wie Sie sehen, der *Szegő*sche Satz mitenthalten, und ebenso Ihre Verschärfungen dieses Satzes.

Endlich folgt hieraus noch, dass auch die Randwerte von $f(z)$ selbst fast überall existieren, wenn man das obige Resultat auf $f(z) + \frac{1}{2}$, $f(z) + \frac{i}{2}$ und $f(z)$ anwendet und von der Identität Gebrauch macht:

$$\left|f(z) + \frac{1}{2}\right|^2 + i\left|f(z) + \frac{i}{2}\right|^2 - (1+i)\,|f(z)|^2 - \frac{1+i}{4} = f(z).$$

Es ist noch von Interesse, auf die Bedeutung der Bedingung der Beschränktheit der Mittelwerte $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |R(\varrho e^{i\vartheta})|\, d\vartheta$ $0 < \varrho < 1$ einzugehen, unter der wir die Potentialfunktion $R(\varrho e^{i\vartheta})$ untersucht haben. *Diese Bedingung ist* nämlich, wie man zeigen kann, *notwendig und hinreichend dafür, dass sich das Potential R mittelst des Poissonschen Integrals darstellen lässt,* wenn man das *Poisson*sche Integral insofern verallgemeinert, als man es als *Stieltjes*sches Integral schreibt:

$$\int_0^{2\pi} \frac{(1-\varrho^2)\, d\varphi(\alpha)}{1 + 2\varrho\cos(\vartheta - \alpha) + \varrho^2},$$

wo $\varphi(\alpha)$ eine beliebige Funktion von beschränkter Schwankung ist. Dass hierin das *Poisson*sche Integral im von *Fatou* betrachteten Umfang enthalten ist, ist leicht einzusehen. Übrigens deutet auch schon die *Fatou*sche Formulierung der Bedingungen für die Existenz des Randwertes auf die Zweckmässigkeit dieser Verallgemeinerung hin, die ja auch natürlich nicht neu ist, sie tritt ja z. B. in Ihren und Herrn *Herglotz'* Untersuchungen gelegentlich auf und wird systematisch in *Plemelj*'s schönen „Potentialtheoretischen Untersuchungen" benutzt.

—

Ich kehre nun wieder zur *Jensen*schen Formel zurück und übe auf z die lineare Substitution aus

$$z = \frac{\varrho(\alpha - Z)}{\varrho^2 - Z\bar{\alpha}}, \quad \alpha = re^{i\varphi}, \quad r < \varrho$$

durch die der Punkt $z = \alpha$ in den Nullpunkt übergeführt wird. So erhalten wir, wenn wir noch den nicht negativen auf die Nullstellen bezüglichen Term weglassen, die Ungleichung

$$(2) \quad \log|f(re^{i\varphi})| \leqq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(\varrho e^{i\vartheta})| \frac{(\varrho^2 - r^2)\, d\vartheta}{r^2 + 2r\varrho\cos(\vartheta - \varphi) + \varrho^2},$$

die sich natürlich für nullstellenfreie $f(z)$ auf die *Poisson*sche Formel für $\log|f(z)|$ reduziert.[4]) Aus der obigen Formel folgt sofort die folgende Ungleichung

$$(3) \quad \log|f(re^{i\varphi})| \leqq \frac{1}{2\pi}\left\{\frac{\varrho + r}{\varrho - r}\int_{M+} \log|f(\varrho e^{i\vartheta})|\, d\vartheta + \right.$$
$$\left. + \frac{\varrho - r}{\varrho + r}\int_{M-} \log|f(\varrho e^{i\vartheta})|\, d\vartheta\right\},$$

wo M^+ die Menge der ϑ-Werte aus dem Intervall $0 \ldots 2\pi$ ist, für die $|f(\varrho e^{i\vartheta})| > 1$, M^- die komplementäre Menge ist.

Es sei nun $f_n(z)$ eine Folge von für $|z| < 1$ regulären Funktionen, für die die Integrale $I_\varrho^*(f_n) = \int_0^{2\pi} \log|f_n(\varrho e^{i\vartheta})|\, d\vartheta$ über diejenigen ϑ erstreckt, für die der entsprechende Integrand > 0 ist, sämtlich unterhalb einer festen Schranke liegen.

---

[4]) Man kann auch die Ungleichung (2) direkt mit Hilfe des *Poisson*schen Integrals beweisen, durch einen ähnlichen Kunstgriff, wie der von Herrn *Landau* zur Herleitung der *Jensen*schen Formel aus dem *Cauchy*schen Satze angewandte. Übrigens gilt die Formel (2) auch, wenn $f(re^{i\varphi}) = 0$ ist, wenn man dann $\log|f(re^{i\varphi})| = -\infty$ setzt.

Besitzen die $f_n(z)$ auf einer Punktmenge M der Peripherie des Einheitskreises von positivem Lebesgueschem Mass Randwerte, deren Folge mit ins Unendliche wachsendem n konvergiert, so konvergiert die Funktionenfolge $f_n(z)$ für jedes $|z| < 1$ und in jedem Kreise $|z| \leqq r < 1$ gleichmässig. Ich habe diesen Satz für den Fall gleichmässig beschränkter $f_n(z)$ vor einigen Monaten in einem Brief an Herrn *Bieberbach* aufgestellt.[5]) Auch sein Beweis beruht auf der *Jensen*schen Formel in der oben transformierten Gestalt.

Ich will zunächst die Formulierung des obigen Konvergenzsatzes etwas abändern. Zu dem Zwecke bemerken wir, dass mit $f_m(z)$ und $f_{m_1}(z)$ auch $f_m(z) - f_{m_1}(z)$ die Eigenschaft hat, dass $I^*_\varrho(f_m - f_{m_1})$ gleichmässig in ϱ, m, m_1 beschränkt ist, und daher $f_m(z) - f_{m_1}(z)$ fast überall Randwerte besitzt. Wir wollen nun annehmen, dass jedem Paar ganzer positiver m, p eine messbare Punktmenge $M_{m,p}$ auf der Peripherie des Einheitskreises zugeordnet ist, derart, dass die Masse der $M_{m,p}$ sämtlich grösser als eine feste positive Zahl μ sind, und dass die Maxima $N_{m,p}$ der absoluten Beträge der $f_{m+p}(z) - f_m(z)$ auf der entsprechenden Punktmenge $M_{m,p}$ in den Punkten, in denen die Randwerte von $f_{m+p}(z) - f_m(z)$ existieren, mit ins Unendliche wachsendem m gleichmässig in p gegen 0 konvergieren. Die hierin in einem gewissen Masse enthaltene Annahme der *Gleichmässigkeit* der Konvergenz der Randwerte ist nur eine scheinbare Abschwächung gegenüber der ersten Formulierung, wie aus dem *Egoroff*schen Satze sofort folgt.

Zum Beweise bezeichne ich mit $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_\kappa \ldots$ eine Folge positiver wachsender gegen 1 konvergierender Zahlen. Dann kann man nach dem *Egoroff*schen Satze in jeder Menge $M_{m,p}$ eine messbare Teilmenge $M'_{m,p}$ vom Masse μ finden, derart, dass wenn r über $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_\kappa, \ldots$ gegen 1 strebt, $|f_{m+p}(re^{i\vartheta}) - f_m(re^{i\vartheta})|$ *gleichmässig* in ϑ aus $M'_{m,p}$ gegen einen Randwert strebt, der natürlich nicht grösser als $N_{m,p}$ ist. Dann folgt aus (3) für $r < \varrho_\kappa$

$$\log|f_{m+p}(re^{i\varphi}) - f_m(re^{i\varphi})| \leqq \frac{1}{2\pi}\left\{\frac{\varrho_\kappa + r}{\varrho_\kappa - r} I^*_\varrho(f_{m+p} - f_m) + \right.$$
$$\left. + \frac{\varrho_\kappa - r}{\varrho_\kappa + r}\mu \log(N_{m,p} + \varepsilon)\right\},$$

wenn in den Punkten des Kreises $|z| = \varrho_\kappa$, die der Punktmenge

---

[5]) Jahresbericht d. D. M. V., Bd. 31, (1922), pp. 82—85.

$M'_{m,p}$ entsprechen, $|f_{m+p}(z) - f_m(z) < N_{m,p} + \varepsilon = 1$ ist, was für hinreichend grosse $\varkappa$, m zutrifft. Bedenkt man nun, dass man für $\varrho_\kappa \to 1$ ε gegen o konvergieren lassen kann, so folgt schliesslich, wenn mit $\overline{M}$ die obere Grenze aller $I^*_\rho(f_{m+p} - f_m)$ bezeichnet wird:

$$\log|f_{m+p}(re^{i\varphi}) - f_m(re^{i\varphi})| \leqq \frac{1}{2\pi}\left\{\frac{1+r}{1-r}\overline{M} + \frac{1-r}{1+r}\mu \log N_{m,p}\right\},$$

woraus die Behauptung des ausgesprochenen Satzes sofort folgt[6]) Durch die vorhergehenden Betrachtungen habe ich z. B. zugleich bewiesen: 1. Ist für eine für $|z| < 1$ reguläre Funktion $I^*_\rho(f) < 1$ und auf einer Punktmenge der Peripherie des Einheitskreises vom Masse μ $|f| \leq M < 1$, so gibt es zwei nur von $r < 1$ und μ abhängige positive Konstanten c, γ derart, dass

$$|f(re^{i\varphi})| < c\,M^\gamma$$

ist. 2. Ist für $|z| < 1$ $f(z)$ regulär und $|f(z)| \leq 1$, ist ferner auf einer Punktmenge der Peripherie des Einheitskreises vom Masse μ $|f| \leq M < 1$, so gibt es ein nur von $r < 1$ und μ abhängiges $\gamma > o$ derart, dass für $o \leqq \varphi \leqq 2\pi$

$$|f(re^{i\varphi})| < M^\gamma \tag{4}$$

ist. Daraus folgt aber weiter durch eine Reihe geläufiger Schlüsse: *Ist $f(z)$ in einem von einer Jordanschen Kurve begrenzten Gebiete G regulär und absolut $\leqq M$, ist ferner $|f(z)| < M_1$ auf einem Jordanschen Kurvenbogen C, der in G oder auf dem Rande von G verläuft, so ist in jedem ganz im Inneren von G liegenden abgeschlossenen Bereich B*

$$|f(z)| \leqq M^\gamma M_1^{\gamma_1}, \qquad \gamma + \gamma_1 = 1,$$

wo γ, γ_1 zwei positive Konstanten sind, die nur von G, B, C abhängen. Dabei kann man C auch durch eine auf einer rektifizierbaren Kurve liegende Punktmenge von positivem Mass ersetzen.

---

[6]) In diesem Satze ist der folgende enthalten: *Ist $f(z)$ für $|z| < 1$ regulär, und sind $I^*_\rho(f)$ für $0 < \rho < 1$ beschränkt, ist ferner der Randwert von f auf einer Punktmenge von $|z| = 1$ von positivem Mass gleich 0, so verschwindet f identisch.* Man braucht nur auf die Funktionenfolge $f(z)$, 0, $f(z)$, 0, ... den soeben bewiesenen Satz anzuwenden. Unter der (engeren) Annahme der Beschränktheit der $\int_0^{2\pi} |f e^{i\vartheta})|^\delta d\vartheta$ haben Sie ja diesen Satz in Ihren oben erwähnten Briefen an Hrn *Szegő* bewiesen.

Dieses Ergebniss lässt, wie ich in meinem Leipziger Vortrag angedeutet habe, eine Reihe wichtiger Anwendungen zu.

Endlich bemerke ich noch, dass eine feinere Diskussion, die an die *Fatou*schen Sätze über das *Poisson*sche Integral und die obige Ungleichung (2) anknüpft, auch über das Aufhören der Gleichmässigkeit der Konvergenz im obigen Konvergenzsatze, sowie über die Änderung der Konstante γ in der Abschätzung (4) bei der Annäherung an die Peripherie des Einheitskreises Aufschluss gibt. Ich werde hierauf, sowie auf einiges andere in einer ausführlichen Veröffentlichung zurückkommen, in der ich auch die Beweise, die ich Ihnen nur flüchtig skizziert habe, mit allen notwendigen Details darstellen werde.

Hamburg, Math. Sem. der Universität, Dezember 1922.