NÉHÁNY CSOPORTELMÉLETI FERDESZORZAT TIPUS VIZSGÁLATA

Megyesi László IV. mat-mat. szak.

BOLYAI INTÉZET

A ferdeszorzatok módszere egyike az algebra legfontosabb eljárásainak. Az alapgondolat lényegében Hamiltontól származik. A struktúrák ferdeszorzatának definiciójára nézve lásd Rédei [1] 101 102.

Rédei László professzor a [2] dolgozatában egy igen általános ferdeszorzatot definiál, s egyben ennek alkalmazásait adja a csoportelméletben.

Legyen adva két csoport G és Γ az $e, a, b, \dots$ illetve az $\varepsilon, \alpha, \beta, \dots$ elemekkel (e illetve ε egységelemek és $G \neq e$, $\Gamma \neq \varepsilon$) Ezek Rédei féle ferdeszorzata a

(1.) $\quad G\,1\circ\Gamma \;:\; (a,\alpha)(b,\beta) = (a\, b^{\alpha} \beta^{\alpha},\ a^{b} \alpha^{b} \beta)$

szorzásszabállyal van definiálva, ahol $b^{\alpha}, \beta^{\alpha} \in G$, $a^{b}, \alpha^{b} \in \Gamma$ és ezek a megfelelő változóktól függő kétváltozós függvények.*

Ennek a dolgozatnak a célja a $G\,1\circ\Gamma$-hoz "hasonló" ferdeszorzat-tipusok definiálása, és ezeknek vizsgálata. Ezekhez a ferdeszorzat tipusokhoz a következőképpen juthatunk.

Megtartva az (1) szorzásszabályban szereplő $a, b^{\alpha}, \beta^{\alpha}$ illetve a^{b}, α^{b}, β függvényeket, ezeket permutálva, vigyázva arra, hogy szorzásszabály szimmetriája megmaradjon, kapjuk a

(2.) $\quad G\,2\circ\Gamma \;:\; (a,\alpha)(b,\beta) = (\beta^{\alpha} b^{\alpha} a,\ \beta\, \alpha^{b} a^{b})$;

(3.) $\quad G\,3\circ\Gamma \;:\; (a,\alpha)(b,\beta) = (a\, \beta^{\alpha} b^{\alpha},\ \alpha^{b} a^{b} \beta)$;

(4.) $\quad G\,4\circ\Gamma \;:\; (a,\alpha)(b,\beta) = (b^{\alpha} \beta^{\alpha} a,\ \beta\, a^{b} \alpha^{b})$;

(5.) $\quad G\,5\circ\Gamma \;:\; (a,\alpha)(b,\beta) = (\beta^{\alpha} a\, b^{\alpha},\ \alpha^{b} \beta\, a^{b})$;

(6) $\quad G\,6\circ\Gamma \;:\; (a,\alpha)(b,\beta) = (b^{\alpha} a\, \beta^{\alpha},\ a^{b} \beta\, \alpha^{b})$

szorzásszabályokat. Megmutatjuk, hogy adott G, Γ esetén bármely $G\,10\,\Gamma$ csoport izomorf egy $G\,20\,\Gamma$ csoporttal, és forditva. Ugyanez érvényes a $G\,30\,\Gamma$ és $G\,40\,\Gamma$ -ra, illetve $G\,50\,\Gamma$ és $G\,60\,\Gamma$ -ra vonatkozóan is.

* A 2. dolgozatban $G\,10\,\Gamma$ helyett $G\,0\,\Gamma$ jelölés szerepel.

<u>A $G\,30\,\Gamma$ csoport.</u>

Mindenekelőtt megjegyezzük, hogy ha a G és Γ csoportok Abel félék, akkor (1) egybeesik (2), (3), (4), (5), (6)-tal és akkor külön vizsgálatra nincs szükség.

Elsőként a $G\,30\,\Gamma$ csoportot tekintjük. Az alábbi tétel bizonyitásának gondolatmenete egyezik a [2] 3 -ban található 1. tétel bizonyitásával. Ehhez felhasználjuk a következő állitást :

<u>Ahhoz, hogy az összes $G\,30\,\Gamma$ csoportot megkapjuk, elegendő a definicióban a</u>

$$(7.)\qquad G\,30\,\Gamma\ :\ (a,\alpha)(b,\beta)=(a\beta^{\alpha}b^{\alpha},\ \alpha^{b}a^{b}\beta)\quad (e^{a}=\varepsilon,\ \varepsilon^{a}=e)$$

<u>esetre szoritkozni, és csak az (e,ε) egységelemmel rendelkező csoportokat megadni.</u>

Bizonyitás céljából vegyük figyelembe, hogy β^{α}, b^{α}, α^{b}, a^{b} függvények nincsenek egyértelmüen meghatározva, helyettük $\beta^{\alpha}\alpha'$, $\alpha'^{-1}b^{\alpha}$, $\alpha^{b}b'^{-1}$, $b'a^{b}$ -t helyettesitve, ahol $\alpha'(\in G)$, $b'(\in\Gamma)$ egyváltozós függvények, a szorzásszabályban nincs változás. Ha $\alpha'^{-1}=\varepsilon^{\alpha}$ és $b'^{-1}=e^{a}$ akkor $e^{a}=\varepsilon$, $\varepsilon^{\alpha}=e$. A függvények most már egyértelmüen meghatározottak.

A második rész bizonyitásához tegyük fel, hogy adott egy $S=G\,30\,\Gamma$ csoport (r,ϱ) egységelemmel. Ha bevezetjük a

$$(8.)\qquad \Pi\ :\ (a,\alpha)\longrightarrow(r^{-1}a\ ,\ \alpha\varrho^{-1})$$

permutációt, akkor Rédei [4] 161-162, vagy Rédei [2] 2 § -a szerint az eredetivel izomorf S' csoporthoz jutunk, ha a következő « uj » szorzást definiáljuk :

$$(9.)\qquad (a,\alpha)\times(b,\beta)=\Pi(\Pi^{-1}(a,\alpha),\Pi^{-1}(b,\beta))$$

Mivel $\Pi^{-1}:(a,\alpha)\rightarrow(ra,\alpha\varrho)$ kapjuk :

$$(10.)\qquad (a,\alpha)\times(b,\beta)=(a\,(\beta\varrho)^{\alpha\varrho}(rb)^{\alpha\varrho},\ (\alpha\varrho)^{rb}(ra)^{rb}\beta),$$

amely ismét a (3)-as alaku szorzásszabály, csupán a

(11.) $(\beta\varrho)^{\alpha\varrho}$, $(\gamma b)^{\alpha\varrho}$, $(\alpha\varrho)^{\gamma b}$, $(\gamma a)^{\gamma b}$

függvények vannak β^{α}, b^{α}, α^{b}, a^{b} helyén.

Tehát S'-nek az egységeleme (e, ε).

I. tétel. Ahhoz, hogy a (3) -mal definiált G_{3o}^{*} szorzat csoport legyen az (e, ε) egységelemmel, szükséges és elégséges, hogy a β^{α}, b^{α}, α^{b}, a^{b} függvényekre a következő feltételek teljesüljenek.

(12) $a^{\varepsilon} = a \quad e^{\alpha} = \varepsilon^{\alpha} = \alpha^{\varepsilon} = e \qquad \alpha^{e} = \alpha \quad \varepsilon^{a} = e^{a} = a^{e} = \varepsilon$

(13) $c^{a^{b}} = c \qquad \gamma^{\alpha^{\beta}} = \gamma$

(14) $\gamma^{a^{b}} = e \qquad c^{\alpha^{\beta}} = \varepsilon$

(15) $b^{\alpha}\, c^{\alpha^{b}} = (b^{c})^{\alpha}\,(bc)^{\alpha} \qquad \gamma^{\alpha^{\beta}}\,\beta^{a} = (\gamma\beta)^{a}(\beta^{\gamma})^{a}$

(16) $\beta^{\alpha}\, c^{\alpha\beta} = (\beta^{c})^{\alpha}\,(c^{\beta})^{\alpha} \qquad \gamma^{ba}\, b^{a} = (\gamma^{b})^{a}\,(b^{\gamma})^{a}$

(17) $\beta^{\alpha}\,\gamma^{\alpha\beta} = (\beta\gamma)^{\alpha}(\gamma^{\beta})^{\alpha} \qquad c^{ba}\, b^{a} = (c^{b})^{a}\,(c\, b)^{a}$

(18) $(b^{c}\,\gamma)^{\alpha} = \gamma^{\alpha}\,(b^{c})^{\alpha} \qquad (c\,\beta^{\gamma})^{a} = (\beta^{\gamma})^{a}\, c^{a}$

(19) $\gamma^{\alpha^{c^{\beta}}}\,\beta^{c} = \gamma^{(\alpha\beta)^{c}} \qquad c^{b^{\gamma}}\, a^{\gamma^{b}} = c^{(ba)^{\gamma}}$

(20) $b^{\alpha}\,\gamma^{\alpha^{b}} = \gamma^{\alpha}\, b^{\alpha} \qquad c^{a^{\beta}}\,\beta^{a} = \beta^{a}\, c^{a}$

Megjegyzés : Ezekből még a következő egyszerűbb feltételek következnek :

(21.) $c^{a^{b}\beta} = c^{\beta} \qquad \gamma^{b\alpha^{\beta}} = \gamma^{b}$

(22.) $\gamma^{a^{b}\beta} = \gamma^{\beta} \qquad c^{b\alpha^{\beta}} = c^{b}$

mégpedig (21_1) és (22_1) az (16_1) illetve (17_1) -ből $\alpha = a^{b}$ helyettesítésével, és (13_1), (14_1) alkalmazásával. Hasonlóan (21_2), (22_2) (16_2) illetve (17_2) -ből $a = \alpha^{\beta}$ -val (13_2), (14_2) segítségével következik.

Látható, hogy a fenti feltételek páronként duálisak, ami azt jelenti, hogy az egyik oldalon álló egyenletből a másik oldalon lévőt a görög és a latin betük felcserélésével és a tényezők sorrendjének a felcserélésével kapjuk. Ez a dualitás a (3) szorzásszabály szimmetriájából következik.

Bizonyítás. A bizonyítás során alkalmazzuk a dualitást. Ahhoz, hogy (e, ε) egységelem legyen

(23.) $$(a,\alpha)(e,\varepsilon) = (a\,\varepsilon^{\alpha} e^{\alpha},\ \alpha^{e} a^{e}) = (a,\alpha)$$

(24.) $$(e,\varepsilon)(a,\alpha) = (\alpha^{\varepsilon} a^{\varepsilon},\ \varepsilon^{a} e^{a}\alpha) = (a,\alpha)$$

alapján szükséges és elegendő, hogy

(25.) $$\varepsilon^{\alpha} e^{\alpha} = e \qquad \alpha^{\varepsilon} a^{\varepsilon} = a$$

és a duális egyenletek teljesüljenek. Látható, hogy (e,ε) akkor és csak akkor egységelem, ha (12) teljesül, figyelembevéve azt, hogy $\varepsilon^{\alpha} = e$, $e^{a} = \varepsilon$ mindig fennáll. A következőkben (12)-t külön megjegyzés nélkül fogjuk alkalmazni.

Az asszociativitás feltétele :

(26.) $$(a\beta^{\alpha} b^{\alpha},\ \alpha^{b} a^{b}\beta)(c,\gamma) = (a,\alpha)(b\gamma^{\beta} c^{\beta},\ \beta^{c} b^{c}\gamma)$$

két egyenletre bomlik, amelyek közül az egyik a következő (az a faktor törlésével)

(27.) $$\beta^{\alpha} b^{\alpha} \gamma^{\alpha^{b} a^{b} \beta}\, c^{\alpha^{b} a^{b} \beta} = (\beta^{c} b^{c} \gamma)^{\alpha} (b\gamma^{\beta} c^{\beta})^{\alpha}$$

a másik ennek duálisa.

A bizonyítás olymódon történik, hogy megmutatjuk (13) – (22) ekvivalens (27)-tel.

Ha (27)-ben a=e -t helyettesítünk, mivel a jobboldal ezáltal nem változott, a kapott egyenletekből (27)-tel való összehasonlítás és $\beta^{\alpha} b^{\alpha}$ -val való egyszerüsités után a

(28.) $$\gamma^{\alpha^{b} a^{b} \beta}\, c^{\alpha^{b} a^{b} \beta} = \gamma^{\alpha^{b} \beta}\, c^{\alpha^{b} \beta}$$

egyenlethez jutunk, amelyből $\gamma = \varepsilon$, $\alpha = \varepsilon$ esetén (21_1) $c = e$, $\alpha = \varepsilon$ esetén (22) adódik. (21_1) illetve(22_1) pedig $\beta = \varepsilon$ -ra (13_1) -t illetve (14_1)-t adja.

(27)-ből a = e $\beta = \varepsilon$ c = e esetén éppen(20_1) áll elő. A dualitás miatt (27)-ből következik (13),(14),(20), (21), (22). Fordítva : (21_1) és (20_2) illetve (22_1) és (20_2) felhasználásával kapjuk((21_1) és (22_1)-t b, β helyett b^{α}, $\alpha^{b}\beta$ -ra alkalmazzuk) :

(29.) $$c^{a^{b^{\alpha}} \alpha^{b} \beta} = c^{\alpha^{b} \beta} \qquad c^{a^{b^{\alpha}} \alpha^{b} \beta} = c^{\alpha^{b} a^{b} \beta}$$

(30.) $$\gamma^{a^{b^{\alpha}} \alpha^{b} \beta} = \gamma^{\alpha^{b} \beta} \qquad \gamma^{a^{b^{\alpha}} \alpha^{b} \beta} = \gamma^{\alpha^{b} a^{b} \beta}$$

Ezek felhasználásával (29)-ből

(31.) $$c^{\alpha^{b} a^{b} \beta} = c^{\alpha^{b} \beta}$$

(30)-ból pedig :

$$(32.)\qquad \gamma^{\alpha^{b} a^{b}\beta} = \gamma^{\alpha^{b}\beta}$$

egyenletek állnak elő, amelyek segitségével (27) így alakul :

$$(33.)\qquad \beta^{\alpha} b^{\alpha} \gamma^{\alpha^{b}\beta} c^{\alpha^{b}\beta} = (\beta^{c} b^{c} \gamma)^{\alpha} (b\, \gamma^{\beta} c^{\beta})^{\alpha}$$

Tehát (27) ekvivalens (33), (13), (14),(20),(21),(22)-vel. Most már (27) helyett (33), (13),(14),(20),(21),(22),-t tekintjük. (33)-ból $\beta = \varepsilon$ -ra

$$(34.)\qquad b^{\alpha} \gamma^{\alpha^{b}} c^{\alpha^{b}} = (b^{c} \gamma)^{\alpha} (bc)^{\alpha}$$

áll elő, ahonnan először $\gamma = \varepsilon$ esetén (15_1) adódik, majd (34) baloldalán alkalmazva (20_1)-t és az igy kapott egyenletbe (15_1) alapján végezve helyettesitést $(bc)^{\alpha}$ -val való egyszerüsités után (18_1) következik. Fordítva, ha érvényes (15), (18), (20), akkor (33)-ban először (20_2) t használva c, a helyett b_1c-re a jobboldalon, majd (18_1)-t használva c, γ helyett c^{β}, $\beta^{c}\gamma$ -ra alkalmazva szintén (33) jobboldalán, akkor

$$(35.)\qquad \beta^{\alpha} b^{\alpha} \gamma^{\alpha^{b}\beta} c^{\alpha^{b}\beta} = (\beta^{c} \gamma)^{\alpha} (b^{c^{\beta}})^{\alpha} (b\, \gamma^{\beta} c^{\beta})^{\alpha}$$

egyenlet jön létre.

Figyelembe véve, hogy (15_1)-t c helyett $\gamma^{\beta} c^{\beta}$ -ra alkalmazva

$$(36.)\qquad b^{\alpha} (\gamma^{\beta} c^{\beta})^{\alpha^{b}} = (b^{\gamma^{\beta} c^{\beta}})^{\alpha} (b\, \gamma^{\beta} c^{\beta})^{\alpha}$$

hoz jutunk, és azt, hogy (20_1) és (21_2) miatt

$$(37.)\qquad b^{\gamma^{\beta} c^{\beta}} = b^{c^{\beta} \gamma^{\beta^{a}}} = b^{c^{\beta}}$$

(35) a következő alakra hozható :

$$(38.)\qquad \beta^{\alpha} b^{\alpha} \gamma^{\alpha^{b}\beta} c^{\alpha^{b}\beta} = (\beta^{c} \gamma)^{\alpha} b^{\alpha} (\gamma^{\beta} c^{\beta})^{\alpha^{b}}$$

Ezen egyenlet mindkét oldalán (20_1) segitségével b^{α} -t kivihetjük a tényezők közül és egyszerüsithetünk vele. Igy előáll:

$$(39.)\qquad \beta^{\alpha^{b}} \gamma^{\alpha^{b}\beta} c^{\alpha^{b}\beta} = (\beta^{c} \gamma)^{\alpha^{b}} (\gamma^{\beta} c^{\beta})^{\alpha^{b}}$$

Ebből az egyenletből b = e-re :

$$(40.)\qquad \beta^{\alpha} \gamma^{\alpha\beta} c^{\alpha\beta} = (\beta^{c} \gamma)^{\alpha} (\gamma^{\beta} c^{\beta})^{\alpha}$$

következik, másrészt (40)-ből is következik (39), mert ha (40) minden α-ra fennáll, akkor fennáll az α^{b} alaku α -kra is.

Ezáltal adódott, hogy (27) ekvivalens (40)(13) (14), (15), (18), (20), (21), (22)-vel. Ezen egyenletek szétbontása következik a továbbiakban.

(40)-ből adódik $\gamma=\varepsilon$ esetén (16_1), $c=e$ esetén pedig (17_1).

(15_1)-t b, c helyett c^β, γ^{β^c} -ra alkalmazva

(41) $$(c^\beta)^\alpha (\gamma^{\beta^c})^{\alpha^{c^\beta}} = \left((c^\beta)^{\gamma^{\varepsilon^c}}\right)^\alpha \left(c^\beta \gamma^{\beta^c}\right)^\alpha$$

egyenlethez vezet, ahol $(c^\beta)^{\gamma^{\beta^c}} = \varepsilon$ (14_2) miatt, és $c^\beta \gamma^{\beta^c} = \gamma_c^{\beta\beta}$ (20_1) miatt, s igy (40) a következőképpen alakitható (a baloldalon még (58_1) -t is használva) :

(42) $$\beta^\alpha c^{\alpha\beta} \gamma^{(\alpha\beta)^c} = (\beta^c \gamma)^\alpha (c^\beta)^\alpha (\gamma^{\beta^c})^{\alpha^{c^\beta}}$$

Ebben az egyenletben (16_1) alapján helyettesitést végezhetünk, majd az igy előálló egyenlet mindkét oldalán (20_1) segitségével $(c^\beta)^\alpha$ -t kivihetjük a tényezők közül, és egyszerüsithetünk vele. Ekkor

(43) $$(\beta^c)^{\alpha^{c^\beta}} \cdot \gamma^{(\alpha\beta)^c} = (\beta^c \gamma)^{\alpha^{c^\beta}} (\gamma^{\beta^c})^{\alpha^{c^\beta}}$$

áll elő. (17)-ből α, β helyett α^{c^β}, β^c esetén

(44) $$(\beta^c)^{\alpha^{c^\beta}} \gamma^{\alpha^{c^\beta}\beta^c} = (\beta^c \gamma)^{\alpha^{c^\beta}} (\gamma^{\beta^c})^{\alpha^{c^\beta}}$$

egyenlet jön létre, amelyet (43)-mal egybevetve éppen (19) adódik.

Ezáltal bebizonyitottuk, hogy (27) (13)-(22) egyenletekkel ekvivalens.

Hátravan az inverz elem létezésének bizonyitása. Könnyen belátható, hogy

(45) $$(a,\varepsilon)(e,\alpha) = (a,\alpha)$$

továbbá az is, hogy (x^{-y}, $x^{-\xi}$ stb. jelöli az x^y, x^ξ stb. inverzét) :

(46) $$(a,\varepsilon)(a^{-1}, a^{-a^{-1}}) = (e,\varepsilon)$$

s ha bebizonyitjuk, hogy

(47) $$(e,\alpha)(\alpha^{-\alpha^{-1}}, \alpha^{-1}) = (e,\varepsilon)$$

akkor

(48) $$(a,\alpha)^{-1} = (\alpha^{-\alpha^{-1}}, \alpha^{-1})(a^{-1}, a^{-a^{-1}})$$

Elegendő (47)-et bizonyitani, illetve a következő egyenletek teljesülését :

(49) $$(\alpha^{-1})^\alpha (\alpha^{-\alpha^{-1}}) = e$$

(50) $$\alpha^{\alpha^{-\alpha^{-1}}} = \alpha$$

Először (50)-et bizonyitjuk.

Legyen $b = \alpha^{-\alpha^{-1}}$, $\beta = \alpha^{-1}$. Mivel

$b = \alpha^{-\beta}$ azaz $b\alpha^\beta = e$

(21_2) felhasználásával :

(51) $\alpha = \alpha^{e} = \alpha^{b\alpha^{\beta}} = \alpha^{b} = \alpha^{\alpha-\alpha^{-1}}$

(49) bizonyitása céljából legyen $b = \alpha - \alpha^{-1}$ $c = \alpha^{\alpha^{-1}}$

(51) miatt $\alpha^{e} = \alpha$

(14_2)-ből $b^{c} = \varepsilon$

s igy (15_1)-t alkalmazva :

(52) $b^{\alpha} c^{\alpha} = \varepsilon$

vagyis

(53) $(\alpha^{-\alpha^{-1}})(\alpha^{\alpha^{-1}}) = e$

Most (17_1) felhasználva $\beta = \alpha^{-1}$, $\gamma = \alpha$ esetén :

(54) $(\alpha^{-1})^{\alpha} = (\alpha^{\alpha^{-1}})^{\alpha}$

tehát (53) szerint :

(55) $(\alpha^{-\alpha^{-1}})^{\alpha} (\alpha^{-1})^{\alpha} = e$

ami azt jelenti, hogy G-ben $(\alpha^{-1})^{\alpha}$ -nak inverze $(\alpha^{-\alpha^{-1}})^{\alpha}$

tehát (49) is teljesül.

Ezzel a tételt bebizonyitottuk.

Megjegyzés : Az (20)-as egyenletek alapján a szorzásszabály igy irható $G_{30}\Gamma$ -ban :

(56) $(a,\alpha)(b,\beta) = (a\, b^{\alpha} \beta^{\alpha^{b}},\ a^{b^{\alpha}} \alpha^{b} \beta)$

Ez nem tekinthető $G_{40}\Gamma$ szorzatnak, mert $\beta^{\alpha^{b}}$ és $a^{b^{\alpha}}$ nem csupán β -tól és α -tól, illetve a-tól és b-től függnek.

A $G_{50}\Gamma$ csoport.

A $G_{50}\Gamma$ ferdeszorzat a $G_{30}\Gamma$ -hoz hasonlóan vizsgálható meg. Kapjuk, hogy a $G_{50}\Gamma$ akkor és csakis akkor csoport, ha

(57) $a\gamma^{\beta} = \gamma^{\beta} a$ $c^{b}\alpha = \alpha c^{b}$

teljesül, vagyis amikor az (5) szorzásszabály (1)-be megy át.

A $G_{20}\Gamma$, $G_{40}\Gamma$, $G_{60}\Gamma$ csoportok.

Ezen ferdeszorzat- tipusok vizsgálata is a $G_{30}\Gamma$ -éhoz hasonlóan mehet. Megállapitható, hogy ahhoz, hogy az összes $G_{20}\Gamma$, ill. $G_{40}\Gamma$, ill. $G_{60}\Gamma$ csoportokat megkapjuk elegendő arra az esetre szoritkozni, amikor (e, ε) az egységelem.

Felirva az asszociativitást kifejező egyenleteket, látható, hogy a $G_{20}\Gamma$ -é a $G_{40}\Gamma$ -éból, a $G_{40}\Gamma$ -é a $G_{30}\Gamma$ -éból a $G_{60}\Gamma$ -é a $G_{50}\Gamma$ -ából ugy áll elő, hogy a tényezők sorrendjét felcseréljük.

Ezért ha ugyanazokat a lépéseket elvégezzük $G_{20}\Gamma$ -val mint $G_{10}\Gamma$ -val, $G_{40}\Gamma$ -val, mint $G_{30}\Gamma$ -val, $G_{60}\Gamma$ -val, mint $G_{50}\Gamma$-val, a rájuk vonatkozó tétel bizonyitása során, a különbség csupán az lesz, hogy minden egyenletben a tényezők sorrendje forditott lesz, igy a feltételeket kifejező egyenleteknél is. A forditott sorrendü tényezőkkel rendelkező egyenletek felhasználása az inverz elem létezésének bizonyitásánál nem okoz semmi zavart.

Az I. tétel megfelelője könnyen megadható a $G_{20}\Gamma$, $G_{40}\Gamma$, $G_{60}\Gamma$ -ra vonatkozóan is. Az eddigiek szoros kapcsolatot mutatnak a $G_{20}\Gamma$ és a $G_{10}\Gamma$ $G_{40}\Gamma$ és a $G_{30}\Gamma$, a $G_{60}\Gamma$ és a $G_{50}\Gamma$ közt. Ezt még inkább mutatja a következő :

2. tétel. Adott G,Γ esetén a $b^{\alpha}, \beta^{\alpha}, a^{b}, \alpha^{b}$ függvényekkel elölálló, (e, ε) egységelemmel rendelkező $G_{10}\Gamma$ szorzatcsoport izomorf azzal az (e, ε) egységelemmel rendelkező $G_{20}\Gamma$ csoporttal, amely $(b^{-1})^{-\alpha^{-1}}, (\beta^{-1})^{-\alpha^{-1}}, (a^{-1})^{-b^{-1}}, (\alpha^{-1})^{-b^{-1}}$ függvények segitségével áll elő, és az izomorfizmust $\pi: (a,\alpha) \rightarrow (a^{-1}, \alpha^{-1})$ leképezés adja meg. Forditva : adott G,Γ esetén $b^{\alpha}, \beta^{\alpha}, a^{b}, \alpha^{b}$ függvényekkel előálló (e, ε) egységelemmel rendelkező $G_{20}\Gamma$ csoport izomorf azzal az (e, ε) egységelemmel rendelkező $G_{10}\Gamma$ csoporttal, amely $(b^{-1})^{-\alpha^{-1}}, (\beta^{-1})^{-\alpha^{-1}}, (a^{-1})^{-b^{-1}}, (\alpha^{-1})^{-b^{-1}}$ függvények segitségével áll elő, és az izomorfizmust π adja meg.

Megjegyzés : A fenti állitás igaz marad, ha $G_{10}\Gamma$, $G_{20}\Gamma$ helyett a szövegben $G_{30}\Gamma$, $G_{40}\Gamma$ -t vagy $G_{50}\Gamma$, $G_{60}\Gamma$ -t helyettesitünk.

Bizonyitás : Elegendő a tételt csak a $G_{10}\Gamma$, $G_{20}\Gamma$ esetén elvégezni. Szoritkozhatunk az első rész bizonyitására. Legyen megadva $S = G_{10}\Gamma$ csoport (e, ε) egységelemmel, a függvények legyenek $b^{\alpha}, \beta^{\alpha}, a^{b}, \alpha^{b}$ Rédei [2] 2. §-a szerint tekintve a $\pi = \pi^{-1}$: $(a,\alpha) \rightarrow (a^{-1}, \alpha^{-1})$ permutációt, S-hez izomorf S'-höz jutunk, ha S -ben bevezetjük a következő «uj» szorzást :

$$(a,\alpha)\times(b,\beta)=\Pi\left(\Pi^{-1}(a,\alpha)\cdot\Pi^{-1}(b,\beta)\right)=\Pi\left(a^{-1}\; b^{-1^{\alpha^{-1}}}\; \beta^{-1^{\alpha^{-}}}\right.$$

$$\left. a^{-1^{b^{-1}}}\alpha^{-1^{b^{-1}}}\beta^{-1}\right)=\left((\beta^{-1})^{-\alpha^{-1}}(b^{-1})^{-\alpha^{-1}}a,\ \beta\,(\alpha^{-1})^{-b^{-1}}(a^{-1})\right.$$

Látható, hogy S° (e, ε) egységelemmel G 20 Γ csopor

s a szorzásszabályban szereplő függvények a fent megjelöltek.

Über gewise Typen des schiefen Produktes in der Gruppentheorie

In der vorliegenden Arbeit werden notwendige und hinreichende Bedingungen angegeben, unter denen die schiefen Produkte (2)–(6) von zwei Gruppen G, Γ eine Gruppe bilden. Die schiefen Produkte (2)–(6) entstehen aus dem Rédeischen schiefen Produkt (1) durch die Permutationen der Faktoren, aber die Symmetrie der Faktoren in G und Γ wird festgehalten.

I r o d a l o m j e g y z é k.

1. Rédei : Algebra I.

2. Rédei : Die Anwendung des schiefen Produktes in der Gruppentheorie. Journal f. d. reine u. angew. Math. 188. /1950/ 201–227.