



ANÁLISIS GEOMÉTRICO Y ASTRONÓMICO EN LA CATEDRAL DE CHARTRES

Juan Miguel Seguí Colomar

ADVERTIMENT. L'accés als continguts d'aquesta tesi doctoral i la seva utilització ha de respectar els drets de la persona autora. Pot ser utilitzada per a consulta o estudi personal, així com en activitats o materials d'investigació i docència en els termes establerts a l'art. 32 del Text Refós de la Llei de Propietat Intel·lectual (RDL 1/1996). Per altres utilitzacions es requereix l'autorització prèvia i expressa de la persona autora. En qualsevol cas, en la utilització dels seus continguts caldrà indicar de forma clara el nom i cognoms de la persona autora i el títol de la tesi doctoral. No s'autoritza la seva reproducció o altres formes d'explotació efectuades amb finalitats de lucre ni la seva comunicació pública des d'un lloc aliè al servei TDX. Tampoc s'autoritza la presentació del seu contingut en una finestra o marc aliè a TDX (framing). Aquesta reserva de drets afecta tant als continguts de la tesi com als seus resums i índexs.

ADVERTENCIA. El acceso a los contenidos de esta tesis doctoral y su utilización debe respetar los derechos de la persona autora. Puede ser utilizada para consulta o estudio personal, así como en actividades o materiales de investigación y docencia en los términos establecidos en el art. 32 del Texto Refundido de la Ley de Propiedad Intelectual (RDL 1/1996). Para otros usos se requiere la autorización previa y expresa de la persona autora. En cualquier caso, en la utilización de sus contenidos se deberá indicar de forma clara el nombre y apellidos de la persona autora y el título de la tesis doctoral. No se autoriza su reproducción u otras formas de explotación efectuadas con fines lucrativos ni su comunicación pública desde un sitio ajeno al servicio TDR. Tampoco se autoriza la presentación de su contenido en una ventana o marco ajeno a TDR (framing). Esta reserva de derechos afecta tanto al contenido de la tesis como a sus resúmenes e índices.

WARNING. Access to the contents of this doctoral thesis and its use must respect the rights of the author. It can be used for reference or private study, as well as research and learning activities or materials in the terms established by the 32nd article of the Spanish Consolidated Copyright Act (RDL 1/1996). Express and previous authorization of the author is required for any other uses. In any case, when using its content, full name of the author and title of the thesis must be clearly indicated. Reproduction or other forms of for profit use or public communication from outside TDX service is not allowed. Presentation of its content in a window or frame external to TDX (framing) is not authorized either. These rights affect both the content of the thesis and its abstracts and indexes.

UNIVERSITAT ROVIRA I VIRGILI

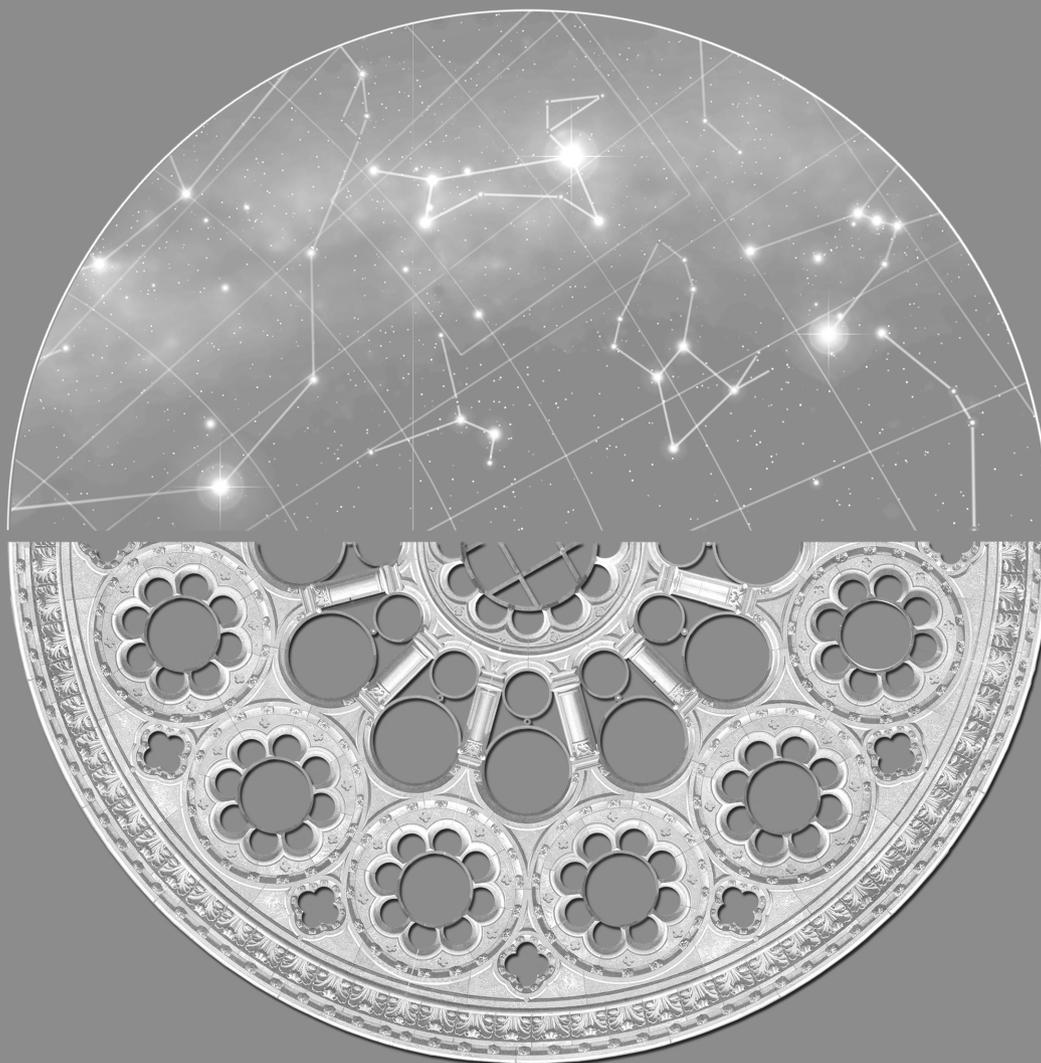
ANÁLISIS GEOMÉTRICO Y ASTRONÓMICO EN LA CATEDRAL DE CHARTRES

Juan Miguel Seguí Colomar

JOAN MIQUEL SEGUÍ

ANÁLISIS GEOMÉTRICO Y ASTRONÓMICO EN LA CATEDRAL DE CHARTRES

TESIS DOCTORAL - 2017



UNIVERSITAT ROVIRA I VIRGILI

Joan Miquel Seguí Colomar

ANÁLISIS GEOMÉTRICO Y ASTRONÓMICO EN LA CATEDRAL DE CHARTRES

TESIS DOCTORAL

dirigida por:

Dr. Blas Herrera Gómez y Dr. Albert Samper Sosa



UNIVERSITAT ROVIRA I VIRGILI

Tarragona, Abril de 2017

UNIVERSITAT ROVIRA I VIRGILI

ANÁLISIS GEOMÉTRICO Y ASTRONÓMICO EN LA CATEDRAL DE CHARTRES

Juan Miguel Seguí Colomar

© 2017 **Joan Miquel Seguí Colomar.**

Editor y Autor.

"Análisis geométrico y astronómico en la Catedral de Chartres"

Reservados todos los derechos. No está permitida la reproducción total o parcial de este libro, ni su tratamiento informático ni la transmisión de ninguna forma o por cualquier medio, ya sea electrónico, mecánico, por fotocopia, por registro u otros métodos, sin el permiso previo y por escrito de los titulares del Copyright.

Abril de 2017

© by Seguí Colomar, Joan Miquel.

e-mail: jm@jmsegui.com

<http://www.jmsegui.com>

Impreso por Impresrapit S.L.

Barón Santa María del Sepulcro, 7

07012, Palma de Mallorca

Depósito legal:

ISBN:

UNIVERSITAT ROVIRA I VIRGILI

ANÁLISIS GEOMÉTRICO Y ASTRONÓMICO EN LA CATEDRAL DE CHARTRES

Juan Miguel Seguí Colomar

Universitat Rovira i Virgili
Campus Bellissens
Avd. de la Universitat, 1. Reus.
Teléfono: 977.759.881

Confirmamos que este trabajo, titulado "**Análisis geométrico y astronómico en la Catedral de Chartres**", que presenta el señor *Joan Miquel Seguí Colomar* para la obtención del título de Doctor, se ha realizado bajo nuestra dirección en la Universitat Rovira i Virgili dentro el Programa de Doctorado titulado "Arqueología Clásica".

Tarragona, Abril de 2017.

Los directores de la Tesis Doctoral:

Dr. Blas Herrera Gómez

Dr. Albert Samper Sosa

UNIVERSITAT ROVIRA I VIRGILI

ANÁLISIS GEOMÉTRICO Y ASTRONÓMICO EN LA CATEDRAL DE CHARTRES

Juan Miguel Seguí Colomar

Agradecimientos

Vayan de antemano mis agradecimientos a:

Mis directores de tesis, el Dr. Blas Herrera y Dr. Albert Samper, por su interés, dedicación y orientación.

Mi padre, principal incitador de esta tesis. A mi madre y hermano, que me han animado siempre y a Mariona, por su comprensión y sus ánimos.

UNIVERSITAT ROVIRA I VIRGILI

ANÁLISIS GEOMÉTRICO Y ASTRONÓMICO EN LA CATEDRAL DE CHARTRES

Juan Miguel Seguí Colomar

Prefacio

Al lector aquí se presenta la Tesis para alcanzar el grado de Doctor por la Universitat Rovira i Virgili en el Programa de Doctorado de Arqueología Clásica, titulada:

Análisis geométrico y astronómico en la Catedral de Chartres

La misma está dirigida por el Dr. Blas Herrera y por el Dr. Albert Samper.

A continuación se destacan las aportaciones científicas internacionales las cuales, a día de hoy, ha generado la presente Tesis:

- 1.- Seguí, Joan M.; Samper, A.; Herrera, B. 2016. Correlation between Chartres cathedral and the catasterism of ancient virgins. *European Journal of Science and Theology*, 12 (4): 7-15.
- 2.- Seguí, Joan M.; Samper, A.; Herrera, B. 2017 (bajo revisión). Correlation between the labyrinth and the rose window on the main façade of Chartres cathedral. *Science and Theology*.
- 3.- Seguí, Joan M.; Samper, A.; Herrera, B. 2016. Revisión geométrica de la Teoría de Louis Charpentier. *XIII Congreso Internacional de Expresión Gráfica aplicada a la edificación, APEGA 2016*. 1-3 de Diciembre, España.

4.- Seguí, Joan M.; Samper, A.; Herrera, B. 2016. Correlación geométrica entre el rosetón y el ábside de la Catedral de Chartres. *XIII Congreso Internacional de Expresión Gráfica aplicada a la edificación, APEGA 2016*. 1-3 de Diciembre, España.

5.- Seguí, Joan M.; Samper, A.; Herrera, B. 2016. Análisis geométrico y astronómico a través del rosetón de la fachada de la natividad de la Sagrada Familia. *Gaudí Second World Congress Barcelona*. 4-7 de Octubre, España.

Índice del contenido

Introducción 19

CAPÍTULO I 27

Fundamentos geométricos y astronómicos

1.1. Bóveda celeste.

1.2. Movimientos aparentes.

1.3. Círculos astronómicos.

1.4. Años y días, tiempo verdadero y sidéreo.

1.5. Tiempo medio, tiempo dinámico.

1.6. Calendario.

1.7. Día Juliano.

1.8. Coordenadas celestes.

1.9. Reloj de Sol para hora verdadera.

1.10. Reloj de Sol para hora media, analemas.

1.11. Precesión terrestre.

1.12. Movimiento propio estelar.

1.13. Magnitud aparente.

1.14. Nutación terrestre.

CAPÍTULO II

89

Cálculo astronómico aplicado al presente estudio

2.1. Fecha del Calendario y Día Juliano.

2.2. Época astronómica.

2.3. Coordenadas horizontales y ecuatoriales horarias.

2.4. Coordenadas ecuatoriales horarias y ecuatoriales absolutas.

2.5. Coordenadas ecuatoriales absolutas y eclípticas.

2.6. Sombra de un punto P y proyección de un astro a través de un punto P.

2.7. Método de baja precisión de paso de coordenadas astronómicas por precesión terrestre.

2.8. Método riguroso de alta precisión de paso de coordenadas astronómicas por precesión terrestre y movimiento anual del astro.

2.9. Ejemplo 1 –método riguroso de Equinoccio medio–.

2.10. Ejemplo 2 –método riguroso de Equinoccio medio–.

2.11. Magnitud aparente.

CAPÍTULO III

109

Conceptos geométricos y estadísticos aplicados al estudio

- 3.1. Geometría para la transformación de las Catedrales en cuerpos celestes: en *J1200* (Cálculos para el Capítulo IX).
- 3.2. Hipótesis nula de no correlación lineal, t-test de Student.
- 3.3. Probabilidad de resultado no aleatorio: χ^2 -test de Pearson, exacto-test de Fisher-Irwin.
- 3.4. Aleatoriedad del proceso de la Tabla de contingencia del Capítulo VI.

CAPÍTULO IV

131

Códigos propios de cómputo en C++ para el estudio

- 4.1. Cambio de coordenadas absolutas por Equinoccio medio de *J2000* a un *JD* dado.
- 4.2. Cambio de coordenadas absolutas por Equinoccio real (precesión + movimiento propio + nutación + aberración) de *J2000* a un *JD* dado.
- 4.3. Transformación de catedrales terrestres cualesquiera en astros celestes, fijando Reims en *Spica* y Chartres en *Porrima*: en *J1200*.
- 4.4. Cálculo de la diferencia de inclinación entre el arco terrestre de Chartres/Reims y el arco celeste de *Porrima/Spica* en un *JD* dado.
- 4.5. Cálculo de varios tipos de trayectorias de astros.

4.6. Cálculo del Día Juliano de Efemérides para los equinoccios y solsticios anuales, en tiempo dinámico.

4.7. Fichero de parámetros para el código 4.5 en el caso del rosetón de la Sagrada Familia.

4.8. Cálculo del día de *J1900* en que *Etanim* (γ -Draconis) a las 12h de la noche se proyectaba en el centro de la Sagrada Familia.

CAPÍTULO V

229

Catasterismos y constelaciones relacionadas con la Catedral de Chartres

5.1. Concepto de “elección objetiva y no especulativa de las estrellas en concurso”.

5.2. Catasterismos.

5.3. Notre-Dame = Virgen María = Isis.

5.4. Catasterismos de Isis, deidad egipcia virgen diosa-vaca de la maternidad.

5.5. Mitología griega y egipcia en la Constelación de Tauro.

5.6. Enlaces generados por los catasterismos mostrados.

CAPÍTULO VI

269

Correlación entre la Catedral de Chartres y los castasterismos de la deidad Isis

- 6.1. Consideraciones iniciales.
- 6.2. Proceso histórico similar al presentado en nuestro trabajo.
- 6.3. Parámetros fundamentales e intrínsecos de Chartres.
- 6.4. Consideraciones iniciales.
- 6.5. Proceso histórico similar al presentado en nuestro trabajo.
- 6.6. Parámetros fundamentales e intrínsecos de Chartres.
- 6.7. Cálculo de la declinación celeste de la visual horizontal v_H .
- 6.8. Cálculo de la declinación celeste de la visual laberinto v_L .
- 6.9. Cálculo de la declinación celeste de la visual del crucero v_C .
- 6.10. Cálculo de la declinación celeste de la visual del ábside v_A .
- 6.11. Cálculo de la declinación celeste de la visual de la girola v_G .
- 6.12. Declinaciones de astros determinadas intrínsecamente por la Catedral de Chartres.
- 6.13. Declinaciones celestes en la época astronómica $J1200$ determinadas por el catasterismo de la deidad Isis.
- 6.14. Correlación gráfica de las órbitas del catasterismo de Isis con los elementos de la planta de la Catedral de Chartres.

6.15. Medida geométrica y estadística rigurosa de la correlación de las órbitas de los astros del catasterismo de Isis con los elementos de la planta de la Catedral.

6.16. Correlación del catasterismo de Isis con Chartres.

CAPÍTULO VII

323

Determinación de la ubicación del Laberinto de la Catedral de Chartres

7.1. Consideraciones iniciales.

7.2. Breve descripción del Laberinto de la Catedral de Chartres.

7.3. Órbitas astronómicas diarias y trayectorias diarias de proyección de la constelación de Tauro sobre la planta de la Catedral Chartres.

7.4. La correlación sucedía todos los días a lo largo del periodo de construcción del edificio cuando se implantó el Laberinto en la planta de la Catedral.

7.5. Comentarios finales sobre la motivación y propósito de crear la alineación.

CAPÍTULO VIII

353

Resumen de resultados de la presente tesis

8.1. Teorema 1. La determinación arquitectónica de: el Laberinto, el Crucero, el Ábside, la Girola y el Rosetón de la fachada principal de la catedral de Chartres, sigue fielmente el patrón astronómico del catasterismo milenario de la deidad egipcia Isis = Notre-Dame.

8.2. Teorema 2. El centro del Laberinto y del Rosetón de la fachada principal de la Catedral de Chartres estuvieron alineados con la estrella central *Elthor* de la constelación de Tauro catasterismo de Isis = Notre-Dame; fue la alineación con total precisión y además cubría la constelación, en su trayectoria diaria, completamente al Laberinto.

CAPÍTULO IX

359

Estudios en curso relacionados con la tesis doctoral

9.1. Revisión geométrica y astronómica de la Teoría de Louis Charpentier.

9.2. Una determinación de la ubicación de las fuentes de la Plaza de San Pedro del Vaticano por medio de su obelisco egipcio y la estrella Sirio.

9.3. Proyección gráfica de la constelación del Dragón sobre la planta del Templo de la Sagrada Familia a través de su rosetón de la fachada de la Natividad.

Referencias bibliográficas 469

Índice alfabético 479

Introducción

Es bien sabido que la humanidad a lo largo de la historia ha erigido construcciones religiosas y monumentales con la intención de llamada, aclamación, honra, devoción, sumisión o pábulo, de sus deidades. Además, *catasterizar* –o sea, transformar a los miembros de su panteón de deidades en sus correspondientes astros, cuerpos celestes o estructuras astrales, de la esfera celeste– fue algo común en las diferentes civilizaciones. Es conocido que la interacción de las civilizaciones de oriente próximo generó interrelación o influencia en los panteones de deidades de las diferentes religiones –islámica, cristiana, judía, romana, griega, asiria, sumeria, egipcia–, siendo la egipcia una de las más antiguas. Y si la religión griega claramente catasterizaba hace 2 milenios, igualmente lo hacía la egipcia hace ya 5 milenios.

19

Las relaciones astronómicas con las construcciones sagradas no obedecían solamente al interés por comprender la naturaleza, sino que implicaban la posibilidad de comunicarse con las divinidades y entender sus designios. La disposición de los edificios sagrados reflejaban el orden cósmico, por esta razón muchos templos de la antigüedad se encuentran alineados en correspondencia con el desplazamiento de los astros en la bóveda celeste. Esta relación entre lo terrenal y lo celestial, la podemos encontrar en estudios arqueoastronómicos y en múltiples referentes arquitectónicos:

1.- Estudios realizados en las últimas décadas y aplicados a edificaciones de civilizaciones antiguas, como por ejemplo: las

relaciones astronómicas con las arquitecturas Mayas [Ashmore y Sabloff, 2003; Aveni y Horst, 1978-1986; Šprajc y Sánchez, 2012]; la demostración empírica del uso del monumento de Stonehenge como un previsor de eclipses [Hoyle, 1966]; la correlación, aunque tiene sus detractores, entre el emplazamiento de las 3 pirámides de la meseta de Giza y la ubicación de las tres estrellas centrales del cinturón de Orión [Bauval y Gilbert, 1994]; la relación entre la orientación de las estructuras de los templos griegos con ciertas constelaciones [Hannah, 2013]; e incluso, aunque de muy dudosa seriedad, teorías que relacionan la concreta ubicación geográfica de once catedrales Notre-Dame francesas con la constelación de Virgo [Charpentier, 1969].

2.- Ejemplos arquitectónicos del Medievo y de carácter religioso que demuestran el interés de los arquitectos por la astronomía, especialmente el estudio solar mediante la instalación, en el propio edificio, de un gnomon; por ejemplo: en 1467 el constructor P. Toscanelli instaló un gnomon en la Catedral de Santa María del Fiore en Florencia; en 1655, G. D. Cassini lo diseñó en la Basílica de San Petronio en Bolonia; en 1743, Le Monnier lo colocó en la Iglesia de Saint-Supice en París; en 1791, G. Cascella lo ejecutó en el Museo Nazional de la ciudad de Nápoles o en 1786 los autores A. de Cesaris y G. Reggio lo situaron en el Duomo de Milán.

De entre todas las referencias arquitectónicas citadas en esta introducción que aluden a la relación del propio edificio con los astros, resaltamos el gnomon Clementino en la Basílica de Santa María de los Ángeles y los Mártires en Roma [Catamo y Lucatini, 2002]. El Papa

Clemente XI encargó al astrónomo y arqueólogo Francesco Bianchini crear este gnomon; que se trató de un ingenioso instrumento que permitió "ver" las órbitas de las estrellas durante el día, y no solo durante la noche, mediante la proyección de sus órbitas diarias sobre la planta de la Basílica. De hecho el gnomon Clementino era un reloj de sol sincronizado con el tiempo sidéreo. Usando este reloj de sol fue posible observar los tránsitos meridianos del Sol y de las estrellas *Sirio*, *Polar* y *Arturo*, simultáneamente, como arcos de elipse e hipérbola sobre la planta de la Basílica. Estos arcos son proyecciones que se producen a través de agujeros en el techo y a través de un agujero en el centro del escudo de armas del Papa –el escudo muestra una estrella en su emblema– colocado en una pared de la basílica a una altura de 20.34 metros.

Con los fundamentos astronómicos, las técnicas geométricas y los procesos de cálculo computacional que desarrollaremos en este trabajo, presentaremos –de manera similar a la Basílica de Santa María de los Ángeles y los Mártires– un análisis astronómico en la planta de una de las catedrales góticas más relevantes del cristianismo.

Es bien sabido que la Catedral Basílica de Nuestra-Señora de Chartres (Basilique Cathédrale Notre-Dame de Chartres), conocida también como Catedral de la Sunción de Nuestra Señora (Cathédrale de l'Assomption de Notre-Dame), es una de las más importantes construcciones religiosas. Como sus atribuciones indican, esta construcción está dedicada a la deidad Notre-Dame, Virgen, Madre de Dios. Este culto a Nuestra Señora no solo se ha realizado en el cristianismo sino que ya

proviene de muy antiguo asociado con la diosa de la maternidad Isis – hermana y esposa de la deidad Osiris y madre de la deidad Horus– de la religión egipcia.

Fijado, de manera previa y precisa, el objeto de estudio; consideraremos el rosetón de su fachada principal como “ojo con el que visualizar la bóveda celeste”. El motivo de la elección de este elemento arquitectónico es su enorme relevancia y singularidad arquitectónica debida a su impactante tamaño, su complejidad constructiva, su protagonismo compositivo en la fachada principal y su simbolismo. Todas estas cualidades son los motivos por el cual el rosetón ha sido el centro de investigación de muchos estudios; por ejemplo, el análisis geométrico de su textura o de su construcción [Samper y Herrera, 2015], o el estudio de su relación solar con el interior de la catedral [Heilbron, 2001]. No obstante, hasta el presente trabajo, nunca ha sido examinado como instrumento astronómico estelar. El rosetón principal también es conocido como “Ojo de Dios”; y nosotros usaremos el centro del mismo como punto por el cual pasará la recta visual con la que visualizaremos la esfera celeste; será el centro del rosetón principal el punto de proyección de los astros, el cual determinará las órbitas astronómicas proyectadas de los mismos. Llamaremos a estas órbitas proyectadas: “trayectorias de los astros”.

Tal como indica el título de la presente tesis "Análisis geométrico y astronómico en la Catedral de Chartres", pretendemos mostrar la correlación que existió entre los parámetros arquitectónicos de la importante edificación de Chartres y ciertos cuerpos celestes. Ahora

bien, –a causa de ser una edificación construida y dedicada específicamente a culto deidico– no cabe dissociar su construcción de las deidades a las cuales la humanidad ha rendido culto. Por ello, demostraremos de manera geométrica y astronómica que todos los días a lo largo del periodo de construcción del edificio –época astronómica *J1200*–: el Laberinto, el Crucero, el Ábside, la Girola y el Rosetón de la Catedral de Chartres siguieron fielmente el patrón astronómico del catasterismo milenario, objetivo y no especulativo, de la deidad Isis –*Elthor, Spica, Isis, Sirio y Adhara* de las constelaciones de Tauro, Virgo y Can Mayor–. Y mostraremos que la probabilidad de que esta coincidencia no se produjera por un simple azar y realmente fuera atribuible al arquitecto de la catedral de Chartres es muy alta. Aclaremos, avanzándolo ya desde la introducción de este trabajo, que no pretendemos afirmar –ni negar– que los constructores tuvieran en cuenta de forma intencionada estos alineamientos en el diseño de la construcción; pero sí mostramos, y demostramos, la existencia geométrica de los mismos.

Este hallazgo geométrico y astronómico nos ha dado pie a concretar el estudio y profundizar el resultado determinando una explicación objetiva sobre la existencia y ubicación del enigmático Laberinto de Chartres. Es sabido que la mitología clásica helenística relaciona el laberinto con la constelación de Tauro, y además esta constelación catasteriza a Notre-Dame –la diosa Isis–; por ello, para el análisis proyectaremos las órbitas diarias de las estrellas principales de la constelación a través del centro del rosetón obteniendo sus trayectorias sobre la planta de la catedral. Demostraremos que *Elthor* –única estrella

del firmamento llamada “*el toro*” y ubicada en el centro de la constelación– se proyectaba diariamente con precisión sobre el centro del Laberinto y que esta alineación arquitectónica y astronómica sucedió todos los días a lo largo del periodo de construcción del edificio –época astronómica *J1200*–.

Aplicaremos el análisis astronómico extrayendo consecuencias y resultados en forma de “*teoremas arquitectónicos*”. La expresión “*teoremas arquitectónicos*”, más propia de la Geometría que de la Arquitectura, la usamos para hacer hincapié y recalcar que los resultados obtenidos son independientes del observador, y están despojados de toda subjetividad; son afirmaciones las cuales, bajo *hipótesis arquitectónicas*, usando conceptos geométricos, estadísticos y astronómicos aportan *tesis arquitectónicas*.

Aunque ya lo hemos dicho, insistimos en que aplicamos nuestro estudio para extraer teoremas arquitectónicos de la Catedral de Chartres porque es probablemente una de las más importantes edificaciones góticas de la historia.

Ahora bien, aunque lo explicaremos en el cuerpo de la presente Tesis, conviene destacar desde ya mismo, y como final de esta introducción, la sección 5.1 de este trabajo, la cual literalmente dice:

“Existen alrededor de 5000 estrellas de magnitud aparente menor de $v=6$, visibles a simple vista por el ojo humano sin necesidad de aparatos ópticos; en noche clara y sin contaminación luminosa si se quieren observar aquellas que tienen magnitud entre 5 y 6.

En la edad Media, el mundo occidental solo reconocía las 48 constelaciones recogidas en el *Almagesto* de Ptolomeo (85-165 CE), concretamente en el capítulo 12 (p. 38–169) y capítulo 13 (p. 27–50) de *Syntaxis Mathematica* de Ptolomeo [Ptolemy 2nd century CE]. Ptolomeo en su *Syntaxis* recoge movimientos de estrellas, con la precesión de equinoccios; y genera un catálogo de 1028 estrellas descritas según su posición en las constelaciones.

No es verdad que esas 5000 estrellas visibles estén repartidas sobre la bóveda celeste de manera uniforme, existen huecos y acumulaciones completamente irregulares; y más aún si solo se consideran las 1028 estrellas del listado del *Almagesto*. Por eso, no son ciertas las afirmaciones: “siempre hay una estrella alineada con lo que se quiera”, “siempre hay una estrella que pasa por el sitio que se quiera”, “mirando en una dirección concreta a lo largo de una noche siempre hay una estrella que es observada”, “fijado un punto A en un suelo y un punto O de una pared por el que proyectar, a lo largo de una noche siempre hay una estrella que se proyecta sobre A por el punto O”.

Ahora bien, a pesar de lo dicho en el anterior párrafo, es cierto que para llegar a un teorema que relacione la geometría de una construcción arquitectónica con una estrella, o varias estrellas, necesariamente la elección, de tal o tales estrellas, ha de ser completamente objetiva y no arbitraria en relación a esa construcción.

Dicho de otra forma; afirmar directamente que existe correlación entre unos elementos arquitectónicos de una construcción –en nuestro caso

la Catedral de Chartres– y una estrella: es cosa sin enjundia. Esto es así porque –aunque solo tengamos en cuenta las 1028 estrellas del Almagesto repartidas de manera no uniforme en la esfera celeste– podría ser pura coincidencia el concurso geométrico de la estrella con los elementos arquitectónicos. Por ello, para que el concurso de tal estrella no sea algo irrelevante generado por simple coincidencia, se requiere que la estrella esté fijada de antemano de forma objetiva y no arbitraria en relación con la construcción tratada. *Para poder obtener un teorema geométrico-astronómico-arquitectónico con relevancia, objetivo y no de pura coincidencia, es rigurosamente necesario y obligatorio que antes de cualquier elección de los elementos geométricos de la Catedral de Chartres quede determinada de manera objetiva, no arbitraria, y de forma previa, la estrella –o estrellas– que debe ser la que entre en concurso. Cualquier cosa que viole este principio echará por tierra el interés y la relevancia de toda correlación astronómica que se presente –a causa de las lógicas dudas de ser la correlación una pura coincidencia, a pesar incluso de la no uniformidad de la distribución de las pocas estrellas visibles en la bóveda celeste; e incluso, como hemos dicho, si solo se tiene en cuenta la menor cantidad compuesta por las listadas en el Almagesto–.*”

CAPÍTULO I

FUNDAMENTOS GEOMÉTRICOS Y ASTRONÓMICOS

En este capítulo mostramos, de manera resumida, conceptos básicos y fundamentales de la astronomía. Todos ellos son nociones importantes para aplicar correctamente los procedimientos geométricos con los que determinaremos los resultados del presente trabajo.

Destacamos, como es bien sabido, que a finales del siglo VIII, mucho antes de la construcción de las primeras catedrales góticas y, por supuesto, de la Catedral de Chartres –objeto de estudio de la presente Tesis–, Carlomagno decidió ejecutar en gran parte de Europa una reforma educativa. Junto con el monje inglés Alcuino, elaboró un proyecto de desarrollo escolar que buscó revivir el saber clásico estableciendo los programas de estudio a partir de las siete artes liberales: el *trivium*, o enseñanza literaria (gramática, retórica y dialéctica) y el *quadrivium*, o enseñanza científica (aritmética, geometría, astronomía y música). A partir del año 787, se promulgaron decretos que recomendaban, en todo el imperio, la restauración de las antiguas escuelas y la fundación de otras nuevas. Institucionalmente, esas nuevas escuelas podían ser *monacales*, bajo la responsabilidad de los monasterios; *catedralicias*, junto a la sede de los obispados; y *palatinas*, junto a las cortes.

Estas enseñanzas literarias y científicas, y en concreto la astronomía, fueron desde entonces muy ligadas a los quehaceres de la comunidad eclesiástica. Esto, refuerza el sentido de relacionar – como iremos viendo a lo largo del presente trabajo– la ciencia de la astronomía con uno de los mayores hitos arquitectónicos de la religión, las catedrales góticas y en concreto la Catedral de Chartres.

UNIVERSITAT ROVIRA I VIRGILI

ANÁLISIS GEOMÉTRICO Y ASTRONÓMICO EN LA CATEDRAL DE CHARTRES

Juan Miguel Seguí Colomar

1.1 Bóveda celeste

Los astros observados desde un cierto lugar de la Tierra se suponen situados en una gran esfera y en ella observamos al Sol, los planetas, las estrellas y demás entes. El centro de la Tierra es el centro de tal esfera, la cual es llamada **esfera celeste**, y también **bóveda celeste**. Bien sabemos que los astros no se mueven en esferas concéntricas, como suponían nuestros clásicos; pero, a efectos de la posición de los astros respecto de la Tierra –en el caso del presente trabajo, respecto de catedrales–, asumimos la existencia de la bóveda celeste de manera teórica y geométrica. La medida efectiva del radio de la bóveda celeste nos es indiferente, así que podremos incluso, a efectos de nuestros cálculos geométricos, normalizarla a 1.

También hubo quien clásicamente llamaba a la bóveda celeste [*Tratado de Cosmografía* de P. Luluçé] **esfera natural**, a cuya imitación para explicar la posición de los astros y del globo terráqueo, se hacen dos globos o esferas artificiales –el uno celeste y el otro terrestre– y para explicar el movimiento de los astros, formando así la llamada **esfera armilar** con los principales círculos; estos círculos se disponen según varios sistemas, sirviendo unos y otros para resolver problemas (Figura 1a). En la esfera natural no existen realmente círculos ni líneas, pero es necesario concebirlos, considerando que los astros hacen su movimiento en diversos planos de la esfera, a fin de que puedan observarse y calcularse.

Es bien sabido que aún en el siglo XVIII se discutía sobre el sistema del universo como la situación natural y orden que tienen entre sí los principales cuerpos del mundo celeste –clásicamente se dice *eje del mundo*, *polos del mundo*, etc., refiriéndose al eje celeste, polos celestes, etc.–, y con las diversas opiniones también se tenían sus distintos sistemas. Los principales sistemas eran el de Ptolomeo, Copérnico, Tycho Brahe, Kepler; los demás se reducían a éstos pudiendo cada uno inventar un nuevo sistema con tal que por él se expliquen bien los fenómenos que se observan en los astros. Por supuesto ahora, en el siglo XXI, la cosmología y la astronomía ha dejado tales sistemas desterrados; sin embargo, a efectos de la posición relativa de los astros respecto de los objetos terrestres, geoméricamente nada impide la suposición geocéntrica con los astros como puntos sobre una bóveda celeste. Y así, a lo largo de este trabajo, todo será tratado geométrica y computacionalmente.

1.2 Movimientos aparentes.

El ***movimiento aparente diario*** de todas las estrellas es circular, uniforme y de igual sentido –aunque, como veremos, todas ellas tienen su lento y ***propio movimiento estelar*** sobre la misma esfera, además de estar afectadas por fenómenos como al precesión, nutación, etc.–, y podemos admitir que la esfera celeste gira, aparentemente, alrededor de la recta denominada ***eje del mundo***. El eje del mundo pasa por el centro de la Tierra y corta a la esfera celeste en los puntos llamados ***polos celestes o polos del mundo***. Los polos

celestes son llamados **boreal y austral** (PNC y PSC), correspondiendo su denominación con la de los polos de la Tierra. Todo plano que contenga el eje del mundo corta a la esfera celeste en un círculo máximo denominado **meridiano celeste**. El plano perpendicular al eje del mundo por el centro de la esfera celeste corta a esta en el círculo máximo denominado **ecuador celeste o equinoccial**. El ecuador celeste determina sobre la esfera celeste los **hemisferios celestes**, el austral y el boreal, correspondiendo su nombre con el nombre el polo que contienen (Figura 1b).

El movimiento de la Tierra alrededor del Sol da lugar a un **movimiento aparente del Sol en la esfera celeste** considerando la Tierra fija. El plano en el que se realiza tal movimiento es llamado **plano de la eclíptica**, siendo la **eclíptica** el círculo máximo que recorre el Sol sobre la esfera celeste. La amplitud del ángulo formado por la eclíptica y el ecuador celeste es la llamada **oblicuidad de la eclíptica**, o sea la inclinación del eje terrestre respecto el plano de traslación terrestre, y tiene un valor aproximado de $23^{\circ}27' = \varepsilon$ (grados sexagesimales, y más concretamente $23^{\circ}26'16'' = \varepsilon$). La recta que pasa por el centro de la Tierra y es perpendicular a la eclíptica corta a la esfera celeste en los puntos llamados **polos eclípticos** (π, π') (Figura 1b).

La posición que ocupa el centro del Sol cuando atraviesa el ecuador celeste, pasando del hemisferio austral al boreal, es el llamado **punto Aries o punto vernal** (suele notarse este punto con la letra griega Υ). Tal punto, como veremos, no ocupa en la esfera celeste una posición fija. Este movimiento del punto Aries, como veremos, ocurre a causa del

fenómeno de ***precesión terrestre***. El punto vernal se llama punto Aries porque la primera vez que empezó a considerarse en Astronomía y Astrología, tal punto estaba en la constelación de Aries, actualmente está saliendo de la constelación de Piscis y entrando en la constelación de Acuario (Figura 1b).

Se tiene también el ***punto Perigeo*** el cual no es fijo, y se trata del punto sobre la eclíptica tal que en él la distancia del Sol a la Tierra es mínima.

1.3 Círculos astronómicos.

Entre los innumerables círculos que pueden considerarse en la esfera natural, los principales que ordinariamente se ponen en las esferas artificiales son diez, de los cuales seis son máximos y cuatro menores. Los máximos son: equinoccial, eclíptica, coluro de los equinoccios, coluro de los solsticios, horizonte y meridiano; los menores son: trópico de Cáncer, trópico de Capricornio, círculo polar Ártico y círculo polar Antártico.

Ya hemos citado el eje celeste (clásicamente también llamado eje del mundo) sobre el cual se imagina moverse la máquina del Universo de levante a poniente pasando por el centro de la Tierra. El polo que corresponde a nuestro hemisferio norte terrestre se dice ***boreal, septentrional, ártico***; llámese boreal por el viento Bóreas que viene de aquella parte; septentrional por las siete estrellas de la Osa Mayor llamadas *septem triones*, y ártico por las constelaciones de las Osas que

en griego se dicen *arctos*. El polo que se concibe en el otro hemisferio se dice ***austral, meridional, antártico***; austral por el viento Austro que corre de aquella parte, meridional por estar a la parte de mediodía respecto a nosotros –habitantes de Europa– y antártico por estar directamente opuesto al ártico.

También hemos ya citado la ***equinoccial, o ecuador celeste***. Llámese equinoccial porque cuando el Sol entra en él entonces los días son iguales a las noches en todo el mundo.

Citada también ha sido la ***eclíptica***, el Sol jamás sale del plano de este círculo pero los demás planetas hacen su movimiento cortando oblicuamente a la eclíptica; llámese así porque en ella se hacen los eclipses de Sol y de Luna. Los nodos de corte de la eclíptica con la equinoccial son llamados ***nodos equinocciales*** (uno de ellos es el punto Aries o vernal, y el opuesto es el ***punto Libra***, Ω) porque cuando el Sol llega a ellos hace la revolución diurna por la equinoccial, igualando el día a la noche; el uno sucede en 21 de marzo y se llama ***equinoccio vernal*** porque da principio a la primavera, el otro es en 23 de septiembre y se llama ***equinoccio autinal*** por dar principio al otoño. Los puntos de la eclíptica más apartados del ecuador se llaman ***solsticiales***: el que cae hacia la parte boreal se dice ***solsticio estival*** (SE), hallándose así porque allí el Sol da principio al estío en el mes de junio; el otro que cae a la parte austral se dice ***solsticio invernal*** (SI) porque estando allí el Sol tiene principio el invierno en el mes de diciembre (Figura 1b).

El **Zodiaco** es una faja o zona de la esfera celeste, de casi 20° sexagesimales de ancho y contiene en medio a la eclíptica, comprendiendo las órbitas de los planetas. En la superficie del Zodiaco, por toda su longitud, se contienen los conocidos doce **signos zodiacales**. Los signos se consideran de dos maneras. Los unos se llaman **racionales, invisibles o del primer móvil** y no son otra cosa que las doce partes iguales del Zodiaco que se empiezan a contar desde el punto Aries de poniente a levante y, siendo círculo el de la eclíptica de 360° sexagesimales, a cada signo le corresponden 30° ; los seis primeros signos que están en el semicírculo boreal de la eclíptica se llaman boreales y los otros seis australes. También los signos se consideran **sensibles, visibles o estrellados** y tienen los mismos nombres y orden que los anteriores, pero éstos no son otra cosa que doce constelaciones o agregados de estrellas y se distinguen de los racionales en que son desiguales, pues algunos abarcan más de 30° y otros menos, y en que no corresponden a los racionales. Esto es así porque, como veremos (a causa de la *precesión terrestre*), el punto Aries en la bóveda celeste tiene un movimiento tardo o retrógrado –o sea, en sentido contrario al movimiento del Sol en la eclíptica– según el cual en un año camina $50.23''$, en 72 años 1° , y en 2160 años unos 30° o un signo racional, de lo que se sigue que no corresponden los visibles a los racionales, de suerte que el año 400 CE los signos visibles correspondían a los racionales; pero, hoy de las 13 estrellas que clásicamente dibujan el signo de Aries, 10 se hallan en Tauro racional, y en el año 2560 CE todo el signo de Aries visible se hallará en Tauro racional, y Tauro visible en Géminis racional.

Siempre que hablemos de los signos zodiacales sin distinguir la especie, se entenderán los racionales.

Los **coluros** son dos círculos máximos de los cuales el uno se llama **coluro de los equinoccios** y pasa por los polos del mundo y por los puntos equinocciales, dividiendo la eclíptica en dos semicírculos, el uno boreal, desde el principio de Aries pasando por Cáncer, hasta el fin de Virgo, el otro austral, desde el principio de Libra pasando por Capricornio, hasta el fin de Piscis. El otro coluro se dice **coluro de los solsticios** y pasa por los polos del mundo y por los puntos solsticiales, dividiendo la eclíptica en dos semicírculos, el uno desde el principio de Capricornio pasando por Aries, hasta el fin de Géminis que se llama **ascendente**, porque el Sol sube por él hacia nosotros –habitantes de Europa–; el otro semicírculo va desde el principio de Cáncer pasando por Libra, hasta el fin de Sagitario y se dice **descendente** porque el Sol baja hacia el otro polo. El plano de este coluro es perpendicular: al coluro de equinoccios, a la eclíptica, al ecuador celeste y a todos los paralelos del ecuador celeste, porque pasa por los polos de dichos círculos. En él se cuenta la máxima declinación del Sol cuya medida es la de la oblicuidad de la eclíptica con la equinoccial (Figura 1c).

Los **trópicos** son dos círculos menores, equidistantes y paralelos al ecuador celeste, que tocan a la eclíptica en los puntos solsticiales. El uno que está en el hemisferio boreal se llama **trópico de Cáncer** porque desde el contacto empieza este signo, y cuando el Sol se halla en él, hace su revolución diurna por el mismo trópico y tenemos el día mayor del año en el mes de Junio. El otro en el hemisferio austral se

dice **trópico de Capricornio**, porque empieza desde allí este signo y, cuando el Sol se halla en él, tenemos el menor día del año en el mes de diciembre.

El camino del Sol se comprende entre los trópicos, y las revoluciones diurnas en los demás días se hacen en círculos paralelos comprendidos entre los trópicos.

Los **círculos Polares** son dos círculos menores paralelos al ecuador celeste los cuales pasan por los polos de la eclíptica, por ello distantes de los polos del mundo en aproximadamente $23^{\circ}27'$, y toman el nombre del polo inmediato, y así uno se dice **círculo polar Ártico** y el otro, **círculo polar Antártico**.

El **horizonte** según la derivación del griego significa terminador de la vista; es en dos maneras: racional y sensible. El **horizonte racional** es un círculo máximo que pasando por el centro de la Tierra divide la esfera celeste en dos hemisferios, el uno superior y el otro inferior, sus polos son Z, Z' de suerte que respecto a un habitador A en la Tierra, será el punto Z que se encuentra sobre él en el cielo, el que llamaremos **cénit**, y el punto Z' que se encuentra bajo él, el que llamaremos **nadir**. En este círculo se determinan los astros que **se ven** siempre y los que siempre **se ocultan**, así como los que en rotación diaria se descubren sobre el horizonte y se ocultan debajo. En él se determinan los cuatro *puntos cardinales*: Norte, Sur, Levante (Este) y Poniente (Oeste), **el orto y el ocaso de los astros** (orto=punto del horizonte por donde aparece un astro, ocaso por donde se oculta), la **amplitud ortiva y occidua**

(amplitud ortiva=arco de horizonte entre el verdadero levante y el orto, amplitud occidua=arco entre el verdadero poniente y el ocaso). El **verdadero levante** y el **verdadero poniente** son los nodos del corte entre la equinoccial y el horizonte, levante para el que se encuentra en la parte oriental, poniente para el que se encuentra en la occidental. Aunque comúnmente se dice que el Sol sale por el Este, no es cierto, el orto del Sol solo es el cardinal Este en los días de equinoccios. En lo que sigue: siempre que hablamos de Levante o Este nos referimos al verdadero levante, igualmente siempre que hablamos de Poniente u Oeste nos referimos al verdadero poniente. Son una cantidad infinita los horizontes cuanto lo es la cantidad de puntos en la mitad de la superficie del globo terráqueo, pues cada uno tiene su propio horizonte, con su cénit y nadir que son los polos de cada horizonte (Figura 1b).

El **horizonte sensible** es un círculo menor en un plano tangente al globo terráqueo en el punto A del habitador y es paralelo al horizonte racional; por este horizonte sensible se distingue la parte superior aparente del cielo de la inferior que no le es visible, el cénit Z y el nadir Z' son también polos de este círculo menor; llámase sensible porque le percibe la vista si no lo impidiesen las alturas de los montes como en el mar, en donde parece que el cielo se termina por todas partes con las aguas. Como la Tierra es casi un punto respecto a la esfera celeste, el horizonte racional se distingue poco del sensible.

Cuando hablemos de horizonte sin expresar la especie se entenderá el racional.

El **meridiano**, como dijimos, es un círculo máximo que pasa por los polos del mundo, pero si además pasa por el cénit y nadir de un horizonte de un lugar, entonces diremos además que es meridiano del lugar; el plano del meridiano es perpendicular al plano del horizonte, porque pasa por sus polos y al plano del ecuador porque pasa por los polos de su círculo. Llámase meridiano porque en llegando el Sol al semicírculo del meridiano sobre el horizonte hace el mediodía y cuando toca al semicírculo bajo el horizonte hace la medianoche. Cuando algún astro se halla en el meridiano tiene su mayor altura sobre el horizonte en aquel día y dista menos del cénit. Los meridianos son en cantidad infinita en cuanto lo es la cantidad de los lugares de la Tierra (Figura 1b).

Un **círculo vertical o acimutal** es cualquiera que pasa por el cénit y nadir de un lugar y por consiguiente es perpendicular al horizonte pues pasa por sus polos. Los verticales son en cantidad infinita en cualquier lugar en cuanto lo es la cantidad de los puntos del horizonte; entre estos infinitos verticales se dice **vertical primario** el que pasa por los nodos verdadero poniente y verdadero levante; los demás se llaman secundarios. Estos nodos donde se cortan el vertical primario, el horizonte y el ecuador son los polos del meridiano, de suerte que el vertical primario y el meridiano son entre sí perpendiculares y dividen al horizonte en cuatro cuadrantes determinando sus cuatro **puntos cardinales, que son norte, sur, levante y poniente**. Levante y poniente ya fueron definidos; norte y sur son los nodos del meridiano con el horizonte, el uno en la parte boreal el otro en la austral. El

meridiano es también un círculo vertical porque pasa por el cénit y nadir, y es uno de los principales de entre los verticales secundarios.

Vertical, o acimutal, de un astro es el círculo vertical que en concreto pasa por el centro del astro. En él se cuenta su **altura** sobre el horizonte del astro que será la distancia angular del astro al horizonte. El ángulo que forma el vertical del astro con el meridiano se llama **ángulo acimutal o el acimut del astro**, cuya medida es el arco del horizonte comprendido entre dichos círculos, más adelante definiremos con más precisión, la altura y el acimut. Es común citar el vertical de un astro en femenino: *la vertical del astro* (Figura 1b).

Círculos almicantarates (llamados también **círculos de altura o depresión**) son cualesquiera círculos menores paralelos al horizonte que pasan por los centros de los astros; dicese **de altura** si están sobre el horizonte y **de depresión** si están debajo. De entre los de depresión, se dice **círculo crepusculino** el que está 18° debajo del horizonte, porque cuando el Sol toca a este círculo subiendo al horizonte, empieza el **crepúsculo matutino**, el que fenece llegando el Sol al horizonte; este círculo también determina el **crepúsculo vespertino** que empieza desde que el Sol se pone por el horizonte y fenece cuando toca a dicho círculo (Figura 1c).

Círculos horarios son 12 círculos máximos que pasando por los polos del mundo son perpendiculares al ecuador y le dividen en 24 partes iguales. Se llaman horarios porque cuando el Sol pasa por ellos en su revolución diaria y, como veremos cuando hablemos del año y del día,

determinan las *24 horas verdaderas*. Veremos que el meridiano es uno de estos círculos horarios el cual señala las 12 del día y de la noche. El horario que pasa por los puntos del verdadero levante y poniente se dice el círculo de la hora 6^a, porque en llegando el Sol al amanecer a este plano indica las 6 de la mañana y cuando llega al atardecer, las 6 de la tarde, etc. Más adelante hablaremos del tiempo.

Círculo horario de un astro es el que pasa por su centro y los polos del mundo, y el ángulo comprendido entre el horario del astro y el meridiano del lugar se dice **ángulo horario del astro**, más adelante definiremos con más precisión el ángulo horario (Figura 1b).

Círculo de latitud de un astro es el que pasa por el centro de un astro y los polos de la eclíptica y por consiguiente es perpendicular a ella. El arco desde la eclíptica hasta el astro se dice **latitud eclíptica del astro** (o simplemente **latitud**, o bien lo que el astro dista de la eclíptica); por el círculo de latitud se reduce cualquier astro a la eclíptica de suerte que el **astro corresponde a un punto de la eclíptica** (Figura 1c).

El Sol jamás tiene latitud no nula porque nunca sale de la eclíptica, la Luna, planetas y astros tienen latitud estando fuera de la eclíptica, pero puesto que la órbita de la Luna corta la eclíptica en dos puntos, llamados **nodos lunares**, cuando se halla en estos nodos lunares carece la Luna de latitud por estar también en la eclíptica. Los nodos lunares se llaman: uno, **boreal o cabeza del Dragón**, subiendo el astro al semicírculo boreal de la eclíptica, el opuesto se dice nodo **austral o cola del Dragón**.

El arco desde el punto Aries hasta el punto correspondiente del astro sobre la eclíptica se llama ***longitud eclíptica del astro*** (o simplemente ***longitud***) (Figura 1c).

Los nodos en las órbitas de los planetas son móviles, y raras veces coinciden con los puntos equinociales. La máxima latitud de los planetas depende de los ángulos de sus órbitas con la eclíptica; la de Júpiter es algo menor que 2° , la de Saturno de 2.5° , la de Mercurio más de 4° , la de la Luna 5° , la de Marte más de 7° y la de Venus más de 9° . La latitud se dice boreal si está en el hemisferio boreal de la eclíptica y latitud austral si está en el otro hemisferio. Todos los planetas excepto el Sol mudan su latitud de boreal en austral y al contrario.

Declinación de un astro es lo que dista de la equinoccial, de suerte que si por el astro y los polos del mundo pasa un círculo máximo se dice ***círculo de declinación*** y el arco comprendido entre el ecuador y el astro es la medida de esta declinación. Más adelante definiremos la declinación con más precisión. La declinación puede ser boreal o austral; se dice boreal cuando el astro se halla en el hemisferio boreal, y austral si está en el otro hemisferio. El meridiano y los demás círculos horarios son también de declinación pues pasan por los polos del mundo (Figura 1b).

Cuando el Sol se halla en el punto Aries no tiene declinación, por estar entonces en la equinoccial; su máxima declinación, en valor absoluto, de $23^\circ 27'$ se tiene cuando se halla en el principio de Cáncer y de Capricornio, y entonces su círculo de declinación es el coluro de los

solsticios. Los planetas varían su declinación de austral en boreal o al contrario, las estrellas fijas pueden hacer ese cambio pero muy lentamente por el fenómeno de precesión terrestre que comentaremos. Un mismo astro puede tener latitud austral y declinación boreal hallándose entre el ecuador y la eclíptica.

Círculo diario es el que describe un astro con su revolución diaria y, como este movimiento se hace sobre los polos del mundo, si el astro se halla sobre el ecuador celeste, será este el círculo de su revolución diaria; pero si no describirá un círculo menor paralelo al ecuador (Figura 1c).

La **distancia entre cualesquiera dos puntos de la superficie de la esfera** es el arco menor del círculo máximo comprendido entre ellos.

1.4 Años y días, tiempo verdadero y sidéreo.

El tiempo que tarda el Sol en recorrer sobre la esfera celeste el círculo máximo de la eclíptica al completo es llamado **año sidéreo**. El tiempo que tarda el Sol entre dos pasos por el punto Aries es llamado **año trópico**. El año trópico es menor que el sidéreo; tal cosa ocurre ya que el punto Aries tiene un movimiento retrógrado en el sentido del movimiento del Sol, cada año sidéreo y a causa de la precesión terrestre, de 50.23" segundos sexagesimales sobre la eclíptica. El tiempo que tarda el Sol entre dos pasos por el Perigeo es llamado **año anomalístico**. El año anomalístico es mayor que el sidéreo; tal cosa

ocurre ya que el punto Perigeo tiene un movimiento directo en el sentido del movimiento del Sol, cada año sidéreo, de 11.7" sobre la eclíptica.

El tiempo que tarda el punto Aries en pasar dos veces consecutivas sobre el meridiano de un mismo lugar es llamado **día sidéreo**. Así, cuando el punto Aries rota 360° sexagesimales, ha transcurrido un día sidéreo, o sea 24 **horas sidéreas**. Por tanto, cada hora sidérea corresponde a 15°, y cuando el punto Aries esté sobre el meridiano de lugar serán las 0^h0^m0^s de tiempo sidéreo en ese lugar. Consideremos un día tal que en un momento concreto el punto Aries y el Sol estén ambos simultáneamente sobre el meridiano de un lugar (el instante temporal de esta superposición, el Sol en el punto Aries, se llama **equinoccio de primavera**); serían entonces las 0 horas sidéreas del lugar y las 0 *horas verdaderas* (tal cosa ocurre el 21 de marzo). Sin embargo, medio año (sidéreo, trópico o anomalístico) más tarde a las 0h sidéreas del lugar sería de noche en tal lugar. Igualmente, un cuarto de año más tarde, a las 0h sidéreas del lugar el Sol estaría aproximadamente en el horizonte de tal lugar. O sea que a lo largo del año el Sol se va desfasando y las palabras “día” y “noche” no guardarían relación ninguna con la hora de nuestro reloj. O sea que la hora sidérea no sirve en la vida práctica.

El tiempo que tarda el Sol en pasar dos veces consecutivas sobre el meridiano de un mismo lugar es llamado **día verdadero**. Así, cuando el Sol rota 360° sexagesimales, ha transcurrido un día verdadero, o sea 24 **horas verdaderas**. Por tanto, cada hora verdadera corresponde a 15°, y cuando el Sol esté sobre el meridiano de lugar serán las 0^h0^m0^s de tiempo verdadero en ese lugar.

Decimos a lo largo de todo este trabajo: hora *verdadera*, día *verdadero*, tiempo *verdadero*, segundo *verdadero*, etc. por acortar las expresiones de hora *solar local verdadera*, tiempo *solar local verdadero*, etc. Claramente, la hora solar definida anteriormente es local dependiendo del lugar del observador.

Pero el Sol no rota en torno al eje del mundo con velocidad constante todos los días del año; esto no es posible a causa de dos motivos. El primer motivo es que el Sol en el Perigeo va más deprisa que en el Apogeo (el **punto Apogeo** se trata del punto sobre la eclíptica tal que en él la distancia del Sol a la Tierra es máxima) a causa de la segunda ley de Kepler. O sea que la velocidad con la que recorre el Sol la eclíptica no es constante. Y aunque el Sol recorriese la eclíptica con velocidad constante, resulta que lo haría en el plano de la misma el cual forma un ángulo no nulo con el plano del ecuador celeste. O sea que el segundo motivo que impide la rotación uniforme del Sol es la oblicuidad de la eclíptica. Esto hace que la duración de los días verdaderos no sea constante habiendo entre ellos una diferencia que alcanza un máximo de 16^m24^s . Tal desviación de tiempo entre los días pudiera ser aceptable en épocas pasadas, como en la Edad Media, pero no en la época actual nuestra.

La hora verdadera no sirve en la vida práctica actual.

1.5 Tiempo medio, tiempo dinámico.

Definamos entonces un nuevo sol, llamado ***sol ficticio***, el cual se trate de un sol que se mueva por la eclíptica con velocidad constante, y obligado a coincidir con el Sol verdadero en el Perigeo y el Apogeo. Definamos seguidamente otro sol, llamado ***Sol medio***. Este nuevo astro se moverá sobre el ecuador celeste con velocidad constante y obligado a coincidir con el sol ficticio en el punto Aries y el ***punto Libra*** (el punto Libra, como sabemos, es el punto diametralmente opuesto a Aries en la esfera celeste) (Figura 1d).

El tiempo que tarda el Sol medio en pasar dos veces consecutivas sobre el meridiano de un mismo lugar es llamado ***día medio***. Así, cuando el Sol medio rota 360° sexagesimales, ha transcurrido un día medio, o sea 24 ***horas medias***. Por tanto, cada hora media corresponde a 15° , y cuando el Sol medio esté sobre el meridiano de lugar serán las $0^h0^m0^s$ de tiempo medio en ese lugar (Figura 1d).

La diferencia que en un cierto lugar hay entre su hora media y su hora verdadera a lo largo de los días del año es la llamada ***ecuación de tiempo*** (Figura 1e).

Para evitar la dificultad del cambio de fecha siendo de día, se crea la hora civil. La ***hora civil*** es de igual duración que la hora media pero empezando en el momento de paso del Sol medio por el antimeridiano; o sea: Hora civil=Hora media \pm 12 horas.

La hora civil es local, depende de cada lugar de la Tierra. La hora civil en Greenwich es el llamado **tiempo universal (TU)** mientras que el tiempo medio en Greenwich es llamado **Greenwich tiempo medio (GMT)**.

El tiempo civil, medio, verdadero y sidéreo es adjetivado como **local** siempre que el lugar no se encuentre en el meridiano de Greenwich; por tanto, cuando se traten tiempos locales debe necesariamente ser determinada previamente la longitud terrestre del lugar.

La ecuación de tiempo, como veremos al hablar de los relojes de sol para medir el tiempo medio y el tiempo verdadero, generará el concepto de *analema*.

El tiempo universal (TU) depende de la Tierra y su movimiento; tal movimiento aunque estable, no es rigurosamente uniforme. Así, el **segundo medio** necesita de la existencia terrestre y no es un lapso de tiempo rigurosamente constante. Nuestra sociedad ha alcanzado un nivel (navegación, transporte ferroviario, aviación, telecomunicaciones, satélites, GPS, etc.) que requiere de una tecnología la cual precisa de un cómputo de tiempo referido a lapsos rigurosamente constantes e independientes de la existencia terrestre. Definamos entonces el intervalo de tiempo de forma que elimine los problemas aludidos: Sea la fracción de tiempo correspondiente a $\frac{1}{31556925,9747}$ del año trópico en 1900. Tal fracción es llamada **segundo de efemérides**. Al cómputo uniforme del tiempo con el segundo de efemérides es llamado **tiempo de efemérides**.

Podemos construir un aparato que cuente segundos de efemérides con un error de un segundo cada 30.000 años. Llamamos a ese aparato **reloj atómico** y con él definimos un nuevo intervalo de tiempo: Sea el intervalo de tiempo correspondiente a la duración de 9192631770 periodos de la radiación emitida en la transición entre los dos niveles hiperfinos del estado fundamental del átomo de cesio-133 en campo magnético cero y 0° K. A tal intervalo lo llamaremos **segundo del Sistema Internacional (segundo SI)**. El número ciclos se ha escogido de tal manera que el segundo SI es lo más similar posible al segundo de efemérides. Cada satélite GPS lleva cuatro relojes atómicos.

A la escala de tiempo uniforme idealizado con el segundo SI es llamado **tiempo dinámico (TD)**.

Unos 150 relojes atómicos situados en observatorios de 30 países y coordinados por el Bureau International de l'Heure en París son los encargados de dotarnos de una medida del tiempo estándar práctico basado en el segundo del SI, y es llamado el **tiempo atómico internacional TAI**, y con él tenemos el **segundo atómico**. Se tiene en términos medibles que $TD = TAI + 32.184^s$, con s el segundo SI. Hay que tener cuidado con la ecuación anterior en el sentido que el TD es un tiempo uniforme e idealizado mientras que el tiempo del TAI descansa en los relojes atómicos y por tanto está sujeto a posibles errores de la manera de derivar el cálculo de la longitud del segundo atómico por el propio TAI.

El segundo atómico no es igual que el segundo medio, eso implica que con el transcurrir de los años la diferencia entre el TU y el TAI va aumentando; cuando esta diferencia supera 0.7 segundos entonces al TAI se le añade o se le resta, según convenga (hasta ahora siempre se ha añadido), un segundo de diferencia el último minuto del último día de diciembre o junio. El TAI así modificado es el denominado **Tiempo Universal Coordinado, UTC** (en términos militares **Hora Zulu**).

Los relojes atómicos integrados en el grupo del TAI que se encuentran en España (Cádiz) están al cuidado del Real Instituto y Observatorio de la Armada en San Fernando, se encarga del mantenimiento de la unidad básica de tiempo, declarado a efectos legales como patrón nacional de dicha unidad, así como de la difusión oficial de la escala Tiempo Universal Coordinado, UTC, considerada la base de la **hora legal** en todo el territorio nacional (Real Decreto 1308/1992 de 23 octubre).

El valor de la diferencia exacta $\Delta T = TD - TU$ solo puede ser deducido por observaciones. En las páginas 78 y 79 del *Astronomical Algorithms* de J. Meeus se encuentran algoritmos y tablas para el cómputo con la diferencia entre ambos tiempos [Meeus, 1991].

1.6 Calendario.

Es claro que no hay ningún motivo astronómico para que exista relación entera entre el año trópico y el día medio; de facto se tiene que la duración de un año trópico es aproximadamente 365.242199 días medios. Las civilizaciones, antes de Julio César, generalmente usaban calendarios lunares. Pero, al no haber tampoco relación astronómica entera entre los periodos lunares y los solares, los calendarios lunares no son muy eficaces a efectos de la agricultura y ganadería. Julio César impuso el calendario solar dotando al año de 365 días, añadiendo cada 4 años un día más para compensar el exceso. Tal imposición se llevó a cabo el año 45 BCE, y para corregir el calendario anteriormente usado en Roma, además de hacer coincidir el equinoccio de primavera el 21 de marzo, añadió 90 días a tal año, así que lo dejó en 455 días. A este calendario se le llama **calendario Juliano**, y **año Juliano** se llama a los años del calendario juliano, y **días del calendario Juliano** se les llama a sus días. Pero no ha de confundirse el **día Juliano** con el *día del calendario juliano*. Más adelante definiremos el concepto de *día juliano* correspondiente al cómputo temporal propuesto por Joseph Scaliger.

Julio César hubiera resuelto con acierto el ajuste del periodo solar con los días, en su calendario, si el exceso decimal fuese exactamente 0.25 días. Sin embargo, eso no es cierto. A causa de la diferencia decimal restante se seguía acumulando error y en el año 325 CE el error consistía ya en 3 días. Tal año en el Concilio de Nicea se decidió añadir esos tres días, dejando nuevamente el equinoccio de primavera el 21 de

marzo. Pero no se corrigió el error y a partir de ese día de nuevo se fue acumulando la diferencia. Para colmo, en ese mismo Concilio de Nicea, se decidió que la fecha de la Pascua de Resurrección estuviera ligada a un evento astronómico lunar y solar a la vez. Decidieron que sería el domingo siguiente después de la primera luna llena inmediatamente posterior al equinoccio de primavera. En 1582 CE el error era ya de 10 días.

El Papa Gregorio XIII pidió a sus astrónomos que arreglasen de una vez por todas el asunto, e impuso a los reinos católicos el siguiente cambio: Dado que la diferencia anual con la reforma introducida por Julio César es de 0.007801 días al año, 3.1204 días cada 400 años, ordenó que al día 4 de octubre de 1582 le siguiera el 15 de octubre. Y dispuso, así mismo, que cada 400 años se suprimieran 3 días, de tal forma que los años en los que se suprimiría un día fuesen los años correspondientes a los centenares cuyas cifras centenas no fueran múltiplos de 4. O sea, los años correspondientes a los centenares (... , 1900, 2000, 2100, 2200, 2300, 2400,...) son bisiestos si sus centenas son divisibles por 4. Así, el 2000 fue bisiesto y lo será el 2400, los otros no.

Esta imposición llamada reforma gregoriana, y **calendario Gregoriano**, y aún comete un error de 1.204 días cada 4000 años. Se llaman **años Gregorianos** y **días Gregorianos** a los que se suceden a partir de la reforma gregoriana.

1.7 Día Juliano.

El **día Juliano** (abreviado JD) es un cómputo continuo de días y fracciones de día desde el medio día del día 1 de enero según el TU de 4713 BCE (en el calendario Juliano). En otras palabras, el número día Juliano $JD(t)$ o, más simplemente, el día Juliano $JD(t)$ (y no fecha Juliana ni día del calendario Juliano) es un cómputo continuo de días y fracciones de día desde el principio del año -4712. O sea, cualquier día Juliano empieza a las 12^h del tiempo universal (TU); y el día 1.5 de enero del -4712 (o sea 1 de enero a las 12^h) del calendario Juliano es el $0.0JD = JD(0.0)$. El día siguiente al 4 de octubre de 1582 (calendario Juliano) es el 15 de octubre de 1582 (calendario Gregoriano). El JD no tiene nada que ver con el calendario Juliano; el 4 de octubre de 1582 a las 0^h es $JD(2299159.5)$. Un año Juliano tiene 365.25 días medios.

El **día Juliano modificado** MJD a veces aparece en trabajos modernos; por ejemplo cuando se habla de los elementos orbitales de satélites artificiales. Contrariamente al JD , el día Juliano modificado empieza en la media noche de Greenwich. Así la relación que se tiene es la siguiente: $MJD = JD - 2400000.5$, y por tanto $MJD(0.0)$ corresponde al 17 de noviembre de 1858 a las 0^h (TU).

Cuando la definición de tiempo usado para el cálculo uniforme del día Juliano no es el tiempo universal (TU) si no que es el tiempo dinámico (TD) entonces se suele usar la expresión **día Juliano de efemérides** JDE . La diferencia entre ambos tiempos es muy pequeña y a efectos de nuestro trabajo es absolutamente irrelevante –ver páginas 78 y 79 del

Astronomical Algorithms de J. Meeus [Meeus, 1991]–; ahora bien por defecto siempre consideraremos el TD, por tanto el día juliano de efemérides, ya que es el tiempo que es usado en las fórmulas de los algoritmos astronómicos, y mientras no digamos lo contrario será el usado y lo seguiremos notando como $JD(t)$.

1.8 Coordenadas celestes.

Necesitaremos precisar con exactitud y de forma unívoca la posición de los astros en la bóveda celeste utilizando varios sistemas de coordenadas diferentes y cambiar las coordenadas entre tales sistemas. Pasaremos a continuación a describir cada uno de estos sistemas.

Las **coordenadas horizontales** tienen como plano de referencia el horizonte matemático del observador; o sea el plano del horizonte racional del observador. Tal plano de horizonte, como hemos dicho anteriormente, a efectos de la bóveda celeste se trata de un plano por el centro de la esfera celeste y corta a la bóveda en el círculo máximo llamado horizonte celeste y que separa la bóveda en dos hemisferios. Estos hemisferios corresponden, en cada instante de tiempo fijado, a los astros visibles por el observador, encima del horizonte, y no visibles por el observador, debajo del horizonte.

Las coordenadas horizontales permiten ubicar la **posición aparente** de un astro, para un observador cualquiera situado a una latitud y longitud terrestre dadas, para un instante de tiempo fijado. Serán estas

las coordenadas de los astros vistos desde las catedrales tratadas en este trabajo.

Las coordenadas horizontales son (Figura 1b): A = azimut, h = altura.

El **azimut** A de un astro es el ángulo contado sobre el horizonte que comienza a medirse desde el punto cardinal norte del plano del horizonte en dirección hacia el este hasta la vertical del astro correspondiente. El azimut tiene valores sexagesimales comprendidos en el siguiente intervalo: $0^\circ \leq A < 360^\circ$.

La **altura** h de un astro es el ángulo contado sobre la vertical del astro que comienza a medirse desde el horizonte hasta el astro correspondiente.

El signo de la altura h de un astro, relativo a un observador, constituye un criterio de visibilidad del mismo. Si el astro está por encima del horizonte (visible para el observador) tendremos $h > 0$; pero si está por debajo del horizonte (invisible para el observador) obtenemos $h < 0$. La altura tiene valores comprendidos en el siguiente intervalo: $-90^\circ \leq h \leq 90^\circ$.

El complemento de la altura es llamado **distancia cenital**, denotado con z , tal que: $z = 90^\circ - h$. El eje, por el centro de la esfera celeste, perpendicular al horizonte celeste corta en un punto visible para el observador en la esfera celeste, este punto como ya dijimos es llamado **zénit o cénit o cenit**.

Obsérvese que a causa del movimiento diario de rotación del eje terrestre, las coordenadas horizontales de un astro están cambiando permanentemente por lo que es necesario especificar el instante de tiempo de la observación. Y obsérvese que, en cualquier instante de tiempo, las coordenadas horizontales de dos observadores con distintas latitudes o longitudes también difieren.

A veces se encuentra la definición del azimut de tal forma que comienza a medirse desde el punto cardinal sur en dirección hacia el oeste. Evidentemente, si llamamos A' al azimut así definido tendremos entonces la relación: $A' = A \pm 180^\circ$. En nuestro trabajo mediremos desde el cardinal norte.

Las anteriores coordenadas horizontales serán las que nos permitirán proyectar los astros de la bóveda celeste, a través de los objetos arquitectónicos precisados, sobre la planta de las catedrales, paredes, etc. Sin embargo, a causa de movimiento diario, a la hora de hacer los cálculos y generar nuestros programas de cómputo, necesitaremos además las siguientes coordenadas –también las necesitaremos para el cálculo de analemas–.

Las **coordenadas ecuatoriales horarias** –o simplemente **coordenadas horarias**– tienen como plano de referencia el ecuador celeste. Las coordenadas son (Figura 1b): H =ángulo horario, δ =declinación celeste (o simplemente declinación).

El **ángulo horario** H de un astro es el ángulo contado sobre el ecuador celeste que comienza a medirse desde el meridiano del observador, en dirección hacia el oeste, hasta el círculo de declinación del astro correspondiente. Es de uso muy frecuente medir la amplitud el ángulo horario en unidades de tiempo. Es evidente que puesto que la bóveda celeste describe una circunferencia completa (360 grados sexagesimales) en 24 horas, tendremos que: $15^\circ = 1$ hora. El ángulo horario tiene valores comprendidos en el siguiente intervalo: $0^\circ \leq H < 360^\circ$ o en igual manera $0^h \leq H < 24^h$.

La **declinación celeste** δ , simplemente declinación, de un astro es el ángulo medido sobre el círculo de declinación de este astro y que comienza a contarse desde el ecuador celeste hasta el astro correspondiente. La declinación es positiva si la estrella está ubicada en el hemisferio norte celeste, de lo contrario es negativa. Estas coordenadas horarias, como también ocurre con las horizontales, dependen de la posición terrestre del observador, y de la hora de observación.

Necesitaremos pues, además de las anteriores coordenadas, aquellas que posicionen los astros de manera independiente del observador y de la hora de observación, o sea absolutas. Aunque como veremos más adelante, estas coordenadas también varían muy lentamente en cada instante de tiempo, pues existen varios fenómenos de distinta naturaleza que afectan en mayor o en menor grado a las coordenadas de los cuerpos celestes. Estos fenómenos los describiremos más adelante ya que habremos de tener en cuenta los cambios que ellos

producen en la posición de los astros. Los edificios que trataremos en este trabajo fueron construidos hace siglos, así que esos cambios no podremos soslayarlos.

Al igual que las coordenadas horarias, las **coordenadas ecuatoriales absolutas** (o simplemente **coordenadas absolutas**) tienen como plano de referencia el ecuador celeste. Las coordenadas son (Figura 1b): α = ascensión recta, δ = declinación.

La declinación es el ángulo ya definido anteriormente.

La **ascensión recta** α de un astro es el ángulo medido sobre el ecuador celeste contado desde el punto Aries en dirección contraria a la de las agujas del reloj, visto desde el Norte celeste, hasta el círculo de declinación del astro. Al igual que el ángulo horario, la ascensión recta de un astro se acostumbra a expresar en unidades de tiempo. La ascensión recta tiene valores comprendidos en el siguiente intervalo: $0^\circ \leq \alpha < 360^\circ$ o en igual manera $0^{\text{h}} \leq \alpha < 24^{\text{h}}$.

Las coordenadas ecuatoriales son absolutas, en el sentido de que son válidas para cualquier observador independientemente de su latitud y longitud geográfica.

Para los propósitos de la presente Tesis Doctoral los tres sistemas de referencia anteriores, junto con los cálculos que más adelante explicitaremos de intercambio de coordenadas entre ellos, son suficientes. Sin embargo, como líneas de investigación de futuro,

tenemos en mente hacer un estudio similar con las órbitas de planetas –la presente Tesis se centra en las órbitas de estrellas–. Pero para el cómputo de órbitas planetarias es preciso además tener presente las llamadas coordenadas eclípticas.

Las **coordenadas eclípticas** tienen la eclíptica como plano de referencia. Las coordenadas son (Figura 1c): λ =longitud eclíptica, β =latitud eclíptica.

Estas coordenadas ya fueron definidas anteriormente pero las volvemos a fijar:

La **longitud eclíptica** λ de un astro es el ángulo medido sobre la eclíptica que se cuenta a partir del punto vernal en dirección contraria de las agujas del reloj, visto desde el norte celeste, hasta círculo de latitud del astro. La longitud tiene valores comprendidos en el siguiente intervalo: $0^\circ \leq \lambda < 360^\circ$.

La **latitud eclíptica** β de un astro es el ángulo medido sobre el círculo de latitud del astro que comienza a contarse desde la eclíptica hasta el astro correspondiente; positiva en sentido al polo eclíptico boreal, negativa en el sentido del polo eclíptico austral. La latitud tiene valores comprendidos en el siguiente intervalo: $-90^\circ \leq \beta < 90^\circ$.

También son usadas frecuentemente las llamadas **coordenadas galácticas** las cuales tienen como plano de referencia el plano de la Vía Láctea. Sin embargo, dado que no las usaremos en el presente estudio,

ni tampoco en las líneas de investigación futuras relativas a planetas, no las definiremos aquí, ni daremos las fórmulas de cambio a este sistema de coordenadas.

Existen varios fenómenos de distinta naturaleza que afectan en mayor o en menor grado a las coordenadas de los cuerpos celestes. Estos fenómenos son: *Precesión terrestre*, *Movimiento estelar propio* en el espacio (estos dos primeros fenómenos conforman el llamado **Equinoccio medio**), *Nutación terrestre*, *Aberración anual*, *Paralaje anual*, *Refracción astronómica*, *Defección gravitacional de la luz* (todos ellos conforman el llamado **Equinoccio real**). A efectos del presente trabajo, los que realmente afectan de manera significativa a los problemas tratados son la precesión terrestre y el movimiento estelar propio. O sea, en nuestros cálculos consideraremos el Equinoccio medio, pues a nuestros propósitos el resto de fenómenos combinados (Equinoccio real) afecta solo en una diferencia máxima de 7" segundos de arco sexagesimal, básicamente por el efecto de la nutación; y esta diferencia máxima es irrelevante a los efectos y conclusiones del trabajo presente.

1.9 Reloj de Sol para hora verdadera.

No pretendemos en el presente trabajo hacer relojes de Sol; sin embargo, cualquier proyección de la sombra de un objeto arquitectónico –por ejemplo el centro de un rosetón o el pico de un obelisco– sobre una planta o pared es en esencia un reloj de Sol, si tal proyección la

relacionamos con la hora. Así que en esta sección y en la siguiente detallaremos este tema gnomónico.

Fijada una localización terrestre, hemos definido el tiempo verdadero: las horas, minutos y segundos verdaderos. Se trata de un concepto local, puesto que depende del meridiano del lugar. Le añadiremos, o restaremos según convenga, 12 horas verdaderas para computar como comúnmente se hace al decir que son las 12^h cuando se trata del medio día local. Este tiempo verdadero fue utilizado ampliamente hasta bien entrado el siglo XX, pero en la actualidad no hallaríamos ya a casi nadie que se rigiera por este tiempo. Hoy casi todo el mundo utiliza la hora civil, y aún más que eso, casi todos nos regimos por la hora legal –que podemos encontrar en las televisiones y radios–. Esta hora legal, en un lugar determinado, podríamos aproximarla, como hemos comentado anteriormente –al hablar del UTC, TAI, efemérides, etc. –, por el tiempo universal, añadiendo una hora o dos horas, dependiendo de la época del año, junto con el ajuste de la convención de los husos horarios y la diferencia de longitud terrestre. Así que la hora local solar verdadera puede ser muy diferente a la legal. Pero, incluso aunque nos encontrásemos en el meridiano de Greenwich y no añadiésemos horas por la época del año, la hora oficial podría diferir en casi un cuarto de hora con la verdadera a causa de la ecuación de tiempo.

Como hemos dicho anteriormente, el tiempo solar verdadero (el que marcan los relojes de Sol tradicionales) no es uniforme. Ello significa que el tiempo que tarda el Sol entre dos pasos consecutivos por un mismo meridiano no es siempre el mismo y depende del día a lo largo

del año. Para remediar esto se inventó, como dijimos, el tiempo medio. La duración de los días solares verdaderos no es la misma para todos ellos; los días medios sí la tienen –aunque, como hemos visto, el segundo medio no es rigurosamente constante y por eso hemos acudido al tiempo atómico–. Los relojes mecánicos o digitales, los relojes que utilizamos casi todos actualmente, marchan de manera uniforme y son por tanto incapaces de señalar la hora verdadera. Lo que en realidad marcan es la hora de tiempo medio. La diferencia entre el tiempo solar medio y el verdadero, ecuación de tiempo, como ya dijimos puede llegar a ser de más o menos un cuarto de hora –de facto según en la ecuación de tiempo, la diferencia máxima negativa del tiempo medio menos el verdadero es -16^m24^s que se alcanza entre el 3 y el 5 de noviembre, y la diferencia máxima positiva es $+14^m19^s$ que se alcanza entre el 10 y el 12 de febrero; aunque, como sabemos, esto no es completamente riguroso y cada año se sufren pequeñas modificaciones–. Ello significa que el Sol no pasa siempre a las doce del mediodía de tiempo medio, sino que se retrasa o se adelanta, y estos retrasos o adelantos llegan a ser como máximo de un cuarto de hora aproximadamente. Dicho de otra forma, que como los relojes de Sol tradicionales marcan el tiempo verdadero; tendrán un error, en más o en menos, respecto de la hora de los relojes mecánicos que podrá llegar a ser de un cuarto de hora, dependiendo de la época del año. Puede observarse en la ecuación de tiempo que hay cuatro días del año en que la diferencia es nula: 16 de abril, 14 de junio, 2 de septiembre y 26 diciembre (Figura 1e).

El reloj de Sol más sencillo es el llamado **cuadrante ecuatorial**. Consiste en una varilla (o **gnomon**) paralela al eje de rotación de la

Tierra (o de la bóveda celeste, según el punto de vista que se adopte) que proyecta su sombra sobre un plano perpendicular a dicha varilla (paralelo, por tanto, al plano de la equinoccial) en el cual están marcadas las líneas de las horas. Puesto que la trayectoria aparente del Sol durante un día cualquiera está en un plano perpendicular al gnomon y paralelo, por tanto, al plano del reloj donde se hallan marcadas las líneas de las horas, dichas líneas deberán estar separadas por intervalos angulares iguales a 15° sexagesimales cada uno.

Un reloj de Sol como el que hemos descrito puede construirse para que marque la hora solar verdadera local o la hora solar verdadera de Greenwich, como se desee. En el primer caso la línea de las 12^{h} debe coincidir con la intersección del plano del reloj y el plano del meridiano. En el segundo caso primero se construiría el reloj como hemos descrito, es decir para que marque la hora verdadera local, y luego se haría girar el dibujo de las líneas horarias una distancia angular igual a la longitud geográfica del lugar. Dicho giro se haría en un sentido o en otro según que el lugar se halle al este o al oeste de Greenwich, de tal manera que se adelante el reloj (respecto de la hora que marcaría sin el giro) si el lugar se hallare al oeste, y se retrase si el lugar se hallare al este.

Como el Sol en la esfera celeste está medio año por encima de la equinoccial (en el hemisferio boreal, primavera y verano) y medio año por debajo, y como el plano del cuadrante ecuatorial es el plano de la equinoccial (si se considera la bóveda celeste centrada en el punto de intersección del gnomon con el plano del reloj), durante medio año la sombra del gnomon se producirá en una cara del plano del reloj (por

encima) y durante medio año la sombra se producirá en la otra cara (por debajo). En los dos equinoccios, como el Sol se halla en el mismo plano del reloj (en la equinoccial), el gnomon no hará sombra sobre dicho plano y el reloj no funcionará.

Veamos ahora los relojes de Sol de pared y los horizontales. Consideremos que el gnomon del reloj de Sol ecuatorial anterior está ahora clavado en una pared vertical o en el suelo. Si queremos marcar la sombra del gnomon sobre la pared en las distintas horas del día, y así obtener el **reloj de Sol de pared**, no tenemos más que considerar las intersecciones con la pared de los distintos planos determinados por el gnomon y las líneas horarias correspondientes del reloj de sol ecuatorial. E igualmente, si consideramos la intersección con el suelo de dichos planos, tendremos entonces las líneas horarias del **reloj de Sol horizontal** correspondiente.

1.10 Reloj de Sol para hora media, *analemas*.

Los relojes solares anteriores, los cuáles son tradicionales, marcan el tiempo solar verdadero. Para que un reloj de Sol marque el tiempo medio deben substituirse las líneas rectas tradicionales que señalan las horas, por curvas. Estas curvas se denominan **analemas**. Cada analema corresponde a una hora. Además, el gnomon que produce la sombra debe substituirse por un punto Q . Cada curva analema tiene dos ramas, una rama indica la hora durante primavera y verano, y la otra rama la indica durante otoño e invierno. En un reloj

así, son las 12^h, por ejemplo, cuando la sombra del punto está sobre la rama correspondiente del analema de las 12^h. Los relojes de este tipo marcan la hora de tiempo medio (como los relojes mecánicos uniformes) y se llaman **relojes de sol analemáticos**.

Además de señalar la hora media con bastante precisión (pueden construirse con un error inferior a un minuto medio), marcan también cambios de signos del zodiaco y los cambios de estación. Sus líneas pueden ser dibujadas por un plotter de ordenador, a tamaño natural, si se procede a la programación computacional astronómica necesaria, tal como haremos aquí en esta Tesis en el Capítulo IV. Y las líneas pueden ser copiadas desde el papel que saliere del plotter a la cerámica por ceramistas experimentados.

Para construir las analemas se procede mediante los cálculos necesarios que permiten determinar la sombra del punto Q sobre una pared en un instante de tiempo fijado. En el Capítulo II mostraremos los cálculos necesarios para tal determinación y en el Capítulo IV procedemos a ellos. Ahora, baste decir que se requiere programar un algoritmo que calcule la sombra de Q , durante cada día del año a una hora media k fijada, encontrando primero para esa hora media fijada: el ángulo horario y declinación del Sol; y añadiendo además la ecuación de tiempo para poder relacionar la hora media con la verdadera. Con este proceso, el conjunto de puntos obtenido formará la analema de esa hora media k fijada. Habrá que repetir todo el proceso para cada hora media k diferente, y así construir las analemas diferentes deseadas. De facto, lo que se obtiene es el conjunto de las coordenadas de los puntos

de las analemas, y con ellas es posible dibujar con un plotter de manera tangible las analemas para físicamente construir el reloj analemático.

Si se desea que la hora marcada por el reloj no sea la hora media local, sino que sea la hora media de Greenwich (que, junto con la hora o dos horas añadidas, es la que marcan en España nuestros relojes mecánicos), entonces además ha de tenerse en cuenta la longitud terrestre del lugar en los cálculos anteriores a efectos de hacer la corrección en el ángulo horario del Sol.

Aunque no es el objetivo de esta Tesis Doctoral hacer relojes de sol analemáticos, el proceso de proyección de la sombra de un punto sobre una pared para encontrar las analemas es similar al proceso de proyección de la posición de una estrella a través de un elemento arquitectónico sobre la planta de un edificio, o sobre cualquier plano. Con lo cual, los conceptos explicados son importantes para el trabajo presentado. De facto, los cálculos necesarios para la construcción de las analemas y, de manera similar, la proyección y visualización de estrellas a lo largo de intervalos de tiempo, los presentamos en el Capítulo II. Y en el Capítulo IV mostraremos códigos de nuestros programas numéricos de cálculo con algoritmos para analemas y proyección-visualización de estrellas.

Los intervalos de tiempo siempre los determinaremos con el concepto astronómico de cómputo de tiempo del día Juliano de efemérides tal como hemos dicho en la sección 1.7, salvo que se avise de lo contrario.

1.11 Precesión terrestre.

De manera genérica, el fenómeno de precesión consiste en el movimiento del eje de rotación de un cuerpo alrededor de un eje fijo, que es originado por la presencia de una fuerza externa. El ejemplo simple para observar la precesión es una peonza rotando. Una peonza corriente es un cuerpo con una acumulación de masa sobresaliente en su parte superior. Al girar la peonza sobre una superficie plana dura horizontal, su eje de rotación (con la dirección de la punta) no permanece perpendicular al suelo. Cualquier perturbación, pérdida de energía generada por rozamiento con la superficie y con el aire, hace que el eje forme un ángulo de inclinación respecto a un eje normal a la superficie. Esta inclinación es causada por la atracción gravitacional terrestre sobre el exceso de masa existente en la parte superior de la peonza.

El efecto resultante consiste en que el eje de rotación de la peonza comienza a girar lentamente alrededor del eje perpendicular a la superficie, esto es, el eje de rotación describe una circunferencia en el espacio. La fricción causa que la peonza termine perdiendo toda su velocidad de rotación, con lo que la peonza termina acostándose sobre la superficie horizontal. Se obtiene de manera inmediata el mismo resultado si se coloca la peonza estática sin rotación sobre su punta con su eje perpendicular a la superficie, lo cual es una posición de equilibrio altamente inestable, y se suelta.

El planeta Tierra en su movimiento de rotación también posee el mismo efecto de precesión, que llamaremos ***precesión terrestre***. Esto se debe a que la Tierra tiene exceso de masa ubicado alrededor del sector ecuatorial junto con el campo gravitacional que sobre la Tierra generan los cuerpos: Luna, Sol, y planetas en menor medida.

Si la Tierra dejara de rotar, el efecto de la atracción gravitacional sobre el exceso de masa haría que con el tiempo la oblicuidad de la eclíptica pasaría de su valor aproximado de $23^{\circ} 27'$ a un valor cercano a cero; el ecuador celeste se alinearía con un plano intermedio entre la eclíptica y el plano de la órbita lunar. Sin embargo las fuerzas de rozamiento no son lo suficientemente fuertes como para que se detenga el movimiento de rotación de la Tierra. El efecto de la precesión sobre el eje de rotación terrestre hace que el eje describa en el espacio una circunferencia de radio muy estable alrededor del polo celeste. Así, la Tierra responde a las fuerzas gravitacionales exteriores no cambiando la inclinación de su eje sino haciendo rotar el eje muy lentamente alrededor de la normal al plano de la eclíptica. El movimiento de precesión para nuestro planeta (también conocido como ***precesión de equinoccios***) es muy lento, de unos $50.23''$ segundos de arco sexagesimal por año, lo cual equivale a una rotación completa al cabo de unos 25801.31 años.

Uno de los efectos astronómicos que se aprecia inmediatamente es que el Polo norte celeste –NCP– no está fijo con respecto a la bóveda celeste: se mueve lentamente realizando una vuelta completa alrededor del polo eclíptico Π cada 25801.31 años. Conociendo que la circunferencia que describe el NCP alrededor de Π tiene un radio que subtiende $23^{\circ} 27'$

podemos conocer cuál es la posición del NCP para cualquier tiempo en el pasado o en el futuro. Actualmente el NCP está a unos $0^{\circ} 45'$ de la estrella *Polaris* (α Ursae Minor). Unos 4600 años atrás el NCP estaba muy cerca de la estrella *Thuban* (α Draconis). Hace tres mil años, el NCP se había desplazado hasta pasar cerca de la estrella *Kochab* (β Ursae Minor). En el futuro, dentro de diez mil años, el NCP se ubicará cerca de la estrella *Vega* (α Lyrae) (Figura 1f).

Pero el movimiento del NCP tiene otra consecuencia importante en lo que se refiere a la observación de la bóveda celeste para un observador ubicado siempre a una latitud determinada. Al desplazarse lentamente el NCP alrededor de Π , el punto Aries se va desplazando en la misma dirección (y con la misma velocidad). Esto es, los puntos equinocciales se van desplazando a lo largo de la eclíptica con una velocidad del orden de $50.23''$ segundos de arco por año, y lo hace en el sentido contrario del movimiento del sol a lo largo de la eclíptica; por ello, se le llama retrógrado. El punto vernal atraviesa las trece constelaciones (no confundir con los 12 *signos zodiacales sensibles* descritos anteriormente; y mucho menos con los 12 *signos zodiacales racionales*) por las que pasa la eclíptica en un término de 25801.31 años. Esto explica porqué el fenómeno es conocido también como *precesión de los equinoccios*. También explica porqué el punto vernal es llamado *punto de Aries*. Actualmente, el punto vernal está ubicado en la constelación de Piscis. Pero hace 2500 años, en la época en que se consolidó la astrología griega, el punto vernal estaba ubicado en la constelación de Aries. El nombre ha perdurado hasta nuestra época pero se ha de estar atento para evitar confusiones. Dentro de unos 600 años el punto

vernal dejará de estar en Piscis para entrar a la constelación de Acuario (teniendo en cuenta la actual definición de las fronteras entre las constelaciones). Y este desplazamiento de los puntos equinociales es el responsable de que dentro de 12000 años, cuando el PNC se encuentre en algún punto entre las constelaciones de Hércules y la Lira, constelaciones que actualmente están en el hemisferio norte celeste, tales como Aries, Tauro, Géminis, Cáncer, Leo y el Can Menor, se ubiquen en el hemisferio sur celeste. De igual forma, constelaciones como El Cuervo, Libra, Escorpión, Sagitario, Capricornio y Acuario (ahora ubicadas en el hemisferio sur celeste) se encontrarán, para ese período de tiempo, en el hemisferio norte. El astrónomo Hiparco de Nicea descubrió el fenómeno de precesión alrededor del año 150 BCE; aunque, Hiparco evaluó el corrimiento del punto vernal en una magnitud de 36" segundos de arco sexagesimal por año.

La precesión hace desplazar lentamente el punto Aries a lo largo de la eclíptica y, puesto que es desde este punto que comienza a contarse la ascensión recta, se deduce que las coordenadas ecuatoriales de cualquier astro van cambiando con el tiempo. Ello quiere decir que las coordenadas de las estrellas deben ir acompañadas por el instante de tiempo que indique con respecto a qué equinoccio se está haciendo referencia, ese instante es lo que llamamos **época astronómica**.

Un estudio riguroso de la precesión (y la nutación) requiere el manejo de perturbaciones en mecánica celeste. Mostraremos fórmulas de cálculo riguroso en el Capítulo II, las cuáles son las que usaremos en el trabajo presente y que pueden ser encontradas en *Astronomical*

Algorithms de J. Meeus [Meeus, 1991]. Si bien, como veremos, las fórmulas que mostramos y usamos son más generales, pues tienen en cuenta no solo la precesión, sino también el **movimiento propio** de los astros. Con tales fórmulas encontraremos el efecto de la precesión sobre las coordenadas ecuatoriales absolutas de los astros. El fenómeno de precesión obliga a que se establezca una fecha arbitraria y fija, que se usa como un **datum** de referencia, a la cual se le denomina **época astronómica**. Las coordenadas de las estrellas se especifican con respecto a dicha época. Una **época estándar** especifica el sistema de referencia al cual se refieren las coordenadas de las estrellas. Desde el año 1984 la **época estándar de referencia** utilizada se designa como **J2000.0**. Cuando se escribe *J2000* lo que se quiere decir es el instante 1 de enero a las 12^h según meridiano Greenwich del año Gregoriano 2000. Recordemos que dijimos que en el capítulo 10 de *Astronomical Algorithms* de J. Meeus pueden encontrarse las fórmulas para la pequeña variación existente $\Delta T = TD - TU$, y que usaremos el Juliano de efemérides en los algoritmos astronómicos, o sea el tiempo dinámico.

1.12 Movimiento propio estelar.

Como hemos dicho, se dice que usamos **Equinoccio medio** en nuestros cálculos cuando las coordenadas celestes son transformadas teniendo en cuenta la precesión terrestre y el movimiento propio estelar.

Las estrellas se van desplazando en el espacio. Con el tiempo, las estrellas van cambiando de posición unas con respecto a las otras en la

esfera celeste. Sin embargo, este movimiento es tan lento que comparado con el tiempo de vida de una persona es muy poco perceptible, por lo que resulta apreciable solo a escalas grandes de tiempo. El primero en reportar movimientos propios de estrellas fue Edmond Halley en 1718.

Halley había medido las posiciones de varias estrellas y las había comparado con las posiciones del catálogo del *Syntaxis Mathematica (Almagesto)* de Ptolomeo (siglo II CE) encontrando importantes diferencias. Concluyó que ni la precesión ni los errores de observación eran suficientes como para explicar las diferencias. Entre las estrellas a las que se les había detectado movimiento propio estaban *Sirio*, *Aldebarán* y *Arturo*.

El movimiento en el espacio de una estrella se puede dividir en dos movimientos: el movimiento propio denotado por μ , observable sobre la esfera celeste, y el radial. El **movimiento propio** es aquel que ocurre perpendicularmente en la línea de visión del observador, por lo que da cuenta de la velocidad tangencial de la estrella en la esfera celeste. Se suele expresar en componentes de la ascensión recta y de la declinación. Las estrellas del vecindario solar se mueven aparentemente a velocidades tangenciales del orden de unos 0.5 a 4 segundos de arco sexagesimal por año, aunque hay estrellas que pueden barrer 7 y hasta 9 segundos de arco anuales. El récord lo tiene la estrella de *Barnard*, una pequeña estrella, solo visible por telescopio, que alcanza la sorprendente cifra de 10.3 segundos de arco anuales. Ello significa que puede barrer el diámetro aparente de la luna llena (30 minutos de arco)

en unos 175 años. Pero en general los movimientos propios son tan lentos que se suelen expresar en *mas/año*, o sea en milisegundos de arco horario por año para la ascensión recta, y milisegundos de arco sexagesimal por año para la declinación. En Capítulo II de la presente Tesis presentamos el cálculo del cambio de coordenadas con el Equinoccio medio con fórmulas rigurosas y alta precisión teniendo en cuenta el movimiento propio.

Los astrónomos miden tanto el movimiento propio como el radial, y nosotros obtendremos los datos necesarios para el presente trabajo de la base de datos astronómicos denominada SIMBAD [SIMBAD], la cual es ofrecida por la Universidad de Estrasburgo y accesible públicamente en <http://simbad.u-strasbg.fr/simbad>.

1.13 Magnitud aparente.

La escala con la que se mide la magnitud del brillo aparente de las estrellas, tiene su origen en la práctica helenística de dividir las estrellas visibles con ***ojo desnudo*** en seis magnitudes. Las estrellas más brillantes fueron pensadas para formar parte de la primera magnitud ($\mathbf{v}=+1$), mientras que las más débiles eran consideradas como de sexta magnitud ($\mathbf{v}=+6$), la cual es el límite del ojo humano (sin ayuda de un telescopio). Este método, algo primitivo, para indicar el brillo de estrellas fue divulgado por Ptolomeo en su *Syntaxis Mathematica (Almagesto)*, y se cree que pudo haber sido originado por Hiparco de Nicea. Este sistema original no medía la magnitud del Sol. Debido al

hecho de que la respuesta del ojo humano a la luz es logarítmica la escala que resulta es también logarítmica. En 1856 Norman Pogson formalizó el sistema definiendo que *una típica estrella de primera magnitud es aquella 100 veces más brillante que una típica estrella de magnitud sexta*; así, una estrella de primera magnitud es aproximadamente 2.512 veces más brillante que una de segunda magnitud. La raíz quinta de 100 se conoce como cociente de Pogson. La escala de Pogson se fijó originalmente asignando a la estrella *Polaris* la magnitud de 2. Pero dado que los astrónomos han descubierto que la estrella *Polaris* es levemente variable, ahora se utiliza la estrella *Vega* como referencia.

El sistema moderno no se limita a 6 magnitudes. Los objetos realmente brillantes tienen magnitudes negativas. Por ejemplo *Sirio*, la estrella más brillante, tiene una magnitud aparente -1.46. La escala moderna incluye a la Luna y al Sol. Así, por ejemplo tenemos la magnitud aparente visual ▼ de los siguientes astros (según la base de datos astronómica SIMBAD): Sol -26.8; Luna -12.6; Venus -4.4; *Sirio* -1.46; *Canopus* -0.74; *Arturo* -0.05; *Vega* 0.03; *Spica* 0.97; *Polaris* 2.02.

Los telescopios Hubble y Keck han localizado estrellas con magnitudes de +30. En el Capítulo II ofrecemos las fórmulas precisas que relacionan la magnitud aparente entre las estrellas.

1.14 Nutación terrestre.

La nutación es un pequeño efecto que se origina también por el efecto gravitatorio del Sol, la Luna y los planetas sobre la Tierra. La principal contribución a este efecto proviene de la Luna. Desde el punto de vista matemático la precesión y la nutación surgen como un mismo fenómeno en el estudio teórico de la rotación de la Tierra perturbada gravitacionalmente. Este fenómeno fue descubierto por James Bradley. Este astrónomo, allá por el año 1727, notó que las declinaciones de ciertas estrellas parecían mostrar un movimiento sutilmente errático. Años después encontró la explicación: el eje de la Tierra estaba dotado de un movimiento de cabeceo originado por la atracción de la Luna sobre el ligero exceso de masa que la Tierra posee en el ecuador. El cabeceo del eje terrestre origina un desplazamiento aparente de las estrellas de tal forma que parecen describir elipses minúsculas alrededor de sus posiciones promedio.

La nutación, como se entiende hoy matemáticamente, es la combinación de numerosas oscilaciones de corto período del eje de rotación terrestre cuyo efecto es cambiar muy ligeramente la posición del polo norte celeste y por consiguiente del punto Aries tanto en la dirección de longitud eclíptica como en la latitud eclíptica. El término de oscilación más conocido y de mayor amplitud (el que descubrió Bradley) es aquel que está íntimamente ligado con la longitud de los nodos de la órbita lunar. La línea de los nodos lunares, en su órbita en torno a la Tierra, describe una revolución completa en unos 18.666 años. El efecto de nutación es el responsable de que el Polo norte celeste verdadero

difiera del Polo norte medio (el que describe la precesión) tanto en longitud como en latitud eclíptica.

Dicho de otra forma: la Nutación es un pequeño movimiento de vaivén del eje de giro de la Tierra. Si se observase el vaivén sin que se moviera polo norte celeste por su línea de precesión, se vería que se trata de un movimiento elíptico que tiene una extensión de 9.21 segundos de arco en el semieje focal, en dirección al polo de la eclíptica perpendicular a la línea de precesión, y una extensión de 6.85 segundos de arco en el semieje menor, en dirección paralela a la eclíptica tangente a la línea de precesión. Pero la oscilación introducida por la nutación, vista con el movimiento de precesión genera una senoide en torno a la línea que a causa de la precesión hace el polo celeste.

Figuras relacionadas con el Capítulo I

Figura 1a. La esfera armilar, también conocida como astrolabio esférico, fue inventada por Eratóstenes alrededor del 255 a. C. Su nombre procede del latín armilla (círculo o brazaletes), dado que el instrumento está construido sobre un esqueleto de círculos graduados mostrando el ecuador, la eclíptica, los meridianos y paralelos astronómicos.

Figura 1b. En este esquema podemos observar gráficamente los siguientes conceptos básicos astronómicos: Meridiano del lugar, Polo Norte Celeste, Polo Sur Celeste, Eje del mundo, Eclíptica, Cenit, Nadir, Horizonte, Ecuador celeste, Círculo de declinación, Acimutal de astro y el Punto Aries o el Punto Libra, entre otros.

Figura 1c. En este esquema podemos observar gráficamente los siguientes conceptos básicos astronómicos: Coluro de solsticios, Coluro de Equinoccios, Círculo diario, Trópico de Cáncer, Crepúsculo, Horizonte, Ecuador celeste, Almicantarate, Eclíptica, Trópico de Capricornio y el Círculo de latitud, entre otros.

Figura 1d. En este esquema podemos observar gráficamente los siguientes conceptos básicos astronómicos: Perigeo, Apogeo, Eclíptica, Ecuador celeste, Sol, Sol ficticio, Sol medio y el Meridiano del lugar, entre otros.

Figura 1e. En el eje de las abscisas mostramos los días del año contados a partir de enero. En el eje de las ordenadas mostramos la diferencia entre los tiempos verdadero y medio en minutos.

Figura 1f. Efecto astronómico de variación del Polo Norte celeste por la precesión del eje terrestre.

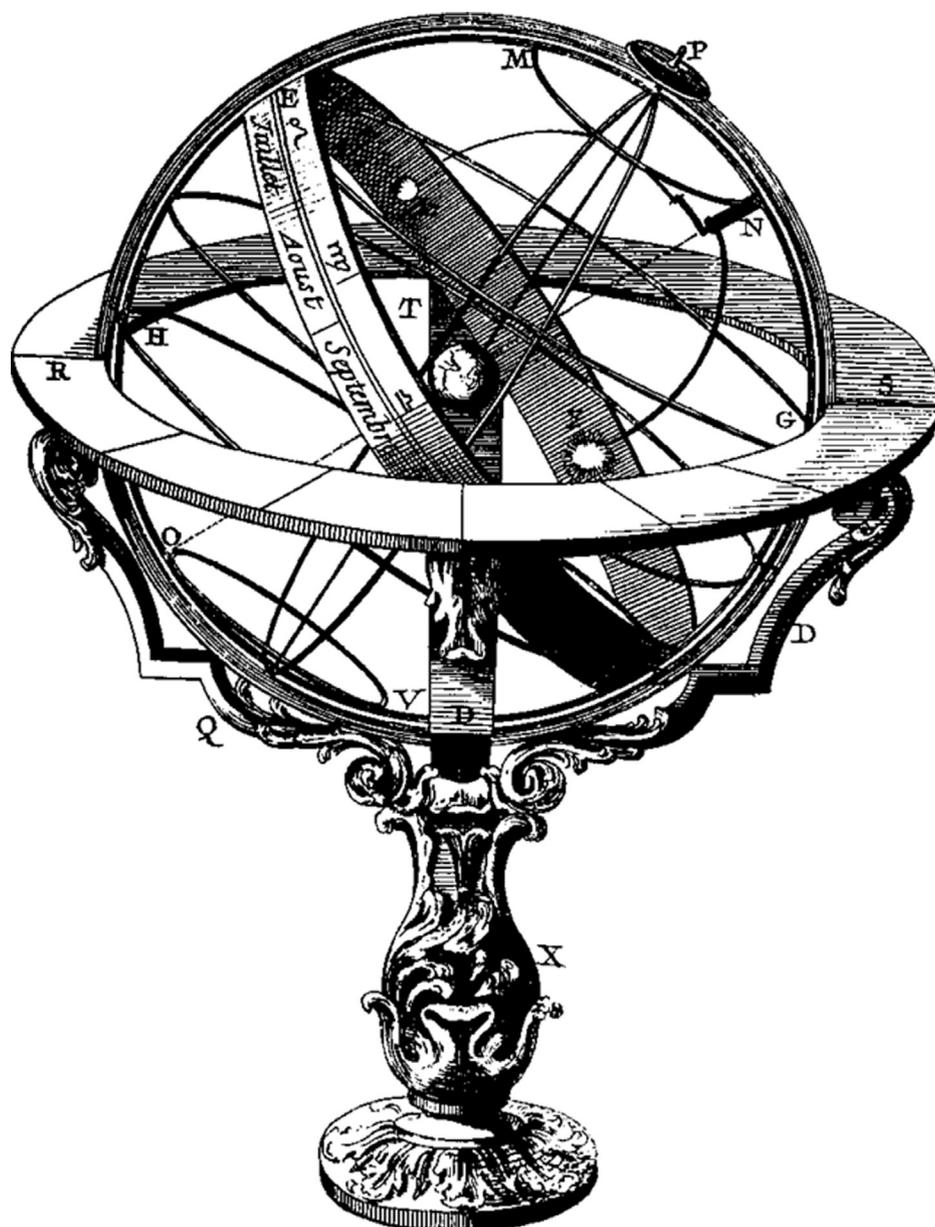


Figura 1a

UNIVERSITAT ROVIRA I VIRGILI

ANÁLISIS GEOMÉTRICO Y ASTRONÓMICO EN LA CATEDRAL DE CHARTRES

Juan Miguel Seguí Colomar

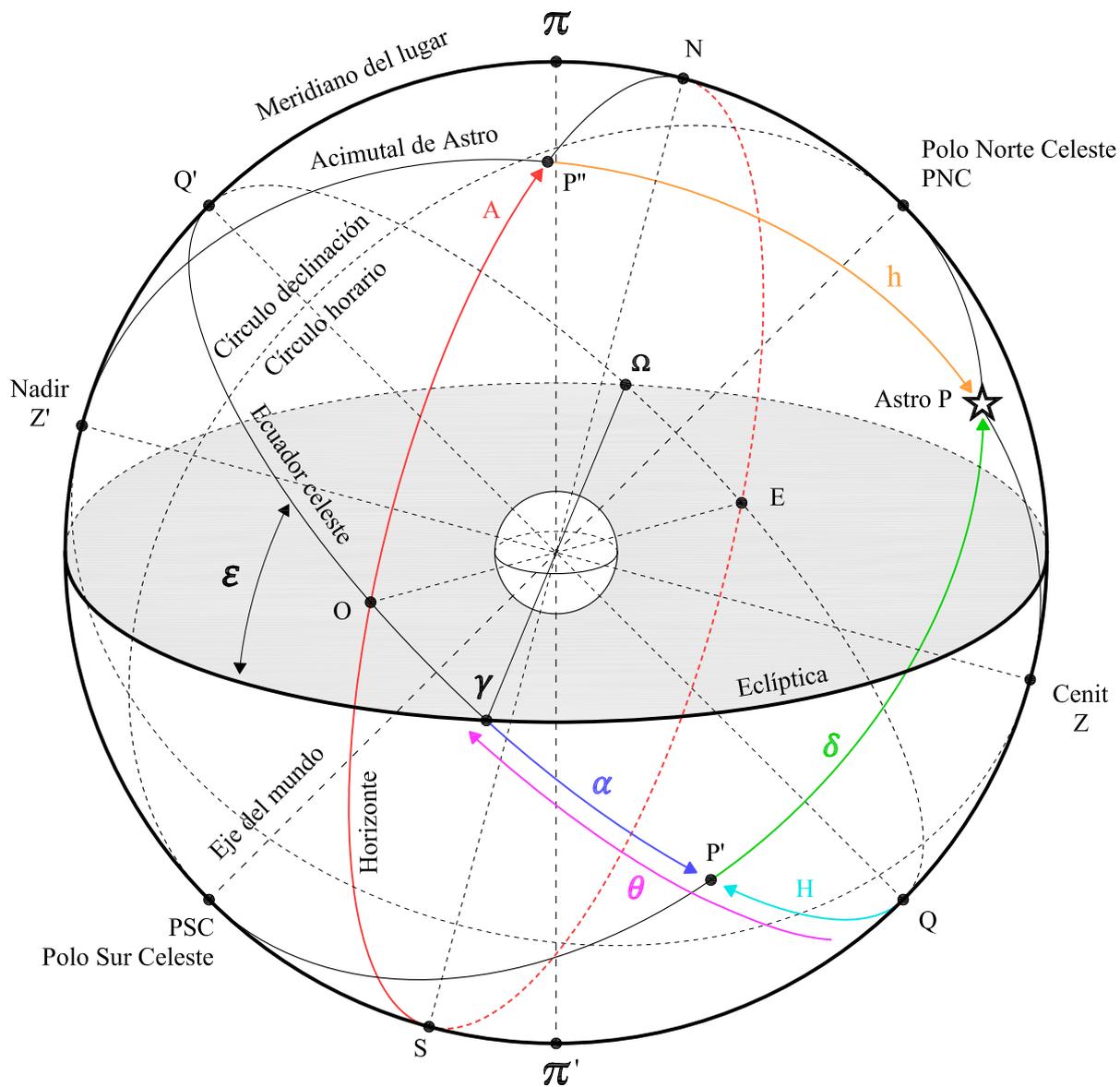


Figura 1b

UNIVERSITAT ROVIRA I VIRGILI

ANÁLISIS GEOMÉTRICO Y ASTRONÓMICO EN LA CATEDRAL DE CHARTRES

Juan Miguel Seguí Colomar

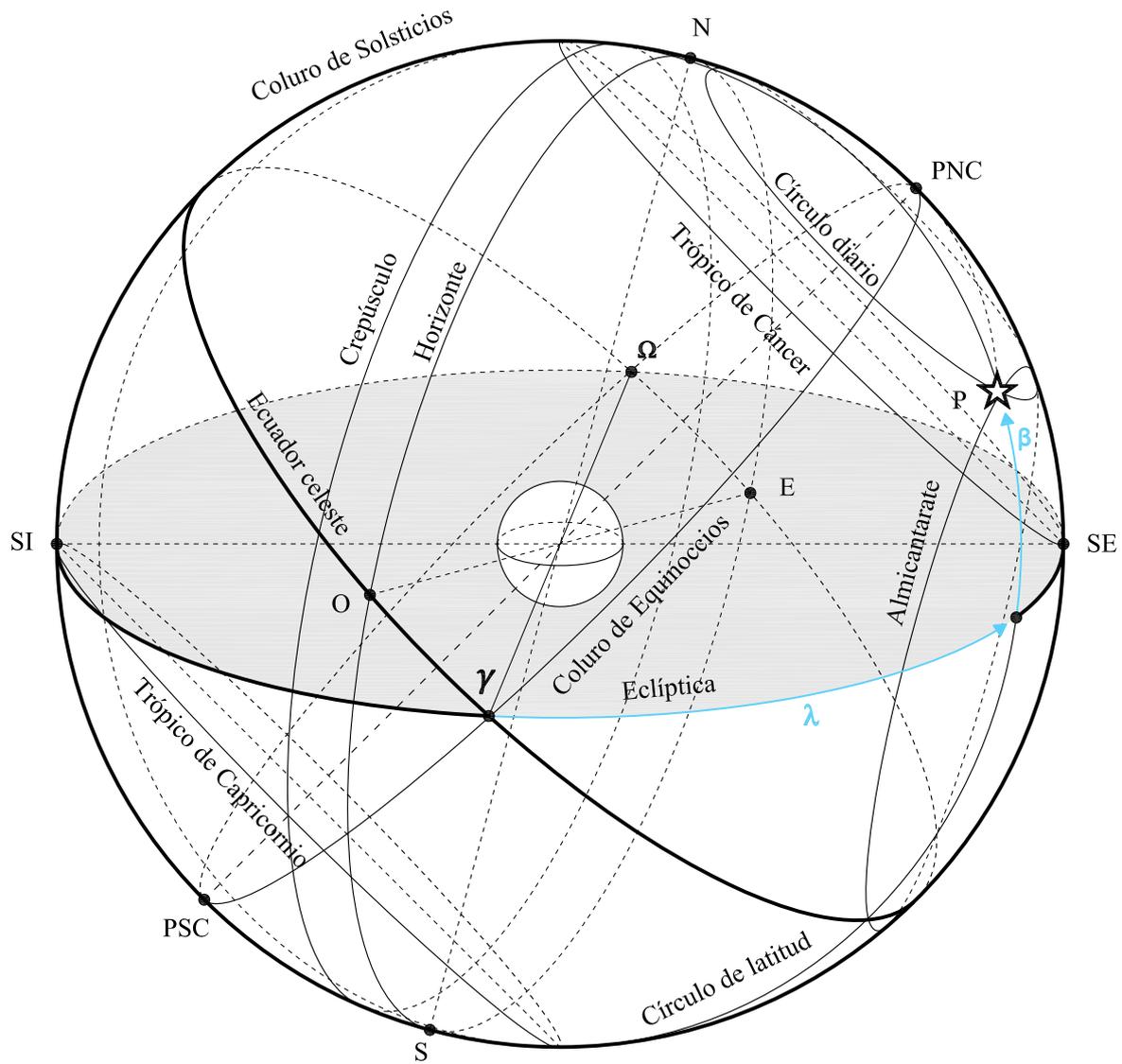


Figura 1c

UNIVERSITAT ROVIRA I VIRGILI

ANÁLISIS GEOMÉTRICO Y ASTRONÓMICO EN LA CATEDRAL DE CHARTRES

Juan Miguel Seguí Colomar

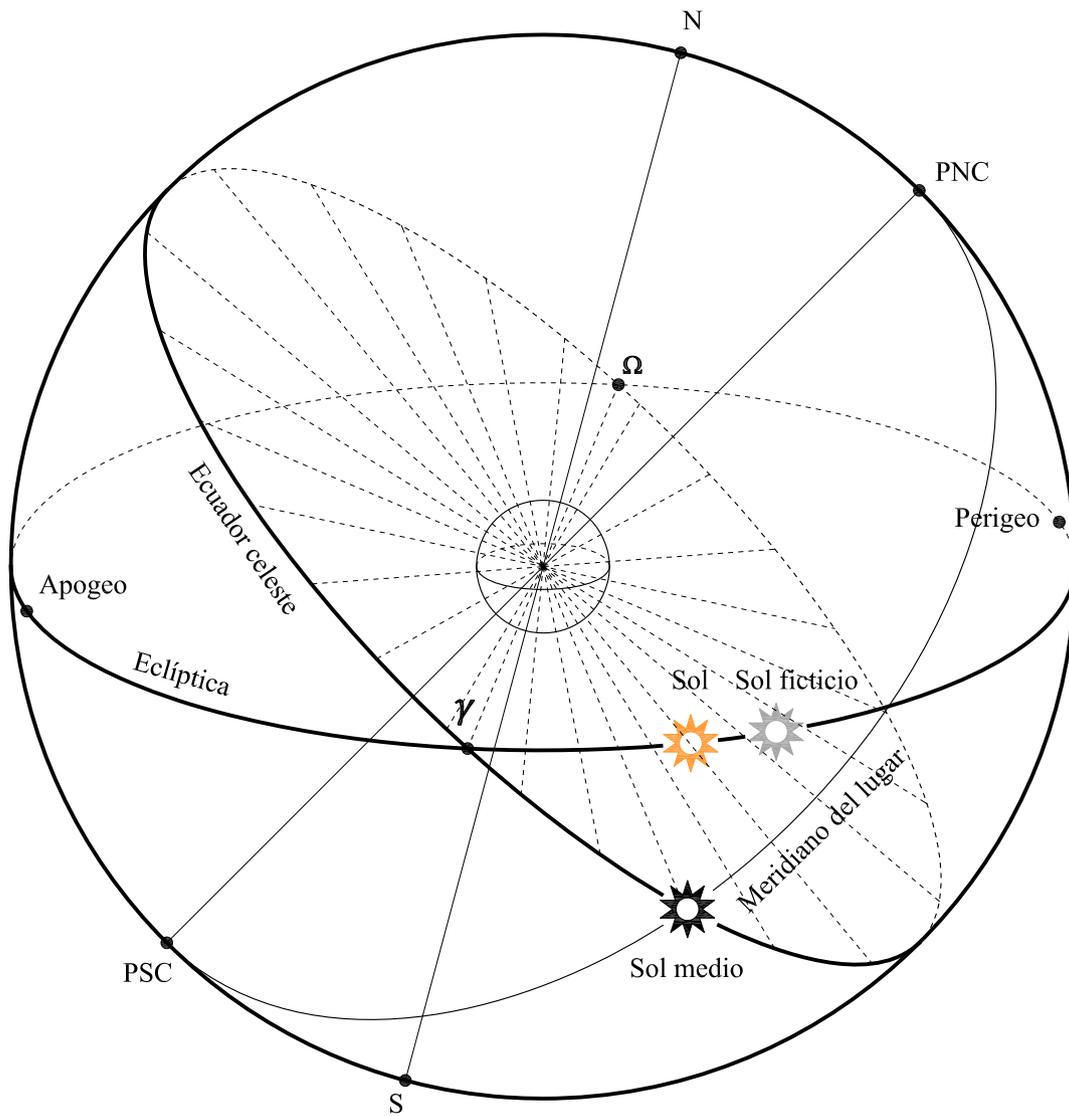


Figura 1d

UNIVERSITAT ROVIRA I VIRGILI

ANÁLISIS GEOMÉTRICO Y ASTRONÓMICO EN LA CATEDRAL DE CHARTRES

Juan Miguel Seguí Colomar

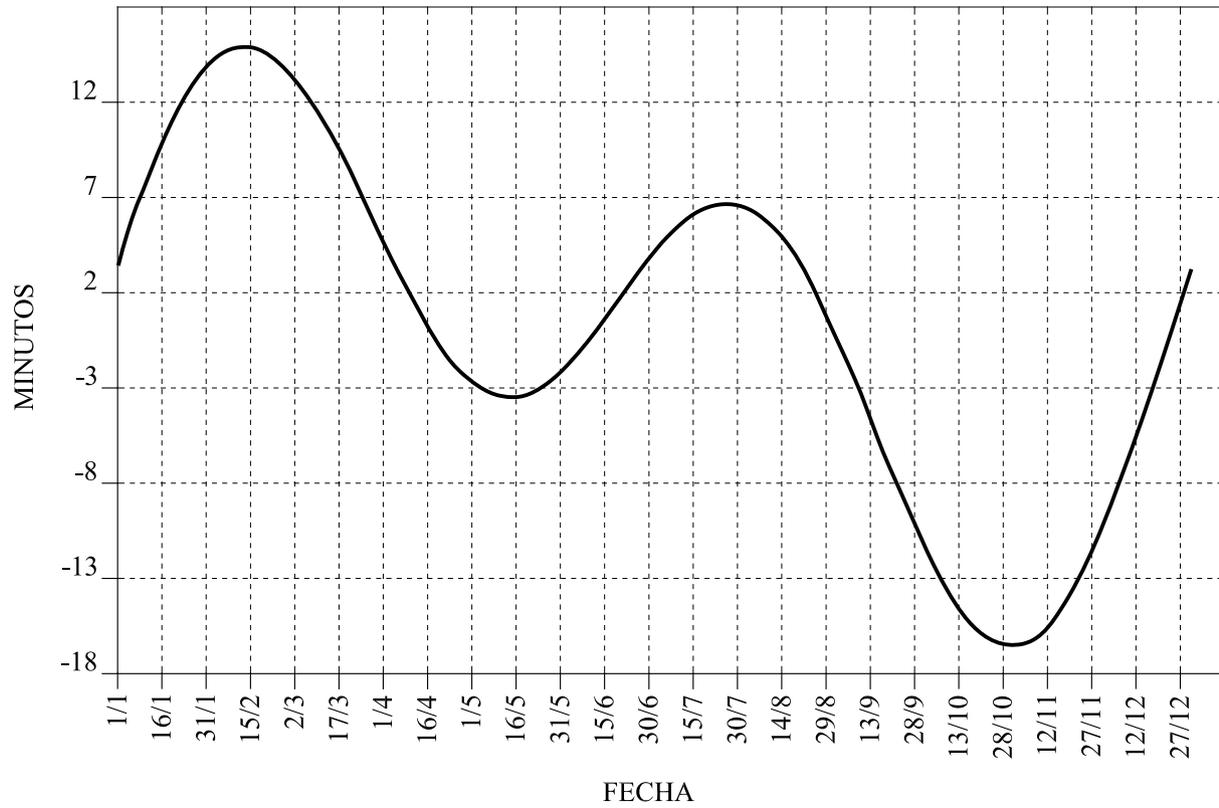


Figura 1e

UNIVERSITAT ROVIRA I VIRGILI

ANÁLISIS GEOMÉTRICO Y ASTRONÓMICO EN LA CATEDRAL DE CHARTRES

Juan Miguel Seguí Colomar

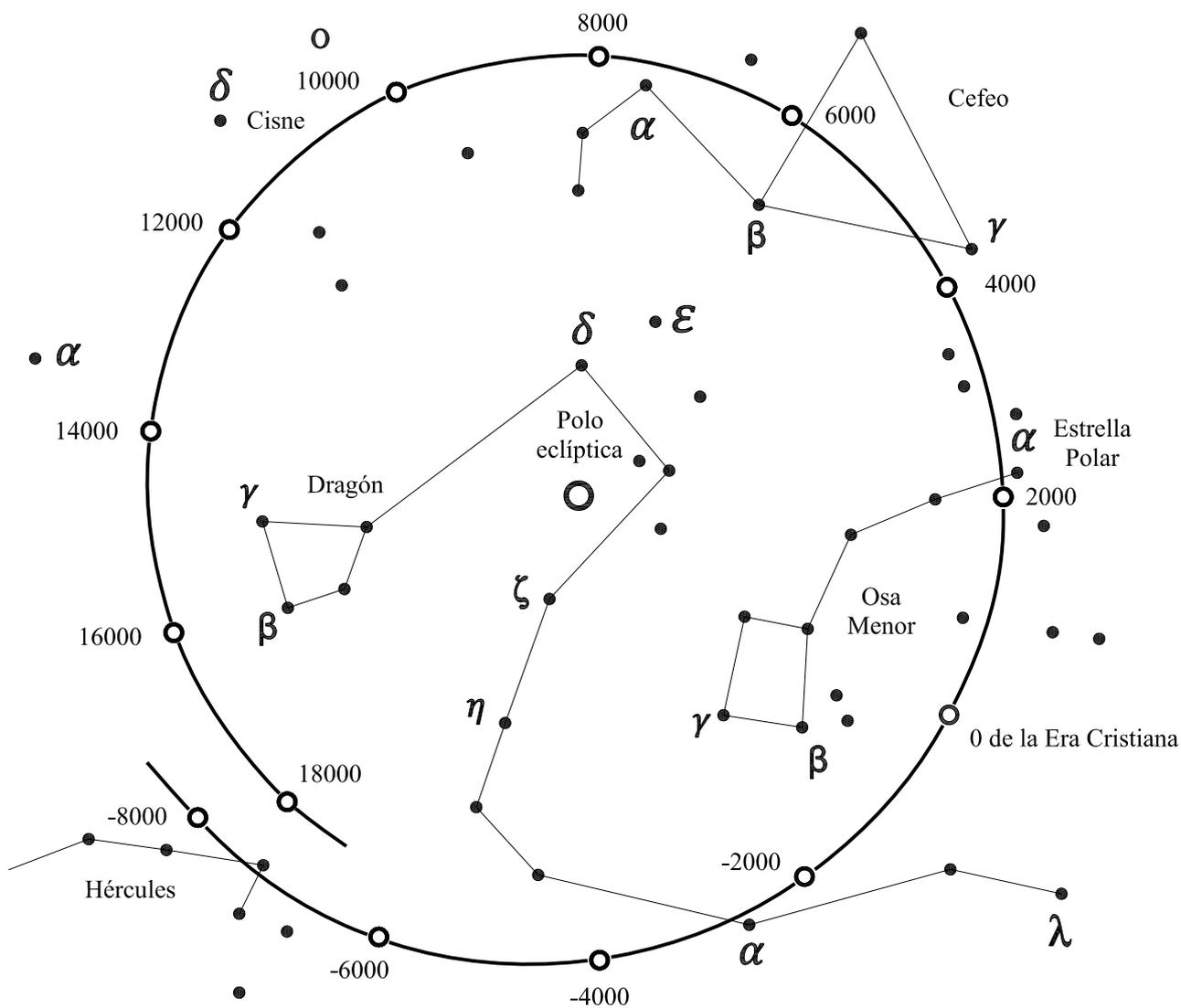


Figura 1f

UNIVERSITAT ROVIRA I VIRGILI

ANÁLISIS GEOMÉTRICO Y ASTRONÓMICO EN LA CATEDRAL DE CHARTRES

Juan Miguel Seguí Colomar

CAPÍTULO II

CÁLCULO ASTRONÓMICO APLICADO AL PRESENTE ESTUDIO ARQUITECTÓNICO

Con los conceptos básicos y fundamentales expuestos en el capítulo anterior, en el siguiente capítulo mostraremos de manera rigurosa el proceso de cálculo geométrico/astronómico aplicado al presente estudio arquitectónico. Este proceso numérico consistirá en proyectar en el pavimento de la catedral de Chartres una serie de astros a través del centro del rosetón de su fachada principal de manera matemática. Para ello, será imprescindible tener en cuenta todas las nociones y métodos que el lector podrá encontrar en los Capítulos I y II de este trabajo.

UNIVERSITAT ROVIRA I VIRGILI

ANÁLISIS GEOMÉTRICO Y ASTRONÓMICO EN LA CATEDRAL DE CHARTRES

Juan Miguel Seguí Colomar

2.1 Fecha del Calendario y el Día Juliano.

Sea Y un año, sea M un número de mes (1 para enero, 2 para febrero, etc., hasta 12 para diciembre), y sea D el día del mes (con decimales), todo ello para una fecha dada del calendario (fecha Juliana o Gregoriana). Ahora, si $M > 2$, dejamos invariante Y y M ; pero, si $M = 1$ o $M = 12$, reemplazamos Y por $Y - 1$, a la vez que M por $M + 12$. Entonces, si $JD \geq 0$, para una fecha Gregoriana tenemos que:

$$JD = [365.25(Y + 4716)] + [30.6001(M + 1)] + 2 - \left\lfloor \frac{Y}{100} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{\left\lfloor \frac{Y}{100} \right\rfloor}{4} \right\rfloor + D - 1524.5$$

Y para una fecha Juliana tenemos que:

$$JD = [365.25(Y + 4716)] + [30.6001(M + 1)] + D - 1524.5$$

Donde $[x] = \max\{k \in \mathbb{Z} \text{ t. q. } k \leq x\}$.

En viceversa tenemos lo siguiente. Consideremos un día juliano $JD \geq 0$, sea entonces $Z = [JD + 0.5]$ y $F = JD + 0.5 - Z$. Si $Z < 2299161$ tomamos $A = Z$, pero si $Z \geq 2299161$ tomamos: $\Lambda = \left\lfloor \frac{Z - 1867216.25}{36524.25} \right\rfloor$ y $A = Z + 1 + \Lambda - \left\lfloor \frac{\Lambda}{4} \right\rfloor$. Entonces calculamos

$$B = A + 1524; C = \left\lfloor \frac{B - 122.1}{365.25} \right\rfloor; G = [365.25 * C]; E = \left\lfloor \frac{B - G}{30.6001} \right\rfloor$$

Así, el día del mes correspondiente al JD es: $D = B - G - [30.6001 * E] + F$.

El mes correspondiente es aquél que tiene por número: $M = E - 1$ si $E < 14$, y $M = E - 13$ si $E = 14$ o 15 . Y el año correspondiente es: $Y = C - 4716$ si $M > 2$ y $Y = C - 4715$ si $M = 1$ o 2 .

2.2 Época astronómica.

Se denomina *época astronómica de referencia J2000.0* al 1 de enero a las 12^h según meridiano Greenwich del año Gregoriano 2000; o sea, es la época del día Juliano, de efemérides, $JD(2451545.0)$. En general la *época astronómica de un día Juliano* se define como: $J = 2000 + \frac{JD - 2451545.0}{365.25}$; así, por ejemplo, la época astronómica del $JD(2446431.5)$ es $J1986$. El 1 de enero a las 12^h según meridiano Greenwich del año Juliano 1200 corresponde al día Juliano $JD(2159358)$, por tanto su época es $J = 2000 + \frac{2159358 - 2451545.0}{365.25} = 1200.035592$, y escribiremos época astronómica $J1200.035592$. Y la época astronómica $J1200$ es la del día Juliano $JD(2159345)$ el cual corresponde al 19 de diciembre a las 12^h meridiano Greenwich del año Juliano 1199.

2.3 Coordenadas horizontales y ecuatoriales horarias.

De horizontales a ecuatoriales horarias: Conocidos ϕ , h y A , queremos determinar δ y H , donde ϕ es la latitud terrestre del observador.

$$\delta = \text{sen}^{-1}(\text{sen}(\phi)\text{sen}(h) + \cos(\phi)\cos(h)\cos(A))$$

$$H = \cos^{-1}\left(\frac{\text{sen}(h) - \text{sen}(\delta)\text{sen}(\phi)}{\cos(\delta)\cos(\phi)}\right)$$

En el cálculo de H se ha de tener cuidado con el verdadero cuadrante en el que está situado el astro. Puesto que H va de 0 a 360 grados sexagesimales, al tomar la función inversa del coseno de los valores entre paréntesis de la ecuación anterior, las calculadoras y computadoras solo muestran uno de los dos valores que satisfacen la ecuación. Una manera inmediata de determinar el correcto cuadrante de H es utilizando la siguiente regla, donde H es el valor calculado con la fórmula anterior: Si $A < 180^\circ$ entonces $H = 360^\circ - H$, si $A > 180^\circ$ entonces $H = H$ (entiéndanse estos cambios de forma algorítmica tal cual ocurre con los lenguajes de programación computacional).

De ecuatoriales horarias a horizontales: Conocidos ϕ , δ y H , queremos determinar h y A , donde ϕ es la latitud terrestre del observador.

Antes de comenzar a reemplazar en las fórmulas, se ha de convertir el ángulo horario H (que usualmente viene en unidades de tiempo) en unidades de grados.

$$h = \text{sen}^{-1}(\text{sen}(\delta)\text{sen}(\phi) + \cos(\delta)\cos(\phi)\cos(H))$$

$$A = \cos^{-1}\left(\frac{\text{sen}(\delta) - \text{sen}(\phi)\text{sen}(h)}{\cos(\phi)\cos(h)}\right)$$

Al igual que en el cálculo de H para determinar A se ha de tener cuidado con el verdadero cuadrante en el que está situado el astro. Como antes, una manera segura de determinar el correcto cuadrante de A es utilizando la siguiente regla, donde A es el valor calculado con la fórmula anterior: Si $H < 180^\circ$ (12^h) entonces $A = 360^\circ - A$, si $H > 180^\circ$ (12^h) entonces $A = A$ (entiéndanse estos cambios de forma algorítmica tal cual ocurre con los lenguajes de programación computacional).

2.4 Coordenadas ecuatoriales horarias y ecuatoriales absolutas.

Puesto que la declinación δ es común a ambos sistemas, lo único que hay que considerar es la relación entre la ascensión recta α y el ángulo horario H . La conexión se establece a través de algo que nos indique la posición del punto Aries. Y este algo es el tiempo sidéreo, el cual definimos en el capítulo anterior. El tiempo sidéreo local de un observador en un instante dado es, θ , el ángulo horario del punto vernal.

La relación es la siguiente:

$$\theta = \alpha + H$$

2.5 Coordenadas ecuatoriales absolutas y eclípticas.

De eclípticas a ecuatoriales absolutas: Conocidos λ y β , queremos determinar α y δ .

$$\delta = \text{sen}^{-1}(\text{sen}(\beta) \cos(\varepsilon) + \cos(\beta) \text{sen}(\varepsilon) \text{sen}(\lambda))$$
$$\alpha = \text{tan}^{-1}\left(\frac{-\text{sen}(\beta) \text{sen}(\varepsilon) - \cos(\beta) \cos(\varepsilon) \text{sen}(\lambda)}{\cos(\lambda) \cos(\beta)}\right) = \text{tan}^{-1}\left(\frac{a}{b}\right)$$

Si $ab < 0$ y $b < 0$ entonces $\alpha = \alpha + 180^\circ$, si $ab < 0$ y $b > 0$ entonces $\alpha = \alpha + 360^\circ$, Si $a + b < 0$ entonces $\alpha = \alpha + 180^\circ$, si no se cumple alguna de las reglas anteriores entonces $\alpha = \alpha$ (entiéndanse estos cambios de forma algorítmica tal cual ocurre con los lenguajes de programación computacional). Finalmente se ha de pasar α a unidades de tiempo.

De ecuatoriales absolutas a eclípticas: Conocidos α y δ , queremos determinar λ y β .

$$\beta = \text{sen}^{-1}(\text{sen}(\delta) \cos(\varepsilon) - \cos(\delta) \text{sen}(\varepsilon) \text{sen}(\alpha))$$
$$\lambda = \text{tan}^{-1}\left(\frac{\text{sen}(\delta) \text{sen}(\varepsilon) + \cos(\delta) \cos(\varepsilon) \text{sen}(\alpha)}{\cos(\alpha) \cos(\delta)}\right) = \text{tan}^{-1}\left(\frac{a}{b}\right)$$

Si $ab < 0$ y $b < 0$ entonces $\alpha = \alpha + 180^\circ$, si $ab < 0$ y $b > 0$ entonces $\alpha = \alpha + 360^\circ$, Si $a + b < 0$ entonces $\alpha = \alpha + 180^\circ$, si no se cumple alguna de las reglas anteriores entonces $\alpha = \alpha$ (entiéndanse estos cambios de

forma algorítmica tal cual ocurre con los lenguajes de programación computacional). Finalmente se pasa α a unidades de tiempo.

2.6 Sombra de un punto P y proyección de un astro a través de un punto P .

Para ello, el título de esta sección, consideramos un sistema cartesiano ortonormal de referencia $R = \{O; \vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$; los puntos del espacio tendrán coordenadas (x, y, z) sobre R . Además tomamos R tal que el plano de horizonte O está dirigido por $\langle \vec{u}_1, \vec{u}_2 \rangle$ con: \vec{u}_1 en la dirección Norte-Sur y sentido Sur, \vec{u}_2 en el sentido Oeste, y \vec{u}_3 en el sentido del cénit. Y el punto O es un punto de una pared.

Supongamos ahora que tenemos la **pared vertical**, la cual pasa por O , tal que forma un ángulo I con la línea Este-Oeste. Medimos el ángulo I en el mismo sentido que los azimuts. Tomamos otro sistema cartesiano ortonormal de referencia $R' = \{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{u}_3\}$ tal que, con una rotación entorno a \vec{u}_3 en sentido negativo de ángulos, \vec{u}_1 se transforma en \vec{e}_1 perpendicular a la pared, y \vec{u}_2 se transforma en \vec{e}_2 . O sea, que si puntos

del espacio están coordenados con (x', y', z') sobre R' entonces $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} =$

$\begin{pmatrix} \cos(I) & \sin(I) & 0 \\ -\sin(I) & \cos(I) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. Sea $P = (x'_p, y'_p, z'_p)$ un punto del cual

queremos conocer su **sombra sobre la pared**. Sean A y h el azimut y la altura del Sol, respectivamente, en el instante en el cual deseamos conocer dicha sombra. Un vector director unitario del rayo de sol, en

aquel instante pasando por O , es un vector que denominaremos $\vec{v}(A, h)$, y es un vector que en la base del sistema de referencia R tiene por componentes $\vec{v}(A, h) = (\cos(h) \cos(A), \cos(h) \sin(A), \sin(h))$. El mismo vector en la base del sistema de referencia R' tiene por componentes

$$\begin{aligned} \vec{v}(A, h) = & (\cos(h) \cos(A) \cos(I) + \cos(h) \sin(A) \sin(I), \\ & -\cos(h) \cos(A) \sin(I) + \cos(h) \sin(A) \cos(I), \sin(h)) \end{aligned}$$

Una ecuación vectorial paramétrica de la recta que pasa por P dirigida por $\vec{v}(A, h)$ es $(x'(\mu), y'(\mu), z'(\mu)) = (x'_p, y'_p, z'_p) + \mu \vec{v}(A, h)$. Y la intersección de esta recta con la pared corresponde al valor de μ para el cual $x'(\mu) = 0$. Este valor es

$$\mu = \frac{-x'_p}{\cos(h) \cos(A - I)}$$

Las coordenadas $(0, y', z')$ del punto sobre la pared se obtendrán substituyendo, en la ecuación de la recta, el anterior valor de μ . De esta manera obtenemos $(0, y'(A, h), z'(A, h))$, que es la sombra del punto sobre la pared en función de (A, h) . Esto, junto con los cambios de coordenadas celestes, nos permite conocer la sombra del punto en función de la declinación y ángulo horario del Sol. El ángulo horario H del Sol está relacionado con t , el tiempo solar verdadero local expresado en grados sexagesimales, tal que así: $H = 360 \frac{t-12}{24}$.

El caso de **proyectar sobre el plano del suelo** (la planta del edificio), de ecuación $X = O + \xi \vec{e}_1 + \zeta \vec{e}_2$, se trata de usar μ tal que $z'(\mu) = 0$:

$$\mu = \frac{-z'_p}{\text{sen}(h)}$$

Las coordenadas $(x', y', 0)$ del punto sobre el suelo se obtendrán substituyendo, en la ecuación de la recta, el anterior valor de μ . De esta manera obtenemos $(x'(A, h), y'(A, h), 0)$, que es la sombra del punto sobre el suelo en función de (A, h) .

Obsérvese que **el punto P proyectado puede ser el centro de un rosetón** o la punta de un obelisco, etc.

Nótese además que **la sombra de P puede ser la que produce el Sol o la que produce una estrella**, planeta o cualquier astro, usando la declinación y ángulo horario del astro en cuestión. O dicho al revés, la sombra es el punto del plano (pared o planta) desde el cual se visualiza a través de P (rosetón, punta de un obelisco, agujero, etc) el Sol, una estrella, un planeta, etc. *O sea es la **proyección de un astro a través de un punto P*** .

Es importante que digamos que para **proyectar, o visualizar**, astros se requieren sus posiciones estelares en coordenadas ecuatoriales absolutas, para luego transformarlas en horarias y horizontales; y que se requiere controlar los movimientos diarios, propios, precesión, nutación, etc., para poder encontrar las verdaderas proyecciones, o visualizaciones, a lo largo de intervalos de tiempo. Y todo ello requiere ser programado, como hemos hecho en nuestros propios programas de cálculo astronómico; tal como mostraremos en el Capítulo IV.

Y obsérvese que con el movimiento aparente diario, el astro posee una ***órbita circular diaria celeste aparente con el giro de la esfera celeste***. La proyección de esta órbita circular del astro a través de de P sobre una pared o suelo, se obtiene por corte de un cono con un plano; por tanto se trata de una ***trayectoria cónica diaria sobre el plano de proyección***.

Los intervalos de tiempo siempre los determinaremos, como siempre, con el concepto astronómico de cómputo de tiempo del día Juliano de efemérides.

2.7 Método de baja precisión de paso de coordenadas astronómicas por precesión terrestre.

Si no se requiere gran precisión, si las dos épocas no están temporalmente muy separadas, y si las estrellas no están cerca de uno de los polos celestes; entonces, las siguientes fórmulas pueden ser usadas en el cálculo del efecto de la precesión terrestre. En este cálculo, el movimiento propio estelar no es tenido en cuenta al no estar muy separadas las épocas; y se trata el cambio sin tener en cuenta la nutación, o sea que se considera el Equinoccio medio.

Sean (α, δ) las coordenadas ecuatoriales absolutas de ascensión recta y declinación celeste de un astro. Sean (α_0, δ_0) sus coordenadas en la época de referencia $J2000.0$. Notemos $(\alpha(t), \delta(t))$ las coordenadas en la fecha t , o sea según $JD(t)$.

Consideramos las siguientes funciones:

$$T(t) = \frac{JD(t) - 2451545.0}{36525}$$

$$M(t) = 1.2812323^\circ T(t) + 3.879^\circ \times 10^{-4} T^2(t) + 1.101^\circ \times 10^{-5} T^3(t)$$

$$N(t) = 0.5567530^\circ T(t) - 1.185^\circ \times 10^{-4} T^2(t) + 1.16^\circ \times 10^{-5} T^3(t)$$

Paso de coordenadas en J2000.0 a coordenadas en JD(t).

$$\alpha(t) = \alpha_0 + M(t) + N(t)\text{sen}(\alpha_m(t))\text{tan}(\delta_m(t))$$

$$\delta(t) = \delta_0 + N(t)\text{cos}(\alpha_m(t))$$

con

$$\alpha_m(t) = \alpha_0 + \frac{1}{2}(M(t) + N(t)\text{sen}(\alpha_0)\text{tan}(\delta_0))$$

$$\delta_m(t) = \delta_0 + \frac{1}{2}N(t)\text{cos}(\alpha_m(t))$$

Paso de coordenadas en JD(t) a coordenadas en J2000.0.

$$\alpha_0 = \alpha(t) - M(t) - N(t)\text{sen}(\alpha_m(t))\text{tan}(\delta_m(t))$$

$$\delta_0 = \delta(t) - N(t)\text{cos}(\alpha_m(t))$$

con

$$\alpha_m(t) = \alpha(t) - \frac{1}{2}(M(t) + N(t)\text{sen}(\alpha(t))\text{tan}(\delta_0))$$

$$\delta_m(t) = \delta(t) - \frac{1}{2}N(t)\text{cos}(\alpha_m(t))$$

2.8 Método riguroso de alta precisión de paso de coordenadas astronómicas por precesión terrestre y el movimiento anual propio del astro.

Sean (α_0, δ_0) las coordenadas ecuatoriales absolutas de ascensión recta y declinación celeste de una estrella en $JD(t_0)$. Sean igualmente (α_1, δ_1) las coordenadas del astro en $JD(t_1)$. Sea α_p^s el movimiento propio anual –en segundos de arco horario– de la estrella en ascensión recta, y δ''_p el movimiento propio anual –en segundos de arco sexagesimal– de la estrella en declinación celeste.

Sean

$$T_0 = \frac{JD(t_0) - 2451545.0}{36525}, T_{01} = \frac{JD(t_1) - JD(t_0)}{36525}$$

$$\zeta_{01} = (2306.2181'' + 1.39656'' * T_0 - 0.000139'' * T_0^2)T_{01} + (0.30188'' - 0.000344'' * T_0)T_{01}^2 + 0.017998'' * T_{01}^3$$

$$\chi_{01} = (2306.2181'' + 1.39656'' * T_0 - 0.000139'' * T_0^2)T_{01} + (1.09468'' + 0.000066'' * T_0)T_{01}^2 + 0.018203'' * T_{01}^3$$

$$\theta_{01} = (2004.3109'' + 0.85330'' * T_0 - 0.000217'' * T_0^2)T_{01} - (0.42665'' + 0.000217'' * T_0)T_{01}^2 - 0.041833'' * T_{01}^3$$

Entonces, con todas las amplitudes de ángulos en unidades de arco sexagesimal, y con

$$\alpha_{0p} = \alpha_0 + 100 * T_{01} * \alpha_p^s \text{ y con } \delta_{0p} = \delta_0 + 100 * T_{01} * \delta''_p$$

calculamos:

$$\begin{aligned} A &= \cos(\delta_{0p}) \operatorname{sen}(\alpha_{0p} + \zeta_{01}) \\ B &= \cos(\theta_{01}) \cos(\delta_{0p}) \cos(\alpha_{0p} + \zeta_{01}) - \operatorname{sen}(\theta_{01}) \operatorname{sen}(\delta_{0p}) \\ C &= \operatorname{sen}(\theta_{01}) \cos(\delta_{0p}) \cos(\alpha_{0p} + \zeta_{01}) + \cos(\theta_{01}) \operatorname{sen}(\delta_{0p}) \end{aligned}$$

Y así tenemos que:

$$\alpha_1 - \chi_{01} = \operatorname{atan2} \left(\frac{A}{B} \right)$$

$\operatorname{sen}(\delta_1) = C$ si la estrella no está cerca del polo celeste.

$\cos(\delta_1) = \sqrt{A^2 + B^2}$ si la estrella está cerca del polo celeste.

Donde, en términos de la función arcotangente estándar arctan , cuyo rango de argumento radián es $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, se tiene que $\operatorname{atan2}$ es lo siguiente

$$\operatorname{atan2} \left(\frac{A}{B} \right) = \begin{cases} \operatorname{arctan} \left(\frac{A}{B} \right), & \text{con } B > 0 \\ \operatorname{arctan} \left(\frac{A}{B} \right) + \pi, & \text{con } A \geq 0, B < 0 \\ \operatorname{arctan} \left(\frac{A}{B} \right) - \pi, & \text{con } A < 0, B < 0 \\ \frac{\pi}{2}, & \text{con } A > 0, B = 0 \\ -\frac{\pi}{2}, & \text{con } A < 0, B = 0 \\ \text{no definido}, & \text{con } A = 0, B = 0 \end{cases}$$

2.9 Ejemplo 1 –método riguroso de Equinoccio medio–.

Pasar el astro que en $J2000.0$ está en la posición astronómica $(\alpha, \delta) = (02^{\text{h}}31^{\text{m}}48.704^{\text{s}}, +89^{\circ}15'50.72'')$ a su posición (α_1, δ_1) en 2100 a Enero 1.5 (1 de Enero a las 12^h), con desplazamiento propio de $(\alpha_p, \delta_p) = (+198.77 \text{ ms/año}, -15.2 \text{ mas/año})$. Donde ms = milisegundo de arco horario, mas = milisegundo de arco sexagesimal.

$$JD = [365.25(2099 + 4716)] + [30.6001(13 + 1)] - \left\lfloor \frac{2099}{100} \right\rfloor + \left\lceil \frac{\left\lfloor \frac{2099}{100} \right\rfloor}{4} \right\rceil + 1.5 - 1522.5$$

$$= 2.48807 \times 10^6$$

$$T_0 = \frac{2451545 - 2451545.0}{36525} = 0.0, T_{01} = \frac{2.48807 \times 10^6 - 2451545}{36525} = 1.0$$

$$\alpha_{0p} = 02 * \frac{360}{24} + 31 * \frac{1}{60} * \frac{360}{24} + 48.704 * \frac{1}{3600} * \frac{360}{24}$$

$$+ 100 * T_{01} * 198.77 * \frac{1}{1000} * \frac{1}{3600} * \frac{360}{24} = 38.03575417^{\circ}$$

$$\delta_{0p} = 89 + 15 * \frac{1}{60} + 50.72 * \frac{1}{3600} - 100 * T_{01} * 15.2 * \frac{1}{1000} * \frac{1}{3600} = 89.26366667^{\circ}$$

$$\zeta_{01} = (2306.2181'' * 1.0 + 0.30188'' * 1.0^2 + 0.017998'' * 1.0^3) * \frac{1}{3600} = 0.6407049939^{\circ}$$

$$\chi_{01} = (2306.2181'' * 1.0 + 1.09468'' * 1.0^2 + 0.018203'' * 1.0^3) * \frac{1}{3600} = 0.6409252731^{\circ}$$

$$\theta_{01} = (2004.3109'' * 1.0 - 0.42665'' * 1.0^2 - 0.041833'' * 1.0^3) * \frac{1}{3600} = 0.5566228936^{\circ}$$

$$A = \cos\left(89.26366667 \frac{\pi}{180}\right) \operatorname{sen}\left(\left(38.03575417 + 0.6407049939\right) \frac{\pi}{180}\right)$$

$$B = \cos\left(0.5566228936 \frac{\pi}{180}\right) \cos\left(89.26366667 \frac{\pi}{180}\right)$$

$$* \cos\left(\left(38.03575417 + 0.6407049939\right) \frac{\pi}{180}\right)$$

$$- \operatorname{sen}\left(0.5566228936 \frac{\pi}{180}\right) \operatorname{sen}\left(89.26366667 \frac{\pi}{180}\right)$$

$$C = \operatorname{sen}\left(0.5566228936 \frac{\pi}{180}\right) \cos\left(89.26366667 \frac{\pi}{180}\right)$$

$$* \cos\left(\left(38.03575417 + 0.6407049939\right) \frac{\pi}{180}\right)$$

$$+ \cos\left(0.5566228936 \frac{\pi}{180}\right) \operatorname{sen}\left(89.26366667 \frac{\pi}{180}\right)$$

$$A = 8.030926527 \times 10^{-3}, B = 3.182591532 \times 10^{-4}, C = 0.9999677009$$

$$\alpha_1 = 0.6409252731 \frac{\pi}{180} + \arctan\left(\frac{8.030926527 \times 10^{-3}}{3.182591532 \times 10^{-4}}\right) = 1.542374114$$

$$\delta_1 = \arccos\left(\sqrt{(8.030926527 \times 10^{-3})^2 + (3.182591532 \times 10^{-4})^2}\right)$$

$$= 1.56275901$$

$$1.56275901 \frac{180}{\pi} = 89.53949538; 0.53949538 * 60 = 32.3697228; 0.3697228 * 60$$

$$\simeq 22.183$$

$$1.542374114 \frac{180}{\pi} \frac{24}{360} = 5.891435144; 0.891435144 * 60$$

$$= 53.48610864; 0.48610864 * 60 \simeq 29.1665$$

$$(\alpha_1, \delta_1) \simeq (5^h 53^m 29.17^s, +89^\circ 32' 22.2'')$$

2.10 Ejemplo 2 –método riguroso de Equinoccio medio–.

Pasar el astro α -Dra (α -Draconis) que en $J2000.0$ está en la posición astronómica $(\alpha, \delta) = (14^{\text{h}}04^{\text{m}}23.34995^{\text{s}}, +64^{\circ}22'33.0619'')$ a su posición (α_1, δ_1) en 2800 a Enero 1.5 BCE (1 de Enero a las 12^h antes de Cristo), con desplazamiento propio de $(\alpha_p, \delta_p) = (-56.34, 17.21) \text{mas/año}$. Y demostrar así que, en esa época, este astro era el polar Norte. Nótese que *mas/año* en el caso de la ascensión recta corresponde a *ms* = milisegundo de arco horario, y en el caso de la declinación corresponde a *mas* = milisegundo de arco sexagesimal.

$$JD = [365.25(-2800 + 4716)] + [30.6001(13 + 1)] + 1.5 - 1525.5 = 6.98724 \times 10^5$$

Obsérvese que los años BCE están contados de manera astronómica y no como lo hacen los historiadores. Así el año anterior al año +1 es el año 0, y el año precedente al año 0 es el año -1. El año que los historiadores llaman 585 BC, o 585 BCE, es el año -584, y no ha de usarse la mención BC o BCE cuando los años son negativos, o sea que “-584 BC” es incorrecto. En el caso de este ejercicio en la fórmula anterior $Y = -2799$, por tanto $Y - 1 = -2800$.

$$T_0 = \frac{2451545 - 2451545.0}{36525} = 0.0, T_{01} = \frac{6.98724 \times 10^5 - 2451545}{36525} = -47.98962355$$

$$\alpha_{0p} = 14 * \frac{360}{24} + 04 * \frac{1}{60} * \frac{360}{24} + 23.34995 * \frac{1}{3600} * \frac{360}{24}$$

$$-100 * T_{01} * 56.34 * \frac{1}{1000} * \frac{1}{3600} * \frac{360}{24} = 211.1723952^{\circ}$$

$$\delta_{0p} = 64 + 22 * \frac{1}{60} + 33.0619 * \frac{1}{3600} - 100 * T_{01} * 17.21 * \frac{1}{1000} * \frac{1}{3600} = 64.35290882^\circ$$

$$\zeta_{01} = (2306.2181'' * T_{01} + 0.30188'' * T_{01}^2 + 0.017998'' * T_{01}^3) * \frac{1}{3600} = -31.10234773^\circ$$

$$\chi_{01} = (2306.2181'' * T_{01} + 1.09468'' * T_{01}^2 + 0.018203'' * T_{01}^3) * \frac{1}{3600} = -30.60146860^\circ$$

$$\theta_{01} = (2004.3109'' * T_{01} - 0.42665'' * T_{01}^2 - 0.041833'' * T_{01}^3) * \frac{1}{3600} = -25.70702966^\circ$$

$$A = \cos\left(64.35290882 \frac{\pi}{180}\right) \operatorname{sen}\left((211.1723952 - 31.10234773) \frac{\pi}{180}\right)$$

$$B = \cos\left(-25.70702966 \frac{\pi}{180}\right) \cos\left(64.35290882 \frac{\pi}{180}\right)$$

$$* \cos\left((211.1723952 - 31.10234773) \frac{\pi}{180}\right)$$

$$- \operatorname{sen}\left(-25.70702966 \frac{\pi}{180}\right) \operatorname{sen}\left(64.35290882 \frac{\pi}{180}\right)$$

$$C = \operatorname{sen}\left(-25.70702966 \frac{\pi}{180}\right) \cos\left(64.35290882 \frac{\pi}{180}\right)$$

$$* \cos\left((211.1723952 - 31.10234773) \frac{\pi}{180}\right)$$

$$+ \cos\left(-25.70702966 \frac{\pi}{180}\right) \operatorname{sen}\left(64.35290882 \frac{\pi}{180}\right)$$

$$A = -5.2915618 \times 10^{-4}, B = 1.046415081 \times 10^{-3}, C = 0.9999993125$$

$$\alpha_1 = -30.60146860 \frac{\pi}{180} + \arctan\left(\frac{-5.2915618 \times 10^{-4}}{1.046415081 \times 10^{-3}}\right) = -1.002281467$$

$$\delta_1 = \arccos\left(\sqrt{(-5.2915618 \times 10^{-4})^2 + (1.046415081 \times 10^{-3})^2}\right) = 1.569623727$$

$$1.569623727 \frac{180}{\pi} = 89.93281498; 0.93281498 * 60 = 55.9688988; 0.9688988 * 60 \\ \approx 58.13393$$

$$-1.002281467 \frac{180}{\pi} \frac{24}{360} = -3.828433196$$

$$24 - 3.828433196 = 20.1715668; 0.1715668 * 60 = 10.294008; 0.294008 * 60 \\ \approx 17.64048$$

$$(\alpha_1, \delta_1) \approx (20^h 10^m 17.6405^s, +89^\circ 55' 58.134'')$$

2.11 Magnitud aparente.

Como dijimos, una estrella *de magnitud 1 es 100 veces más brillante de la de magnitud 6*, por tanto en cada unidad de magnitud se aumenta $\sqrt[5]{100} \approx 2.512$ veces la magnitud anterior. Si una estrella *a* tiene magnitud *m* y otra estrella *b* tiene magnitud *n*, entonces que la estrella *a* es $(\sqrt[5]{100})^{n-m}$ veces más brillante que la estrella *b*. Notaremos la magnitud aparente visual con \mathbf{v} .

La estrella *Spica* (α Vir), la más brillante de la constelación de Virgo, es de aproximadamente magnitud 1 ($\mathbf{v}=0.97$), por tanto es 2.512 veces más brillante que las de magnitud 2. Más exactamente, *Spica* es $(\sqrt[5]{100})^{2-0.97} \approx 2.58$ veces más brillante que las de magnitud 2. La estrella *Alioth* (ε UMa), la más brillante de la constelación Osa Mayor, tiene magnitud $\mathbf{v}=1.77$. Así que *Spica* es $(\sqrt[5]{100})^{1.77-0.97} \approx 2.09$ veces más brillante que *Alioth*. Una estrella de magnitud 1 es $(\sqrt[5]{100})^{3-1} \approx 6.31$ más

brillante que las de magnitud 3, y $(\sqrt[5]{100})^3 \simeq 15.85$ veces más que las de magnitud 4, y $(\sqrt[5]{100})^4 \simeq 39.81$ veces más que las de magnitud 5, y $(\sqrt[5]{100})^5 = 100$ veces más que las de magnitud 6.

2.12 Nutación y Aberración.

Las fórmulas y los algoritmos necesarios para el cálculo del efecto de la *nutación* y de la *aberración* son presentados en el Capítulo IV, vía cálculo, en el Código de cómputo numérico 4.2.

El lector interesado en tales fenómenos, puede encontrar sus fórmulas y algoritmos modernos de manera explícita en libros de calidad como el *Astronomical Algorithms* de J. Meeus y el *Astronomía* de F. Martín [Meeus, 1991; Martín, 1990]. No hemos querido explicitarlas en este capítulo, aunque el lector, como hemos dicho, las puede ver en el Código 4.2 del Capítulo IV.

CAPÍTULO III

CONCEPTOS GEOMÉTRICOS Y ESTADÍSTICOS APLICADOS AL PRESENTE ESTUDIO

Además de los conceptos, métodos y algoritmos astronómicos requeridos para la presente Tesis, los cuáles han sido presentados en los capítulos anteriores, son necesarios otros conceptos, teoremas y cálculos, geométricos, estadísticos y algebraicos, para la obtención de los teoremas geométrico-arquitectónicos que alcanzaremos. Todos ellos son elementos matemáticos que aplicaremos a lo largo del trabajo; pero, por claridad de exposición y por facilitar al lector la comprensión de los asuntos matemáticos involucrados, mostramos agrupados en este capítulo parte de ellos y parte de los cálculos necesarios para alcanzar los objetivos que se muestran en el cuerpo de la Tesis en otros capítulos.

UNIVERSITAT ROVIRA I VIRGILI

ANÁLISIS GEOMÉTRICO Y ASTRONÓMICO EN LA CATEDRAL DE CHARTRES

Juan Miguel Seguí Colomar

3.1 Geometría para la transformación de las Catedrales en cuerpos celestes: *en J1200 (Cálculos para el Capítulo IX).*

En el Capítulo IX, hablaremos de “*encontrar las estrellas más cercanas a las catedrales*”. Para tal concepto requeriremos transformar las catedrales francesas en cuerpos celestes de la bóveda celeste, de tal manera que Reims se encuentre sobre *Spica* (α -*Virginis*) y Chartres sobre *Porrina* (γ -*Virginis*). Generaremos, para encontrar numéricamente esta transformación, el Código de cálculo 4.3 para *J2000*.

El lector puede observar que el código requiere dos matrices tridimensionales, A y A' que ofrecerán las transformaciones. Para encontrar tales matrices geoméricamente, seguiremos los siguientes pasos:

1.- Consideramos las coordenadas terrestres de longitud/latitud, en grados sexagesimales (LON_Q, LAT_Q) y en radianes (λ_Q, ϕ_Q), y con ellas localizamos las catedrales en una esfera de radio 1 en radianes y en coordenadas esféricas (θ_Q, ϕ_Q).

Reims: (LON_r, LAT_r) = (04°01'58".2 E, 49°15'12".4 N)

Chartres: (LON_c, LAT_c) = (01°29'13".5 E, 48°26'50".7 N)

Catedral Q: (LON_Q, LAT_Q) = (LON g° LON m' LON s" E, LAT g° LAT m' LAT s" N)

$$\lambda_r = \left(04 + 01 * \frac{1}{60} + 58.2 * \frac{1}{3600} \right) * \frac{\pi}{180}$$

Reims: (λ_r, ϕ_r) \approx (0.070386219850844654621, 0.8596347735036648991)

Chartres: (λ_c, ϕ_c) \approx (0.025954500418199009417, 0.84556693491890949317)

Catedral Q: $(\lambda_Q, \varphi_Q), \lambda \in [0, 2\pi], \varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

$$\theta = \lambda, \quad \phi = \frac{\pi}{2} - \varphi$$

Reims: $(\theta_r, \phi_r) \simeq (0.070386219850844654621, 0.71116155329123172013)$

Chartres: $(\theta_c, \phi_c) \simeq (0.025954500418199009417, 0.72522939187598712606)$

Catedral Q: $(\theta_Q, \phi_Q) = \left(\lambda_Q, \frac{\pi}{2} - \varphi_Q\right)$

2.- Consideramos las coordenadas celestes absolutas de ascensión recta/declinación, en grados sexagesimales (AR, DEC) y en radianes (α, δ) , en la época astronómica $J1200$ y con estos datos localizamos las 96 estrellas visibles ($\mathbf{v} \leq 6$) de la constelación de Virgo en la esfera de radio 1, en radianes y en coordenadas esféricas (θ, ϕ) ; en especial de *Spica* (α -*Virginis*) y *Porrima* (γ -*Virginis*).

Spica: $(AR_s, DEC_s) = (13^{\text{h}}25^{\text{m}}11.57937^{\text{s}}, -11^{\circ}09'40.7501'')$ en $J2000$ y desplazamiento propio de $(\alpha_{p\ spica}, \delta_{p\ spica}) = (-42.35, -30.67) \text{ mas/año}$.

Porrima: $(AR_p, DEC_p) = (12^{\text{h}}41^{\text{m}}39.64344^{\text{s}}, -01^{\circ}26'57.7421'')$ en $J2000$ y desplazamiento propio de $(\alpha_{p\ porrima}, \delta_{p\ porrima}) = (-614.76, -61.34) \text{ mas/año}$.

Paso a $J1200$:

Con 2.8, y 2.2 obtenemos en la época astronómica $J1200$:

Spica: $(AR_s, DEC_s) \simeq (12.72543462199514300, -6.87315898077873920)$

Porrima: $(AR_p, DEC_p) \simeq (12.02181170942297300, 2.97266306006559590)$

$$\alpha = AR * 15 * \frac{\pi}{180}, \quad \delta = DEC * \frac{\pi}{180}, \quad \alpha \in [0, 2\pi], \quad \delta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

Spica: $(\alpha_s, \delta_s) \simeq (3.3315109935164290623, -0.11995925422760665546)$

$$\text{Porrima: } (\alpha_p, \delta_p) \simeq (3.1473029457635805089, 0.051882757950554613059)$$

$$\theta = \alpha, \quad \phi = \frac{\pi}{2} - \delta$$

$$\text{Spica: } (\theta_s, \phi_s) \simeq (3.3315109935164290623, 1.6907555810225032747)$$

$$\text{Porrima: } (\theta_p, \phi_p) \simeq (3.1473029457635805089, 1.5189135688443420062)$$

3.- Calculamos los vectores \vec{s} , \vec{p} , \vec{r} , \vec{c} y \vec{Q} , con origen en el centro de la esfera, correspondientes a los vectores de posición de *Spica*, *Porrima*, Reims, Chartres y cada catedral, respectivamente.

$$x = \text{sen}\phi\cos\theta, \quad y = \text{sen}\phi\text{sen}\theta, \quad z = \cos\phi$$

$$\text{Spica: } \vec{s} = (x_s, y_s, z_s)$$

$$\simeq (-0.97496238239628350474, -0.18742204806971905807, -0.11967175443484972611)$$

Porrima:

$$\vec{p} = (x_p, y_p, z_p) \simeq$$

$$(-0.9749623823962835047, -0.1874220480697190580, -0.11967175443484972611)$$

Reims:

$$\vec{r} = (x_r, y_r, z_r) \simeq$$

$$(0.65109803135849973755, 0.045904160665028039003, 0.75760422490554089105)$$

Chartres:

$$\vec{c} = (x_c, y_c, z_c) \simeq$$

$$(0.6630837236327796659, 0.017213872251136139105, 0.74834728439101657665)$$

$$\text{Catedral Q: } \vec{Q} = (x_Q, y_Q, z_Q) = (\text{sen}\phi_Q\cos\theta_Q, \text{sen}\phi_Q\text{sen}\theta_Q, \cos\phi_Q)$$

Estos vectores tienen sus componentes sobre una base inicial ortonormal canónica y directa que llamaremos base \mathcal{C} .

4.- Calculamos las amplitudes ξ , η y ς de los ángulos $\angle(\vec{s}, \vec{p})$, $\angle(\vec{r}, \vec{c})$ y $\angle(\vec{r}, \vec{Q})$ respectivamente.

$$\xi = \arccos(\vec{s} \cdot \vec{p}) \approx 0.2516725789613883461$$

$$\eta = \arccos(\vec{r} \cdot \vec{c}) \approx 0.0324433774258643961$$

$$\varsigma = \arccos\left((x_r, y_r, z_r) \cdot (x_Q, y_Q, z_Q)\right) \in [0, \pi]$$

donde \cdot es el producto escalar.

5.- Calculamos $h(\vec{Q})$, el cual es el vector homotético esférico de \vec{Q} en el subespacio vectorial $\langle \vec{r}, \vec{Q} \rangle$ con $h(\vec{r}) = \vec{r}$ y $\arccos \angle(\vec{r}, h(\vec{Q})) = \varsigma \frac{\xi}{\eta}$ y $\det_{(\vec{r}, \vec{Q})}(\vec{r}, h(\vec{Q})) > 0$. En otras palabras, aplicamos a cada catedral, con vector de posición \vec{Q} , la homotecia esférica con centro en Reims, y que transforma $\angle(\vec{r}, \vec{c})$ –ángulo de Reims a Chartres– en el ángulo $\angle(\vec{r}, h(\vec{c}))$ cuya amplitud es la del ángulo de *Spica* a *Porrina* $\angle(\vec{s}, \vec{p})$, y así obtenemos la posición $h(\vec{Q})$. Dicho de otra forma: escalamos las distancias de la configuración de las catedrales de tal manera que la distancia angular desde Reims a Chartres se transforma en la distancia angular desde *Spica* a *Porrina*, manteniendo Reims en su localización original sin moverlo.

Con un estudio geométrico llegamos a que se tiene:

$$h(\vec{Q}) = \cos\left(\varsigma \frac{\xi}{\eta}\right) \vec{r} + \sin\left(\varsigma \frac{\xi}{\eta}\right) \left(\frac{\vec{r} \times \vec{Q}}{\sin \varsigma}\right) \times \vec{r}$$

donde \times es el producto vectorial directo respecto de la base \mathcal{C} .

6.- Calculamos $h'(\vec{Q})$, que se trata del vector rotado de $h(\vec{Q})$ con ángulo de rotación $\angle(\vec{r}, \vec{s})$. En otras palabras, aplicamos a cada vector de posición $h(\vec{Q})$, relativo a la catedral Q, la rotación respecto del eje perpendicular al subespacio vectorial $\langle \vec{r}, \vec{s} \rangle$ y con ángulo de rotación $\angle(\vec{r}, \vec{s})$; esta rotación transforma el vector \vec{r} de Reims en el vector \vec{s} de *Spica* y el vector $h(\vec{c})$ de Chartres en el vector $h'(\vec{c})$, a la vez que transforma cualquier otro vector $h(\vec{Q})$, de la catedral Q, en $h'(\vec{Q})$. Dicho de otra forma, una vez que la configuración de las catedrales ha sido escalada, la rotamos hasta superponer Reims con *Spica*.

Esa rotación en componentes sobre \mathcal{C} será tal que si $h(\vec{Q}) = (x_h, y_h, z_h)$ y $h'(\vec{Q}) = (x'_h, y'_h, z'_h)$ entonces

$$A \begin{pmatrix} x_h \\ y_h \\ z_h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'_h \\ y'_h \\ z'_h \end{pmatrix}$$

donde A es la matriz asociada a la rotación en la base \mathcal{C} . Para encontrarla, consideramos la base ortonormal directa \mathcal{B}

$$\mathcal{B} = \left\{ \vec{s}, \frac{\vec{r} \times \vec{s}}{\|\vec{r} \times \vec{s}\|}, \vec{s} \times \frac{\vec{r} \times \vec{s}}{\|\vec{r} \times \vec{s}\|} \right\}$$

En esta base \mathcal{B} , la matriz de la rotación es

$$M_{\mathcal{B}\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \cos(\angle(\vec{r}, \vec{s})) & 0 & -|\sin(\angle(\vec{r}, \vec{s}))| \\ 0 & 1 & 0 \\ |\sin(\angle(\vec{r}, \vec{s}))| & 0 & \cos(\angle(\vec{r}, \vec{s})) \end{pmatrix}$$

Entonces, la matriz de la rotación es tal que

$$A = I_{CB}^{-1} M_{BB} I_{CB}$$

Donde I_{CB} es la matriz asociada a la Identidad respecto de la base \mathcal{C} a la base \mathcal{B} , o sea es la matriz de cambio de la base de \mathcal{C} a la base \mathcal{B} ; y la matriz I_{CB}^{-1} es la matriz inversa. Y dado que:

$$\begin{aligned} \vec{s} &\simeq (-0.97496238239628350474, -0.18742204806971905807, -0.11967175443484972611) \\ \frac{\vec{r} \times \vec{s}}{\|\vec{r} \times \vec{s}\|} &\simeq (-0.20100445826218369918, 0.97295845137102513794, 0.11379393509507685137) \\ \vec{s} \times \frac{\vec{r} \times \vec{s}}{\|\vec{r} \times \vec{s}\|} &\simeq (0.09510815249435301496, 0.13499936223200623168, -0.98627055695993605069) \\ \cos(\angle(\vec{r}, \vec{s})) &\simeq -0.73406336639527455421 \\ |\text{sen}(\angle(\vec{r}, \vec{s}))| &\simeq 0.67908097758399690303 \end{aligned}$$

se tiene entonces que

$$A \simeq \begin{pmatrix} -0.66400236446960217079 & -0.261853718282862406340 & -0.70038096076365249167 \\ -0.41640431165785176994 & 0.90748450808098576258 & 0.055491592388054055028 \\ 0.62105419184764243343 & 0.32848820041890487445 & -0.71160887640193270021 \end{pmatrix}$$

7.- Calculamos $h''(\vec{Q})$, el cual es el vector rotado de $h'(\vec{Q})$ con ángulo de rotación $\angle(h'(\vec{c}) - \vec{s} \cos \angle(h'(\vec{c}), \vec{s}), \vec{p} - \vec{s} \cos \angle(\vec{p}, \vec{s}))$. En otras palabras, aplicamos a cada vector de posición $h'(\vec{Q})$, relativo a la catedral Q, la rotación con eje dirigido por \vec{s} y con ángulo de rotación $\angle(h'(\vec{c}) - \vec{s} \cos \angle(h'(\vec{c}), \vec{s}), \vec{p} - \vec{s} \cos \angle(\vec{p}, \vec{s}))$, esta rotación transforma el vector de posición $h'(\vec{c})$, relativo a Chartres, en el vector de posición de *Porrima* \vec{p} , a la vez que transforma cualquier otro vector $h'(\vec{Q})$ de otra

catedral Q en el vector $h''(\vec{Q})$. Dicho de otra forma, una vez que la configuración de las catedrales ha sido escalada, y rotada hasta hacer coincidir Reims con *Spica*, se rota la configuración hasta conseguir que Reims se mantenga sobre *Spica* y que la posición homotética de Chartres $h(\vec{c})$ coincida con *Porrina*.

Esa rotación en componentes sobre \mathcal{C} será tal que si $h(\vec{Q}) = (x'_h, y'_h, z'_h)$ y $h''(\vec{Q}) = (x''_h, y''_h, z''_h)$ entonces

$$A' \begin{pmatrix} x'_h \\ y'_h \\ z'_h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x''_h \\ y''_h \\ z''_h \end{pmatrix}$$

donde A' es la matriz asociada a la rotación en la base \mathcal{C} . Para encontrarla consideramos la base ortonormal directa \mathcal{B}'

$$\mathcal{B}' = \left\{ \frac{h'(\vec{c}) - \vec{s} \cos \angle(h'(\vec{c}), \vec{s})}{\|h'(\vec{c}) - \vec{s} \cos \angle(h'(\vec{c}), \vec{s})\|}, \vec{s}, \frac{h'(\vec{c}) - \vec{s} \cos \angle(h'(\vec{c}), \vec{s})}{\|h'(\vec{c}) - \vec{s} \cos \angle(h'(\vec{c}), \vec{s})\|} \times \vec{s} \right\}$$

En esta base \mathcal{B}' la matriz de la rotación es

$$M'_{\mathcal{B}'\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} \cos(\angle(h'(\vec{c}) - \vec{s} \cos \angle(h'(\vec{c}), \vec{s}), \vec{p} - \vec{s} \cos \angle(\vec{p}, \vec{s}))) & 0 & \left| \sin(\angle(h'(\vec{c}) - \vec{s} \cos \angle(h'(\vec{c}), \vec{s}), \vec{p} - \vec{s} \cos \angle(\vec{p}, \vec{s}))) \right| \\ 0 & 1 & 0 \\ -\left| \sin(\angle(h'(\vec{c}) - \vec{s} \cos \angle(h'(\vec{c}), \vec{s}), \vec{p} - \vec{s} \cos \angle(\vec{p}, \vec{s}))) \right| & 0 & \cos(\angle(h'(\vec{c}) - \vec{s} \cos \angle(h'(\vec{c}), \vec{s}), \vec{p} - \vec{s} \cos \angle(\vec{p}, \vec{s}))) \end{pmatrix}$$

Entonces la matriz de la rotación es tal que

$$A' = I_{\mathcal{C}\mathcal{B}'}^{-1} M'_{\mathcal{B}'\mathcal{B}'} I_{\mathcal{C}\mathcal{B}'}$$

Donde $I_{CB'}$ es la matriz asociada a la Identidad respecto de la base \mathcal{C} a la base \mathcal{B}' , o sea es la matriz de cambio de la base de \mathcal{C} a la base \mathcal{B}' ; y la matriz $I_{CB'}^{-1}$ es la matriz inversa. Y dado que:

$$\begin{aligned} & \frac{h'(\vec{c}) - \vec{s} \cos \angle(h'(\vec{c}), \vec{s})}{\|h'(\vec{c}) - \vec{s} \cos \angle(h'(\vec{c}), \vec{s})\|} \\ & \simeq (0.17030965575512250819, -0.97538392162459499681, 0.14007436094017202856) \\ \vec{s} & \simeq (-0.97496238239628350474, -0.18742204806971905807, -0.11967175443484972611) \\ & \frac{h'(\vec{c}) - \vec{s} \cos \angle(h'(\vec{c}), \vec{s})}{\|h'(\vec{c}) - \vec{s} \cos \angle(h'(\vec{c}), \vec{s})\|} \times \vec{s} \\ & \simeq (0.14297892875782334355, -0.11618597735345622693, -0.98288241646581888256) \\ & \cos \left(\angle(h'(\vec{c}) - \vec{s} \cos \angle(h'(\vec{c}), \vec{s}), \vec{p} - \vec{s} \cos \angle(\vec{p}, \vec{s})) \right) \simeq -0.63147007180696871141 \\ & \left| \operatorname{sen} \left(\angle(h'(\vec{c}) - \vec{s} \cos \angle(h'(\vec{c}), \vec{s}), \vec{p} - \vec{s} \cos \angle(\vec{p}, \vec{s})) \right) \right| \simeq 0.77540025045914305496 \end{aligned}$$

se tiene entonces que

$$A' \simeq \begin{pmatrix} 0.91932649212365700799 & 0.39091113156368948495 & 0.045025416146965924062 \\ 0.20532411484035440239 & -0.57416138327185632554 & 0.79257852218210749362 \\ 0.33567962217661733763 & -0.71939362881453457711 & -0.60810525246573810527 \end{pmatrix}$$

7.- Una vez calculado el vector de posición $h''(\vec{Q}) = (x''_h, y''_h, z''_h)$, el cual tiene tres componentes en la base \mathcal{C} , se pasa a sus coordenadas ecuatoriales absolutas.

$$\phi'' = \arccos(z''_h)$$

$$\theta'' = \begin{cases} \arctan\left(\frac{y''_h}{x''_h}\right), & \text{con } x''_h > 0, y''_h \geq 0 \\ \frac{\pi}{2}, & \text{con } x''_h = 0, y''_h > 0 \\ \arctan\left(\frac{y''_h}{x''_h}\right) + \pi, & \text{con } x''_h < 0 \\ -\frac{\pi}{2}, & \text{con } x''_h = 0, y''_h < 0 \\ \arctan\left(\frac{y''_h}{x''_h}\right) + 2\pi, & \text{con } x''_h > 0, y''_h < 0 \end{cases}$$

$$\alpha'' = \theta'', \quad \delta'' = \frac{\pi}{2} - \phi'', \quad AR'' = \alpha'' * \frac{180}{\pi} * \frac{1}{15}, \quad DEC'' = \delta'' * \frac{180}{\pi}$$

3.2 Hipótesis nula de no correlación lineal, t-test de Student.

Dado un conjunto de parámetros $\mathcal{C} = \{p_i\}_{i=1}^{i=n}$, se define su **Coefficiente de Variación de Pearson**, cv , como $cv = \frac{\sigma}{m}$, donde $m = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{p_i}{n}$ es su media y $\sigma = \sqrt{\sum_{i=1}^{i=n} \frac{(p_i - m)^2}{n}}$ es su desviación típica. Comúnmente se dice, en los análisis estadísticos, que \mathcal{C} posee una media representativa si su cv es inferior al 25%, o sea que se trata de un conjunto concentrado y poco disperso.

El **Coefficiente de Correlación de Pearson**, $R_{\mathcal{C}\mathcal{D}}$, de dos conjuntos de parámetros $\mathcal{C} = \{p_i\}_{i=1}^{i=n}$, $\mathcal{D} = \{q_i\}_{i=1}^{i=n}$, es $R_{\mathcal{C}\mathcal{D}} = \frac{\sigma_{\mathcal{C}\mathcal{D}}}{\sigma_{\mathcal{C}}\sigma_{\mathcal{D}}}$ donde $\sigma_{\mathcal{C}}$, $\sigma_{\mathcal{D}}$ son sus

respectivas desviaciones típicas y donde $\sigma_{cD} = \frac{\sum_{i=1}^n (p_i - m_c)(q_i - m_D)}{n}$ es su covariancia con m_c, m_D las respectivas medias.

En el caso de correlación lineal se tiene que R_{cD}^2 coincide con el llamado **Coefficiente de Determinación de Pearson** η^2 .

La hipótesis nula de “no correlación lineal” se rechaza con probabilidad $P_{cD} = 1 - \alpha$ de no equivocarse, o sea con nivel de significancia α . Esta probabilidad se calcula aplicando el t -test de Student con $n - 2$ grados de libertad, tal que:

$$P_{cD} = \frac{1}{2} + t_{cD} \frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\sqrt{\pi(n-2)}\Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right)} \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \Phi$$

$$\Phi = \int_0^1 t^{-\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{t_{cD}^2}{n-2} t\right)^{-\frac{n-1}{2}} dt$$

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt$$

$$t_{cD} = \left| \frac{R_{cD} \sqrt{n-2}}{\sqrt{1-R_{cD}^2}} \right|$$

Esta correlación lineal corresponde a la línea de ecuación

$$y = b + \tan\theta x$$

$$b = m_D - \frac{\sigma_{cD}}{\sigma_D^2} m_c, \quad \tan\theta = \frac{\sigma_{cD}}{\sigma_D^2}$$

3.3 Probabilidad de resultado no aleatorio: χ^2 – test de Pearson, exacto-test de Fisher-Irwin.

Dada una tabla genérica de contingencia (tabla de doble entrada $2 \times m$, con $m - 1$ grados de libertad) de la siguiente forma, donde I_k son intervalos de partición del rango de valores de parámetros $\mathcal{P} = \{p_i\}_{i=1}^n$:

	I_1	I_2	...	I_{m-1}	I_m	total
$p_i \in I_k$	a_1	a_2	...	a_{m-1}	a_m	$t_a = \sum_{k=1}^{k=m} a_k$
$p_i \notin I_k$	b_1	b_2	...	b_{m-1}	b_m	$t_b = \sum_{k=1}^{k=m} b_k$
total	$a_1 + b_1$	$a_2 + b_2$...	$a_{m-1} + b_{m-1}$	$a_m + b_m$	$t_a + t_b$

calcularemos la probabilidad $P_{\mathcal{P}}$ de que la misma corresponda a un resultado no aleatorio.

χ^2 – test de Pearson

Para encontrar la probabilidad $P_{\mathcal{P}}$ pedida, se calcula:

$$P_{\mathcal{P}} = P_{\chi^2} = \int_0^{\chi^2} \frac{1}{2^{\frac{m-1}{2}} \Gamma\left(\frac{m-1}{2}\right)} x^{\frac{m-1}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} dx$$

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$

$$\chi^2 = \sum_{j,k=1,1}^{j,k=2,m} \frac{(F_{j,k} - f_{j,k})^2}{F_{j,k}}$$

Donde los valores $F_{j,k}$, $f_{j,k}$, son las frecuencias esperadas y obtenidas, respectivamente, de la tabla; o sea: $f_{1,k} = a_k$, $f_{2,k} = b_k$, $F_{1,k} = \frac{t_a * (a_k + b_k)}{t_a + t_b}$,
 $F_{2,k} = \frac{t_b * (a_k + b_k)}{t_a + t_b}$.

En general se requiere $P_p > 0.95$ para afirmar que existe asociación estadística *significativa*, o sea que existe evidencia estadística significativa para afirmar que la tabla procede de un proceso no aleatorio. La evidencia estadística que existe es *altamente significativa* cuando $P_p > 0.99$. Algunos autores consideran que la evidencia estadística que existe es *casi significativa* cuando $0.95 \geq P_p > 0.9$; pero generalmente se considera que la evidencia estadística que existe es *no significativa*, o dicho al revés, se dice que *no existe evidencia estadística significativa*, cuando $0.95 \geq P_p$.

Es bien sabido que la distribución χ^2 es solamente una aproximación a fin de tomar una decisión sobre una tabla de contingencia, una tabla de doble entrada. Esta aproximación usualmente no es buena para tablas 2×2 (las cuáles tienen un grado de libertad), pero mejora con el tamaño de la tabla. En nuestro trabajo consideraremos una tabla 2×180 (la cual tiene 179 grados de libertad), y por esta razón consideramos que el χ^2 - test es suficiente para tomar una decisión sobre la aleatoriedad de la tabla.

Ahora bien, es cierto que puede haber dudas sobre la corrección del proceso de toma de decisión porque, aunque la tabla que tratamos es larga (179 grados de libertad), algunos de los valores de frecuencias esperadas es menor que 5. Entonces, a pesar del largo tamaño de la tabla, uno podría temer que se ha tomado la decisión incorrecta.

Para disipar esas dudas aplicaremos el exacto-test de Fisher-Irwin.

Exacto-test de Fisher-Irwin

Para aplicar este test deben considerarse todas las posibles matrices $M_{2 \times m}(\mathbb{R})$ que encajen en la tabla dada. O sea, todas la matrices $2 \times m$ a coeficientes reales x_k, y_k :

$$\begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & \dots & x_m \\ y_1 & y_2 & \dots & y_m \end{array}$$

tales que $x_k + y_k = a_k + b_k \quad \forall k = 1 \div m$ y a la vez tales que $t_a = \sum_{k=1}^{k=m} x_k$, $t_b = \sum_{k=1}^{k=m} y_k$.

Para la matriz inicial de la tabla dada se calcula su probabilidad condicional llamada P_{cutoff} el cual es

$$P_{cutoff} = \frac{t_a! * t_b! * \prod_{k=1}^{k=m} (a_k + b_k)!}{(t_a + t_b)! * \prod_{k=1}^{k=m} a_k! * \prod_{k=1}^{k=m} b_k!}$$

Seguidamente se calcula la probabilidad condicional de todas las demás M matrices posibles, llamada $P_{value,M}$ la cual es para cada una de ellas

$$P_{value,M} = \frac{t_a! * t_b! * \prod_{k=1}^{k=m} (a_k + b_k)!}{(t_a + t_b)! * \prod_{k=1}^{k=m} x_k! * \prod_{k=1}^{k=m} y_k!}$$

Y cada P_{value} que sea menor o igual que P_{cutoff} es nombrado sucesivamente $P_{value,j}$; el número de matrices tales que $P_{value,j} \leq P_{cutoff}$ es llamado n_{cutoff} . Entonces el llamado valor bilateral P_{value} del test es

$$P_{value} = \sum_{j=1}^{j=n_{cutoff}} P_{value,j}$$

Todo lo anterior suele ser un conjunto de muy largos cálculos de combinatoria.

En consecuencia la tabla es no aleatoria con probabilidad $1 - P_{value} = P_p = P_F$.

En general se requiere que $P_F > 0.95$ para afirmar que existe asociación estadística *significativa*, o sea que existe evidencia estadística significativa para afirmar que la tabla procede de un proceso no aleatorio. La evidencia estadística que existe es *altamente significativa* cuando $P_F > 0.99$. Algunos autores consideran que la evidencia estadística que existe es *casi significativa* cuando $0.95 \geq P_F > 0.9$; pero generalmente se considera que la evidencia estadística que existe es *no significativa*, o dicho al revés, se dice que *no existe evidencia estadística significativa*, cuando $0.95 \geq P_F$.

3.4 Aleatoriedad del proceso de la Tabla de contingencia del Capítulo VI.

Veremos que la tabla de contingencia que modelará el problema tratado en el Capítulo VI se genera considerando lo siguiente: El valor máximo posible de la declinación (180 grados sexagesimales) queda compartimentado en 180 partes I_i , es decir un grado para cada parte en el intervalo $I_i = [90 - (i - 1), 90 - i], i = 1 \div 180$. Sea entonces st_i la función $st_i = \begin{cases} 0 & \text{si } A \cap I_i = \emptyset \\ 1 & \text{si } A \cap I_i \neq \emptyset \end{cases}$ donde $A = \{p_j\}_{j=1}^5$ (en el Capítulo VI se verá este conjunto A de parámetros). Consideramos también la función $\overline{st}_i = \begin{cases} 0 & \text{si } A \cap I_i \neq \emptyset \\ 1 & \text{si } A \cap I_i = \emptyset \end{cases}$, y la función $ch_i = \begin{cases} 0 & \text{si } B \cap I_i = \emptyset \\ 1 & \text{si } B \cap I_i \neq \emptyset \end{cases}$ donde $B = \{q_j\}_{j=1}^5$, y la función $\overline{ch}_i = \begin{cases} 0 & \text{si } B \cap I_i \neq \emptyset \\ 1 & \text{si } B \cap I_i = \emptyset \end{cases}$ (igualmente en el Capítulo VI se verá este conjunto B de parámetros). Con estas funciones podemos construir la función $st_sh_i = st_i + ch_i = \begin{cases} 0 & \text{si } [A \cap I_i = \emptyset \text{ y } B \cap I_i = \emptyset] \\ 1 & \text{si } [A \cap I_i = \emptyset \text{ y } B \cap I_i \neq \emptyset] \text{ o } [A \cap I_i \neq \emptyset \text{ y } B \cap I_i = \emptyset] \\ 2 & \text{si } [A \cap I_i \neq \emptyset \text{ y } B \cap I_i \neq \emptyset] \end{cases}$ y la función $\overline{st_sh}_i = \overline{st}_i + \overline{ch}_i = \begin{cases} 0 & \text{if } [A \cap I_i \neq \emptyset \text{ y } B \cap I_i \neq \emptyset] \\ 1 & \text{si } [A \cap I_i = \emptyset \text{ y } B \cap I_i \neq \emptyset] \text{ o } [A \cap I_i \neq \emptyset \text{ y } B \cap I_i = \emptyset] \\ 2 & \text{si } [A \cap I_i = \emptyset \text{ y } B \cap I_i = \emptyset] \end{cases}$. Con todo lo anterior y con los conjuntos de parámetros A y B del Capítulo VI podemos construir la siguiente Tabla 3a de contingencia:

	I_1	...	I_{80}	I_{81}	I_{82}	...	I_{96}	I_{97}	I_{98}	I_{99}	...	I_{104}
st_sh_i	0	...	0	2	0	...	0	1	1	0	...	0
$\overline{st_sh}_i$	2	...	2	0	2	...	2	1	1	2	...	2
<i>total</i>	2	...	2	2	2	...	2	2	2	2	...	2

	I_{105}	I_{106}	I_{107}	...	I_{118}	I_{119}	I_{120}	...	I_{180}	<i>total</i>
<i>st_sh_i</i>	2	2	0	...	0	2	0	...	0	10
$\overline{st_sh_i}$	0	0	2	...	2	0	2	...	2	350
<i>total</i>	2	2	2	...	2	2	2	...	2	360

Tabla 3a: Tabla de contingencia de comparación de declinaciones (ver Tabla 6e del Capítulo VI).

A fin de encontrar cuál es la probabilidad de que el resultado "existe coincidencia en las declinaciones" (Capítulo VI) no es un resultado aleatorio, aplicamos primero el χ^2 - test de Pearson con 179 grados de libertad. Calculando con las fórmulas anteriores explicadas, encontramos que $\chi^2 \approx 322.9714286$.

$$\begin{aligned} \chi^2 &= \frac{\left(\frac{10 \cdot 2}{360} - 2\right)^2}{\frac{10 \cdot 2}{360}} * 4 + \frac{\left(\frac{10 \cdot 2}{360} - 1\right)^2}{\frac{10 \cdot 2}{360}} * 2 + \frac{\left(\frac{10 \cdot 2}{360} - 0\right)^2}{\frac{10 \cdot 2}{360}} * 174 + \\ &+ \frac{\left(\frac{350 \cdot 2}{360} - 0\right)^2}{\frac{350 \cdot 2}{360}} * 4 + \frac{\left(\frac{350 \cdot 2}{360} - 1\right)^2}{\frac{350 \cdot 2}{360}} * 2 + \frac{\left(\frac{350 \cdot 2}{360} - 2\right)^2}{\frac{350 \cdot 2}{360}} * 174 \\ &\approx 322.97142857142857143 \end{aligned}$$

Y con ello seguimos haciendo los cálculos de las integrales como hemos dicho y resulta que, esta es una tabla no aleatoria con probabilidad $P_{\chi^2} \approx 0.9999999997$.

$$P_{\chi^2} = \int_0^{\chi^2} \frac{1}{2^{\frac{180-1}{2}} \Gamma\left(\frac{180-1}{2}\right)} x^{\frac{180-1}{2}-1} e^{\frac{x}{2}-1} dx \simeq 0.999999997583142893$$
$$\Gamma\left(\frac{180-1}{2}\right) = \int_0^{\infty} t^{\frac{180-1}{2}-1} e^{-t} dt \simeq 1.7473838452580494895 \times 10^{135}$$

Esta probabilidad es muy alta, por tanto existe muy alta evidencia estadística de que las coincidencias de declinaciones no se hayan producido por un proceso aleatorio, sino que haya sido un proceso intencionado.

Ahora bien, a pesar del gran tamaño de la tabla, la cual posee 179 grados de libertad, las frecuencias esperadas de las mismas son menores que 5. Por eso, podría llegar a pensarse que hemos tomado una decisión incorrecta con el uso del χ^2 - test de Pearson.

A fin de disipar cualquier duda, aplicamos también exacto-test de Fisher-Irwin. Calculando, vía combinatoria, tal como hemos explicado anteriormente vemos que existen 12335175905924916 matrices posibles que encajan en la tabla.

$$\binom{180}{10} + \binom{180}{1} \binom{179}{8} + \binom{180}{2} \binom{178}{6} + \binom{180}{3} \binom{177}{4} + \binom{180}{4} \binom{176}{2} + \binom{180}{5} = 12335175905924916$$

Procedemos a los cálculos y encontramos que el valor P_{cutoff} de la probabilidad condicional de la matriz de la tabla es $P_{cutoff} \simeq 4.503693 \times 10^{-19}$

$$P_{cutoff} = \frac{10! 350! 2^{180}}{360! 2^{174+4}} = \frac{1}{2220400243478323764} \simeq 4.5036925344300535798 \times 10^{-19}$$

Siguiendo con los cálculos de combinatoria vemos que el número n_{cutoff} de matrices cuya probabilidad condicional verifica $P_{value,i} \leq P_{cutoff}$ es $n_{cutoff} = 652859644536$.

$$\binom{180}{5} = 1488847536 \quad (5 \text{ dosis en primera fila})$$

$$\frac{10! 350! 2^{180}}{360! 2^{175+5}} = \frac{1}{8881600973913295056} \simeq 1.1259231336075133949 \times 10^{-19}$$

$$\binom{180}{4} \binom{176}{2} = 651370797000 \quad (4 \text{ dosis y 2 unos en primera fila})$$

$$\frac{10! 350! 2^{180}}{360! 2^{174+4}} = \frac{1}{2220400243478323764} \simeq 4.5036925344300535798 \times 10^{-19}$$

$$\binom{180}{3} \binom{177}{4} = 37779506226000 \quad (3 \text{ dosis y 4 unos en primera fila})$$

$$\frac{10! 350! 2^{180}}{360! 2^{173+3}} = \frac{1}{555100060869580941} \simeq 1.8014770137720214319 \times 10^{-18}$$

$$\binom{180}{2} \binom{178}{6} = 653585457709800 \quad (2 \text{ dosis y 6 unos en primera fila})$$

$$\frac{10! 350! 2^{180}}{360! 2^{172+2}} = \frac{4}{555100060869580941} \simeq 7.2059080550880857276 \times 10^{-18}$$

$$\binom{180}{1} \binom{179}{8} = 4014882097360200 \quad (1 \text{ dos y 8 unos en primera fila})$$

$$\frac{10! 350! 2^{180}}{360! 2^{171+1}} = \frac{16}{555100060869580941} \simeq 2.8823632220352342911 \times 10^{-17}$$

$$\binom{180}{10} = 7628275984984380 \quad (10 \text{ unos en primera fila})$$

$$\frac{10! 350! 2^{180}}{360! 2^{170+0}} = \frac{64}{555100060869580941} \simeq 1.1529452888140937164 \times 10^{-16}$$

$$n_{cutoff} = \binom{180}{5} + \binom{180}{4} \binom{176}{2} = 652859644536$$

Finalmente, el valor bilateral P_{value} del test es $P_{value} = \sum_{i=1}^{n_{cutoff}} P_{value,i} = 103350907063 \approx 2.935250 \times 10^{-7}$.

$$\begin{aligned} P_{value} &= \binom{180}{5} \frac{10! 350! 2^{180}}{360! 2^{175+5}} + \binom{180}{4} \binom{176}{2} \frac{10! 350! 2^{180}}{360! 2^{174+4}} = \frac{103}{350907063} \\ &\approx 2.9352501234778508861 \times 10^{-7} \\ P_F &= 1 - P_{value} \approx 0.99999970647498765221 \end{aligned}$$

En conclusión, usando el exacto-test de Fisher-Irwin encontramos que esta tabla procede de un proceso no aleatorio con probabilidad $P_F \approx 0.9999997$. En consecuencia, existe muy alta evidencia estadística de que el resultado "existe coincidencia en las declinaciones" no se haya producido por un proceso aleatorio, sino que haya sido un proceso intencionado (ver Capítulo VI).

UNIVERSITAT ROVIRA I VIRGILI

ANÁLISIS GEOMÉTRICO Y ASTRONÓMICO EN LA CATEDRAL DE CHARTRES

Juan Miguel Seguí Colomar

CAPÍTULO IV

CÓDIGOS PROPIOS DE CÓMPUTO EN C++ PARA EL PRESENTE ESTUDIO

En este capítulo presentamos los códigos propios que hemos creado en lenguaje de programación C++. No se trata de códigos optimizados en el sentido informático; o sea, no hemos intentado que sean compactos en órdenes ni cortos en extensión ni rápidos en tiempo de cómputo. Los hemos creado con la sola intención de que funcionen bien y aporten resultados correctos. Se trata de códigos de computación que nos permiten calcular, y medir con precisión, los conceptos presentados en los capítulos anteriores.

Los códigos los presentamos aquí públicamente a fin de quien quiera pueda usarlos y, si lo desea, optimizarlos.

UNIVERSITAT ROVIRA I VIRGILI

ANÁLISIS GEOMÉTRICO Y ASTRONÓMICO EN LA CATEDRAL DE CHARTRES

Juan Miguel Seguí Colomar

4.1 Cambio de coordenadas absolutas por Equinoccio Medio de J2000 a un JD dado.

```
#include <winbgim.h>
#include <stdlib.h>
#include <math.h>
#include <stdio.h>
#include <string.h>

main()
{
    double JD;
    double AR_h, AR_m, AR_s;
    double DEC_g, DEC_m, DEC_s;
    double AR_p, DEC_p;
    double T01;
    double alpha0p, delta0p;
    double zeta01, varkappa01, theta01;
    double pi=acos(-1.);
    double A, B, C;
    double alpha1;
    double atan2;
    double delta1;
    double AR, DEC;
    int AR_hJ, AR_mJ, DEC_gJ, DEC_mJ;
    double AR_sJ, DEC_sJ;
```

REPITE:

```
printf("PASAREMOS LAS COORDENADAS ABSOLUTAS DE UNA ESTRELLA\n");
printf("de la epoca de referencia J2000 al JD entrado.\n\n");
printf("Método riguroso, Equinoccio medio (precesión y movimiento propio)\n\n");

printf("Dane JD\n");
scanf("%lf",&JD);

printf("Dane las HORAS de la ASCENSION RECTA en [0,24]\n");
scanf("%lf",&AR_h);

printf("Dane los MINUTOS de la ASCENSION RECTA (negativo nunca)\n");
scanf("%lf",&AR_m);

printf("Dane los SEGUNDOS de la ASCENSION RECTA (negativo nunca)\n");
scanf("%lf",&AR_s);

printf("Dane los GRADOS de la DECLINACION en [-90,90] (negativo sur)\n");
scanf("%lf",&DEC_g);

printf("Dane los MINUTOS de la DECLINACION (negativo sur)\n");
scanf("%lf",&DEC_m);
```

```
printf("Dane los SEGUNDOS de la DECLINACION (negativo sur)\n");  
scanf("%lf",&DEC_s);
```

```
printf("Dane el MOVIMIENTO PROPIO en ASCENSION RECTA en mas/yr\n");  
scanf("%lf",&AR_p);
```

```
printf("Dane el MOVIMIENTO PROPIO en DECLINACION en mas/yr\n");  
scanf("%lf",&DEC_p);
```

```
T01=(JD-2451545.)/36525.;
```

```
alpha0p=AR_h*360./24.+(AR_m/60.)*360./24.+(AR_s/(60.*60.))*360./24.+(100.*T01*AR_p/1000.)/(60.*60.);  
delta0p=DEC_g+DEC_m/60.+DEC_s/(60.*60.)+(100.*T01*DEC_p/1000.)/(60.*60.);
```

```
alpha0p=alpha0p*pi/180.;  
delta0p=delta0p*pi/180.;
```

```
zeta01=(2306.2181*T01+0.30188*powl(T01,2)+0.017998*powl(T01,3))/(60.*60.);  
varkappa01=(2306.2181*T01+1.09468*powl(T01,2)+0.018203*powl(T01,3))/(60.*60.);  
theta01=(2004.3109*T01-0.42665*powl(T01,2)-0.041833*powl(T01,3))/(60.*60.);
```

```
zeta01=zeta01*pi/180.;  
varkappa01=varkappa01*pi/180.;  
theta01=theta01*pi/180.;
```

```
A=cosl(delta0p)*sinl(alpha0p+zeta01);  
B=cosl(theta01)*cosl(delta0p)*cosl(alpha0p+zeta01)-sinl(theta01)*sinl(delta0p);  
C=sinl(theta01)*cosl(delta0p)*cosl(alpha0p+zeta01)+cosl(theta01)*sinl(delta0p);
```

```
if(B>0.)  
{  
    atan2=atanl(A/B);  
}  
if(B<0. && A>=0.)  
{  
    atan2=atanl(A/B)+pi;  
}  
if(B<0. && A<0.)  
{  
    atan2=atanl(A/B)-pi;  
}  
if(B==0. && A>0.)  
{  
    atan2=pi/2.;  
}  
if(B==0. && A<0.)  
{
```

```
        atan2=-pi/2.;
    }
    if(B==0. && A==0.)
    {
        printf("CALCULO NO POSIBLE\n");
        goto REPITE;
    }

    alpha1=varkappa01+atan2;
    delta1=asinl(C);

    AR=(alpha1*180./pi)*24./360.;
    if(AR<0.)
    {
        printf("alpha1=%20.17lf, AR=%20.17lf\n",alpha1,AR);
        AR=24.+AR;
    }
    if(AR<0.)
    {
        printf("AR=%20.17lf\n",AR);
        AR=24.+AR;
    }
    DEC=delta1*180./pi;

    printf("\n");
    printf("ASCENSION RECTA solo en HORAS es: %20.17lf Horas\n",AR);
    printf("DECLINACION solo en GRADOS es: %20.17lf Grados\n",DEC);

    AR_hJ=(int)AR;
    AR_mJ=(int)((AR-AR_hJ)*60.);
    AR_sJ=((AR-AR_hJ)*60.-AR_mJ)*60.;
    DEC_gJ=(int)DEC;
    DEC_mJ=(int)((DEC-DEC_gJ)*60.);
    DEC_sJ=((DEC-DEC_gJ)*60.-DEC_mJ)*60.;

    printf("ASCENSION RECTA: %d horas %d minutos %f
segundos\n",AR_hJ,AR_mJ,AR_sJ);
    printf("DECLINACION: %d grados %d minutos %f
segundos\n\n",DEC_gJ,DEC_mJ,DEC_sJ);

    system("pause");

    printf("\n\n");

    goto REPITE;
}
```

4.2 Cambio de coordenadas absolutas por Equinoccio Real (precesión + movimiento propio + nutación + aberración) de J2000 a un JD dado.

Este programa requiere los ficheros que llamamos **NUTACION.txt** y **TIERRA_L_64.txt**. Estos ficheros los adjuntamos al final del mismo del código, para el lector interesado en reprogramarlo.

```
#include <winbgim.h>
#include <stdlib.h>
#include <math.h>
#include <stdio.h>
#include <string.h>

main()
{
    double JD;
    double AR_h, AR_m, AR_s;
    double DEC_g, DEC_m, DEC_s;
    double AR_p, DEC_p;
    double T01;
    double alpha0p, delta0p;
    double zeta01, varkappa01, theta01;
    double pi=acos(-1.);
    double A, B, C;
    double alpha1;
    double atan2;
    double delta1;
    double AR, DEC;
    int AR_hJ, AR_mJ, DEC_gJ, DEC_mJ;
    double AR_sJ, DEC_sJ;
```

REPITE:

```
    printf("PASAREMOS LAS COORDENADAS ASTRONOMICAS DE UNA ESTRELLA\n");
    printf("de la epoca de referencia J2000 al JD entrado.\n\n");
    printf("Método riguroso, Equinoccio real (Precesión, Nutación, Movimiento propio,
Aberración).\n\n");
```

```
    printf("Dane JD\n");
    scanf("%lf",&JD);
```

```
    printf("Dane las HORAS de la ASCENSION RECTA en [0,24]\n");
    scanf("%lf",&AR_h);
```

```
    printf("Dane los MINUTOS de la ASCENSION RECTA (negativo nunca)\n");
    scanf("%lf",&AR_m);
```

```
    printf("Dane los SEGUNDOS de la ASCENSION RECTA (negativo nunca)\n");
```

```
scanf("%lf",&AR_s);

printf("Dane los GRADOS de la DECLINACION en [-90,90] (negativo sur)\n");
scanf("%lf",&DEC_g);

printf("Dane los MINUTOS de la DECLINACION (negativo sur)\n");
scanf("%lf",&DEC_m);

printf("Dane los SEGUNDOS de la DECLINACION (negativo sur)\n");
scanf("%lf",&DEC_s);

printf("Dane el MOVIMIENTO PROPIO en ASCENSION RECTA en mas/yr\n");
scanf("%lf",&AR_p);

printf("Dane el MOVIMIENTO PROPIO en DECLINACION en mas/yr\n");
scanf("%lf",&DEC_p);

T01=(JD-2451545.)/36525.;

alpha0p=AR_h*360./24.+(AR_m/60.)*360./24.+(AR_s/(60.*60.))*360./24.+(100.*T01*AR_
p/1000.)/(60.*60.);
delta0p=DEC_g+DEC_m/60.+DEC_s/(60.*60.)+(100.*T01*DEC_p/1000.)/(60.*60.);

alpha0p=alpha0p*pi/180.;
delta0p=delta0p*pi/180.;

zeta01=(2306.2181*T01+0.30188*powl(T01,2)+0.017998*powl(T01,3))/(60.*60.);
varkappa01=(2306.2181*T01+1.09468*powl(T01,2)+0.018203*powl(T01,3))/(60.*60.);
theta01=(2004.3109*T01-0.42665*powl(T01,2)-0.041833*powl(T01,3))/(60.*60.);

zeta01=zeta01*pi/180.;
varkappa01=varkappa01*pi/180.;
theta01=theta01*pi/180.;

A=cosl(delta0p)*sinl(alpha0p+zeta01);
B=cosl(theta01)*cosl(delta0p)*cosl(alpha0p+zeta01)-sinl(theta01)*sinl(delta0p);
C=sinl(theta01)*cosl(delta0p)*cosl(alpha0p+zeta01)+cosl(theta01)*sinl(delta0p);

if(B>0.)
{
atan2=atanl(A/B);
}
if(B<0. && A>=0.)
{
atan2=atanl(A/B)+pi;
}
if(B<0. && A<0.)
{
atan2=atanl(A/B)-pi;
}
```

```
if(B==0. && A>0.)
{
    atan2=pi/2.;
}
if(B==0. && A<0.)
{
    atan2=-pi/2.;
}
if(B==0. && A==0.)
{
    printf("CALCULO NO POSIBLE\n");
    goto REPITE;
}

alpha1=varkappa01+atan2;
delta1=asin(C);

AR=(alpha1*180./pi)*24./360.;
if(AR<0.)
{
    printf("alpha1=%20.17lf, AR=%20.17lf\n",alpha1,AR);
    AR=24.+AR;
}
if(AR<0.)
{
    printf("AR=%20.17lf\n",AR);
    AR=24.+AR;
}
DEC=delta1*180./pi;

printf("\n");
printf("EQUINOCCIO MEDIO\n\n");
printf("ASCENSION RECTA solo en HORAS es: %20.17lf Horas\n",AR);
printf("DECLINACION solo en GRADOS es: %20.17lf Grados\n",DEC);

AR_hJ=(int)AR;
AR_mJ=(int)((AR-AR_hJ)*60.);
AR_sJ=((AR-AR_hJ)*60.-AR_mJ)*60.;
DEC_gJ=(int)DEC;
DEC_mJ=(int)((DEC-DEC_gJ)*60.);
DEC_sJ=((DEC-DEC_gJ)*60.-DEC_mJ)*60.;

printf("ASCENSION RECTA: %d horas %d minutos %f
segundos\n",AR_hJ,AR_mJ,AR_sJ);
printf("DECLINACION: %d grados %d minutos %f
segundos\n",DEC_gJ,DEC_mJ,DEC_sJ);

AR=(AR*360./24.)*pi/180.;
DEC=DEC*pi/180.;

double T;
```

```
double deltapsi, deltaepsilon, epsilon;
T=T01;

deltapsi=0.;
deltaepsilon=0.;
epsilon=0.;
double D, M, Mp, F, Omega;
D=297.85036+445267.111480*T-0.0019142*pow(T,2)+pow(T,3)/189474.;
M=357.52772+35999.050340*T-0.0001603*pow(T,2)-pow(T,3)/300000.;
Mp=134.96298+477198.867398*T+0.0086972*pow(T,2)+pow(T,3)/56250.;
F=93.27191+483202.017538*T-0.0036825*pow(T,2)+pow(T,3)/327270.;
Omega=125.04452-1934.136261*T+0.0020708*pow(T,2)+pow(T,3)/450000.;

double N1, N2, N3, N4, N5, N6, N7, N8, N9;
double argumento;
int i;

char nombrefich7[80]="NUTACION.txt";
FILE *fichero;
fichero = fopen(nombrefich7, "r");
if(fichero==NULL)
{
    printf("Error abriendo el fichero.\n");
}
else
{
    for (i=1;i<=63;i++)
    {
        fscanf(fichero,"%lf%lf%lf%lf%lf%lf%lf%lf%lf%lf\n",&N1,&N2,&N3, &N4,
&N5,&N6,&N7, &N8, &N9);
        argumento=(N1*D+N2*M+N3*Mp+N4*F+N5*Omega)*acosl(-1.)/180.;
        deltapsi=deltapsi+(N6+N7*T)*sinl(argumento);
        deltaepsilon=deltaepsilon+(N8+N9*T)*cosl(argumento);
    }
    deltapsi=deltapsi*0.0001;
    deltaepsilon=deltaepsilon*0.0001;
    printf("deltapsi=%lf deltaepsilon=%lf\n",deltapsi,deltaepsilon);
}
fclose(fichero);
double U;
U=T/100.;
epsilon=23.439291111111111111111111111111-4680.93*U/3600.-
1.55*pow(U,2)/3600.+1999.25*pow(U,3)/3600.-51.38*pow(U,4)/3600.-
249.67*pow(U,5)/3600.39.05*pow(U,6)/3600.+7.12*pow(U,7)/3600.+27.87*pow(U,8)/360
0.+5.79*pow(U,9)/3600.+2.45*pow(U,10)/3600.;

epsilon=epsilon+deltaepsilon/3600.;
printf("epsilon=%lf\n",epsilon);

printf("T=%lf\n",T);
```

```
double ppi, e;

e=0.01670863-0.000042037*T-0.0000001267*pow(T,2)+0.00000000014*pow(T,3);
ppi=102.937348+1.7195366*T+0.00045688*pow(T,2)-0.000000018*pow(T,3);
printf("e=%lf ppi=%lf \n ",e,ppi);

double sol;
double tau;

int numero;

tau=(JD-2451545.)/365250.;

double L0=0., L1=0., L2=0., L3=0., L4=0., L5=0.;

L0=0., L1=0., L2=0., L3=0., L4=0., L5=0.;

double Lon0;

char nombrefich4[80]="TIERRA_L_64.txt";

fichero = fopen(nombrefich4,"r");
if(fichero==NULL)
{
    printf("Error abriendo el fichero.\n");
}
else
{
    for (i=1;i<=64;i++)
    {
        fscanf(fichero,"%d %lf %lf %lf \n",&numero,&A,&B,&C);
        L0=L0+A*cosl(B+C*tau);
    }
    for (i=1;i<=64;i++)
    {
        fscanf(fichero,"%d %lf %lf %lf \n",&numero,&A,&B,&C);
        L1=L1+A*cosl(B+C*tau);
    }
    for (i=1;i<=64;i++)
    {
        fscanf(fichero,"%d %lf %lf %lf \n",&numero,&A,&B,&C);
        L2=L2+A*cosl(B+C*tau);
    }
    for (i=1;i<=64;i++)
    {
        fscanf(fichero,"%d %lf %lf %lf \n",&numero,&A,&B,&C);
        L3=L3+A*cosl(B+C*tau);
    }
    for (i=1;i<=64;i++)
    {
        fscanf(fichero,"%d %lf %lf %lf \n",&numero,&A,&B,&C);
        L4=L4+A*cosl(B+C*tau);
    }
    for (i=1;i<=64;i++)
    {
        fscanf(fichero,"%d %lf %lf %lf \n",&numero,&A,&B,&C);
        L5=L5+A*cosl(B+C*tau);
    }
}
```

```
        {  
            fscanf(fichero,"%d %f %f %f %f \n",&numero,&A,&B,&C);  
            L4=L4+A*cosl(B+C*tau);  
        }  
    for (i=1;i<=64;i++)  
    {  
        fscanf(fichero,"%d %f %f %f %f \n",&numero,&A,&B,&C);  
        L5=L5+A*cosl(B+C*tau);  
    }  
}  
fclose(fichero);  
Lon0=L0+L1*tau+L2*pow(tau,2)+L3*pow(tau,3)+L4*pow(tau,4)+L5*pow(tau,5);  
Lon0=Lon0/pow(10,8);  
sol=Lon0+pi;  
sol=sol*180./pi;  
printf("sol=%f \n ",sol);  
double kappa=20.49552;  
  
sol=sol*pi/180.;  
deltapsi=deltapsi*pi/180.;  
deltaepsilon=deltaepsilon*pi/180.;  
epsilon=epsilon*pi/180.;  
ppi=ppi*pi/180.;  
  
double deltaAR1, deltaDEC1;  
deltaAR1=(cosl(epsilon)+sinl(epsilon)*sinl(AR)*tanl(DEC))*deltapsi-  
cosl(AR)*tanl(DEC)*deltaepsilon;  
deltaDEC1=sinl(epsilon)*cosl(AR)*deltapsi+sinl(AR)*deltaepsilon;  
  
printf("AR1=%f DEC1=%f \n ",deltaAR1*180./pi,deltaDEC1*180./pi);  
deltaAR1=deltaAR1/(60.*60.);  
deltaDEC1=deltaDEC1/(60.*60.);  
  
double deltaAR2, deltaDEC2;  
deltaAR2=-  
kappa*(cosl(AR)*cosl(sol)*cosl(epsilon)+sinl(AR)*sinl(sol))/cosl(DEC)+e*kappa*(cosl(AR)*cosl  
(ppi)*cosl(epsilon)+sinl(AR)*sinl(ppi))/cosl(DEC);  
deltaDEC2=-kappa*(cosl(sol)*cosl(epsilon)*(tanl(epsilon)*cosl(DEC)  
sinl(AR)*sinl(DEC))+cosl(AR)*sinl(DEC)*sinl(sol))+e*kappa*(cosl(ppi)*cosl(epsilon)*(tanl(epsil  
on)*cosl(DEC)-sinl(AR)*sinl(DEC))+cosl(AR)*sinl(DEC)*sinl(ppi));  
printf("AR2=%f DEC2=%f \n ",deltaAR2,deltaDEC2);  
  
deltaAR2=(deltaAR2/(60.*60.))*pi/180.;  
deltaDEC2=(deltaDEC2/(60.*60.))*pi/180.;  
  
double deltaAR, deltaDEC;  
deltaAR=deltaAR1+deltaAR2;  
deltaDEC=deltaDEC1+deltaDEC2;  
printf("AR2+ar1=%f DEC2+dec1=%f \n  
",60.*60.*deltaAR*180./pi,60.*60.*deltaDEC*180./pi);
```

```
AR=AR+deltaAR;
DEC=DEC+deltaDEC;

AR=(AR*180./pi)*24./360.;

if(AR<0.)
{
    printf("alpha1=%20.17lf, AR=%20.17lf\n",alpha1,AR);
    AR=24.+AR;
}
if(AR<0.)
{
    printf("AR=%20.17lf\n",AR);
    AR=24.+AR;
}
DEC=DEC*180./pi;

printf("\n");
printf("EQUINOCCIO REAL\n\n");
printf("ASCENSION RECTA solo en HORAS es: %20.17lf Horas\n",AR);
printf("DECLINACION solo en GRADOS es: %20.17lf Grados\n",DEC);

AR_hJ=(int)AR;
AR_mJ=(int)((AR-AR_hJ)*60.);
AR_sJ=((AR-AR_hJ)*60.-AR_mJ)*60.;
DEC_gJ=(int)DEC;
DEC_mJ=(int)((DEC-DEC_gJ)*60.);
DEC_sJ=((DEC-DEC_gJ)*60.-DEC_mJ)*60.;

printf("ASCENSION RECTA: %d horas %d minutos %f
segundos\n",AR_hJ,AR_mJ,AR_sJ);
printf("DECLINACION: %d grados %d minutos %f
segundos\n\n",DEC_gJ,DEC_mJ,DEC_sJ);

system("pause");

printf("\n\n");

goto REPITE;
}
```

Fichero NUTACION.txt

```
0 0 0 1 -171996 -174.2 92025 8.9
-2 0 0 2 2 -13187 -1.6 5736 -3.1
0 0 0 2 2 -2274 -0.2 977 -0.5
0 0 0 2 2062 0.2 -895 0.5
0 1 0 0 0 1426 -3.4 54 -0.1
0 0 1 0 0 712 0.1 -7 0
-2 1 0 2 2 -517 1.2 224 -0.6
```

0 0 0 2 1 -386 -0.4 200 0
0 0 1 2 2 -301 0 129 -0.1
-2 -1 0 2 2 217 -0.5 -95 0.3
-2 0 1 0 0 -158 0 0 0
-2 0 0 2 1 129 0.1 -70 0
0 0 -1 2 2 123 0 -53 0
2 0 0 0 0 63 0 0 0
0 0 1 0 1 63 0.1 -33 0
2 0 -1 2 2 -59 0 26 0
0 0 -1 0 1 -58 -0.1 32 0
0 0 1 2 1 -51 0 27 0
-2 0 2 0 0 48 0 0 0
0 0 -2 2 1 46 0 -24 0
2 0 0 2 2 -38 0 16 0
0 0 2 2 2 -31 0 13 0
0 0 2 0 0 29 0 0 0
-2 0 1 2 2 29 0 -12 0
0 0 0 2 0 26 0 0 0
-2 0 0 2 0 -22 0 0 0
0 0 -1 2 1 21 0 -10 0
0 2 0 0 0 17 -0.1 10 0
2 0 -1 0 1 16 0 -8 0
-2 2 0 2 2 -16 0.1 7 0
0 1 0 0 1 -15 0 9 0
-2 0 1 0 1 -13 0 7 0
0 -1 0 0 1 -12 0 6 0
0 0 2 -2 0 11 0 0 0
2 0 -1 2 1 -10 0 5 0
2 0 1 2 2 -8 0 3 0
0 1 0 2 2 7 0 -3 0
-2 1 1 0 0 -7 0 0 0
0 -1 0 2 2 -7 0 3 0
2 0 0 2 1 -7 0 3 0
2 0 1 0 0 6 0 0 0
-2 0 2 2 2 6 0 -3 0
-2 0 1 2 1 6 0 -3 0
2 0 -2 0 1 -6 0 3 0
2 0 0 0 1 -6 0 3 0
0 -1 1 0 0 5 0 0 0
-2 -1 0 2 1 -5 0 3 0
-2 0 0 0 1 -5 0 3 0
0 0 2 2 1 -5 0 3 0
-2 0 2 0 1 4 0 0 0
-2 1 0 2 1 4 0 0 0
0 0 1 -2 0 4 0 0 0
-1 0 1 0 0 -4 0 0 0
-2 1 0 0 0 -4 0 0 0
1 0 0 0 0 -4 0 0 0
0 0 1 2 0 3 0 0 0
0 0 -2 2 2 -3 0 0 0
-1 -1 1 0 0 -3 0 0 0

0 1 1 0 0 -3 0 0 0
0 -1 1 2 2 -3 0 0 0
2 -1 -1 2 2 -3 0 0 0
0 0 3 2 2 -3 0 0 0
2 -1 0 2 2 -3 0 0 0

Fichero TIERRA_L_64.txt

1	175347046	0	0
2	3341656	4.6692568	6283.0758500
3	34894	4.62610	12566.15170
4	3497 2.7441		5753.3849
5	3418 2.8289		3.5231
6	3136 3.6277		77713.7715
7	2676 4.4181		7860.4194
8	2343 6.1352		3930.2097
9	1324 0.7425		11506.7698
10	1273 2.0371		529.6910
11	1199 1.1096		1577.3435
12	990	5.233	5884.927
13	902	2.045	26.298
14	857	3.508	398.149
15	780	1.179	5223.694
16	753	2.533	5507.553
17	505	4.583	18849.228
18	492	4.205	775.523
19	357	2.920	0.067
20	317	5.849	11790.629
21	284	1.899	796.298
22	271	0.315	10977.079
23	243	0.345	5486.778
24	206	4.806	2544.314
25	205	1.869	5573.143
26	202	2.458	6069.777
27	156	0.833	213.299
28	132	3.411	2942.463
29	126	1.083	20.775
30	115	0.645	0.980
31	103	0.636	4694.003
32	102	0.976	15720.839
33	102	4.267	7.114
34	99	6.21	2146.17
35	98	0.68	155.42
36	86	5.98	161000.69
37	85	1.30	6275.96
38	85	3.67	71430.70
39	80	1.81	17260.15
40	79	3.04	12036.46
41	75	1.76	5088.63
42	74	3.50	3154.69

43 74	4.68	801.82
44 70	0.83	9437.76
45 62	3.98	8827.39
46 61	1.82	7084.90
47 57	2.78	6286.60
48 56	4.39	14143.50
49 56	3.47	6279.55
50 52	0.19	12139.55
51 52	1.33	1748.02
52 51	0.28	5856.48
53 49	0.49	1194.45
54 41	5.37	8429.24
55 41	2.40	19651.05
56 39	6.17	10447.39
57 37	6.04	10213.29
58 37	2.57	1059.38
59 36	1.71	2352.87
60 36	1.78	6812.77
61 33	0.59	17789.85
62 30	0.44	83996.85
63 30	2.74	1349.87
64 25	3.16	4690.48
1 628331966747 0		0
2 206059	2.678235	6283.075850
3 4303 2.6351		12566.1517
4 425	1.590	3.523
5 119	5.796	26.298
6 109	2.966	1577.344
7 93	2.59	18849.23
8 72	1.14	529.69
9 68	1.87	398.15
10 67	4.41	5507.55
11 59	2.89	5223.69
12 56	2.17	155.42
13 45	0.40	796.30
14 36	0.47	775.52
15 29	2.65	7.11
16 21	5.34	0.98
17 19	1.85	5486.78
18 19	4.97	213.30
19 17	2.99	6275.96
20 16	0.03	2544.31
21 16	1.43	2146.17
22 15	1.21	10977.08
23 12	2.83	1748.02
24 12	3.26	5088.63
25 12	5.27	1194.45
26 12	2.08	4694.00
27 11	0.77	553.57
28 10	1.30	6286.60
29 10	4.24	1349.87

30 9	2.70	242.73
31 9	5.64	951.72
32 8	5.30	2352.87
33 6	2.65	9437.76
34 6	4.67	4690.48
35 0 0 0		
36 0 0 0		
37 0 0 0		
38 0 0 0		
39 0 0 0		
40 0 0 0		
41 0 0 0		
42 0 0 0		
43 0 0 0		
44 0 0 0		
45 0 0 0		
46 0 0 0		
47 0 0 0		
48 0 0 0		
49 0 0 0		
50 0 0 0		
51 0 0 0		
52 0 0 0		
53 0 0 0		
54 0 0 0		
55 0 0 0		
56 0 0 0		
57 0 0 0		
58 0 0 0		
59 0 0 0		
60 0 0 0		
61 0 0 0		
62 0 0 0		
63 0 0 0		
64 0 0 0		
1 52919	0	0
2 8720 1.0721		6283.0758
3 309	0.867	12566.152
4 27	0.05	3.52
5 16	5.19	26.30
6 16	3.68	155.42
7 10	0.76	18849.23
8 9	2.06	77713.77
9 7	0.83	775.52
10 5	4.66	1577.34
11 4	1.03	7.11
12 4	3.44	5573.14
13 3	5.14	796.30
14 3	6.05	5507.55
15 3	1.19	242.72
16 3	6.12	529.69

17 3	0.31	398.15
18 3	2.28	553.57
19 2	4.38	5223.69
20 2	3.75	0.98
21 0 0 0		
22 0 0 0		
23 0 0 0		
24 0 0 0		
25 0 0 0		
26 0 0 0		
27 0 0 0		
28 0 0 0		
29 0 0 0		
30 0 0 0		
31 0 0 0		
32 0 0 0		
33 0 0 0		
34 0 0 0		
35 0 0 0		
36 0 0 0		
37 0 0 0		
38 0 0 0		
39 0 0 0		
40 0 0 0		
41 0 0 0		
42 0 0 0		
43 0 0 0		
44 0 0 0		
45 0 0 0		
46 0 0 0		
47 0 0 0		
48 0 0 0		
49 0 0 0		
50 0 0 0		
51 0 0 0		
52 0 0 0		
53 0 0 0		
54 0 0 0		
55 0 0 0		
56 0 0 0		
57 0 0 0		
58 0 0 0		
59 0 0 0		
60 0 0 0		
61 0 0 0		
62 0 0 0		
63 0 0 0		
64 0 0 0		
1 289	5.844	6283.076
2 35	0	0
3 17	5.49	12566.15

4 3	5.20	155.42
5 1	4.72	3.52
6 1	5.30	18849.23
7 1	5.97	242.73
8 0 0 0		
9 0 0 0		
10 0 0 0		
11 0 0 0		
12 0 0 0		
13 0 0 0		
14 0 0 0		
15 0 0 0		
16 0 0 0		
17 0 0 0		
18 0 0 0		
19 0 0 0		
20 0 0 0		
21 0 0 0		
22 0 0 0		
23 0 0 0		
24 0 0 0		
25 0 0 0		
26 0 0 0		
27 0 0 0		
28 0 0 0		
29 0 0 0		
30 0 0 0		
31 0 0 0		
32 0 0 0		
33 0 0 0		
34 0 0 0		
35 0 0 0		
36 0 0 0		
37 0 0 0		
38 0 0 0		
39 0 0 0		
40 0 0 0		
41 0 0 0		
42 0 0 0		
43 0 0 0		
44 0 0 0		
45 0 0 0		
46 0 0 0		
47 0 0 0		
48 0 0 0		
49 0 0 0		
50 0 0 0		
51 0 0 0		
52 0 0 0		
53 0 0 0		
54 0 0 0		

55 0 0 0		
56 0 0 0		
57 0 0 0		
58 0 0 0		
59 0 0 0		
60 0 0 0		
61 0 0 0		
62 0 0 0		
63 0 0 0		
64 0 0 0		
1 114	3.142	0
2 8	4.13	6283.08
3 1	3.84	12566.15
4 0 0 0		
5 0 0 0		
6 0 0 0		
7 0 0 0		
8 0 0 0		
9 0 0 0		
10 0 0 0		
11 0 0 0		
12 0 0 0		
13 0 0 0		
14 0 0 0		
15 0 0 0		
16 0 0 0		
17 0 0 0		
18 0 0 0		
19 0 0 0		
20 0 0 0		
21 0 0 0		
22 0 0 0		
23 0 0 0		
24 0 0 0		
25 0 0 0		
26 0 0 0		
27 0 0 0		
28 0 0 0		
29 0 0 0		
30 0 0 0		
31 0 0 0		
32 0 0 0		
33 0 0 0		
34 0 0 0		
35 0 0 0		
36 0 0 0		
37 0 0 0		
38 0 0 0		
39 0 0 0		
40 0 0 0		
41 0 0 0		

42 0 0 0
43 0 0 0
44 0 0 0
45 0 0 0
46 0 0 0
47 0 0 0
48 0 0 0
49 0 0 0
50 0 0 0
51 0 0 0
52 0 0 0
53 0 0 0
54 0 0 0
55 0 0 0
56 0 0 0
57 0 0 0
58 0 0 0
59 0 0 0
60 0 0 0
61 0 0 0
62 0 0 0
63 0 0 0
64 0 0 0
1 1
2 0 0 0
3 0 0 0
4 0 0 0
5 0 0 0
6 0 0 0
7 0 0 0
8 0 0 0
9 0 0 0
10 0 0 0
11 0 0 0
12 0 0 0
13 0 0 0
14 0 0 0
15 0 0 0
16 0 0 0
17 0 0 0
18 0 0 0
19 0 0 0
20 0 0 0
21 0 0 0
22 0 0 0
23 0 0 0
24 0 0 0
25 0 0 0
26 0 0 0
27 0 0 0
28 0 0 0

3.14

0

29 0 0 0
30 0 0 0
31 0 0 0
32 0 0 0
33 0 0 0
34 0 0 0
35 0 0 0
36 0 0 0
37 0 0 0
38 0 0 0
39 0 0 0
40 0 0 0
41 0 0 0
42 0 0 0
43 0 0 0
44 0 0 0
45 0 0 0
46 0 0 0
47 0 0 0
48 0 0 0
49 0 0 0
50 0 0 0
51 0 0 0
52 0 0 0
53 0 0 0
54 0 0 0
55 0 0 0
56 0 0 0
57 0 0 0
58 0 0 0
59 0 0 0
60 0 0 0
61 0 0 0
62 0 0 0
63 0 0 0
64 0 0 0

4.3 Transformación de catedrales terrestres cualesquiera en astros celestes, fijando Reims en *Spica* y Chartres en *Porrima*.

En *J1200*:

```
#include <winbgim.h>
#include <stdlib.h>
#include <math.h>
#include <stdio.h>
#include <string.h>

main()
{
    double lon_g, lon_m, lon_s;
    double lat_g, lat_m, lat_s;
    double pi=acos(-1.);
    double lambdaQ, varphyQ;
    double thetaQ, phyQ;
    double xQ, yQ, zQ;
    double xh, yh, zh;
    double zeta, xi=0.2516725789613883461, eta=0.03244337742586439614;
    double xr=0.65109803135849973755, yr=0.045904160665028039003,
    zr=0.75760422490554089105;
    double xhp, yhp, zhp;
    double xhpp, yhpp, zhpp;
    double phypp, thetapp;
    double alphapp, deltapp;
    double ARpp, DECpp;
    int AR_h, AR_m, DEC_g, DEC_m;
    double AR_s, DEC_s;

    REPITE:

    printf("PASAREMOS LATITUD y LONGITUD de CATEDRAL COMO\n");
    printf("ASCENSION RECTA Y DECLINACION DE ASTRO\n");
    printf("PONIENDO REIMS SOBRE SPICA Y CHARTRES SOBRE PORRIMA:\n\n");

    printf("##### J1200 !!!!!\n");
    printf("LONGITUD ESTE DE REIMS: 4 grados 1 minuto 58.2 segundos\n");
    printf("LATITUD NORTE DE REIMS: 49 grados 15 minutos 12.4 segundos\n");
    printf("##### NO INTRODUCIR LOS DATOS DE REIMS !!!!!\n");
    printf("##### NO INTRODUCIR LOS DATOS DE REIMS !!!!!\n");

    printf("Dane los GRADOS de la LONGITUD ESTE en [0,360] (negativo nunca)\n");
    scanf("%lf",&lon_g);
    printf("Dane los MINUTOS de la LONGITUD ESTE (negativo nunca)\n");
    scanf("%lf",&lon_m);
    printf("Dane los SEGUNDOS de la LONGITUD ESTE (negativo nunca)\n");
    scanf("%lf",&lon_s);
    printf("Dane los GRADOS de la LATITUD NORTE en [-90,90] (negativo sur)\n");
```

```
scanf("%lf",&lat_g);
printf("Dane los MINUTOS de la LATITUD NORTE (negativo sur)\n");
scanf("%lf",&lat_m);
printf("Dane los SEGUNDOS de la LONGITUD NORTE (negativo sur)\n");
scanf("%lf",&lat_s);

lambdaQ=(lon_g+lon_m/60.+(lon_s/60.)/60.)*pi/180.;
varphyQ=(lat_g+lat_m/60.+(lat_s/60.)/60.)*pi/180.;

thetaQ=lambdaQ;
phyQ=pi/2.-varphyQ;

xQ=sinl(phyQ)*cosl(thetaQ);
yQ=sinl(phyQ)*sinl(thetaQ);
zQ=cosl(phyQ);

zeta=acosl(xr*xQ+yr*yQ+zr*zQ);

xh=cosl(zeta*xi/eta)*xr+(sinl(zeta*xi/eta)/sinl(zeta))*(yr*(xQ*yr-yQ*xr)+zr*(xQ*zr-
zQ*xr));
yh=cosl(zeta*xi/eta)*yr+(sinl(zeta*xi/eta)/sinl(zeta))*(zr*(yQ*zr-zQ*yr)-xr*(xQ*yr-
yQ*xr));
zh=cosl(zeta*xi/eta)*zr+(sinl(zeta*xi/eta)/sinl(zeta))*(-xr*(xQ*zr-zQ*xr)-yr*(yQ*zr-
zQ*yr));

xhp=-0.66400236446960217079*xh-0.26185371828286240634*yh-
0.70038096076365249167*zh;
yhp=0.90748450808098576258*yh-
0.41640431165785176994*xh+0.055491592388054055028*zh;
zhp=0.62105419184764243343*xh+0.32848820041890487445*yh-
0.71160887640193270021*zh;

xhpp=0.91932649212365700799*xhp+0.39091113156368948495*yhp+0.045025416146
965924062*zhp;
yhpp=0.20532411484035440239*xhp-
0.57416138327185632554*yhp+0.79257852218210749362*zhp;
zhpp=0.33567962217661733763*xhp-0.71939362881453457711*yhp-
0.60810525246573810527*zhp;

phypp=acosl(zhpp);
if(xhpp>0. && yhpp>=0.)
{
    thetapp=atanl(yhpp/xhpp);
}
if(xhpp==0. && yhpp>0.)
{
    thetapp=pi/2.;
}
if(xhpp<0.)
{
```

```
        thetapp=atanl(yhpp/xhpp)+pi;
    }
    if(xhpp==0. && yhpp<0.)
    {
        thetapp=-pi/2.;
    }
    if(xhpp>0. && yhpp<0.)
    {
        thetapp=atanl(yhpp/xhpp)+2*pi;
    }

    alphapp=thetapp;
    deltapp=pi/2.-phpp;

    ARpp=(alphapp*180./pi)/15.;
    DECpp=deltapp*180./pi;

    printf("\n");
    printf("ASCENSION RECTA solo en HORAS es: %20.17lf Horas\n",ARpp);
    printf("DECLINACION solo en GRADOS es: %20.17lf Grados\n",DECpp);

    AR_h=(int)ARpp;
    AR_m=(int)((ARpp-AR_h)*60.);
    AR_s=((ARpp-AR_h)*60.-AR_m)*60.;
    DEC_g=(int)DECpp;
    DEC_m=(int)((DECpp-DEC_g)*60.);
    DEC_s=((DECpp-DEC_g)*60.-DEC_m)*60.;

    printf("ASCENSION RECTA: %d horas %d minutos %f segundos\n",AR_h,AR_m,AR_s);
    printf("DECLINACION: %d grados %d minutos %f
segundos\n\n",DEC_g,DEC_m,DEC_s);

    system("pause");

    printf("\n\n");

    goto REPITE;
}
```

4.4 Cálculo de la diferencia de inclinación entre el arco terrestre de Chartres/Reims y el arco celeste de *Porrina/Spica* en un *JD* dado.

```
#include <winbgim.h>
#include <stdlib.h>
#include <math.h>
#include <stdio.h>
#include <string.h>

main()
{
    double JD;
    double AR_h, AR_m, AR_s;
    double DEC_g, DEC_m, DEC_s;
    double AR_p, DEC_p;
    double T01;
    double alpha0p, delta0p;
    double zeta01, varkappa01, theta01;
    double pi=acos(-1.);
    double A, B, C;
    double alpha1;
    double atan2;
    double delta1;
    double AR, DEC;
    int AR_hJ, AR_mJ, DEC_gJ, DEC_mJ;
    double AR_sJ, DEC_sJ;

    double AR_hs=13., AR_ms=25., AR_ss=11.57937;
    double DEC_gs=-11., DEC_ms=-9., DEC_ss=-40.7501;
    double AR_ps=-42.35, DEC_ps=-30.67;
    double AR_hp=12., AR_mp=41., AR_sp=39.64344;
    double DEC_gp=-1., DEC_mp=-26., DEC_sp=-57.7421;
    double AR_pp=-614.76, DEC_pp=61.34;
    double DEC1;
    double inclinacion_cr=0.59284078762759004259;
    double inclinacion_ps;
    double theta_s, phi_s;
    double x_s, y_s, z_s;
    double theta_p, phi_p;
    double x_p, y_p, z_p;

    FILE *fichero;
    fichero = fopen("alineacion.txt","w");
    if(fichero==NULL)
    {
        printf("Error abriendo el fichero.\n");
    }
}
```

REPITE:

```
printf("PASAREMOS LAS COORDENADAS ASTRONOMICAS DE SPICA y
PORRIMA\n");
printf("de la epoca de referencia J2000 a la epoca del dia Juliano JD entrado.\n\n");

printf("Dane JD\n");
scanf("%lf",&JD);

T01=(JD-2451545.)/36525.;

alpha0p=AR_hs*360./24.+(AR_ms/60.)*360./24.+(AR_ss/(60.*60.))*360./24.+(100.*T01*AR
R_ps/1000.)/(60.*60.);

delta0p=DEC_gs+DEC_ms/60.+DEC_ss/(60.*60.)+(100.*T01*DEC_ps/1000.)/(60.*60.);

alpha0p=alpha0p*pi/180.;
delta0p=delta0p*pi/180.;

zeta01=(2306.2181*T01+0.30188*powl(T01,2)+0.017998*powl(T01,3))/(60.*60.);
varkappa01=(2306.2181*T01+1.09468*powl(T01,2)+0.018203*powl(T01,3))/(60.*60.);
theta01=(2004.3109*T01-0.42665*powl(T01,2)-0.041833*powl(T01,3))/(60.*60.);

zeta01=zeta01*pi/180.;
varkappa01=varkappa01*pi/180.;
theta01=theta01*pi/180.;

A=cosl(delta0p)*sinl(alpha0p+zeta01);
B=cosl(theta01)*cosl(delta0p)*cosl(alpha0p+zeta01)-sinl(theta01)*sinl(delta0p);
C=sinl(theta01)*cosl(delta0p)*cosl(alpha0p+zeta01)+cosl(theta01)*sinl(delta0p);

if(B>0.)
{
atan2=atanl(A/B);
}
if(B<0. && A>=0.)
{
atan2=atanl(A/B)+pi;
}
if(B<0. && A<0.)
{
atan2=atanl(A/B)-pi;
}
if(B==0. && A>0.)
{
atan2=pi/2.;
}
if(B==0. && A<0.)
{
atan2=-pi/2.;
}
```

```
if(B==0. && A==0.)
{
    printf("CALCULO NO POSIBLE\n");
    goto REPITE;
}

alpha1=varkappa01+atan2;
delta1=asinl(C);

AR=(alpha1*180./pi)*24./360.;

if(AR<0.)
{
    printf("alpha 1=%20.17lf, AR=%20.17lf\n",alpha1,AR);
    fprintf(fichero,"alpha1=%20.17lf, AR=%20.17lf\n",alpha1,AR);

    AR=24.+AR;
}
if(AR<0.)
{
    printf("AR=%20.17lf\n",AR);
    fprintf(fichero,"AR=%20.17lf\n",AR);
    AR=24.+AR;
}

DEC=delta1*180./pi;

printf("\n");
printf("ASCENSION RECTA solo en HORAS de SPICA en JD=%30.20f es: %20.17lf
Horas\n",JD,AR);
printf("DECLINACION solo en GRADOS de SPICA en JD=%30.20f es: %20.17lf
Grados\n",JD,DEC);
fprintf(fichero,"\n");
fprintf(fichero,"ASCENSION RECTA solo en HORAS de SPICA en JD=%30.20f es:
%20.17lf Horas\n",JD,AR);
fprintf(fichero,"DECLINACION solo en GRADOS de SPICA en JD=%30.20f es: %20.17lf
Grados\n",JD,DEC);

DEC1=DEC;

AR_hJ=(int)AR;
AR_mJ=(int)((AR-AR_hJ)*60.);
AR_sJ=((AR-AR_hJ)*60.-AR_mJ)*60.;
DEC_gJ=(int)DEC;
DEC_mJ=(int)((DEC-DEC_gJ)*60.);
DEC_sJ=((DEC-DEC_gJ)*60.-DEC_mJ)*60.;

printf("ASCENSION RECTA de SPICA en JD=%f es: %d horas %d minutos %f
segundos\n",JD,AR_hJ,AR_mJ,AR_sJ);
printf("DECLINACION de SPICA en JD=%f es: %d grados %d minutos %f
segundos\n\n",JD,DEC_gJ,DEC_mJ,DEC_sJ);
```

```
fprintf(fichero,"ASCENSION RECTA de SPICA en JD=%f es: %d horas %d minutos %f  
segundos\n",JD,AR_hJ,AR_mJ,AR_sJ);
```

```
fprintf(fichero,"DECLINACION de SPICA en JD=%f es: %d grados %d minutos %f  
segundos\n\n",JD,DEC_gJ,DEC_mJ,DEC_sJ);
```

```
AR=AR*15.*pi/180.;  
DEC=DEC*pi/180.;  
theta_s=AR;  
phi_s=pi/2.-DEC;  
x_s=sinl(phi_s)*cosl(theta_s);  
y_s=sinl(phi_s)*sinl(theta_s);  
z_s=cosl(phi_s);
```

```
alpha0p=AR_hp*360./24.+(AR_mp/60.)*360./24.+(AR_sp/(60.*60.))*360./24.+(100.*T01*  
AR_pp/1000.)/(60.*60.);
```

```
delta0p=DEC_gp+DEC_mp/60.+DEC_sp/(60.*60.)+(100.*T01*DEC_pp/1000.)/(60.*60.);
```

```
alpha0p=alpha0p*pi/180.;  
delta0p=delta0p*pi/180.;
```

```
zeta01=(2306.2181*T01+0.30188*powl(T01,2)+0.017998*powl(T01,3))/(60.*60.);  
varkappa01=(2306.2181*T01+1.09468*powl(T01,2)+0.018203*powl(T01,3))/(60.*60.);  
theta01=(2004.3109*T01-0.42665*powl(T01,2)-0.041833*powl(T01,3))/(60.*60.);
```

```
zeta01=zeta01*pi/180.;  
varkappa01=varkappa01*pi/180.;  
theta01=theta01*pi/180.;
```

```
A=cosl(delta0p)*sinl(alpha0p+zeta01);  
B=cosl(theta01)*cosl(delta0p)*cosl(alpha0p+zeta01)-sinl(theta01)*sinl(delta0p);  
C=sinl(theta01)*cosl(delta0p)*cosl(alpha0p+zeta01)+cosl(theta01)*sinl(delta0p);
```

```
if(B>0.)  
{  
  atan2=atanl(A/B);  
}  
if(B<0. && A>=0.)  
{  
  atan2=atanl(A/B)+pi;  
}  
if(B<0. && A<0.)  
{  
  atan2=atanl(A/B)-pi;  
}  
if(B==0. && A>0.)  
{  
  atan2=pi/2.;  
}
```

```
if(B==0. && A<0.)
{
    atan2=-pi/2.;
}
if(B==0. && A==0.)
{
    printf("CALCULO NO POSIBLE\n");
    goto REPITE;
}

alpha1=varkappa01+atan2;
delta1=asinl(C);

AR=(alpha1*180./pi)*24./360.;

if(AR<0.)
{
    printf("alpha 1=%20.17lf, AR=%20.17lf\n",alpha1,AR);
    fprintf(fichero,"alpha1=%20.17lf, AR=%20.17lf\n",alpha1,AR);
    AR=24.+AR;
}
if(AR<0.)
{
    printf("AR=%20.17lf\n",AR);
    fprintf(fichero,"AR=%20.17lf\n",AR);
    AR=24.+AR;
}

DEC=delta1*180./pi;

printf("\n");
printf("ASCENSION RECTA solo en HORAS de PORRIMA en JD=%30.20f es: %20.17lf
Horas\n",JD,AR);
printf("DECLINACION solo en GRADOS de PORRIMA en JD=%30.20f es: %20.17lf
Grados\n",JD,DEC);
fprintf(fichero,"\n");
fprintf(fichero,"ASCENSION RECTA solo en HORAS de PORRIMA en JD=%30.20f es:
%20.17lf Horas\n",JD,AR);
fprintf(fichero,"DECLINACION solo en GRADOS de PORRIMA en JD=%30.20f es:
%20.17lf Grados\n",JD,DEC);

DEC1=DEC1-DEC;

AR_hJ=(int)AR;
AR_mJ=(int)((AR-AR_hJ)*60.);
AR_sJ=((AR-AR_hJ)*60.-AR_mJ)*60.;
DEC_gJ=(int)DEC;
DEC_mJ=(int)((DEC-DEC_gJ)*60.);
DEC_sJ=((DEC-DEC_gJ)*60.-DEC_mJ)*60.;
```

```
printf("ASCENSION RECTA de PORRIMA en JD=%f es: %d horas %d minutos %f
segundos\n",JD,AR_hJ,AR_mJ,AR_sJ);
printf("DECLINACION de PORRIMA en JD=%f es: %d grados %d minutos %f
segundos\n\n",JD,DEC_gJ,DEC_mJ,DEC_sJ);
fprintf(fichero,"ASCENSION RECTA de PORRIMA es JD=%f en: %d horas %d minutos
%f segundos\n",JD,AR_hJ,AR_mJ,AR_sJ);
fprintf(fichero,"DECLINACION de PORRIMA en JD=%f es: %d grados %d minutos %f
segundos\n\n",JD,DEC_gJ,DEC_mJ,DEC_sJ);
```

```
AR=AR*15.*pi/180.;
DEC=DEC*pi/180.;
theta_p=AR;
phi_p=pi/2.-DEC;
x_p=sinl(phi_p)*cosl(theta_p);
y_p=sinl(phi_p)*sinl(theta_p);
z_p=cosl(phi_p);
```

```
printf("DECLINACION de SPICA - DECLINACION PORRIMA es %20.17lf
grados\n\n",DEC1);
fprintf(fichero,"DECLINACION de SPICA - DECLINACION PORRIMA es %20.17lf
grados\n\n",DEC1);
```

```
inclinacion_ps=(x_p*y_s-y_p*x_s)/sqrtl(powl(y_p*z_s-z_p*y_s,2)+powl(x_s*z_p-
x_p*z_s,2)+powl(x_p*y_s-y_p*x_s,2));
```

```
printf("Inclinacion Chartres/Reims es %20.17lf\n",inclinacion_cr);
printf("Inclinacion Porrima/Spica es %20.17lf\n",inclinacion_ps);
printf("Inclinacion C/R menos P/S es %20.17lf\n",inclinacion_cr-inclinacion_ps);
fprintf(fichero,"Inclinacion Chartres/Reims es %20.17lf\n",inclinacion_cr);
fprintf(fichero,"Inclinacion Porrima/Spica es %20.17lf\n",inclinacion_ps);
fprintf(fichero,"Inclinacion C/R menos P/S es %20.17lf\n",inclinacion_cr-
inclinacion_ps);
```

```
inclinacion_cr=acosl(inclinacion_cr)*180./pi;
inclinacion_ps=acosl(inclinacion_ps)*180./pi;
```

```
printf("Inclinacion Chartres/Reims en grados es %20.17lf\n",inclinacion_cr);
printf("Inclinacion Porrima/Spica en grados es %20.17lf\n",inclinacion_ps);
printf("Diferencia Inclinacion C/R menos P/S en grados es
%20.17lf\n",inclinacion_cr-inclinacion_ps);
fprintf(fichero,"Inclinacion Chartres/Reims en grados es %20.17lf\n",inclinacion_cr);
fprintf(fichero,"Inclinacion Porrima/Spica en grados es %20.17lf\n",inclinacion_ps);
fprintf(fichero,"Diferencia Inclinacion C/R menos P/S en grados es
%20.17lf\n",inclinacion_cr-inclinacion_ps);
```

```
inclinacion_cr=0.59284078762759004259;
```

```
system("pause");
```

```
printf("\n\n");
fprintf(fichero,"\n\n");
```

```
    goto REPITE;  
    fclose(fichero);  
}
```

4.5 Cálculo de varios tipos de trayectorias de otros.

Este programa requiere los ficheros que llamamos **2007.txt** y **PARAMETROS.txt**. Estos ficheros los adjuntamos al final del mismo del código, para el lector interesado en reprogramarlo.

Se trata de lo siguiente:

Cálculo de la trayectoria proyectada, a través del centro de su rosetón principal sobre la planta de Chartres de la **órbita diaria aparente de un astro**, generando la imagen sobre pantalla del ordenador y generando a la vez un fichero de texto, ORBITA_ASTRO.txt, con las coordenadas de los puntos de la trayectoria para su posterior manipulación en AutoCAD. Igualmente con la **órbita diaria aparente del Sol** en los equinoccios, EQUINOCCIO.txt. Igualmente con la órbita diaria aparente del Sol en los solsticios, SOLSTICO_VERANO.txt, SOLSTICIO_INVIERNO.txt. Además, cálculo de las **analemas en las horas enteras** en Chartres, sobre el plano de planta y con gnomon el centro de su rosetón principal, generando la imagen de las analemas sobre la pantalla del ordenador. Igualmente, pero para una **analema concreta de una hora concreta, no necesariamente entera**, generando un fichero de texto HORA_ANALEMA.txt con las coordenadas de los puntos de la analema para su posterior manipulación en AutoCAD. Además, repetición del cálculo analemático pero suponiendo


```
fclose(fichero);

printf("PROGRAMA DE CALCULO DE ORBITA DE ASTRO \n\n\n");
printf("EL PROGRAMA NECESITA EL DICHERO LLAMADO 2007.txt.\n");
printf("Y EL FICHERO PARAMETROS.txt \n");

double pin,ecu,dec,decastro,h;
pin=acos(-1);
double a_x[50][400],a_y[50][400],a_z[50][400];
double x0,y0,z0,beta,H;
double azimut,altura,azi,alt,mu,x1,y1,z1;
int i,cont,c;
double a,b;
double equipri_x[3000],solsvera_x[400],equioto_x[400],solsinv_x[400];
double equipri_y[3000],solsvera_y[400],equioto_y[400],solsinv_y[400];
double px, py;
double horizonte[50][400];
double horizonteestrella[2500];
double lon, lat, ori;
int ana;

fichero = fopen("PARAMETROS.txt","r");

if(fichero==NULL)
{
    printf("Error abriendo el fichero.\n");
}
else
{
    fscanf(fichero,"%s %lf ", &aux,&px);
    fscanf(fichero,"%s %lf ", &aux,&py);
    fscanf(fichero,"%s %lf ", &aux,&lon);
    fscanf(fichero,"%s %lf ", &aux,&lat);
    fscanf(fichero,"%s %lf ", &aux,&ori);
    fscanf(fichero,"%s %lf ", &aux,&z0);
}
fclose(fichero);

ori=ori*pin/180.;
lat=lat*pin/180.;

x0=0;
y0=0;

printf("Dane DECLINACION del ASTRO en GRADOS positiva a norte\n");
scanf("%lf",&decastro);

decastro=decastro*pin/180.;

printf("\n\n");
printf("Dane HORA entera de ANALEMA\n");
```

```
scanf("%d",&ana);

fichero = fopen("HORA_ANALEMA.txt","w");
if(fichero==NULL)
{
    printf("Error abriendo el fichero. \n");
    system("pause");
}

parte=1;

initwindow(2000,1024);

setcolor(BLUE);
fillellipse(px,py,4,4);

for (iii=1;iii<=1000;iii++)
{
    setcolor(WHITE);
    a=iii+px;
    b=py;
    fillellipse(a,b,1,1);
    a=-iii+px;
    fillellipse(a,b,1,1);
}

if (parte!=1)
{
    goto PARTE1;
}

cont=0;
for (i=0;i<=23;i++)
{

    int j;
    j=0;
    jj=0;

    for (k=1;k<=365;k=k+1)
    {
        if(eq_m[k]!=0)
        {
            ecu=(eq_m[k]+(eq_m[k]/fabs(eq_m[k]))*eq_s[k]/60.)/60.;
        }
        else
        {
            jj=jj+1;
            ecu=(eq_s[k]/60.)/60.;
            if ( (jj<4) || ( (jj>13) && (jj<22) ) || (jj>26) )
```

```
        {  
            ecu=-ecu;  
        }  
    }  
  
    if(dec_d[k]!=0)  
    {  
        dec=dec_d[k]+(dec_d[k]/fabs(dec_d[k]))*(dec_m[k]+dec_s[k]/60.)/60.;  
    }  
    else  
    {  
        j=j+1;  
        dec=-(dec_m[k]+dec_s[k]/60.)/60.;  
        if (j>3 && j<9)  
        {  
            dec=-dec;  
        }  
    }  
  
    h=float(i);  
  
    h=h+ecu;  
  
    H=360.*(h-12.)/24.;  
    if(H<0)  
    {  
        H=360.-H;  
    }  
    H=H*pin/180.;  
  
    dec=dec*pin/180.;  
  
    altura=asinl(sinl(dec)*sinl(lat)+cosl(dec)*cosl(lat)*cosl(H));  
    a=cosl(lat)*cosl(altura);  
    b=sinl(dec) - sinl(lat)*sinl(altura);  
  
    azimut=acosl((b)/(a));  
  
    if (b/a>=1.)  
    { azimut=0.; }  
    if (b/a<=-1.)  
    { azimut=pin; }  
  
    if(H<pin)  
    {  
        azimut=2.*pin-azimut;  
    }  
  
    azi=pin+azimut;  
    alt=altura;
```

```
    horizonte[i][k]=alt;

    mu=-z0/sinl(alt);

    x1=x0+mu*(cosl(alt)*cosl(azi)*cosl(ori)+cosl(alt)*sinl(azi)*sinl(ori));
    y1=y0+mu*(-cosl(alt)*cosl(azi)*sinl(ori)+cosl(alt)*sinl(azi)*cosl(ori));
    z1=z0+mu*sinl(alt);

    a_x[i][k]=x1;
    a_y[i][k]=y1;
    a_z[i][k]=z1;

}

}

for (i=0;i<=23;i++)
{
    c=0;
    for (k=1;k<=365;k++)
    {
        if (a_x[i][k]>0)
        {
            c=c+1;
        }

        setcolor(BLUE);
        if (k>=81)
        {
            setcolor(YELLOW);
        }
        if (k>=174)
        {
            setcolor(RED);
        }
        if (k>=267)
        {
            setcolor(GREEN);
        }
        if (k>=357)
        {
            setcolor(BLUE);
        }

        a=-a_y[i][k]*2.5+px;
        b=a_x[i][k]*2.5+py;

        if(horizonte[i][k]>0.)
        {
            fillellipse(a,b,1,1);
        }
    }
}
```

```
        if(i==ana)
        {
            fprintf(fichero,"%lf,%lf\n",a_x[i][k],-a_y[i][k]);
        }
    }
}
}

fclose(fichero);
```

PARTE1:

```
fichero = fopen("HORA_SOLAR.txt","w");
if(fichero==NULL)
{
    printf("Error abriendo el fichero.\n");
    system("pause");
}

printf("\n\n");
printf("Dane HORA entera SOLAR\n");
scanf("%d",&ana);

parte=2;
if (parte!=2)
{
    goto PARTE2;
}

cont=0;
for (i=0;i<=23;i++)
{

    int j;
    j=0;
    jj=0;

    for (k=1;k<=365;k=k+1)
    {
        if(eq_m[k]!=0)
        {
            ecu=(eq_m[k]+(eq_m[k]/fabs(eq_m[k]))*eq_s[k]/60.)/60.;
        }
        else
        {
            jj=jj+1;
            ecu=(eq_s[k]/60.)/60.;
        }
    }
}
```

```
        if ( (jj<4) || ( (jj>13) && (jj<22) ) || (jj>26) )
        {
            ecu=-ecu;
        }
    }

    if(dec_d[k]!=0)
    {
        dec=dec_d[k]+(dec_d[k]/fabs(dec_d[k]))*(dec_m[k]+dec_s[k]/60.)/60.;
    }
    else
    {
        j=j+1;
        dec=-(dec_m[k]+dec_s[k]/60.)/60.;
        if (j>3 && j<9)
        {
            dec=-dec;
        }
    }

    h=float(i);

    ecu=0;

    h=h+ecu;

    H=360.*(h-12.)/24.;
    if(H<0)
    {
        H=360.-H;
    }
    H=H*pin/180.;

    dec=dec*pin/180.;

    altura=asin(sinl(dec)*sinl(lat)+cosl(dec)*cosl(lat)*cosl(H));
    a=cosl(lat)*cosl(altura);
    b=sinl(dec) - sinl(lat)*sinl(altura);

    azimut=acosl( ( b ) / ( a ) );

    if (b/a>=1.)
    { azimut=0.; }
    if (b/a<=-1.)
    { azimut=pin; }

    if(H<pin)
    {
        azimut=2.*pin-azimut;
    }
}
```

```
azi=pin+azimut;
alt=altura;

horizonte[i][k]=alt;

mu=-z0/sinl(alt);

x1=x0+mu*(cosl(alt)*cosl(azi)*cosl(ori)+cosl(alt)*sinl(azi)*sinl(ori));
y1=y0+mu*(-cosl(alt)*cosl(azi)*sinl(ori)+cosl(alt)*sinl(azi)*cosl(ori));
z1=z0+mu*sinl(alt);

a_x[i][k]=x1;
a_y[i][k]=y1;
a_z[i][k]=z1;

}

}

for (i=0;i<=23;i++)
{
c=0;
for (k=1;k<=365;k++)
{
if (a_x[i][k]>0)
{
c=c+1;
}
setcolor(BLUE);
if (k>=81)
{
setcolor(YELLOW);
}
if (k>=174)
{
setcolor(RED);
}
if (k>=267)
{
setcolor(GREEN);
}
if (k>=357)
{
setcolor(BLUE);
}

a=-a_y[i][k]*2.5+px;
b=a_x[i][k]*2.5+py;
```

```
    if(horizonte[i][k]>0.)  
    {  
        fillellipse(a,b,1,1);  
  
        if(i==ana)  
        {  
            fprintf(fichero,"%lf,%lf\n",a_x[i][k],-a_y[i][k]);  
        }  
    }  
  
}
```

```
fclose(fichero);
```

PARTE2:

```
fichero = fopen("EQUINOCCIO.txt","w");  
if(fichero==NULL)  
{  
    printf("Error abriendo el fichero.\n");  
    system("pause");  
}
```

```
parte=3;  
if (parte!=3)  
{  
    goto PARTE3;  
}
```

```
iii=0;  
for(i=0;i<=23;i++)  
{  
  
    for(ii=0;ii<=100;ii++)  
    {  
        iii=iii+1;  
        k=80;  
  
        ecu=0.;  
  
        dec=0.;  
  
        h=float(i)+float(ii)*0.01;  
  
        h=h+ecu;  
  
        H=360.*(h-12.)/24.;
```

```
if(H<0)
{
    H=360.-H;
}
H=H*pin/180.;

dec=dec*pin/180.;

altura=asinl(sinl(dec)*sinl(lat)+cosl(dec)*cosl(lat)*cosl(H));
a=cosl(lat)*cosl(altura);
b=sinl(dec) - sinl(lat)*sinl(altura);

azimut=acosl( ( b ) / ( a ) );

if (b/a>=1.)
{ azimut=0.; }
if (b/a<=-1.)
{ azimut=pin; }

if(H<pin)
{
    azimut=2.*pin-azimut;
}

azi=pin+azimut;
alt=altura;

horizonteestrella[iii]=alt;

mu=-z0/sinl(alt);

x1=x0+mu*(cosl(alt)*cosl(azi)*cosl(ori)+cosl(alt)*sinl(azi)*sinl(ori));
y1=y0+mu*(-cosl(alt)*cosl(azi)*sinl(ori)+cosl(alt)*sinl(azi)*cosl(ori));
z1=z0+mu*sinl(alt);

equipri_x[iii]=x1;
equipri_y[iii]=y1;

}
}

for (iii=1;iii<=2424;iii++)
{

a=-equipri_y[iii]*2.5+px;
b=equipri_x[iii]*2.5+py;

if(horizonteestrella[iii]>0.)
{
    setcolor(14);
    fillellipse(a,b,1,1);
}
```

```
        fprintf(fichero,"%lf,%lf\n",equipri_x[iii],-equipri_y[iii]);
    }
}

fclose(fichero);

iii=0;
for(i=0;i<=23;i++)
{
    for(ii=0;ii<=100;ii++)
    {
        iii=iii+1;
        k=266;

        ecu=0.;

        dec=0;

        h=float(i)+float(ii)*0.01;

        h=h+ecu;

        H=360.*(h-12.)/24.;
        if(H<0)
        {
            H=360.-H;
        }
        H=H*pin/180.;

        dec=dec*pin/180.;

        altura=asinl(sinl(dec)*sinl(lat)+cosl(dec)*cosl(lat)*cosl(H));
        a=cosl(lat)*cosl(altura);
        b=sinl(dec) - sinl(lat)*sinl(altura);

        azimut=acosl( ( b ) / ( a ) );

        if (b/a>=1.)
        { azimut=0.; }
        if (b/a<=-1.)
        { azimut=pin; }

        if(H<pin)
        {
            azimut=2.*pin-azimut;
        }

        azi=pin+azimut;
        alt=altura;
    }
}
```

```
        horizonteestrella[iii]=alt;
        mu=-z0/sinl(alt);

        x1=x0+mu*(cosl(alt)*cosl(azi)*cosl(ori)+cosl(alt)*sinl(azi)*sinl(ori));
        y1=y0+mu*(-cosl(alt)*cosl(azi)*sinl(ori)+cosl(alt)*sinl(azi)*cosl(ori));
        z1=z0+mu*sinl(alt);

        equipri_x[iii]=x1;
        equipri_y[iii]=y1;

    }
}

for (iii=1;iii<=2424;iii++)
{

    a=-equipri_y[iii]*2.5+px;
    b=equipri_x[iii]*2.5+py;

    if(horizonteestrella[iii]>0.)
    {
        setcolor(2);
        fillellipse(a,b,1,1);
    }

}

fichero = fopen("SOLSTICIO_VERANO.txt","w");
if(fichero==NULL)
{
    printf("Error abriendo el fichero.\n");
    system("pause");
}

iii=0;
for(i=0;i<=23;i++)
{

    for(ii=0;ii<=100;ii++)
    {
        iii=iii+1;

        k=173;

        ecu=(eq_m[k]+eq_s[k]/60.)/60.;

        ecu=0.;
        dec=dec_d[k]+(dec_d[k]/fabs(dec_d[k]))*(dec_m[k]+dec_s[k]/60.)/60.;

        h=float(i)+float(ii)*0.01;
```

```
h=h+ecu;

H=360.*(h-12.)/24.;
if(H<0)
{
    H=360.-H;
}
H=H*pin/180.;

dec=dec*pin/180.;

altura=asin(sinl(dec)*sinl(lat)+cosl(dec)*cosl(lat)*cosl(H));
a=cosl(lat)*cosl(altura);
b=sinl(dec) - sinl(lat)*sinl(altura);

azimut=acosl( ( b ) / ( a ) );

if (b/a>=1.)
{ azimut=0.; }
if (b/a<=-1.)
{ azimut=pin; }

if(H<pin)
{
    azimut=2.*pin-azimut;
}

azi=pin+azimut;
alt=altura;

horizonteestrella[iii]=alt;

mu=-z0/sinl(alt);

x1=x0+mu*(cosl(alt)*cosl(azi)*cosl(ori)+cosl(alt)*sinl(azi)*sinl(ori));
y1=y0+mu*(-cosl(alt)*cosl(azi)*sinl(ori)+cosl(alt)*sinl(azi)*cosl(ori));
z1=z0+mu*sinl(alt);

equipri_x[iii]=x1;
equipri_y[iii]=y1;

}
}

for (iii=1;iii<=2424;iii++)
{
    a=-equipri_y[iii]*2.5+px;
    b=equipri_x[iii]*2.5+py;
    if(horizonteestrella[iii]>0.)
```

```
    {
        setcolor(RED);
        fillellipse(a,b,1,1);
        fprintf(fichero,"%f,%f\n",equipri_x[iii],-equipri_y[iiii]);
    }
}

fclose(fichero);

fichero = fopen("SOLSTICIO_INVIERNO.txt", "w");
if(fichero==NULL)
{
    printf("Error abriendo el fichero.\n");
    system("pause");
}

iii=0;
for(i=0;i<=23;i++)
{

    for(ii=0;ii<=100;ii++)
    {
        iii=iii+1;
        k=356;

        ecu=(eq_m[k]+eq_s[k]/60.)/60.;

        ecu=0.;
        dec=dec_d[k]+(dec_d[k]/fabs(dec_d[k]))*(dec_m[k]+dec_s[k]/60.)/60.;

        h=float(i)+float(ii)*0.01;

        h=h+ecu;

        H=360.*(h-12.)/24.;
        if(H<0)
        {
            H=360.-H;
        }
        H=H*pin/180.;

        dec=dec*pin/180.;

        altura=asinl(sinl(dec)*sinl(lat)+cosl(dec)*cosl(lat)*cosl(H));
        a=cosl(lat)*cosl(altura);
        b=sinl(dec) - sinl(lat)*sinl(altura);

        azimut=acosl( ( b ) / ( a ) );

        if (b/a>=1.)
```

```
{ azimut=0.; }  
if (b/a<=-1.)  
{ azimut=pin; }  
  
if(H<pin)  
{  
  azimut=2.*pin-azimut;  
}  
  
azi=pin+azimut;  
alt=altura;  
  
horizonteestrella[iii]=alt;  
  
mu=-z0/sinl(alt);  
  
x1=x0+mu*(cosl(alt)*cosl(azi)*cosl(ori)+cosl(alt)*sinl(azi)*sinl(ori));  
y1=y0+mu*(-cosl(alt)*cosl(azi)*sinl(ori)+cosl(alt)*sinl(azi)*cosl(ori));  
z1=z0+mu*sinl(alt);  
  
equipri_x[iii]=x1;  
equipri_y[iii]=y1;  
  
}  
}  
  
for (iii=1;iii<=2424;iii++)  
{  
  
  setcolor(RED);  
  a=-equipri_y[iii]*2.5+px;  
  b=equipri_x[iii]*2.5+py;  
  
  if(horizonteestrella[iii]>0.)  
  {  
    setcolor(BLUE);  
    fillellipse(a,b,1,1);  
    fprintf(fichero,"%lf,%lf\n",equipri_x[iii],-equipri_y[iii]);  
  }  
  
}  
  
fclose(fichero);
```

PARTE3:

```
fichero = fopen("ORBITA_ASTRO.txt","w");  
if(fichero==NULL)  
{
```

```
        printf("Error abriendo el fichero.\n");
        system("pause");
    }

    dec=decastro;

    iii=0;
    for(i=0;i<=23;i++)
    {

        for(ii=0;ii<=100;ii++)
        {
            iii=iii+1;

            ecu=0.;

            h=float(i)+float(ii)*0.01;

            h=h+ecu;

            H=360.*(h-12.)/24.;
            if(H<0)
            {
                H=360.-H;
            }
            H=H*pin/180.;

            altura=asinl(sinl(dec)*sinl(lat)+cosl(dec)*cosl(lat)*cosl(H));
            a=cosl(lat)*cosl(altura);
            b=sinl(dec) - sinl(lat)*sinl(altura);

            azimut=acosl( ( b ) / ( a ) );

            if (b/a>=1.)
            { azimut=0.; }
            if (b/a<=-1.)
            { azimut=pin; }

            if(H<pin)
            {
                azimut=2.*pin-azimut;
            }

            azi=pin+azimut;
            alt=altura;

            horizonteestrella[iii]=alt;
```

```
mu=-z0/sinl(alt);

x1=x0+mu*(cosl(alt)*cosl(azi)*cosl(ori)+cosl(alt)*sinl(azi)*sinl(ori));
y1=y0+mu*(-cosl(alt)*cosl(azi)*sinl(ori)+cosl(alt)*sinl(azi)*cosl(ori));
z1=z0+mu*sinl(alt);

equipri_x[iii]=x1;
equipri_y[iii]=y1;

}
}

for (iii=1;iii<=2424;iii++)
{

a=-equipri_y[iii]*2.5+px;
b=equipri_x[iii]*2.5+py;

if(horizonteestrella[iii]>0.)
{
    setcolor(3);

    if(iii>1212)
    {
        setcolor(13);
    }

    fillellipse(a,b,1,1);
    fprintf(fichero,"%lf,%lf\n",equipri_x[iii],-equipri_y[iii]);
}

}

fclose(fichero);

dec=decastro;

printf("\n\n");
printf("Dane la HORA MERIDIANA SEGUN LA ESTRELLA \n");
scanf("%lf",&h);
H=360.*(h-12.)/24.;
if(H<0)
{
    H=360.-H;
}
H=H*pin/180.;

altura=asin(sinl(dec)*sinl(lat)+cosl(dec)*cosl(lat)*cosl(H));
```

```
a=cosl(lat)*cosl(altura);
b=sinl(dec) - sinl(lat)*sinl(altura);

azimut=acosl( ( b ) / ( a ) );

if (b/a>=1.)
{ azimut=0.; }
if (b/a<=-1.)
{ azimut=pin; }

if(H<pin)
{
    azimut=2.*pin-azimut;
}

azi=pin+azimut;
alt=altura;

horizonteestrella[1]=alt;

mu=-z0/sinl(alt);

x1=x0+mu*(cosl(alt)*cosl(azi)*cosl(ori)+cosl(alt)*sinl(azi)*sinl(ori));
y1=y0+mu*(-cosl(alt)*cosl(azi)*sinl(ori)+cosl(alt)*sinl(azi)*cosl(ori));
z1=z0+mu*sinl(alt);

equipri_x[1]=x1;
equipri_y[1]=y1;

a=-equipri_y[1]*2.5+px;
b=equipri_x[1]*2.5+py;

if(horizonteestrella[1]>0.)
{
    setcolor(YELLOW);

    fillellipse(a,b,2,2);

    printf("%lf,%lf\n",equipri_x[1],-equipri_y[1]);
}
else
{
    printf("HORIZONTE NEGATIVO\n");
}

printf("\n");
printf("Si quieres otro astro pulsa 4. En caso contrario pulsa otro numero.\n");
scanf("%d",&parte);
```


Jan 12	FR	-21 44 29.6	178 00 00.8	-07 59.95	16 15.8	89 18 06.1	71 04 04.2	19 12 34.4
Jan 13	SA	-21 34 44.3	177 54 12.7	-08 23.15	16 15.7	89 18 06.2	72 03 34.3	19 08 37.0
Jan 14	SU	-21 24 33.8	177 48 33.7	-08 45.76	16 15.7	89 18 06.3	73 03 03.5	19 04 39.7
Jan 15	MO	-21 13 58.4	177 43 04.0	-09 07.74	16 15.6	89 18 06.5	74 02 32.1	19 00 42.5
Jan 16	TU	-21 02 58.5	177 37 43.9	-09 29.07	16 15.5	89 18 06.6	75 02 00.7	18 56 45.2
Jan 17	WE	-20 51 34.4	177 32 33.8	-09 49.74	16 15.5	89 18 06.8	76 01 30.1	18 52 47.9
Jan 18	TH	-20 39 46.4	177 27 34.1	-10 09.73	16 15.4	89 18 07.0	77 01 01.1	18 48 50.5
Jan 19	FR	-20 27 34.9	177 22 44.8	-10 29.01	16 15.3	89 18 07.1	78 00 34.3	18 44 52.9
Jan 20	SA	-20 15 00.1	177 18 06.5	-10 47.56	16 15.2	89 18 07.3	79 00 09.7	18 40 55.2
Jan 21	SU	-20 02 02.5	177 13 39.4	-11 05.37	16 15.2	89 18 07.5	79 59 46.9	18 36 57.4
Jan 22	MO	-19 48 42.4	177 09 23.7	-11 22.42	16 15.1	89 18 07.6	80 59 25.0	18 32 59.5
Jan 23	TU	-19 35 00.2	177 05 19.7	-11 38.68	16 15.0	89 18 07.6	81 59 02.6	18 29 01.6
Jan 24	WE	-19 20 56.3	177 01 27.6	-11 54.16	16 14.9	89 18 07.7	82 58 38.7	18 25 03.9
Jan 25	TH	-19 06 30.9	176 57 47.6	-12 08.83	16 14.8	89 18 07.7	83 58 12.6	18 21 06.3
Jan 26	FR	-18 51 44.6	176 54 19.7	-12 22.69	16 14.7	89 18 07.7	84 57 44.4	18 17 08.8
Jan 27	SA	-18 36 37.8	176 51 04.1	-12 35.72	16 14.6	89 18 07.8	85 57 14.6	18 13 11.4
Jan 28	SU	-18 21 10.7	176 48 00.9	-12 47.94	16 14.5	89 18 07.8	86 56 44.0	18 09 14.1
Jan 29	MO	-18 05 23.9	176 45 10.1	-12 59.32	16 14.4	89 18 07.9	87 56 13.8	18 05 16.8
Jan 30	TU	-17 49 17.7	176 42 31.7	-13 09.89	16 14.3	89 18 08.0	88 55 44.8	18 01 19.4
Jan 31	WE	-17 32 52.5	176 40 05.7	-13 19.62	16 14.1	89 18 08.1	89 55 17.6	17 57 21.8
Feb 1	TH	-17 16 08.7	176 37 52.1	-13 28.53	16 14.0	89 18 08.1	90 54 52.4	17 53 24.2
Feb 2	FR	-16 59 06.7	176 35 50.8	-13 36.62	16 13.9	89 18 08.2	91 54 29.0	17 49 26.4
Feb 3	SA	-16 41 46.8	176 34 01.7	-13 43.89	16 13.7	89 18 08.3	92 54 06.8	17 45 28.5
Feb 4	SU	-16 24 09.5	176 32 24.8	-13 50.34	16 13.6	89 18 08.3	93 53 45.1	17 41 30.6
Feb 5	MO	-16 06 15.1	176 31 00.0	-13 56.00	16 13.4	89 18 08.3	94 53 23.3	17 37 32.7

Feb 6 TU	-15 48 04.0	176 29 47.3	-14 00.85	16 13.3	89 18 08.3	95 53 00.7	17 33 34.9
Feb 7 WE	-15 29 36.5	176 28 46.4	-14 04.91	16 13.1	89 18 08.2	96 52 37.0	17 29 37.1
Feb 8 TH	-15 10 53.2	176 27 57.3	-14 08.18	16 12.9	89 18 08.2	97 52 11.7	17 25 39.4
Feb 9 FR	-14 51 54.3	176 27 19.9	-14 10.67	16 12.8	89 18 08.1	98 51 45.0	17 21 41.9
Feb 10 SA	-14 32 40.3	176 26 54.1	-14 12.39	16 12.6	89 18 08.0	99 51 17.0	17 17 44.4
Feb 11 SU	-14 13 11.6	176 26 39.7	-14 13.35	16 12.4	89 18 08.0	100 50 48.1	17 13 47.0
Feb 12 MO	-13 53 28.5	176 26 36.6	-14 13.56	16 12.2	89 18 08.0	101 50 18.7	17 09 49.6
Feb 13 TU	-13 33 31.6	176 26 44.7	-14 13.02	16 12.0	89 18 07.9	102 49 49.4	17 05 52.2
Feb 14 WE	-13 13 21.3	176 27 03.9	-14 11.74	16 11.8	89 18 07.9	103 49 21.2	17 01 54.7
Feb 15 TH	-12 52 57.9	176 27 34.0	-14 09.74	16 11.6	89 18 07.9	104 48 54.5	16 57 57.1
Feb 16 FR	-12 32 21.9	176 28 14.9	-14 07.01	16 11.4	89 18 07.9	105 48 29.7	16 53 59.4
Feb 17 SA	-12 11 33.8	176 29 06.4	-14 03.57	16 11.2	89 18 07.9	106 48 06.8	16 50 01.6
Feb 18 SU	-11 50 34.0	176 30 08.6	-13 59.43	16 11.0	89 18 07.8	107 47 44.9	16 46 03.7
Feb 19 MO	-11 29 22.9	176 31 21.1	-13 54.59	16 10.8	89 18 07.8	108 47 22.8	16 42 05.9
Feb 20 TU	-11 08 01.0	176 32 44.0	-13 49.07	16 10.6	89 18 07.6	109 46 59.1	16 38 08.1
Feb 21 WE	-10 46 28.7	176 34 17.1	-13 42.86	16 10.4	89 18 07.5	110 46 32.9	16 34 10.5
Feb 22 TH	-10 24 46.5	176 36 00.1	-13 35.99	16 10.2	89 18 07.3	111 46 04.1	16 30 13.1
Feb 23 FR	-10 02 54.8	176 37 53.0	-13 28.47	16 10.0	89 18 07.2	112 45 33.0	16 26 15.8
Feb 24 SA	-9 40 53.9	176 39 55.4	-13 20.31	16 09.8	89 18 07.0	113 45 00.7	16 22 18.6
Feb 25 SU	-9 18 44.4	176 42 07.1	-13 11.52	16 09.6	89 18 06.9	114 44 28.3	16 18 21.4
Feb 26 MO	-8 56 26.6	176 44 28.0	-13 02.13	16 09.3	89 18 06.8	115 43 56.8	16 14 24.1
Feb 27 TU	-8 34 01.0	176 46 57.6	-12 52.16	16 09.1	89 18 06.7	116 43 26.8	16 10 26.8
Feb 28 WE	-8 11 28.0	176 49 35.8	-12 41.61	16 08.9	89 18 06.7	117 42 58.4	16 06 29.3
Mar 1 TH	-7 48 47.8	176 52 22.2	-12 30.52	16 08.7	89 18 06.6	118 42 31.5	16 02 31.8
Mar 2 FR	-7 26 01.0	176 55 16.5	-12 18.90	16 08.4	89 18 06.4	119 42 05.7	15 58 34.2

Mar 3	SA	-7	03	07.9	176	58	18.4	-12	06.78	16	08.2	89	18	06.3	120	41	40.3	15	54	36.5
Mar 4	SU	-6	40	08.7	177	01	27.5	-11	54.16	16	08.0	89	18	06.1	121	41	14.6	15	50	38.9
Mar 5	MO	-6	17	04.0	177	04	43.6	-11	41.09	16	07.7	89	18	05.9	122	40	48.1	15	46	41.3
Mar 6	TU	-5	53	54.1	177	08	06.3	-11	27.58	16	07.5	89	18	05.7	123	40	20.3	15	42	43.8
Mar 7	WE	-5	30	39.2	177	11	35.3	-11	13.65	16	07.2	89	18	05.5	124	39	50.7	15	38	46.4
Mar 8	TH	-5	07	19.9	177	15	10.2	-10	59.32	16	07.0	89	18	05.3	125	39	19.4	15	34	49.1
Mar 9	FR	-4	43	56.4	177	18	50.8	-10	44.61	16	06.7	89	18	05.1	126	38	46.5	15	30	52.0
Mar 10	SA	-4	20	29.1	177	22	36.7	-10	29.55	16	06.4	89	18	04.8	127	38	12.3	15	26	54.9
Mar 11	SU	-3	56	58.4	177	26	27.6	-10	14.16	16	06.2	89	18	04.6	128	37	37.3	15	22	57.9
Mar 12	MO	-3	33	24.6	177	30	23.1	-09	58.46	16	05.9	89	18	04.5	129	37	02.1	15	19	00.9
Mar 13	TU	-3	09	48.1	177	34	23.0	-09	42.47	16	05.7	89	18	04.3	130	36	27.2	15	15	03.9
Mar 14	WE	-2	46	09.4	177	38	26.9	-09	26.21	16	05.4	89	18	04.1	131	35	53.3	15	11	06.8
Mar 15	TH	-2	22	28.7	177	42	34.6	-09	09.70	16	05.1	89	18	04.0	132	35	20.9	15	07	09.6
Mar 16	FR	-1	58	46.6	177	46	45.7	-08	52.95	16	04.8	89	18	03.8	133	34	50.1	15	03	12.3
Mar 17	SA	-1	35	03.3	177	51	00.0	-08	36.00	16	04.6	89	18	03.6	134	34	20.5	14	59	14.9
Mar 18	SU	-1	11	19.3	177	55	17.3	-08	18.85	16	04.3	89	18	03.4	135	33	51.0	14	55	17.5
Mar 19	MO	-0	47	34.9	177	59	37.2	-08	01.52	16	04.0	89	18	03.1	136	33	20.2	14	51	20.2
Mar 20	TU	-0	23	50.7	178	03	59.6	-07	44.03	16	03.8	89	18	02.8	137	32	47.1	14	47	23.1
Mar 21	WE	-0	00	06.9	178	08	24.2	-07	26.39	16	03.5	89	18	02.5	138	32	10.7	14	43	26.2
Mar 22	TH	+0	23	36.0	178	12	50.8	-07	08.61	16	03.2	89	18	02.2	139	31	31.5	14	39	29.4
Mar 23	FR	+0	47	17.7	178	17	19.1	-06	50.73	16	03.0	89	18	02.0	140	30	50.3	14	35	32.8
Mar 24	SA	+1	10	57.7	178	21	48.9	-06	32.74	16	02.7	89	18	01.7	141	30	08.6	14	31	36.2
Mar 25	SU	+1	34	35.7	178	26	19.8	-06	14.68	16	02.4	89	18	01.5	142	29	27.3	14	27	39.6
Mar 26	MO	+1	58	11.4	178	30	51.6	-05	56.56	16	02.2	89	18	01.3	143	28	47.3	14	23	43.0
Mar 27	TU	+2	21	44.3	178	35	24.1	-05	38.40	16	01.9	89	18	01.1	144	28	08.8	14	19	46.2

Mar 28 WE +2 45 14.1 178 39 56.7 -05 20.22 16 01.6 89 18 00.8 145 27 31.8 14 15
49.3
Mar 29 TH +3 08 40.5 178 44 29.4 -05 02.04 16 01.4 89 18 00.6 146 26 55.7 14 11
52.3
Mar 30 FR +3 32 03.1 178 49 01.6 -04 43.89 16 01.1 89 18 00.4 147 26 20.1 14 07
55.4
Mar 31 SA +3 55 21.6 178 53 33.2 -04 25.79 16 00.8 89 18 00.1 148 25 44.1 14 03
58.4
Apr 1 SU +4 18 35.7 178 58 03.7 -04 07.76 16 00.5 89 17 59.8 149 25 07.3 14 00
01.5
Apr 2 MO +4 41 45.0 179 02 32.8 -03 49.81 16 00.3 89 17 59.5 150 24 29.0 13 56
04.7
Apr 3 TU +5 04 49.3 179 07 00.2 -03 31.98 16 00.0 89 17 59.1 151 23 49.0 13 52
08.0
Apr 4 WE +5 27 48.2 179 11 25.6 -03 14.29 15 59.7 89 17 58.8 152 23 07.1 13 48
11.5
Apr 5 TH +5 50 41.4 179 15 48.6 -02 56.76 15 59.4 89 17 58.5 153 22 23.4 13 44
15.0
Apr 6 FR +6 13 28.6 179 20 09.0 -02 39.40 15 59.2 89 17 58.2 154 21 38.1 13 40
18.7
Apr 7 SA +6 36 09.5 179 24 26.4 -02 22.24 15 58.9 89 17 57.9 155 20 51.8 13 36
22.4
Apr 8 SU +6 58 43.7 179 28 40.4 -02 05.30 15 58.6 89 17 57.6 156 20 04.9 13 32
26.2
Apr 9 MO +7 21 10.9 179 32 50.9 -01 48.61 15 58.3 89 17 57.3 157 19 18.2 13 28
30.0
Apr 10 TU +7 43 30.7 179 36 57.5 -01 32.17 15 58.0 89 17 57.0 158 18 32.2 13 24
33.7
Apr 11 WE +8 05 42.9 179 40 59.9 -01 16.01 15 57.8 89 17 56.8 159 17 47.2 13 20
37.3
Apr 12 TH +8 27 47.1 179 44 57.8 -01 00.14 15 57.5 89 17 56.5 160 17 03.6 13 16
40.9
Apr 13 FR +8 49 42.9 179 48 51.1 -00 44.59 15 57.2 89 17 56.3 161 16 21.2 13 12
44.4
Apr 14 SA +9 11 29.9 179 52 39.4 -00 29.37 15 56.9 89 17 56.0 162 15 39.1 13 08
47.8
Apr 15 SU +9 33 07.8 179 56 22.6 -00 14.49 15 56.7 89 17 55.7 163 14 56.4 13 04
51.3
Apr 16 MO +9 54 36.3 180 00 00.5 +00 00.03 15 56.4 89 17 55.3 164 14 11.7 13 00
54.9
Apr 17 TU +10 15 55.0 180 03 32.8 +00 14.19 15 56.1 89 17 55.0 165 13 24.0 12 56
58.8
Apr 18 WE +10 37 03.5 180 06 59.4 +00 27.96 15 55.9 89 17 54.6 166 12 33.0 12 53
02.8
Apr 19 TH +10 58 01.4 180 10 20.3 +00 41.35 15 55.6 89 17 54.3 167 11 39.3 12 49
07.0
Apr 20 FR +11 18 48.4 180 13 35.2 +00 54.35 15 55.3 89 17 54.0 168 10 44.2 12 45
11.3
Apr 21 SA +11 39 24.2 180 16 44.1 +01 06.94 15 55.1 89 17 53.7 169 09 49.2 12 41
15.7

Apr 22	SU	+11 59 48.4	180 19 46.7	+01 19.11	15 54.8	89 17 53.4	170 08 55.3	12 37 19.9
Apr 23	MO	+12 20 00.6	180 22 43.0	+01 30.87	15 54.6	89 17 53.2	171 08 03.0	12 33 24.0
Apr 24	TU	+12 40 00.4	180 25 32.7	+01 42.18	15 54.3	89 17 52.9	172 07 12.3	12 29 28.1
Apr 25	WE	+12 59 47.7	180 28 15.7	+01 53.05	15 54.1	89 17 52.6	173 06 22.6	12 25 32.0
Apr 26	TH	+13 19 22.0	180 30 51.9	+02 03.46	15 53.8	89 17 52.3	174 05 33.6	12 21 35.9
Apr 27	FR	+13 38 43.0	180 33 20.9	+02 13.39	15 53.6	89 17 52.0	175 04 44.3	12 17 39.9
Apr 28	SA	+13 57 50.5	180 35 42.7	+02 22.85	15 53.3	89 17 51.7	176 03 54.3	12 13 43.8
Apr 29	SU	+14 16 44.1	180 37 57.1	+02 31.81	15 53.1	89 17 51.4	177 03 02.9	12 09 47.9
Apr 30	MO	+14 35 23.5	180 40 03.9	+02 40.26	15 52.8	89 17 51.0	178 02 09.9	12 05 52.1
May 1	TU	+14 53 48.5	180 42 03.0	+02 48.20	15 52.6	89 17 50.7	179 01 14.9	12 01 56.4
May 2	WE	+15 11 58.7	180 43 54.2	+02 55.61	15 52.4	89 17 50.3	180 00 18.1	11 58 00.8
May 3	TH	+15 29 53.9	180 45 37.3	+03 02.49	15 52.1	89 17 50.0	180 59 19.6	11 54 05.4
May 4	FR	+15 47 33.7	180 47 12.2	+03 08.81	15 51.9	89 17 49.7	181 58 20.0	11 50 10.0
May 5	SA	+16 04 57.9	180 48 38.7	+03 14.58	15 51.7	89 17 49.4	182 57 19.7	11 46 14.7
May 6	SU	+16 22 06.1	180 49 56.8	+03 19.79	15 51.4	89 17 49.1	183 56 19.4	11 42 19.3
May 7	MO	+16 38 58.2	180 51 06.3	+03 24.42	15 51.2	89 17 48.8	184 55 19.7	11 38 24.0
May 8	TU	+16 55 33.7	180 52 07.1	+03 28.48	15 51.0	89 17 48.6	185 54 21.0	11 34 28.5
May 9	WE	+17 11 52.3	180 52 59.2	+03 31.95	15 50.7	89 17 48.3	186 53 23.6	11 30 33.0
May 10	TH	+17 27 53.9	180 53 42.5	+03 34.83	15 50.5	89 17 48.1	187 52 27.4	11 26 37.4
May 11	FR	+17 43 38.0	180 54 16.8	+03 37.12	15 50.3	89 17 47.8	188 51 31.7	11 22 41.7
May 12	SA	+17 59 04.3	180 54 42.3	+03 38.82	15 50.1	89 17 47.5	189 50 35.8	11 18 46.1
May 13	SU	+18 14 12.5	180 54 58.8	+03 39.92	15 49.8	89 17 47.2	190 49 38.4	11 14 50.6
May 14	MO	+18 29 02.4	180 55 06.6	+03 40.44	15 49.6	89 17 46.9	191 48 38.7	11 10 55.2
May 15	TU	+18 43 33.6	180 55 05.5	+03 40.36	15 49.4	89 17 46.5	192 47 35.8	11 07 00.0
May 16	WE	+18 57 45.8	180 54 55.6	+03 39.71	15 49.2	89 17 46.2	193 46 29.9	11 03 05.1

May 17 TH +19 11 38.7 180 54 37.3 +03 38.49 15 49.0 89 17 45.9 194 45 22.0 10 59
10.2
May 18 FR +19 25 12.1 180 54 10.5 +03 36.70 15 48.8 89 17 45.6 195 44 13.5 10 55
15.5
May 19 SA +19 38 25.7 180 53 35.4 +03 34.36 15 48.6 89 17 45.4 196 43 05.7 10 51
20.6
May 20 SU +19 51 19.1 180 52 52.3 +03 31.48 15 48.4 89 17 45.2 197 41 59.5 10 47
25.7
May 21 MO +20 03 52.2 180 52 01.1 +03 28.07 15 48.3 89 17 45.0 198 40 55.2 10
43 30.6
May 22 TU +20 16 04.6 180 51 02.2 +03 24.15 15 48.1 89 17 44.8 199 39 52.4 10 39
35.4
May 23 WE +20 27 56.1 180 49 55.6 +03 19.71 15 47.9 89 17 44.5 200 38 50.4 10
35 40.2
May 24 TH +20 39 26.5 180 48 41.5 +03 14.76 15 47.7 89 17 44.3 201 37 48.6 10 31
45.0
May 25 FR +20 50 35.5 180 47 19.9 +03 09.33 15 47.6 89 17 44.0 202 36 46.2 10 27
49.8
May 26 SA +21 01 22.9 180 45 51.2 +03 03.41 15 47.4 89 17 43.7 203 35 42.8 10 23
54.7
May 27 SU +21 11 48.5 180 44 15.4 +02 57.02 15 47.2 89 17 43.4 204 34 37.7 10 19
59.6
May 28 MO +21 21 52.1 180 42 32.6 +02 50.17 15 47.1 89 17 43.2 205 33 30.9 10
16 04.7
May 29 TU +21 31 33.6 180 40 43.0 +02 42.87 15 46.9 89 17 42.9 206 32 22.3 10 12
09.9
May 30 WE +21 40 52.6 180 38 46.8 +02 35.12 15 46.8 89 17 42.6 207 31 12.1 10
08 15.3
May 31 TH +21 49 49.1 180 36 44.2 +02 26.95 15 46.6 89 17 42.3 208 30 00.7 10 04
20.7
Jun 1 FR +21 58 22.9 180 34 35.3 +02 18.36 15 46.5 89 17 42.1 209 28 48.6 10 00
26.1
Jun 2 SA +22 06 33.8 180 32 20.3 +02 09.36 15 46.3 89 17 41.9 210 27 36.4 9 56
31.6
Jun 3 SU +22 14 21.6 180 29 59.4 +01 59.96 15 46.2 89 17 41.7 211 26 24.8 9 52
37.0
Jun 4 MO +22 21 46.2 180 27 32.9 +01 50.19 15 46.0 89 17 41.5 212 25 14.3 9 48
42.3
Jun 5 TU +22 28 47.4 180 25 00.8 +01 40.05 15 45.9 89 17 41.3 213 24 05.2 9 44
47.6
Jun 6 WE +22 35 25.0 180 22 23.4 +01 29.56 15 45.8 89 17 41.2 214 22 57.4 9 40
52.7
Jun 7 TH +22 41 39.0 180 19 41.0 +01 18.73 15 45.6 89 17 41.0 215 21 50.4 9 36
57.9
Jun 8 FR +22 47 29.0 180 16 53.8 +01 07.59 15 45.5 89 17 40.8 216 20 43.5 9 33
03.0
Jun 9 SA +22 52 55.1 180 14 02.1 +00 56.14 15 45.4 89 17 40.6 217 19 35.6 9 29
08.1
Jun 10 SU +22 57 57.0 180 11 06.2 +00 44.41 15 45.3 89 17 40.3 218 18 25.8 9 25
13.4

Jun 11 MO +23 02 34.7 180 08 06.4 +00 32.43 15 45.2 89 17 40.1 219 17 13.4 9 21
18.9
Jun 12 TU +23 06 48.0 180 05 03.0 +00 20.20 15 45.1 89 17 39.8 220 15 58.2 9 17
24.6
Jun 13 WE +23 10 36.8 180 01 56.5 +00 07.77 15 44.9 89 17 39.6 221 14 40.7 9 13
30.4
Jun 14 TH +23 14 01.1 179 58 47.2 -00 04.85 15 44.8 89 17 39.4 222 13 22.2 9 09
36.2
Jun 15 FR +23 17 00.8 179 55 35.6 -00 17.63 15 44.8 89 17 39.3 223 12 03.8 9 05
42.1
Jun 16 SA +23 19 35.8 179 52 22.0 -00 30.53 15 44.7 89 17 39.2 224 10 46.9 9 01
47.9
Jun 17 SU +23 21 46.0 179 49 07.0 -00 43.54 15 44.6 89 17 39.1 225 09 31.9 8 57
53.5
Jun 18 MO +23 23 31.6 179 45 50.9 -00 56.61 15 44.5 89 17 38.9 226 08 18.7 8 53
59.0
Jun 19 TU +23 24 52.3 179 42 34.1 -01 09.73 15 44.4 89 17 38.8 227 07 07.0 8 50
04.5
Jun 20 WE +23 25 48.1 179 39 17.1 -01 22.86 15 44.4 89 17 38.7 228 05 55.8 8 46
09.8
Jun 21 TH +23 26 19.2 179 36 00.3 -01 35.98 15 44.3 89 17 38.5 229 04 44.4 8 42
15.2
Jun 22 FR +23 26 25.4 179 32 43.9 -01 49.07 15 44.3 89 17 38.4 230 03 32.3 8 38
20.7
Jun 23 SA +23 26 06.8 179 29 28.4 -02 02.10 15 44.2 89 17 38.2 231 02 18.8 8 34
26.2
Jun 24 SU +23 25 23.4 179 26 14.2 -02 15.06 15 44.2 89 17 38.0 232 01 03.7 8 30
31.9
Jun 25 MO +23 24 15.2 179 23 01.4 -02 27.90 15 44.1 89 17 37.9 232 59 47.0 8 26
37.6
Jun 26 TU +23 22 42.4 179 19 50.6 -02 40.63 15 44.1 89 17 37.7 233 58 28.7 8 22
43.5
Jun 27 WE +23 20 44.9 179 16 41.9 -02 53.20 15 44.0 89 17 37.5 234 57 09.3 8 18
49.4
Jun 28 TH +23 18 22.8 179 13 35.8 -03 05.61 15 44.0 89 17 37.4 235 55 49.1 8 14
55.4
Jun 29 FR +23 15 36.3 179 10 32.5 -03 17.83 15 44.0 89 17 37.3 236 54 28.9 8 11
01.4
Jun 30 SA +23 12 25.3 179 07 32.2 -03 29.85 15 44.0 89 17 37.2 237 53 09.2 8 07
07.4
Jul 1 SU +23 08 50.0 179 04 35.4 -03 41.64 15 43.9 89 17 37.2 238 51 50.7 8 03
13.2
Jul 2 MO +23 04 50.5 179 01 42.2 -03 53.19 15 43.9 89 17 37.1 239 50 33.7 7 59
19.0
Jul 3 TU +23 00 26.8 178 58 52.9 -04 04.47 15 43.9 89 17 37.1 240 49 18.2 7 55
24.7
Jul 4 WE +22 55 39.1 178 56 07.8 -04 15.48 15 43.9 89 17 37.1 241 48 04.0 7 51
30.3
Jul 5 TH +22 50 27.4 178 53 27.1 -04 26.20 15 43.9 89 17 37.0 242 46 50.2 7 47
35.8

Jul 6 FR +22 44 51.8 178 50 51.0 -04 36.60 15 43.9 89 17 36.9 243 45 35.8 7 43
41.4
Jul 7 SA +22 38 52.5 178 48 19.8 -04 46.68 15 43.9 89 17 36.8 244 44 19.9 7 39
47.1
Jul 8 SU +22 32 29.5 178 45 53.9 -04 56.41 15 43.9 89 17 36.7 245 43 01.7 7 35
53.0
Jul 9 MO +22 25 43.1 178 43 33.3 -05 05.78 15 43.9 89 17 36.6 246 41 41.0 7 31
59.0
Jul 10 TU +22 18 33.3 178 41 18.5 -05 14.77 15 43.9 89 17 36.5 247 40 18.2 7 28
05.2
Jul 11 WE +22 11 00.4 178 39 09.7 -05 23.35 15 43.9 89 17 36.4 248 38 54.1 7 24
11.4
Jul 12 TH +22 03 04.6 178 37 07.2 -05 31.52 15 43.9 89 17 36.4 249 37 30.0 7 20
17.7
Jul 13 FR +21 54 45.9 178 35 11.3 -05 39.25 15 43.9 89 17 36.4 250 36 07.0 7 16
23.8
Jul 14 SA +21 46 04.8 178 33 22.4 -05 46.51 15 44.0 89 17 36.4 251 34 45.8 7 12
29.9
Jul 15 SU +21 37 01.3 178 31 40.6 -05 53.29 15 44.0 89 17 36.4 252 33 26.7 7 08
35.8
Jul 16 MO +21 27 35.7 178 30 06.3 -05 59.58 15 44.1 89 17 36.4 253 32 09.3 7 04
41.6
Jul 17 TU +21 17 48.1 178 28 39.9 -06 05.34 15 44.1 89 17 36.5 254 30 53.1 7 00
47.3
Jul 18 WE +21 07 38.9 178 27 21.3 -06 10.58 15 44.2 89 17 36.4 255 29 37.1 6 56
53.0
Jul 19 TH +20 57 08.3 178 26 11.0 -06 15.26 15 44.2 89 17 36.4 256 28 20.7 6 52
58.8
Jul 20 FR +20 46 16.5 178 25 09.1 -06 19.39 15 44.3 89 17 36.4 257 27 03.2 6 49
04.6
Jul 21 SA +20 35 03.7 178 24 15.8 -06 22.95 15 44.4 89 17 36.4 258 25 44.4 6 45
10.5
Jul 22 SU +20 23 30.2 178 23 31.1 -06 25.93 15 44.4 89 17 36.3 259 24 24.1 6 41
16.5
Jul 23 MO +20 11 36.3 178 22 55.3 -06 28.32 15 44.5 89 17 36.3 260 23 02.3 6 37
22.6
Jul 24 TU +19 59 22.2 178 22 28.3 -06 30.11 15 44.6 89 17 36.3 261 21 39.5 6 33
28.7
Jul 25 WE +19 46 48.1 178 22 10.4 -06 31.31 15 44.7 89 17 36.3 262 20 15.9 6 29
34.9
Jul 26 TH +19 33 54.5 178 22 01.6 -06 31.90 15 44.8 89 17 36.3 263 18 52.2 6 25
41.2
Jul 27 FR +19 20 41.5 178 22 01.8 -06 31.88 15 44.9 89 17 36.4 264 17 29.0 6 21
47.3
Jul 28 SA +19 07 09.3 178 22 11.3 -06 31.25 15 45.0 89 17 36.5 265 16 06.9 6 17
53.5
Jul 29 SU +18 53 18.4 178 22 29.8 -06 30.01 15 45.1 89 17 36.6 266 14 46.4 6 13
59.5
Jul 30 MO +18 39 08.8 178 22 57.5 -06 28.17 15 45.2 89 17 36.7 267 13 27.7 6 10
05.4

Jul 31	TU	+18 24 40.9	178 23 34.3	-06 25.71	15 45.3	89 17 36.7	268 12 10.6	6 06	11.1
Aug 1	WE	+18 09 55.0	178 24 20.2	-06 22.66	15 45.4	89 17 36.8	269 10 54.4	6 02	16.9
Aug 2	TH	+17 54 51.2	178 25 15.0	-06 19.00	15 45.5	89 17 36.9	270 09 38.1	5 58	22.6
Aug 3	FR	+17 39 29.9	178 26 18.7	-06 14.75	15 45.6	89 17 36.9	271 08 20.6	5 54	28.4
Aug 4	SA	+17 23 51.3	178 27 31.4	-06 09.91	15 45.8	89 17 37.0	272 07 01.1	5 50	34.3
Aug 5	SU	+17 07 55.6	178 28 52.7	-06 04.48	15 45.9	89 17 37.0	273 05 39.2	5 46	40.4
Aug 6	MO	+16 51 43.1	178 30 22.9	-05 58.48	15 46.0	89 17 37.0	274 04 15.3	5 42	46.7
Aug 7	TU	+16 35 14.2	178 32 01.6	-05 51.89	15 46.1	89 17 37.1	275 02 50.2	5 38	53.0
Aug 8	WE	+16 18 29.1	178 33 49.0	-05 44.73	15 46.3	89 17 37.2	276 01 24.9	5 34	59.3
Aug 9	TH	+16 01 28.2	178 35 45.0	-05 37.00	15 46.4	89 17 37.3	277 00 00.6	5 31	05.6
Aug 10	FR	+15 44 11.8	178 37 49.5	-05 28.70	15 46.5	89 17 37.5	277 58 38.1	5 27	11.7
Aug 11	SA	+15 26 40.2	178 40 02.5	-05 19.83	15 46.7	89 17 37.6	278 57 17.6	5 23	17.7
Aug 12	SU	+15 08 53.7	178 42 24.0	-05 10.40	15 46.9	89 17 37.8	279 55 59.2	5 19	23.6
Aug 13	MO	+14 50 52.7	178 44 53.9	-05 00.41	15 47.0	89 17 38.0	280 54 42.2	5 15	29.4
Aug 14	TU	+14 32 37.5	178 47 32.1	-04 49.86	15 47.2	89 17 38.1	281 53 26.0	5 11	35.1
Aug 15	WE	+14 14 08.4	178 50 18.6	-04 38.76	15 47.3	89 17 38.2	282 52 09.7	5 07	40.8
Aug 16	TH	+13 55 25.8	178 53 13.3	-04 27.11	15 47.5	89 17 38.3	283 50 52.7	5 03	46.6
Aug 17	FR	+13 36 30.0	178 56 16.1	-04 14.93	15 47.7	89 17 38.4	284 49 34.6	4 59	52.4
Aug 18	SA	+13 17 21.3	178 59 26.9	-04 02.21	15 47.9	89 17 38.5	285 48 15.2	4 55	58.4
Aug 19	SU	+12 58 00.0	179 02 45.4	-03 48.97	15 48.1	89 17 38.6	286 46 54.5	4 52	04.4
Aug 20	MO	+12 38 26.5	179 06 11.6	-03 35.22	15 48.2	89 17 38.8	287 45 32.7	4 48	10.5
Aug 21	TU	+12 18 41.1	179 09 45.3	-03 20.98	15 48.4	89 17 38.9	288 44 10.3	4 44	16.6
Aug 22	WE	+11 58 44.1	179 13 26.3	-03 06.24	15 48.6	89 17 39.1	289 42 47.7	4 40	22.8
Aug 23	TH	+11 38 35.9	179 17 14.5	-02 51.04	15 48.8	89 17 39.2	290 41 25.4	4 36	28.9
Aug 24	FR	+11 18 16.8	179 21 09.5	-02 35.37	15 49.0	89 17 39.4	291 40 04.3	4 32	34.9

Aug 25 SA +10 57 47.0 179 25 11.2 -02 19.25 15 49.2 89 17 39.7 292 38 44.6 4 28
40.9
Aug 26 SU +10 37 07.0 179 29 19.4 -02 02.71 15 49.4 89 17 39.9 293 37 26.9 4 24
46.7
Aug 27 MO +10 16 17.0 179 33 33.7 -01 45.75 15 49.7 89 17 40.1 294 36 11.0 4 20
52.4
Aug 28 TU +9 55 17.3 179 37 53.9 -01 28.40 15 49.9 89 17 40.4 295 34 56.6 4 16
58.0
Aug 29 WE +9 34 08.1 179 42 19.8 -01 10.68 15 50.1 89 17 40.6 296 33 42.7 4 13
03.6
Aug 30 TH +9 12 49.9 179 46 51.0 -00 52.60 15 50.3 89 17 40.7 297 32 28.0 4 09
09.2
Aug 31 FR +8 51 22.7 179 51 27.2 -00 34.19 15 50.5 89 17 40.9 298 31 11.6 4 05
14.9
Sep 1 SA +8 29 47.0 179 56 08.1 -00 15.46 15 50.7 89 17 41.0 299 29 52.8 4 01
20.8
Sep 2 SU +8 08 03.0 180 00 53.4 +00 03.56 15 50.9 89 17 41.2 300 28 31.9 3 57
26.9
Sep 3 MO +7 46 11.0 180 05 42.8 +00 22.85 15 51.2 89 17 41.4 301 27 09.7 3 53
33.0
Sep 4 TU +7 24 11.3 180 10 36.1 +00 42.40 15 51.4 89 17 41.6 302 25 47.3 3 49
39.1
Sep 5 WE +7 02 04.2 180 15 32.9 +01 02.19 15 51.6 89 17 41.9 303 24 25.9 3 45
45.2
Sep 6 TH +6 39 50.1 180 20 33.0 +01 22.20 15 51.8 89 17 42.1 304 23 06.3 3 41
51.1
Sep 7 FR +6 17 29.4 180 25 36.2 +01 42.41 15 52.1 89 17 42.4 305 21 48.8 3 37
56.9
Sep 8 SA +5 55 02.4 180 30 42.2 +02 02.82 15 52.3 89 17 42.7 306 20 33.5 3 34
02.6
Sep 9 SU +5 32 29.3 180 35 50.9 +02 23.39 15 52.5 89 17 43.0 307 19 20.0 3 30
08.1
Sep 10 MO +5 09 50.7 180 41 01.9 +02 44.12 15 52.8 89 17 43.3 308 18 07.5 3 26
13.6
Sep 11 TU +4 47 06.8 180 46 15.0 +03 05.00 15 53.0 89 17 43.5 309 16 55.4 3 22
19.1
Sep 12 WE +4 24 17.9 180 51 30.0 +03 26.00 15 53.3 89 17 43.7 310 15 42.9 3 18
24.5
Sep 13 TH +4 01 24.5 180 56 46.6 +03 47.11 15 53.5 89 17 44.0 311 14 29.6 3 14
30.1
Sep 14 FR +3 38 26.9 181 02 04.7 +04 08.31 15 53.8 89 17 44.2 312 13 15.1 3 10
35.7
Sep 15 SA +3 15 25.3 181 07 23.9 +04 29.59 15 54.0 89 17 44.4 313 11 59.4 3 06
41.4
Sep 16 SU +2 52 20.3 181 12 43.9 +04 50.93 15 54.3 89 17 44.6 314 10 42.8 3 02
47.1
Sep 17 MO +2 29 12.0 181 18 04.6 +05 12.31 15 54.6 89 17 44.9 315 09 25.5 2 58
52.9
Sep 18 TU +2 06 00.9 181 23 25.7 +05 33.71 15 54.8 89 17 45.1 316 08 08.1 2 54
58.7

Sep 19	WE	+1	42	47.4	181	28	46.7	+05	55.12	15	55.1	89	17	45.4	317	06	51.0	2	51
04.5																			
Sep 20	TH	+1	19	31.6	181	34	07.6	+06	16.51	15	55.4	89	17	45.7	318	05	34.9	2	47
10.2																			
Sep 21	FR	+0	56	14.1	181	39	27.9	+06	37.86	15	55.6	89	17	46.1	319	04	20.2	2	43
15.8																			
Sep 22	SA	+0	32	55.1	181	44	47.4	+06	59.16	15	55.9	89	17	46.4	320	03	07.4	2	39
21.3																			
Sep 23	SU	+0	09	35.0	181	50	05.8	+07	20.38	15	56.2	89	17	46.8	321	01	56.6	2	35
26.7																			
Sep 24	MO	-0	13	45.9	181	55	22.7	+07	41.51	15	56.4	89	17	47.1	322	00	47.6	2	31
31.9																			
Sep 25	TU	-0	37	07.3	182	00	37.7	+08	02.52	15	56.7	89	17	47.4	322	59	39.6	2	27
37.1																			
Sep 26	WE	-1	00	28.8	182	05	50.6	+08	23.38	15	57.0	89	17	47.7	323	58	31.7	2	23
42.3																			
Sep 27	TH	-1	23	50.3	182	11	01.0	+08	44.07	15	57.3	89	17	48.0	324	57	22.4	2	19
47.5																			
Sep 28	FR	-1	47	11.3	182	16	08.4	+09	04.56	15	57.5	89	17	48.2	325	56	11.0	2	15
52.9																			
Sep 29	SA	-2	10	31.6	182	21	12.6	+09	24.84	15	57.8	89	17	48.5	326	54	57.2	2	11
58.5																			
Sep 30	SU	-2	33	50.9	182	26	13.1	+09	44.87	15	58.1	89	17	48.7	327	53	41.7	2	08
04.2																			
Oct 1	MO	-2	57	08.8	182	31	09.6	+10	04.64	15	58.3	89	17	49.1	328	52	25.8	2	04
09.9																			
Oct 2	TU	-3	20	25.1	182	36	01.6	+10	24.11	15	58.6	89	17	49.4	329	51	10.7	2	00
15.5																			
Oct 3	WE	-3	43	39.3	182	40	49.0	+10	43.27	15	58.9	89	17	49.8	330	49	57.5	1	56
21.1																			
Oct 4	TH	-4	06	51.1	182	45	31.4	+11	02.09	15	59.1	89	17	50.1	331	48	46.7	1	52
26.4																			
Oct 5	FR	-4	30	00.2	182	50	08.4	+11	20.56	15	59.4	89	17	50.5	332	47	38.3	1	48
31.6																			
Oct 6	SA	-4	53	06.0	182	54	39.8	+11	38.66	15	59.7	89	17	50.9	333	46	31.9	1	44
36.7																			
Oct 7	SU	-5	16	08.4	182	59	05.4	+11	56.36	15	59.9	89	17	51.2	334	45	26.9	1	40
41.7																			
Oct 8	MO	-5	39	06.8	183	03	24.9	+12	13.66	16	00.2	89	17	51.6	335	44	22.5	1	36
46.6																			
Oct 9	TU	-6	02	00.9	183	07	37.9	+12	30.53	16	00.5	89	17	51.9	336	43	18.1	1	32
51.5																			
Oct 10	WE	-6	24	50.3	183	11	44.3	+12	46.95	16	00.8	89	17	52.2	337	42	13.0	1	28
56.5																			
Oct 11	TH	-6	47	34.6	183	15	43.8	+13	02.92	16	01.0	89	17	52.5	338	41	07.0	1	25
01.6																			
Oct 12	FR	-7	10	13.4	183	19	36.2	+13	18.41	16	01.3	89	17	52.8	339	40	00.0	1	21
06.7																			
Oct 13	SA	-7	32	46.4	183	23	21.2	+13	33.41	16	01.6	89	17	53.1	340	38	52.1	1	17
11.8																			

Oct 14 SU -7 55 13.1 183 26 58.6 +13 47.90 16 01.9 89 17 53.4 341 37 43.5 1 13
17.1
Oct 15 MO -8 17 33.2 183 30 28.1 +14 01.87 16 02.2 89 17 53.8 342 36 34.8 1 09
22.3
Oct 16 TU -8 39 46.3 183 33 49.6 +14 15.30 16 02.4 89 17 54.1 343 35 26.4 1 05
27.5
Oct 17 WE -9 01 51.9 183 37 02.7 +14 28.18 16 02.7 89 17 54.5 344 34 19.0 1 01
32.6
Oct 18 TH -9 23 49.6 183 40 07.3 +14 40.49 16 03.0 89 17 54.9 345 33 13.0 0 57
37.7
Oct 19 FR -9 45 39.2 183 43 03.2 +14 52.21 16 03.3 89 17 55.3 346 32 08.8 0 53
42.6
Oct 20 SA -10 07 20.1 183 45 50.1 +15 03.34 16 03.6 89 17 55.7 347 31 06.6 0 49
47.4
Oct 21 SU -10 28 52.0 183 48 27.7 +15 13.84 16 03.8 89 17 56.1 348 30 06.3 0 45
52.0
Oct 22 MO -10 50 14.5 183 50 55.8 +15 23.72 16 04.1 89 17 56.5 349 29 07.5 0 41
56.6
Oct 23 TU -11 11 27.2 183 53 14.2 +15 32.95 16 04.4 89 17 56.8 350 28 09.3 0 38
01.1
Oct 24 WE -11 32 29.8 183 55 22.6 +15 41.51 16 04.7 89 17 57.2 351 27 10.5 0 34
05.7
Oct 25 TH -11 53 21.8 183 57 20.8 +15 49.39 16 04.9 89 17 57.5 352 26 10.1 0 30
10.4
Oct 26 FR -12 14 03.0 183 59 08.4 +15 56.56 16 05.2 89 17 57.8 353 25 07.3 0 26
15.2
Oct 27 SA -12 34 33.0 184 00 45.2 +16 03.02 16 05.4 89 17 58.1 354 24 02.4 0 22
20.2
Oct 28 SU -12 54 51.3 184 02 10.9 +16 08.73 16 05.7 89 17 58.5 355 22 56.3 0 18
25.2
Oct 29 MO -13 14 57.8 184 03 25.3 +16 13.69 16 06.0 89 17 58.9 356 21 50.7 0 14
30.2
Oct 30 TU -13 34 51.9 184 04 28.1 +16 17.87 16 06.2 89 17 59.3 357 20 46.8 0 10
35.1
Oct 31 WE -13 54 33.3 184 05 19.0 +16 21.27 16 06.5 89 17 59.7 358 19 45.5 0 06
39.9
Nov 1 TH -14 14 01.6 184 05 57.9 +16 23.86 16 06.7 89 18 00.1 359 18 46.9 0 02
44.4
Nov 2 FR -14 33 16.3 184 06 24.7 +16 25.65 16 07.0 89 18 00.5 0 17 50.8 23 54
52.9
Nov 3 SA -14 52 17.0 184 06 39.2 +16 26.61 16 07.2 89 18 00.9 1 16 56.3 23 50
57.2
Nov 4 SU -15 11 03.3 184 06 41.2 +16 26.75 16 07.5 89 18 01.3 2 16 02.6 23 47
01.4
Nov 5 MO -15 29 34.8 184 06 30.7 +16 26.05 16 07.7 89 18 01.7 3 15 09.2 23 43
05.6
Nov 6 TU -15 47 51.0 184 06 07.6 +16 24.50 16 07.9 89 18 02.0 4 14 15.4 23 39
09.8
Nov 7 WE -16 05 51.5 184 05 31.8 +16 22.12 16 08.2 89 18 02.4 5 13 20.9 23 35
14.1

Nov 8 TH	-16 23 35.9	184 04 43.3	+16 18.89	16 08.4	89 18 02.7	6 12 25.3	23 31 18.5
Nov 9 FR	-16 41 03.8	184 03 42.1	+16 14.80	16 08.6	89 18 03.0	7 11 28.9	23 27 22.9
Nov 10 SA	-16 58 14.8	184 02 28.1	+16 09.87	16 08.9	89 18 03.3	8 10 31.9	23 23 27.3
Nov 11 SU	-17 15 08.5	184 01 01.4	+16 04.09	16 09.1	89 18 03.7	9 09 34.7	23 19 31.8
Nov 12 MO	-17 31 44.4	183 59 21.9	+15 57.46	16 09.3	89 18 04.1	10 08 37.8	23 15 36.2
Nov 13 TU	-17 48 02.1	183 57 29.8	+15 49.99	16 09.6	89 18 04.5	11 07 41.8	23 11 40.6
Nov 14 WE	-18 04 01.3	183 55 25.1	+15 41.68	16 09.8	89 18 04.9	12 06 47.2	23 07 44.9
Nov 15 TH	-18 19 41.4	183 53 07.9	+15 32.52	16 10.0	89 18 05.3	13 05 54.4	23 03 49.0
Nov 16 FR	-18 35 02.3	183 50 38.1	+15 22.54	16 10.3	89 18 05.7	14 05 03.7	22 59 53.1
Nov 17 SA	-18 50 03.3	183 47 56.0	+15 11.74	16 10.5	89 18 06.1	15 04 14.9	22 55 57.0
Nov 18 SU	-19 04 44.2	183 45 01.6	+15 00.11	16 10.7	89 18 06.5	16 03 27.7	22 52 00.8
Nov 19 MO	-19 19 04.5	183 41 55.0	+14 47.67	16 10.9	89 18 06.9	17 02 41.4	22 48 04.5
Nov 20 TU	-19 33 03.9	183 38 36.4	+14 34.42	16 11.1	89 18 07.2	18 01 55.1	22 44 08.2
Nov 21 WE	-19 46 42.1	183 35 05.7	+14 20.38	16 11.3	89 18 07.5	19 01 07.7	22 40 12.0
Nov 22 TH	-19 59 58.7	183 31 23.2	+14 05.55	16 11.5	89 18 07.8	20 00 18.4	22 36 16.0
Nov 23 FR	-20 12 53.3	183 27 28.9	+13 49.92	16 11.7	89 18 08.1	20 59 26.9	22 32 20.0
Nov 24 SA	-20 25 25.7	183 23 22.8	+13 33.52	16 11.9	89 18 08.5	21 58 33.7	22 28 24.2
Nov 25 SU	-20 37 35.5	183 19 05.2	+13 16.35	16 12.1	89 18 08.8	22 57 40.1	22 24 28.5
Nov 26 MO	-20 49 22.4	183 14 36.1	+12 58.41	16 12.3	89 18 09.2	23 56 47.6	22 20 32.6
Nov 27 TU	-21 00 46.1	183 09 55.7	+12 39.72	16 12.5	89 18 09.6	24 55 57.5	22 16 36.6
Nov 28 WE	-21 11 46.3	183 05 04.1	+12 20.27	16 12.6	89 18 10.0	25 55 10.4	22 12 40.4
Nov 29 TH	-21 22 22.6	183 00 01.5	+12 00.10	16 12.8	89 18 10.4	26 54 26.0	22 08 44.0
Nov 30 FR	-21 32 34.8	182 54 48.2	+11 39.21	16 13.0	89 18 10.8	27 53 43.7	22 04 47.5
Dec 1 SA	-21 42 22.4	182 49 24.4	+11 17.63	16 13.1	89 18 11.2	28 53 02.7	22 00 50.8
Dec 2 SU	-21 51 45.2	182 43 50.4	+10 55.36	16 13.3	89 18 11.5	29 52 21.9	21 56 54.2

Dec 3	MO	-22 00 42.8	182 38 06.5	+10 32.43	16 13.4	89 18 11.8	30 51 41.0	21 52 57.6
Dec 4	TU	-22 09 15.1	182 32 13.0	+10 08.87	16 13.6	89 18 12.1	31 50 59.3	21 49 01.0
Dec 5	WE	-22 17 21.6	182 26 10.4	+09 44.70	16 13.7	89 18 12.4	32 50 16.7	21 45 04.5
Dec 6	TH	-22 25 02.3	182 19 59.1	+09 19.94	16 13.8	89 18 12.7	33 49 33.2	21 41 08.0
Dec 7	FR	-22 32 16.7	182 13 39.4	+08 54.63	16 14.0	89 18 13.0	34 48 48.9	21 37 11.6
Dec 8	SA	-22 39 04.7	182 07 11.8	+08 28.78	16 14.1	89 18 13.3	35 48 04.4	21 33 15.3
Dec 9	SU	-22 45 26.1	182 00 36.7	+08 02.44	16 14.2	89 18 13.6	36 47 20.0	21 29 18.9
Dec 10	MO	-22 51 20.6	181 53 54.6	+07 35.64	16 14.4	89 18 14.0	37 46 36.4	21 25 22.4
Dec 11	TU	-22 56 48.0	181 47 06.0	+07 08.40	16 14.5	89 18 14.3	38 45 54.1	21 21 25.9
Dec 12	WE	-23 01 48.3	181 40 11.5	+06 40.76	16 14.6	89 18 14.7	39 45 13.5	21 17 29.2
Dec 13	TH	-23 06 21.1	181 33 11.4	+06 12.76	16 14.7	89 18 15.0	40 44 34.9	21 13 32.5
Dec 14	FR	-23 10 26.4	181 26 06.4	+05 44.43	16 14.8	89 18 15.4	41 43 58.3	21 09 35.5
Dec 15	SA	-23 14 04.0	181 18 57.0	+05 15.80	16 14.9	89 18 15.7	42 43 23.4	21 05 38.5
Dec 16	SU	-23 17 13.8	181 11 43.7	+04 46.91	16 15.0	89 18 16.0	43 42 49.5	21 01 41.4
Dec 17	MO	-23 19 55.6	181 04 26.9	+04 17.80	16 15.1	89 18 16.3	44 42 15.7	20 57 44.3
Dec 18	TU	-23 22 09.5	180 57 07.4	+03 48.49	16 15.2	89 18 16.6	45 41 41.2	20 53 47.3
Dec 19	WE	-23 23 55.2	180 49 45.4	+03 19.03	16 15.3	89 18 16.8	46 41 05.1	20 49 50.3
Dec 20	TH	-23 25 12.8	180 42 21.6	+02 49.44	16 15.4	89 18 17.0	47 40 27.0	20 45 53.5
Dec 21	FR	-23 26 02.2	180 34 56.4	+02 19.76	16 15.5	89 18 17.3	48 39 47.0	20 41 56.8
Dec 22	SA	-23 26 23.5	180 27 30.2	+01 50.02	16 15.6	89 18 17.5	49 39 05.9	20 38 00.2
Dec 23	SU	-23 26 16.6	180 20 03.6	+01 20.24	16 15.6	89 18 17.8	50 38 25.2	20 34 03.6
Dec 24	MO	-23 25 41.5	180 12 36.9	+00 50.46	16 15.7	89 18 18.1	51 37 46.0	20 30 06.9
Dec 25	TU	-23 24 38.2	180 05 10.6	+00 20.70	16 15.7	89 18 18.4	52 37 09.6	20 26 09.9
Dec 26	WE	-23 23 06.7	179 57 45.1	-00 09.00	16 15.8	89 18 18.8	53 36 36.0	20 22 12.8
Dec 27	TH	-23 21 07.1	179 50 20.8	-00 38.61	16 15.8	89 18 19.1	54 36 04.8	20 18 15.5

```
Dec 28 FR -23 18 39.4 179 42 58.2 -01 08.12 16 15.9 89 18 19.3 55 35 35.2 20 14  
18.2  
Dec 29 SA -23 15 43.6 179 35 37.8 -01 37.48 16 15.9 89 18 19.6 56 35 06.2 20 10  
20.8  
Dec 30 SU -23 12 19.8 179 28 20.0 -02 06.67 16 15.9 89 18 19.8 57 34 36.9 20 06  
23.4  
Dec 31 MO -23 08 28.1 179 21 05.3 -02 35.65 16 15.9 89 18 20.0 58 34 06.9 20 02  
26.0
```

4.6 Cálculo del Día Juliano de Efemérides para los equinoccios y solsticios anuales, en tiempo dinámico.

Este programa requiere el fichero que llamamos **EQUINOXES.txt**. Este fichero lo adjuntamos al final del mismo del código, para el lector interesado en reprogramarlo.

```
#include <winbgim.h>  
#include <stdlib.h>  
#include <math.h>  
#include <stdio.h>  
#include <string.h>  
  
main()  
{  
  
    printf("CALCULAMOS EQUINOCCIOS Y SOLSTICIOS CON ERROR MENOR A 51  
SEGUNDOS en TIEMPO DINAMICO\n");  
  
    double Y;  
    int year;  
  
    printf("Dame Y año entre el 1000 CE y 3000 CE\n");  
    scanf("%d",&year);  
  
    Y=(float(year)-2000.)/1000.;  
    printf("Y=%5.25lf\n",Y);  
    double Marzo_equinoccio, Junio_solsticio, Septiembre_equinoccio,  
    Diciembre_solsticio;  
  
    Marzo_equinoccio=2451623.80984+365242.37404*Y+0.05169*pow(Y,2)-  
0.00411*pow(Y,3)-0.00057*pow(Y,4);
```

```
Junio_solsticio=2451716.56767+365241.62603*Y+0.00325*pow(Y,2)+0.00888*pow(Y,3)-  
0.00030*pow(Y,4);  
Septiembre_equinoccio=2451810.21715+365242.01767*Y-  
0.11575*pow(Y,2)+0.00337*pow(Y,3)+0.00078*pow(Y,4);  
Diciembre_solsticio=2451900.05952+365242.74049*Y-0.06223*pow(Y,2)-  
0.00823*pow(Y,3)+0.00032*pow(Y,4);  
printf("Junio_solsticio=%5.25lf\n",Junio_solsticio);  
double Tm, Tj, Ts, Td;  
  
Tm=(Marzo_equinoccio-2451545.0)/36525.;  
Tj=(Junio_solsticio-2451545.0)/36525.;  
Ts=(Septiembre_equinoccio-2451545.0)/36525.;  
Td=(Diciembre_solsticio-2451545.0)/36525.;  
printf("Tj=%5.25lf\n",Tj);  
  
double Wm, Wj, Ws, Wd;  
  
Wm=(35999.373*Tm-2.47)*acosl(-1.)/180.;  
Wj=(35999.373*Tj-2.47)*acosl(-1.)/180.;  
Ws=(35999.373*Ts-2.47)*acosl(-1.)/180.;  
Wd=(35999.373*Td-2.47)*acosl(-1.)/180.;  
  
double Dlm, Dlj, Dls, Dld;  
  
Dlm=1.+0.0334*cosl(Wm)+0.0007*cosl(2*Wm);  
Dlj=1.+0.0334*cosl(Wj)+0.0007*cosl(2*Wj);  
Dls=1.+0.0334*cosl(Ws)+0.0007*cosl(2*Ws);  
Dld=1.+0.0334*cosl(Wd)+0.0007*cosl(2*Wd);  
printf("Dlj=%5.25lf\n",Dlj);  
  
double Sm, Sj, Ss, Sd;  
  
Sm=0.;  
Sj=0.;  
Ss=0.;  
Sd=0.;  
  
FILE *fichero;  
  
double A, B, C;  
int i;  
  
char nombrefich[80]="EQUINOXES.txt";  
  
fichero = fopen(nombrefich,"r");  
  
if(fichero==NULL)  
{  
    printf("Error abriendo el fichero.\n");  
}
```

```
else
{
    for (i=1;i<=24;i++)
    {
        fscanf(fichero,"%lf%lf%lf\n",&A,&B,&C);
        Sm=Sm+A*cosl(B*cosl(-1.)/180.+C*Tm*cosl(-1.)/180.);
        Sj=Sj+A*cosl(B*cosl(-1.)/180.+C*Tj*cosl(-1.)/180.);
        Ss=Ss+A*cosl(B*cosl(-1.)/180.+C*Ts*cosl(-1.)/180.);
        Sd=Sd+A*cosl(B*cosl(-1.)/180.+C*Td*cosl(-1.)/180.);
        printf("%lf%lf%lf\n",A, B, C);
    }

}

fclose(fichero);
printf("Sj=%5.25lf\n",Sj);
double JDEm, JDEj, JDEs, JDEd;

JDEm=Marzo_equinoccio+0.00001*Sm/Dlm;
JDEj=Junio_solsticio+0.00001*Sj/Dlj;
JDEs=Septiembre_equinoccio+0.00001*Ss/Dls;
JDEd=Diciembre_solsticio+0.00001*Sd/Dld;

printf("Marzo equinoccio: %5.25lf\n",JDEm);
printf("Junio solsticio: %5.25lf\n",JDEj);
printf("Septiembre equinoccio: %5.25lf\n",JDEs);
printf("Diciembre solsticio: %5.25lf\n",JDEd);

fichero = fopen("EQUINOCCIOS_SOLSTICIOS.txt","w");
if(fichero==NULL)
{
    printf("Error abriendo el fichero.\n");
    system("pause");
}
fprintf(fichero,"AÑO: %d\n",year);
fprintf(fichero,"Marzo equinoccio: %5.25lf\n",JDEm);
fprintf(fichero,"Junio solsticio: %5.25lf\n",JDEj);
fprintf(fichero,"Septiembre equinoccio: %5.25lf\n",JDEs);
fprintf(fichero,"Diciembre solsticio: %5.25lf\n",JDEd);
fclose(fichero);

system("pause");

}
```

Fichero EQUINOXES.txt

```
485.0 324.96 1934.136
203.0 337.23 32964.467
199.0 342.08 20.186
182.0 27.85 445267.112
156.0 73.14 45036.886
136.0 171.52 22518.443
77.0 222.54 65928.934
74.0 296.72 3034.906
70.0 243.58 9037.513
58.0 119.81 33718.147
52.0 297.17 150.678
50.0 21.02 2281.226
45.0 247.54 29929.562
44.0 325.15 31555.956
29.0 60.93 4443.417
18.0 155.12 67555.328
17.0 288.79 4562.452
16.0 198.04 62894.029
14.0 199.76 31436.921
12.0 95.39 14577.848
12.0 287.11 31931.756
12.0 320.81 34777.259
9.0 227.73 1222.114
8.0 15.45 16859.074
```

4.7 Fichero de parámetros para el código 4.5 en el caso del rosetón de la Sagrada Familia.

El programa 4.5 no sirve solo para la Catedral de Chartres, sirve para cualquier edificio con cualquier orientación, localización y altura del centro proyector; basta con cambiar los parámetros. En el caso del rosetón de la Sagrada Familia el fichero **PARAMETROS.txt** es el siguiente.

Fichero PARAMETROS.txt

```
X_PARA_PANTALLA= 700.0
Y_PARA_PANTALLA= 700.0
LONGITUD=-2.174736
LATITUD= 41.403976
```

ORIENTACION= -135.04630065
ALTURA_ROSETON= 36.34

4.8 Cálculo del día de *J1900* en que *Etanim* (γ -Draconis), a las 12h de la noche de Sagrada Familia, se proyectaba sobre el centro del templo.

Este programa requiere los ficheros que llamamos **TIERRA_L_64.txt**, **TIERRA_B_64.txt**, **TIERRA_R_64.txt**. El fichero L_64 ya fue explicitado con el código 4.2. Los dos nuevos ficheros los adjuntamos al final del mismo del código, para el lector interesado en reprogramarlo.

```
#include <winbgim.h>
#include <stdlib.h>
#include <math.h>
#include <stdio.h>
#include <string.h>

main()
{

    char nombrefich[80];
    int k,ii,iii, parte,jj;
    double dec_d[400],dec_m[400],dec_s[400];
    double eq_m[400],eq_s[400];
    char aux[50];
    double distancia,ax,ay,bx,by;
    double ar_h[15][33], ar_m[15][33], ar_s[15][33];

    FILE *fichero;
    FILE *fichero2;

    double pin,ecu,dec,decastro,h;
    pin=acos(-1);
    double a_x[50][400],a_y[50][400],a_z[50][400];

    double x0,y0,z0,beta,H;
    double azimut,altura,azi,alt,mu,x1,y1,z1;
    int i,cont,c;
    double a,b;
    double equipri_x[3000],solsvera_x[400],equioto_x[400],solsinv_x[400];
```

```
double equipri_y[3000],solsvera_y[400],equioto_y[400],solsinv_y[400];
```

```
double px, py;
```

```
double horizonte[50][400];  
double horizonteestrella[2500];
```

```
double lon, lat, ori;
```

```
int ana;
```

```
printf("Buscamos cuándo gamma draco está en el centro del templo");  
system("pause");
```

```
fichero = fopen("PARAMETROS.txt", "r");
```

```
if(fichero==NULL)
```

```
{  
    printf("Error abriendo el fichero. \n");
```

```
}  
else
```

```
{  
  
    fscanf(fichero, "%s %lf ", &aux, &px);  
    fscanf(fichero, "%s %lf ", &aux, &py);  
  
    fscanf(fichero, "%s %lf ", &aux, &lon);  
    fscanf(fichero, "%s %lf ", &aux, &lat);  
    fscanf(fichero, "%s %lf ", &aux, &ori);  
    fscanf(fichero, "%s %lf ", &aux, &z0);
```

```
}  
fclose(fichero);
```

```
ori=ori*pin/180.;  
lat=lat*pin/180.;
```

```
x0=0;  
y0=0;
```

```
decastro=51.499330823838633;
```

```
decastro=decastro*pin/180.;
```

```
initwindow(2000,1024);
```

```
setcolor(BLUE);  
fillellipse(px,py,4,4);
```

```
for (iii=1;iii<=1000;iii++)
```

```
{  
  
    setcolor(WHITE);  
    a=iii+px;  
    b=py;  
    fillellipse(a,b,1,1);  
    a=-iii+px;  
    fillellipse(a,b,1,1);  
  
}  
  
cont=0;  
  
int j;  
  
iii=0;  
for(i=0;i<=23;i++)  
{  
  
    for(ii=0;ii<=100;ii++)  
    {  
        iii=iii+1;  
        k=80;  
  
        ecu=0.;  
        dec=0.;  
  
        h=float(i)+float(ii)*0.01;  
  
        h=h+ecu;  
  
        H=360.*(h-12.)/24.;  
        if(H<0)  
        {  
            H=360.-H;  
        }  
        H=H*pin/180.;  
  
        dec=dec*pin/180.;  
  
        altura=asinl(sinl(dec)*sinl(lat)+cosl(dec)*cosl(lat)*cosl(H));  
        a=cosl(lat)*cosl(altura);  
        b=sinl(dec) - sinl(lat)*sinl(altura);  
  
        azimut=acosl( ( b ) / ( a ) );  
  
        if (b/a>=1.)  
        { azimut=0.; }  
        if (b/a<=-1.)
```

```
        { azimut=pin; }

        if(H<pin)
        {
            azimut=2.*pin-azimut;
        }

        azi=pin+azimut;
        alt=altura;

        horizonteestrella[iii]=alt;

        mu=-z0/sinl(alt);

        x1=x0+mu*(cosl(alt)*cosl(azi)*cosl(ori)+cosl(alt)*sinl(azi)*sinl(ori));
        y1=y0+mu*(-cosl(alt)*cosl(azi)*sinl(ori)+cosl(alt)*sinl(azi)*cosl(ori));
        z1=z0+mu*sinl(alt);

        equipri_x[iii]=x1;
        equipri_y[iii]=y1;
    }
}

for (iii=1;iii<=2424;iii++)
{
    a=-equipri_y[iii]*2.5+px;
    b=equipri_x[iii]*2.5+py;

    if(horizonteestrella[iii]>0.)
    {
        setcolor(14);
        fillellipse(a,b,1,1);
    }
}
}
```

PARTE3:

```
    iii=0;

    dec=decastro;

    for(i=0;i<=23;i++)
    {

        for(ii=0;ii<=100;ii++)
        {
            iii=iii+1;

            ecu=0.;
```

```
h=float(i)+float(ii)*0.01;

h=h+ecu;

H=360.*(h-12.)/24.;
if(H<0)
{
  H=360.-H;
}
H=H*pin/180.;

altura=asinl(sinl(dec)*sinl(lat)+cosl(dec)*cosl(lat)*cosl(H));
a=cosl(lat)*cosl(altura);
b=sinl(dec) - sinl(lat)*sinl(altura);
azimut=acosl( ( b ) / ( a ) );

if (b/a>=1.)
{ azimut=0.; }
if (b/a<=-1.)
{ azimut=pin; }

if(H<pin)
{
  azimut=2.*pin-azimut;
}

azi=pin+azimut;
alt=altura;

horizonteestrella[iii]=alt;

mu=-z0/sinl(alt);

x1=x0+mu*(cosl(alt)*cosl(azi)*cosl(ori)+cosl(alt)*sinl(azi)*sinl(ori));
y1=y0+mu*(-cosl(alt)*cosl(azi)*sinl(ori)+cosl(alt)*sinl(azi)*cosl(ori));
z1=z0+mu*sinl(alt);

equipri_x[iii]=x1;
equipri_y[iii]=y1;
}
}

for (iii=1;iii<=2424;iii++)
{
  a=-equipri_y[iii]*2.5+px;
  b=equipri_x[iii]*2.5+py;

  if(horizonteestrella[iii]>0.)
```

```
{
    setcolor(3);

    if(iii>1212)
    {
        setcolor(13);
    }

    fillellipse(a,b,1,1);
}

}

dec=decastro;

// BUSCAMOS gammaDraco en el centro de Sagrada Familia.
// coordenadas por del punto central ( -33.6019, -8.5450)
// día juliano del J1900: 2415020 que es 31 de Diciembre a las 12h tiempo medio en
Greenwich de 1899.

double gammadistancia=1000000000.;
int diadraco;
double JDdiadraco;

//dec_gammaDraco=51.499330823838633*acos(-1.)/180.; // radián en J1900

double AR_gammaDraco=17.90471381527651; // horas en J1900

for (iii=0;iii<=365;iii++)
{

    double JD;

    JD=2414655.49392666+float(iii); // dia juliano pada cada dia del año 1899

    double Lon, Lat, Rad; // longitud, latitud, radio vector, HELIOCENTICAS
    double Long, Latg;
    double tau;
    double Lon_aux=0., Lat_aux=0., Rad_aux=0.;
    double delta_aux, tday_aux;
    int k=0;
    int i;
    int numero;
    double A, B, C;

    tau=(JD-2451545.)/365250.;
```

```
double L0=0., L1=0., L2=0., L3=0., L4=0., L5=0.;  
double B0=0., B1=0., B2=0., B3=0., B4=0., B5=0.;  
double R0=0., R1=0., R2=0., R3=0., R4=0., R5=0.;
```

```
L0=0., L1=0., L2=0., L3=0., L4=0., L5=0.;  
B0=0., B1=0., B2=0., B3=0., B4=0., B5=0.;  
R0=0., R1=0., R2=0., R3=0., R4=0., R5=0.;
```

```
double Lon0, Lat0, Rad0;  
double Lon0g, Lat0g;  
char nombrefich4[80]="TIERRA_L_64.txt";  
FILE *fichero;  
fichero = fopen(nombrefich4,"r");  
if(fichero==NULL)  
{  
    printf("Error abriendo el fichero.\n");  
}  
else  
{  
    for (i=1;i<=64;i++)  
    {  
        fscanf(fichero,"%d %f %f %f \n",&numero,&A,&B,&C);  
        L0=L0+A*cosl(B+C*tau);  
    }  
  
    for (i=1;i<=64;i++)  
    {  
        fscanf(fichero,"%d %f %f %f \n",&numero,&A,&B,&C);  
        L1=L1+A*cosl(B+C*tau);  
    }  
  
    for (i=1;i<=64;i++)  
    {  
        fscanf(fichero,"%d %f %f %f \n",&numero,&A,&B,&C);  
        L2=L2+A*cosl(B+C*tau);  
    }  
  
    for (i=1;i<=64;i++)  
    {  
        fscanf(fichero,"%d %f %f %f \n",&numero,&A,&B,&C);  
        L3=L3+A*cosl(B+C*tau);  
    }  
  
    for (i=1;i<=64;i++)  
    {  
        fscanf(fichero,"%d %f %f %f \n",&numero,&A,&B,&C);  
        L4=L4+A*cosl(B+C*tau);  
    }  
}
```

```
    for (i=1;i<=64;i++)
    {
        fscanf(fichero,"%d %f %f %f \n",&numero,&A,&B,&C);
        L5=L5+A*cosl(B+C*tau);
    }
}

fclose(fichero);

Lon0=L0+L1*tau+L2*pow(tau,2)+L3*pow(tau,3)+L4*pow(tau,4)+L5*pow(tau,5);
Lon0=Lon0/pow(10,8);

char nombrefich5[80]="TIERRA_B_64.txt";
fichero = fopen(nombrefich5,"r");
if(fichero==NULL)
{
    printf("Error abriendo el fichero.\n");
}
else
{
    for (i=1;i<=64;i++)
    {
        fscanf(fichero,"%d %f %f %f \n",&numero,&A,&B,&C);
        B0=B0+A*cosl(B+C*tau);
    }

    for (i=1;i<=64;i++)
    {
        fscanf(fichero,"%d %f %f %f \n",&numero,&A,&B,&C);
        B1=B1+A*cosl(B+C*tau);
    }

    for (i=1;i<=64;i++)
    {
        fscanf(fichero,"%d %f %f %f \n",&numero,&A,&B,&C);
        B2=B2+A*cosl(B+C*tau);
    }

    for (i=1;i<=64;i++)
    {
        fscanf(fichero,"%d %f %f %f \n",&numero,&A,&B,&C);
        B3=B3+A*cosl(B+C*tau);
    }

    for (i=1;i<=64;i++)
    {
```

```
        fscanf(fichero,"%d %f %f %f \n",&numero,&A,&B,&C);
        B4=B4+A*cosl(B+C*tau);
    }

    for (i=1;i<=64;i++)
    {
        fscanf(fichero,"%d %f %f %f \n",&numero,&A,&B,&C);
        B5=B5+A*cosl(B+C*tau);
    }

}

fclose(fichero);

Lat0=B0+B1*tau+B2*pow(tau,2)+B3*pow(tau,3)+B4*pow(tau,4)+B5*pow(tau,5);
Lat0=Lat0/pow(10,8);

char nombrefich6[80]="TIERRA_R_64.txt";
fichero = fopen(nombrefich6,"r");
if(fichero==NULL)
{
    printf("Error abriendo el fichero.\n");
}
else
{
    for (i=1;i<=64;i++)
    {
        fscanf(fichero,"%d %f %f %f \n",&numero,&A,&B,&C);
        R0=R0+A*cosl(B+C*tau);
    }

    for (i=1;i<=64;i++)
    {
        fscanf(fichero,"%d %f %f %f \n",&numero,&A,&B,&C);
        R1=R1+A*cosl(B+C*tau);
    }

    for (i=1;i<=64;i++)
    {
        fscanf(fichero,"%d %f %f %f \n",&numero,&A,&B,&C);
        R2=R2+A*cosl(B+C*tau);
    }

    for (i=1;i<=64;i++)
    {
        fscanf(fichero,"%d %f %f %f \n",&numero,&A,&B,&C);
        R3=R3+A*cosl(B+C*tau);
    }

    for (i=1;i<=64;i++)
```



```
double numerador, denominador;

// VAMOS A CALCULAR LA POSICION DEL SOL
double betasol,deltabetasol,deltatheta, Lp;
betasol=-Lat0;

Lp=theta*180./acosl(-1.)-1.397*T-0.0031*T*T;
Lp=Lp*acosl(-1.)/180.;

deltatheta=-0.09033/(60.*60.);
deltabetasol=0.03916*(cosl(Lp)-sinl(Lp));

deltatheta=deltatheta*acosl(-1.)/180.;
deltabetasol=(deltabetasol/(60.*60.))*acosl(-1.)/180.;

theta=theta+deltatheta;
betasol=betasol+deltabetasol;

double aberration;
aberration=-20.4898/Rad0;

aberration=(aberration/3600.)*acosl(-1.)/180.;
double lambdasol;

aberration=0.; // ABERRACION NULA

lambdasol=theta+(deltapsi/3600.)*acosl(-1)/180.+aberration;

double ARSOL, DECSOL;

numerador=sinl(lambdasol)*cosl(epsilon)*cosl(betasol)-sinl(betasol)*sinl(epsilon);
denominador=cosl(lambdasol)*cosl(betasol);
ARSOL=atanl(numerador/denominador);
if(denominador*numerador<0. && denominador<0.)
{
    ARSOL=ARSOL+acosl(-1.);
}
if(denominador*numerador<0. && denominador>0.)
{
    ARSOL=ARSOL+2*acosl(-1.);
}
if(denominador+numerador<0.)
{
    ARSOL=ARSOL+acosl(-1.);
}

ARSOL=atan2l(numerador,denominador) ;
```

```
    DECSOL=asin( sinl(betasol)*cosl(epsilon) +  
cosl(betasol)*sinl(epsilon)*sinl(lambdasol) );  
  
    ARSOL=ARSOL*180./acosl(-1.);  
  
    if (ARSOL <0)  
    {  
        ARSOL = ARSOL+360.;  
    }  
  
    DECSOL=DECSOL*180./acosl(-1.);  
  
    printf("ARSOL exagesimal aparente=%5.25lf , DECSOL exageximal  
aparente=%5.25lf\n\n",ARSOL,DECSOL);  
  
    double H;  
  
    ARSOL=ARSOL/15.;  
    h=24.+ ARSOL-AR_gammaDraco;  
  
    if(ARSOL -AR_gammaDraco < -12.)  
    {h=24.+ ARSOL-AR_gammaDraco +24.;}  
  
    H=360.*(h-12.)/24.;  
    if(H<0)  
    {  
        H=360.-H;  
    }  
    H=H*pin/180.;  
  
    printf("dec=%5.25lf , lat=%5.25lf\n\n",dec,lat);  
  
    altura=asin(sinl(dec)*sinl(lat)+cosl(dec)*cosl(lat)*cosl(H));  
    a=cosl(lat)*cosl(altura);  
    b=sinl(dec) - sinl(lat)*sinl(altura);  
  
    azimut=acosl( ( b ) / ( a ) );  
  
    if (b/a>=1.)  
    { azimut=0.; }  
    if (b/a<=-1.)  
    { azimut=pin; }  
  
    if(H<pin)  
    {  
        azimut=2.*pin-azimut;  
    }  
  
    azi=pin+azimut;  
    alt=altura;
```

```
    horizonteestrella[1]=alt;

    mu=-z0/sinl(alt);

    x1=x0+mu*(cosl(alt)*cosl(azi)*cosl(ori)+cosl(alt)*sinl(azi)*sinl(ori));
    y1=y0+mu*(-cosl(alt)*cosl(azi)*sinl(ori)+cosl(alt)*sinl(azi)*cosl(ori));
    z1=z0+mu*sinl(alt);

    equipri_x[1]=x1;
    equipri_y[1]=y1;

    a=-equipri_y[1]*2.5+px;
    b=equipri_x[1]*2.5+py;

    if(horizonteestrella[1]>0.)
    {
        setcolor(YELLOW);

        fillellipse(a,b,2,2);

        printf("%5.25lf,%5.25lf\n",equipri_x[1],-equipri_y[1]);
        printf("%d,\n",iii);
    }
    else
    {
        printf("HORIZONTE NEGATIVO\n");
    }

    double distancia0;

    distancia0= sqrtl(pow(-10.4878-equipri_x[1],2)+pow(0-(-equipri_y[1]),2));

    if(distancia0<gammadistancia)
    {
        gammadistancia=distancia0;
        diadraco=iii;
        JDdiadraco=JD;
    }

}

printf("gammadistancia=%5.25lf, diadraco=%d,
JD=%2.25lff\n",gammadistancia,diadraco,JDdiadraco);

system("pause");
closegraph();

}
```

Fichero TIERRA_B_64.txt

1 280	3.199	84334.662
2 102	5.422	5507.553
3 80	3.88	5223.69
4 44	3.70	2352.87
5 32	4.00	1577.34
6 0 0 0		
7 0 0 0		
8 0 0 0		
9 0 0 0		
10 0 0 0		
11 0 0 0		
12 0 0 0		
13 0 0 0		
14 0 0 0		
15 0 0 0		
16 0 0 0		
17 0 0 0		
18 0 0 0		
19 0 0 0		
20 0 0 0		
21 0 0 0		
22 0 0 0		
23 0 0 0		
24 0 0 0		
25 0 0 0		
26 0 0 0		
27 0 0 0		
28 0 0 0		
29 0 0 0		
30 0 0 0		
31 0 0 0		
32 0 0 0		
33 0 0 0		
34 0 0 0		
35 0 0 0		
36 0 0 0		
37 0 0 0		
38 0 0 0		
39 0 0 0		
40 0 0 0		
41 0 0 0		
42 0 0 0		
43 0 0 0		
44 0 0 0		
45 0 0 0		
46 0 0 0		
47 0 0 0		
48 0 0 0		

49 0 0 0		
50 0 0 0		
51 0 0 0		
52 0 0 0		
53 0 0 0		
54 0 0 0		
55 0 0 0		
56 0 0 0		
57 0 0 0		
58 0 0 0		
59 0 0 0		
60 0 0 0		
61 0 0 0		
62 0 0 0		
63 0 0 0		
64 0 0 0		
1 9	3.90	5507.55
2 6	1.73	5223.69
3 0 0 0		
4 0 0 0		
5 0 0 0		
6 0 0 0		
7 0 0 0		
8 0 0 0		
9 0 0 0		
10 0 0 0		
11 0 0 0		
12 0 0 0		
13 0 0 0		
14 0 0 0		
15 0 0 0		
16 0 0 0		
17 0 0 0		
18 0 0 0		
19 0 0 0		
20 0 0 0		
21 0 0 0		
22 0 0 0		
23 0 0 0		
24 0 0 0		
25 0 0 0		
26 0 0 0		
27 0 0 0		
28 0 0 0		
29 0 0 0		
30 0 0 0		
31 0 0 0		
32 0 0 0		
33 0 0 0		
34 0 0 0		
35 0 0 0		

36 0 0 0
37 0 0 0
38 0 0 0
39 0 0 0
40 0 0 0
41 0 0 0
42 0 0 0
43 0 0 0
44 0 0 0
45 0 0 0
46 0 0 0
47 0 0 0
48 0 0 0
49 0 0 0
50 0 0 0
51 0 0 0
52 0 0 0
53 0 0 0
54 0 0 0
55 0 0 0
56 0 0 0
57 0 0 0
58 0 0 0
59 0 0 0
60 0 0 0
61 0 0 0
62 0 0 0
63 0 0 0
64 0 0 0
1 0 0 0
2 0 0 0
3 0 0 0
4 0 0 0
5 0 0 0
6 0 0 0
7 0 0 0
8 0 0 0
9 0 0 0
10 0 0 0
11 0 0 0
12 0 0 0
13 0 0 0
14 0 0 0
15 0 0 0
16 0 0 0
17 0 0 0
18 0 0 0
19 0 0 0
20 0 0 0
21 0 0 0
22 0 0 0

23 0 0 0
24 0 0 0
25 0 0 0
26 0 0 0
27 0 0 0
28 0 0 0
29 0 0 0
30 0 0 0
31 0 0 0
32 0 0 0
33 0 0 0
34 0 0 0
35 0 0 0
36 0 0 0
37 0 0 0
38 0 0 0
39 0 0 0
40 0 0 0
41 0 0 0
42 0 0 0
43 0 0 0
44 0 0 0
45 0 0 0
46 0 0 0
47 0 0 0
48 0 0 0
49 0 0 0
50 0 0 0
51 0 0 0
52 0 0 0
53 0 0 0
54 0 0 0
55 0 0 0
56 0 0 0
57 0 0 0
58 0 0 0
59 0 0 0
60 0 0 0
61 0 0 0
62 0 0 0
63 0 0 0
64 0 0 0
1 0 0 0
2 0 0 0
3 0 0 0
4 0 0 0
5 0 0 0
6 0 0 0
7 0 0 0
8 0 0 0
9 0 0 0

10 000
11 000
12 000
13 000
14 000
15 000
16 000
17 000
18 000
19 000
20 000
21 000
22 000
23 000
24 000
25 000
26 000
27 000
28 000
29 000
30 000
31 000
32 000
33 000
34 000
35 000
36 000
37 000
38 000
39 000
40 000
41 000
42 000
43 000
44 000
45 000
46 000
47 000
48 000
49 000
50 000
51 000
52 000
53 000
54 000
55 000
56 000
57 000
58 000
59 000
60 000

61 0 0 0
62 0 0 0
63 0 0 0
64 0 0 0
1 0 0 0
2 0 0 0
3 0 0 0
4 0 0 0
5 0 0 0
6 0 0 0
7 0 0 0
8 0 0 0
9 0 0 0
10 0 0 0
11 0 0 0
12 0 0 0
13 0 0 0
14 0 0 0
15 0 0 0
16 0 0 0
17 0 0 0
18 0 0 0
19 0 0 0
20 0 0 0
21 0 0 0
22 0 0 0
23 0 0 0
24 0 0 0
25 0 0 0
26 0 0 0
27 0 0 0
28 0 0 0
29 0 0 0
30 0 0 0
31 0 0 0
32 0 0 0
33 0 0 0
34 0 0 0
35 0 0 0
36 0 0 0
37 0 0 0
38 0 0 0
39 0 0 0
40 0 0 0
41 0 0 0
42 0 0 0
43 0 0 0
44 0 0 0
45 0 0 0
46 0 0 0
47 0 0 0

48 0 0 0
49 0 0 0
50 0 0 0
51 0 0 0
52 0 0 0
53 0 0 0
54 0 0 0
55 0 0 0
56 0 0 0
57 0 0 0
58 0 0 0
59 0 0 0
60 0 0 0
61 0 0 0
62 0 0 0
63 0 0 0
64 0 0 0
1 0 0 0
2 0 0 0
3 0 0 0
4 0 0 0
5 0 0 0
6 0 0 0
7 0 0 0
8 0 0 0
9 0 0 0
10 0 0 0
11 0 0 0
12 0 0 0
13 0 0 0
14 0 0 0
15 0 0 0
16 0 0 0
17 0 0 0
18 0 0 0
19 0 0 0
20 0 0 0
21 0 0 0
22 0 0 0
23 0 0 0
24 0 0 0
25 0 0 0
26 0 0 0
27 0 0 0
28 0 0 0
29 0 0 0
30 0 0 0
31 0 0 0
32 0 0 0
33 0 0 0
34 0 0 0

35 0 0 0
36 0 0 0
37 0 0 0
38 0 0 0
39 0 0 0
40 0 0 0
41 0 0 0
42 0 0 0
43 0 0 0
44 0 0 0
45 0 0 0
46 0 0 0
47 0 0 0
48 0 0 0
49 0 0 0
50 0 0 0
51 0 0 0
52 0 0 0
53 0 0 0
54 0 0 0
55 0 0 0
56 0 0 0
57 0 0 0
58 0 0 0
59 0 0 0
60 0 0 0
61 0 0 0
62 0 0 0
63 0 0 0
64 0 0 0

Fichero TIERRA_R_64.txt

1	100013989	0	0
2	1670700	3.0984635	6283.0758500
3	13956	3.05525	12566.15170
4	3084	5.1985	77713.7715
5	1628	1.1739	5753.3849
6	1576	2.8469	7860.4194
7	925	5.453	11506.770
8	542	4.564	3930.210
9	472	3.661	5884.927
10	346	0.964	5507.553
11	329	5.900	5223.694
12	307	0.299	5573.143
13	243	4.273	11790.629
14	212	5.847	1577.344
15	186	5.022	10977.079
16	175	3.012	18849.228

17 110	5.055	5486.778
18 98	0.89	6069.78
19 86	5.69	15720.84
20 86	1.27	161000.69
21 65	0.27	17260.15
22 63	0.92	529.69
23 57	2.01	83996.85
24 56	5.24	71430.70
25 49	3.25	2544.31
26 47	2.58	775.52
27 45	5.54	9437.76
28 43	6.01	6275.96
29 39	5.36	4694.00
30 38	2.39	8827.39
31 37	0.83	19651.05
32 37	4.90	12139.55
33 36	1.67	12036.46
34 35	1.84	2942.46
35 33	0.24	7084.90
36 32	0.18	5088.63
37 32	1.78	398.15
38 28	1.21	6286.60
39 28	1.90	6279.55
40 26	4.59	10447.39
41 0 0 0		
42 0 0 0		
43 0 0 0		
44 0 0 0		
45 0 0 0		
46 0 0 0		
47 0 0 0		
48 0 0 0		
49 0 0 0		
50 0 0 0		
51 0 0 0		
52 0 0 0		
53 0 0 0		
54 0 0 0		
55 0 0 0		
56 0 0 0		
57 0 0 0		
58 0 0 0		
59 0 0 0		
60 0 0 0		
61 0 0 0		
62 0 0 0		
63 0 0 0		
64 0 0 0		
1 103019	1.107490	6283.075850
2 1721	1.0644	12566.1517
3 702	3.142	0

4 32	1.02	18849.23
5 31	2.48	5507.55
6 25	1.32	5223.69
7 18	1.42	1577.34
8 10	5.91	10977.08
9 9	1.42	6275.96
10 9	0.27	5486.78
11 0 0 0		
12 0 0 0		
13 0 0 0		
14 0 0 0		
15 0 0 0		
16 0 0 0		
17 0 0 0		
18 0 0 0		
19 0 0 0		
20 0 0 0		
21 0 0 0		
22 0 0 0		
23 0 0 0		
24 0 0 0		
25 0 0 0		
26 0 0 0		
27 0 0 0		
28 0 0 0		
29 0 0 0		
30 0 0 0		
31 0 0 0		
32 0 0 0		
33 0 0 0		
34 0 0 0		
35 0 0 0		
36 0 0 0		
37 0 0 0		
38 0 0 0		
39 0 0 0		
40 0 0 0		
41 0 0 0		
42 0 0 0		
43 0 0 0		
44 0 0 0		
45 0 0 0		
46 0 0 0		
47 0 0 0		
48 0 0 0		
49 0 0 0		
50 0 0 0		
51 0 0 0		
52 0 0 0		
53 0 0 0		
54 0 0 0		

55 0 0 0			
56 0 0 0			
57 0 0 0			
58 0 0 0			
59 0 0 0			
60 0 0 0			
61 0 0 0			
62 0 0 0			
63 0 0 0			
64 0 0 0			
1 4359	5.7846	6283.0758	
2 124	5.579	12566.152	
3 12	3.14	0	
4 9	3.63	77713.77	
5 6	1.87	5573.14	
6 3	5.47	18849.23	
7 0 0 0			
8 0 0 0			
9 0 0 0			
10 0 0 0			
11 0 0 0			
12 0 0 0			
13 0 0 0			
14 0 0 0			
15 0 0 0			
16 0 0 0			
17 0 0 0			
18 0 0 0			
19 0 0 0			
20 0 0 0			
21 0 0 0			
22 0 0 0			
23 0 0 0			
24 0 0 0			
25 0 0 0			
26 0 0 0			
27 0 0 0			
28 0 0 0			
29 0 0 0			
30 0 0 0			
31 0 0 0			
32 0 0 0			
33 0 0 0			
34 0 0 0			
35 0 0 0			
36 0 0 0			
37 0 0 0			
38 0 0 0			
39 0 0 0			
40 0 0 0			
41 0 0 0			

42 0 0 0		
43 0 0 0		
44 0 0 0		
45 0 0 0		
46 0 0 0		
47 0 0 0		
48 0 0 0		
49 0 0 0		
50 0 0 0		
51 0 0 0		
52 0 0 0		
53 0 0 0		
54 0 0 0		
55 0 0 0		
56 0 0 0		
57 0 0 0		
58 0 0 0		
59 0 0 0		
60 0 0 0		
61 0 0 0		
62 0 0 0		
63 0 0 0		
64 0 0 0		
1 145	4.273	6283.076
2 7	3.92	12566.15
3 0 0 0		
4 0 0 0		
5 0 0 0		
6 0 0 0		
7 0 0 0		
8 0 0 0		
9 0 0 0		
10 0 0 0		
11 0 0 0		
12 0 0 0		
13 0 0 0		
14 0 0 0		
15 0 0 0		
16 0 0 0		
17 0 0 0		
18 0 0 0		
19 0 0 0		
20 0 0 0		
21 0 0 0		
22 0 0 0		
23 0 0 0		
24 0 0 0		
25 0 0 0		
26 0 0 0		
27 0 0 0		
28 0 0 0		

29 0 0 0
30 0 0 0
31 0 0 0
32 0 0 0
33 0 0 0
34 0 0 0
35 0 0 0
36 0 0 0
37 0 0 0
38 0 0 0
39 0 0 0
40 0 0 0
41 0 0 0
42 0 0 0
43 0 0 0
44 0 0 0
45 0 0 0
46 0 0 0
47 0 0 0
48 0 0 0
49 0 0 0
50 0 0 0
51 0 0 0
52 0 0 0
53 0 0 0
54 0 0 0
55 0 0 0
56 0 0 0
57 0 0 0
58 0 0 0
59 0 0 0
60 0 0 0
61 0 0 0
62 0 0 0
63 0 0 0
64 0 0 0
1 4
2 0 0 0
3 0 0 0
4 0 0 0
5 0 0 0
6 0 0 0
7 0 0 0
8 0 0 0
9 0 0 0
10 0 0 0
11 0 0 0
12 0 0 0
13 0 0 0
14 0 0 0
15 0 0 0

2.56

6283.08

16 0 0 0
17 0 0 0
18 0 0 0
19 0 0 0
20 0 0 0
21 0 0 0
22 0 0 0
23 0 0 0
24 0 0 0
25 0 0 0
26 0 0 0
27 0 0 0
28 0 0 0
29 0 0 0
30 0 0 0
31 0 0 0
32 0 0 0
33 0 0 0
34 0 0 0
35 0 0 0
36 0 0 0
37 0 0 0
38 0 0 0
39 0 0 0
40 0 0 0
41 0 0 0
42 0 0 0
43 0 0 0
44 0 0 0
45 0 0 0
46 0 0 0
47 0 0 0
48 0 0 0
49 0 0 0
50 0 0 0
51 0 0 0
52 0 0 0
53 0 0 0
54 0 0 0
55 0 0 0
56 0 0 0
57 0 0 0
58 0 0 0
59 0 0 0
60 0 0 0
61 0 0 0
62 0 0 0
63 0 0 0
64 0 0 0
1 0 0 0
2 0 0 0

3 0 0 0
4 0 0 0
5 0 0 0
6 0 0 0
7 0 0 0
8 0 0 0
9 0 0 0
10 0 0 0
11 0 0 0
12 0 0 0
13 0 0 0
14 0 0 0
15 0 0 0
16 0 0 0
17 0 0 0
18 0 0 0
19 0 0 0
20 0 0 0
21 0 0 0
22 0 0 0
23 0 0 0
24 0 0 0
25 0 0 0
26 0 0 0
27 0 0 0
28 0 0 0
29 0 0 0
30 0 0 0
31 0 0 0
32 0 0 0
33 0 0 0
34 0 0 0
35 0 0 0
36 0 0 0
37 0 0 0
38 0 0 0
39 0 0 0
40 0 0 0
41 0 0 0
42 0 0 0
43 0 0 0
44 0 0 0
45 0 0 0
46 0 0 0
47 0 0 0
48 0 0 0
49 0 0 0
50 0 0 0
51 0 0 0
52 0 0 0
53 0 0 0

54 0 0 0
55 0 0 0
56 0 0 0
57 0 0 0
58 0 0 0
59 0 0 0
60 0 0 0
61 0 0 0
62 0 0 0
63 0 0 0
64 0 0 0

UNIVERSITAT ROVIRA I VIRGILI

ANÁLISIS GEOMÉTRICO Y ASTRONÓMICO EN LA CATEDRAL DE CHARTRES

Juan Miguel Seguí Colomar

CAPÍTULO V

CATASTERISMOS Y CONSTELACIONES RELACIONADAS CON LA CATEDRAL DE CHARTRES

La palabra "catasterismo" es un cultismo tomado del griego καταστερισμοί (κατά (encima, abajo) + ἀστήρ (estrella, astro)), cuyo significado es: *colocado entre las estrellas*. Más concretamente, se llama catasterismo a la transformación de un personaje de la mitología griega en una estrella o en una constelación. Este término procede del título de un libro de Eratóstenes de Cirene, en el que describía algunas de dichas transformaciones. Sin embargo, nosotros usamos la palabra *catasterismo* en un sentido general, independientemente de si nos referimos a la cultura helenística o a cualquier otra. Así llamaremos catasterizar a: transformar a los miembros de su panteón de deidades en sus correspondientes astros, cuerpos celestes o estructuras astrales, de la esfera celeste.

En el siguiente capítulo mostraremos que hay ciertas estrellas y constelaciones del firmamento que han sido catasterismos desde hace 5 milenios y tienen relación directa objetiva con la Catedral de Nuestra Señora de Chartres.

UNIVERSITAT ROVIRA I VIRGILI

ANÁLISIS GEOMÉTRICO Y ASTRONÓMICO EN LA CATEDRAL DE CHARTRES

Juan Miguel Seguí Colomar

5.1 Concepto de “elección objetiva y no especulativa de las estrellas en concurso”.

Existen alrededor de 5000 estrellas de magnitud aparente menor de $v=6$, visibles a simple vista por el ojo humano sin necesidad de aparatos ópticos; en noche clara y sin contaminación luminosa si se quieren observar aquellas que tienen magnitud entre 5 y 6.

En la edad Media, el mundo occidental solo reconocía las 48 constelaciones recogidas en el *Almagesto* de Ptolomeo (85-165 CE), concretamente en el capítulo 12 (p. 38–169) y capítulo 13 (p. 27–50) de *Syntaxis Mathematica* de Ptolomeo [Ptolemy 2nd century CE]. Ptolomeo en su *Syntaxis* recoge movimientos de estrellas, con la precesión de equinoccios; y genera un catálogo de 1028 estrellas descritas según su posición en las constelaciones.

No es verdad que esas 5000 estrellas visibles estén repartidas sobre la bóveda celeste de manera uniforme, existen huecos y acumulaciones completamente irregulares; y más aún si solo se consideran las 1028 estrellas del listado del *Almagesto*. Por eso, no son ciertas las afirmaciones: “siempre hay una estrella alineada con lo que se quiera”, “siempre hay una estrella que pasa por el sitio que se quiera”, “mirando en una dirección concreta a lo largo de una noche siempre hay una estrella que es observada”, “fijado un punto A en un suelo y un punto O de una pared por el que proyectar, a lo largo de una noche siempre hay una estrella que se proyecta sobre A por el punto O”.

Ahora bien, a pesar de lo dicho en el párrafo anterior, es cierto que para llegar a un teorema que relacione la geometría de una construcción arquitectónica con una estrella, o varias estrellas, necesariamente la elección, de tal o tales estrellas, ha de ser completamente objetiva y no arbitraria en relación a esa construcción.

Dicho de otra forma; afirmar directamente que existe correlación entre unos elementos arquitectónicos de una construcción –en nuestro caso la Catedral de Chartres– y una estrella: es cosa sin enjundia. Esto es así porque –aunque solo tengamos en cuenta las 1028 estrellas del Almagesto repartidas de manera no uniforme en la esfera celeste– podría ser pura coincidencia el concurso geométrico de la estrella con los elementos arquitectónicos. Por ello, para que el concurso de tal estrella no sea algo irrelevante generado por simple coincidencia, se requiere que la estrella esté fijada de antemano de forma objetiva y no arbitraria en relación con la construcción tratada. *Para poder obtener un teorema geométrico-astronómico-arquitectónico con relevancia, objetivo y no de pura coincidencia, es rigurosamente necesario y obligatorio que antes de cualquier elección de los elementos geométricos de la Catedral de Chartres quede determinada de manera objetiva, no arbitraria, y de forma previa, la estrella –o estrellas– que debe ser la que entre en concurso.* Cualquier cosa que viole este principio echará por tierra el interés y la relevancia de toda correlación astronómica que se presente –a causa de las lógicas dudas de ser la correlación una pura coincidencia, a pesar incluso de la no uniformidad de la distribución de las pocas estrellas visibles en la bóveda celeste; e incluso, como hemos

dicho, si solo se tiene en cuenta la menor cantidad compuesta por las listadas en el *Almagesto*–.

5.2 Catasterismos.

Tal como indica el título de la presente tesis: "Análisis geométrico y astronómico en la Catedral de Chartres", pretendemos mostrar correlaciones que existen entre parámetros arquitectónicos de la importante edificación de Chartres y ciertos cuerpos celestes. Ahora bien, –a causa de ser una edificación construida y dedicada específicamente a culto deídico– no cabe disociar su construcción de las deidades a las cuales la humanidad ha rendido tal culto.

Es bien sabido que la humanidad a lo largo de la historia ha erigido construcciones religiosas y monumentales con la intención de: llamada, aclamación, honra, devoción, sumisión o pábulo, de sus deidades. *Catasterizar* –o sea, transformar a los miembros de su panteón de deidades en sus correspondientes astros, cuerpos celestes o estructuras astrales, de la esfera celeste– fue algo común en las diferentes civilizaciones. Es conocido que la interacción de las civilizaciones de oriente próximo generó interrelación e influencia en los panteones de deidades de las diferentes religiones –islámica, cristiana, judía, romana, griega, asiria, sumeria, egipcia–, siendo la egipcia una de las más antiguas. Y si la religión griega claramente catasterizaba, igualmente lo hacía la egipcia milenios antes.

Las relaciones astronómicas con las construcciones sagradas no obedecían solamente al interés por comprender la naturaleza, sino que implicaban la posibilidad de comunicarse con las divinidades y entender sus designios. La disposición de los edificios sagrados reflejaba el orden cósmico, por esta razón muchos templos de la antigüedad se encuentran alineados en correspondencia con el desplazamiento de los astros en la bóveda celeste. Esta relación entre lo terrenal y lo celestial, la podemos encontrar en múltiples estudios arqueo-astronómicos realizados en las últimas décadas, como por ejemplo: las relaciones astronómicas con las arquitecturas Mayas [Ashmore y Sabloff, 2003; Aveni y Horst, 1978-1986; Šprajc y Sánchez, 2012]; la demostración empírica del uso del monumento de Stonehenge como un previsor de eclipses [Hoyle, 1966]; la relación entre la orientación de las estructuras de los templos griegos con ciertas constelaciones [Hannah, 2013]; e incluso, teorías que relacionan la concreta ubicación geográfica de once catedrales Notre-Dame francesas con la constelación de Virgo [Charpentier, 1969] así como la correlación entre el emplazamiento de las 3 pirámides de la meseta de Giza y la ubicación de las tres estrellas centrales del cinturón de Orión [Bauval y Gilbert, 1994]. Si bien, estos dos últimos ejemplos forman parte de la llamada “bibliografía gris”, o sea que son de escasa calidad y de muy dudoso rigor científico.

Como veremos más adelante, el trabajo que presentamos se basa en la proyección de las órbitas diarias de ciertas estrellas a través del centro del rosetón de la fachada principal de la Catedral Basílica de Nuestra Señora de Chartres, trazando así las trayectorias de esas estrellas sobre

la planta de la catedral. Estas trayectorias las calcularemos en la época astronómica *J1200* (correspondiente al periodo en que la catedral fue construida). Llegaremos a mostrar que el laberinto, el transepto, el ábside, el ambulatorio, el horizonte y el rosetón principal concuerdan con precisión con el patrón geométrico de ciertas estrellas, las cuales constituyen el catasterismo de antiguas diosas vírgenes, y en especial de la deidad egipcia Isis. La elección, de las estrellas que constituyen este catasterismo –tal como hemos dicho anteriormente– ha de ser completamente objetiva y no arbitraria. Y por supuesto, hemos de tener en cuenta en todos los cálculos los movimientos propios de las estrellas, así como el movimiento de precesión del eje terrestre; y mostraremos que las correlaciones se mantenían a lo largo del periodo de construcción de la catedral.

Katasterismos es un libro helenístico escrito en Alejandría y atribuido a Eratóstenes [*Katasterismos* de Eratóstenes]. Se trata de un libro que describe los orígenes mitológicos de las estrellas y constelaciones tal como eran interpretados por la cultura helenística. Sin embargo, como hemos ya dicho, nosotros usamos la palabra *catasterismo* en un sentido general, independientemente de si nos referimos a la cultura helenística o a cualquier otra. Y como hemos dicho, nos retrotraemos considerando el panteón deídico de la cultura egipcia por ser esta de las más antiguas y tremendamente influyente en las posteriores.

De entre los catasterismos egipcios encontramos, por ejemplo, que de entre las 48 constelaciones que reconoce el *Almagesto*, la constelación del Pez Austral (*PsA*) está relacionada con la deidad egipcia Isis por ser

la representación del pez que la salvó de morir. También la constelación de Escorpio (*Sco*) está relacionada con Isis, los escorpiones eran protectores de la vida de Isis. Igualmente, la constelación de Orión (*Ori*) está relacionada con Isis por ser la representación de la deidad Osiris – hermano y esposo de Isis, y a veces también se le atribuye a esta constelación la representación de su hijo Horus–. Así mismo, la constelación de Lepus (*Lep*) se relaciona con Isis por ser representación de Seth –hermano de Isis– [Hart, 1990; Baines, 1991; Wilkinson, 2003]. Ahora bien, aunque estos catasterismos están relacionados con Isis, ninguno de ellos representa a la diosa. Veamos seguidamente porqué acabamos de aludir a la deidad egipcia Isis diosa-vaca de la maternidad (Figura 5a).

5.3 Notre-Dame = Virgen María = Isis.

Uno de los edificios religiosos más importantes del Cristianismo, y también probablemente de los más importantes de todos los cultos deídicos, es nuestro objeto de estudio: la Catedral Basílica de Nuestra Señora de Chartres (Basilique Cathédrale Notre-Dame de Chartres), también conocida como Catedral de la Asunción de Nuestra Señora (Cathédrale de l'Assomption de Notre-Dame). La catedral está dedicada a la devoción de la deidad Notre-Dame (Nuestra Señora), la cual es la Virgen María cristiana, madre de Jesús.

Ahora bien, el culto a Nuestra Señora, no es solo propio del Cristianismo, si no que está asociado con las características de otras

vírgenes diosas de la maternidad. Así, por ejemplo, se dice que existen indicios de que en el lugar que hoy ocupa la Catedral de Chartres existía desde tiempos anteriores a la era cristiana un altar (y según algunos autores una gruta) dedicado a la Diosa Madre de la mitología druídica, la cual data entre el siglo VII y XII antes de la era cristiana.

Sea o no cierto lo anterior referido a los druidas, no cabe duda del hecho que el origen del culto a la virgen diosa de la maternidad procede ya del 2400 antes de Cristo de la antigua religión egipcia. Muy posteriormente, en la religión romana católica, Notre-Dame (Nuestra señora) es referida como Virgen maría desde tiempos del Imperio Romano. Las características de la Virgen María la conectan directamente con Isis, la vaca-diosa egipcia de la maternidad –hermana y esposa de la deidad Osiris y madre de la deidad Horus [Campbell, 1965; Plutarch, 1936; Wallis, 1904]–. Muchos autores identifican la una con la otra, y además consideran de gran importancia el legado e influencia de la diosa egipcia Isis en la civilización europea. Así, por ejemplo, en 1094, el prominente egiptólogo E. A. Wallis, [Wallis, 1904; p. 220–221] describió importantes analogías entre María e Isis (ambas vírgenes y ambas madres de un hijo de forma inmaculada). Igualmente en 1964, el mitólogo J. Campbell [Campbell, 1965; p. 41–91] comentó las similitudes entre ambas deidades. De todas formas, el estudio de las similitudes entre Isis y María, y la influencia del culto de Isis en el mundo Greco-Romano y en la religión cristiana está fuera del objetivo del presente trabajo; y además pensamos que este asunto ha sido ya discutido con profundidad por los investigadores que hemos mencionado y por otros muchos [Witt, 1971; Dunand, 1973; Tran,

1973]. Todos ellos están de acuerdo que las dos deidades son la misma, o como mínimo, todos resaltan que “las similitudes entre Isis y la Virgen María = Nuestra Señora = Notre Dame, son tantas y tan cercanas que carece de sentido que sea algo accidental o mera coincidencia” [Curls, 2000; Wallis, 1904] (Figura 5b y Figura 5c).

Con esto tenemos el enlace objetivo, no especulativo, histórico y religioso: Catedral de Notre-Dame de Chartres – Nuestra Señora – Virgen María – Deidad egipcia Isis diosa-vaca de la maternidad. O más brevemente: Catedral de Chartres – Isis.

5.4 Catasterismos de Isis, deidad egipcia virgen diosa-vaca de la maternidad.

Hemos comentado anteriormente la relación de las constelaciones de Pez Austral (*PsA*), Escorpio (*Sco*), Orión (*Ori*) y Lepus (*Lep*), con Isis. Pero solo 3 de las 48 constelaciones recogidas en la *Syntaxis* de Ptolomeo –únicas reconocidas en la Edad media por el Mundo occidental– han sido representaciones directas de la deidad Isis: la constelación de Tauro (*Tau*), la constelación del Can Mayor (*CMa*) y la constelación de Virgo (*Vir*) [Allen, 1889; Bayer, 1603; Eratóstenes 1975]. Más adelante comentaremos con más detalle estos catasterismos que representan a Isis.

Hacemos aquí un pequeño inciso notando que las constelaciones citadas son de las más antiguas; concretamente las de Tauro y Escorpio

son ya existentes desde el 4000 BCE en Mesopotamia. Además, todas están formadas por estrellas identificadas desde muy antaño como Fomalhaut (*α PsA*) que fue usada en rituales de la antigua Persia en el 3000 BCE [Allen, 1889].

Las tres constelaciones que hemos nombrado como aquellas que representan a la deidad Isis, poseen ricos catasterismos tanto helénicos como egipcios; sin embargo, de manera muy escueta y por tanto fraudulenta, pues no nos dicen realmente qué representaban, son: *Tau* un toro, *CMa* un perro y *Vir* una virgen. Esta simplificación (toro, perro, virgen) no aporta casi nada al verdadero significado del catasterismo. En cualquier caso las tres juntas contienen un total de 142 (*Tau*) + 87 (*CMa*) + 97 (*Vir*) = 326 estrellas visibles a simple vista sin instrumentos ópticos.

Pero de estas 326 estrellas determinadas por las constelaciones de Isis, solo unas pocas simbolizan directamente a la deidad, o si se quiere, solo unas pocas simbolizan a una antigua diosa virgen. Estas estrellas son aquellas que representan directamente el catasterismo global de la constelación en una sola estrella, y aquellas que representan directamente a una virgen diosa de la maternidad (virginidad y maternidad, son características básicas de Isis). Por tanto, tenemos de manera objetiva las siguientes representaciones más profundas y no fraudulentas de los catasterismos citando los prestigiosos textos donde el lector interesado puede encontrar las explicaciones:

- **Taurus:** Esta constelación es catasterismo de Isis (y también de su esposo Osiris dios toro) [Allen, 1899; p. 123, 381] la egipcia diosa-vaca de la maternidad ([Wallis, 194; p. 202–221], [Campbell, 1964; p. 42–91], [Plutarch. 1st century BCE, p. 7–191]). Esta constelación fue también conocida como Isis, y *Bubulum caput* (cabeza de baca) (Bayer [16, *Tabula Vigesima Tertia - Taurus*]). De entre las 142 estrellas visibles de Taurus, ninguna de ellas es catasterismo por sí sola de una virgen diosa de la maternidad, pero sí hay una de ellas que representa por sí sola al toro, o la vaca, se trata de: **Elthor** (λ Tau). Su nombre es árabe y significa ‘el toro’. Bayer además recoge esta estrella en su *Tabula Vigesima Tertia* de *Uranometria* [Bayer, 1603] tal como se la conocía en el mundo romano: en latín era llamada *Inpectore*, que quiere decir ‘en el pecho’; la estrella está localizada anatómicamente en el centro del toro, en el centro del pecho del toro, y también se la encuentra geométricamente centrada en la representación típica de la Edad media, representación recogida por Bayer. Es la quinta estrella más brillante de toda la constelación de 142 estrellas y tiene magnitud $v = 3.41$ (*Spica* es 9.46 más brillante que *Elthor*) (Figura 5d y Figura 5e).

Más adelante a causa de la correlación que mostraremos entre el laberinto de la Catedral de Chartres, el rosetón principal y *Elthor*, hablaremos con más profundidad sobre el catasterismo de la constelación de Tauro.

- **Canis Major:** Esta constelación es catasterismo de Isis [Eratosthenes. 2nd century BCE; p. 59–60], [Allen, 1899; p. 117–124]. Entre las 87 estrellas visibles en *Canis Major* (nombre latino ‘gran perro’), hay tres estrellas que representan a antiguas vírgenes, de las cuales una de ellas además –como *Eltor* en el caso de *Tauro*– representa al catasterismo de toda la constelación un ‘perro’. Estas tres estrellas son: **Isis** (γ CMa) (también conocida por su nombre árabe *Muliphein*, que significa ‘el líder’), **Adhara** (ϵ CMa) y **Sirio** (α CMa). La *Tabula Trigesima Octava - Canis Maior* de *Uranometria* [Bayer, 1603] nos localiza a Isis en la frente de perro. Isis posee magnitud aparente de $v = 4.12$ (*Spica* es 18.20 veces más brillante que Isis). Adhara –cuyo nombre proviene del árabe *Adhārā*, y significa ‘vírgenes’ [Allen, 1899; p. 130]– está localizada en el centro del perro; y se trata de la segunda estrella más brillante de toda la constelación con magnitud $v = 1.50$ (*Spica* es 1.63 más brillante que Adhara). Finalmente, la estrella Sirio la tenemos localizada en el centro del hocico del perro; es también conocida como la ‘estrella perro’ representando en sí misma al catasterismo "perro", y además era catasterismo egipcio de Isis [Eratosthenes. 2nd century BCE; p. 59–60], [Campbell, 1964; p. 339], [Allen, 1899; p. 123–124], [Plutarch. 1st century BCE, p. 7–191]. Tiene esta estrella magnitud visual $v = -1.46$ (*Sirio* es 9.38 veces más brillante que *Spica*) (Figura 5f y Figura 5g).
- **Virgo:** Esta constelación es catasterismo de Isis; de facto ella es catasterismo de muchas antiguas diosas –todas ellas con influencias y relaciones entre sí– como: Atargatis, Ceres, Isis,

Erígone, Ishtar, Demeter, Dike, Tyche, Derceto ([Eratosthenes. 2nd century BCE, p. 40–41], [Allen, 1899; p. 460–466], [Bayer, 1603; *Tabula Vigesima Septima - Virgo*]). Pero aunque de manera global la constelación representa a diosas, solo una de las 97 estrellas visibles en *Virgo* (la virgen) representa de manera individual a una virgen. Esta estrella es *Erígone*, también conocida como **Spica** (*α Vir*), o como ‘la espiga de la Virgen’ [Allen, 1899; p. 466–467], [Bayer, 1603; *Tabula Vigesima Septima - Virgo*] (Figura 5h y Figura 5i).

Finalmente, de manera objetiva y no especulativa, lo anterior queda resumido como sigue:

De entre las 48 constelaciones reconocidas en el Mundo occidental en la Edad media –con 1028 estrellas listadas en el *Almagesto*–, solo tres representan a la diosa egipcia Isis, y de hecho a antiguas diosas vírgenes, y son: Taurus, Canis Major y Virgo. Estas tres constelaciones conforman un conjunto en la bóveda celeste de 326 estrellas visibles a simple vista sin aparatos ópticos. Y de entre estas 326 estrellas solo 5 están clásicamente relacionadas con Isis; por tanto, vía los antiguos catasterismos, la elección de estas estrellas no es especulativa, si no que es objetiva. En orden de declinación celeste estas estrellas son: *Elthor*, *Spica*, *Isis*, *Sirio* y *Adhara*. Estas estrellas, determinadas por sus antiguos catasterismos, son claramente visibles a simple vista; y todas ellas son bastante brillantes en relación a *Spica* (de magnitud aproximada a 1), o sea que las cinco están muy lejos de ser 102.8 veces más tenues que *Spica*.

5.5 Mitología griega y egipcia en la Constelación de Tauro.

Como hemos dicho, en el Capítulo VII mostraremos el alineamiento entre el laberinto de la Catedral de Chartres, el rosetón principal y *Elthor*; y por ello, ahora comentaremos con poco más el catasterismo de Isis dado por la constelación de Tauro.

Es conocido que gran parte de la influencia laberíntica en Occidente proviene del mito griego –bien conocido en la Edad Media– de Teseo y del Minotauro. Resumiendo la historia: de todos los hombres que entraron en el laberinto, donde el Rey Minos de Creta había confinado a Asterión el Minotauro –hijo de Pasifae–, solamente el príncipe Teseo de Atenas logró salir con vida gracias a la ayuda de Ariadna –hija de Minos– con su famoso ovillo de hilo. Más tarde, los romanos transportaron el concepto del laberinto a lo largo del Imperio, otorgándole un fuerte carácter protector e identificándolo con el mundo de los muertos como se percibe en la *Eneida de Virgilio*.

Ya hemos repetido que en las religiones antiguas las entidades como Zeus, el Minotauro y otros seres mitológicos han sido *catasterizados* a lo largo de la historia de la humanidad. En la mitología griega –heredera de la egipcia como casi todas las demás posteriores– la constelación de Tauro es el catasterismo del toro en el que el dios Zeus se transformó para seducir a Europa, mítica princesa fenicia cuyos tres hijos fueron Minos, el legendario Rey de Creta, Sarpedón y Radamantis; cerrándose

así, con el Rey Minos, el círculo mitológico relativo al laberinto y al “toro” con la citada historia del Minotauro (Figura 5j).

Dijimos que Tauro es una de las 48 constelaciones que en la Edad Media el mundo occidental reconocía, y que está formada por 142 estrellas visibles –magnitud visual $v \leq 6$, y todas ellas mostradas en la Figura 3–, entre las cuáles muchas eran bien conocidas en la Edad Media como *Aldebarán* (α *Tau*), *Elnath* (β *Tau*), *Ushakaron* (ξ *Tau*), etc. Ahora bien, insistimos en que la estrella *Elthor* (λ *Tau*) –cuyo nombre procede del árabe y significa “el toro”– es la única a la que se le atribuye el nombre de toda la constelación; de facto, es la única estrella del firmamento llamada *Toro*. Y Johann Bayer citó a *Elthor*, en su *Tabula Vigesima Tertia* de Uranometría, con el nombre latino “inpectore” que significa “en el pecho”, y la situó en el centro del pecho del Toro [Allen, 1899; Ptolemy 2nd century CE; Bayer, 1603]. En la misma *Tabula Vigesima Tertia* de Uranometría, Bayer nos muestra el resto de las más destacadas estrellas de Tauro, entre las cuáles por ejemplo: la citada *Aldebarán* –su nombre significa “la que sigue” porque se alza en el firmamento justo después de las Pléyades– catasterizando el ojo del toro, o *Ushakaron* –cuyo nombre significa “el vengador”– catasterizando el muslo de las patas del toro, etc. (Figura 4).

5.6 Enlaces generados por los catasterismos mostrados.

A modo de resumen del presente capítulo escribimos lo que sigue.

De manera objetiva, no especulativa, pues las elecciones no han sido arbitrarias si no que han sido dadas directamente por los catasterismos históricos, tenemos los enlaces histórico/religioso/astronómicos siguientes y previos a toda consideración de elementos arquitectónicos de la catedral de Chartres: Catedral de Notre-Dame de Chartres – Nuestra Señora – Virgen María – Deidad egipcia Isis diosa-vaca de la maternidad – Constelaciones Taurus, Canis Major y Virgo – Estrellas *Elthor*, *Spica*, *Isis*, *Sirio* y *Adhara* – Mito de Zeus, la constelación Taurus, Teseo, Minotauro y laberinto.

UNIVERSITAT ROVIRA I VIRGILI

ANÁLISIS GEOMÉTRICO Y ASTRONÓMICO EN LA CATEDRAL DE CHARTRES

Juan Miguel Seguí Colomar

Figuras relacionadas con el Capítulo V

Figura 5a. Entre los catasterismos egipcios encontramos cuatro constelaciones relacionadas con Isis. En la fila superior y de izquierda a derecha, presentamos: la constelación del Pez Austral (*PsA*) y la constelación de Escorpio (*Sco*). En la fila inferior y de izquierda a derecha, presentamos: la constelación de Orión (*Ori*) y la constelación de Lepus (*Lep*).

Figura 5b. Representación de Isis en el libro [Wallis, 1904; p. 203]: "The Goddess Isis".

Figura 5c. Representación de Isis en el libro [Wallis, 1904; p. 209]: "Isis in the Papyrus Swamps Buckling Horus".

Figura 5d. *Tabula Vigesima Tertia.TAVRVS.* from *Uranometria*, by Bayer. Universitätsbibliothek Heidelberg. Puede encontrarse públicamente en el enlace: <http://digi.ub.uniheidelberg.de/diglit/bayer1648/0076>.

Figura 5e. Figura de la constelación de Tauro de la web "International Astronomical Union". Puede descargarse públicamente en el enlace: www.iau.org/static/public/constellations/pdf/TAU.pdf

Figura 5f. *Tabula Vigesima Tertia.TAVRVS.* from *Uranometria*, by Bayer. Universitätsbibliothek Heidelberg. Puede encontrarse públicamente en el enlace: <http://digi.ub.uniheidelberg.de/diglit/bayer1648/0121>.

Figura 5g. Figura de la constelación de Canis Majoris de la web "International Astronomical Union". Puede descargarse públicamente en el enlace: www.iau.org/static/public/constellations/pdf/CMA.pdf

Figura 5h. *Tabula Vigesima Tertia.TAVRVS.* from *Uranometria*, by Bayer. Universitätsbibliothek Heidelberg. Puede encontrarse públicamente en el enlace: <http://digi.ub.uniheidelberg.de/diglit/bayer1648/0088>.

Figura 5i. Figura de la constelación de Virgo de la web "International Astronomical Union". Puede descargarse públicamente en el enlace: www.iau.org/static/public/constellations/pdf/VIR.pdf

Figura 5j. Reproducción gráfica de la historia de Teseo y el Minotauro del Maestro dei Cassoni Campana de 1510. Esta obra se localiza en el Museo del Petit Palais en Aviñón.

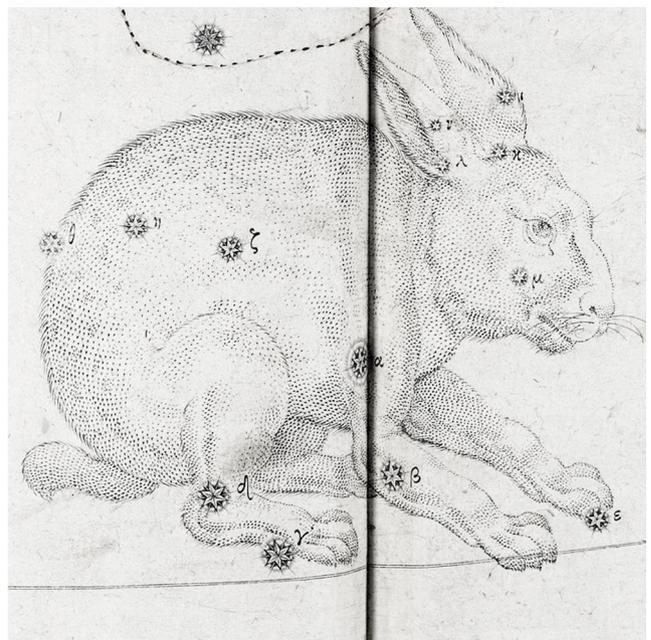
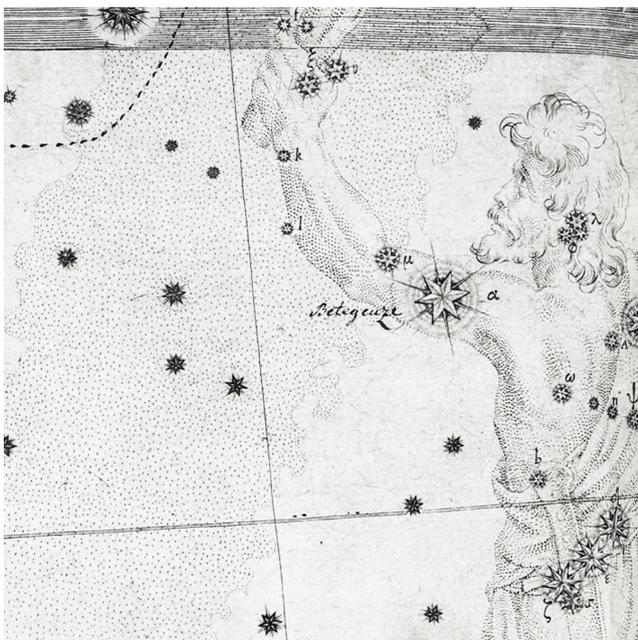
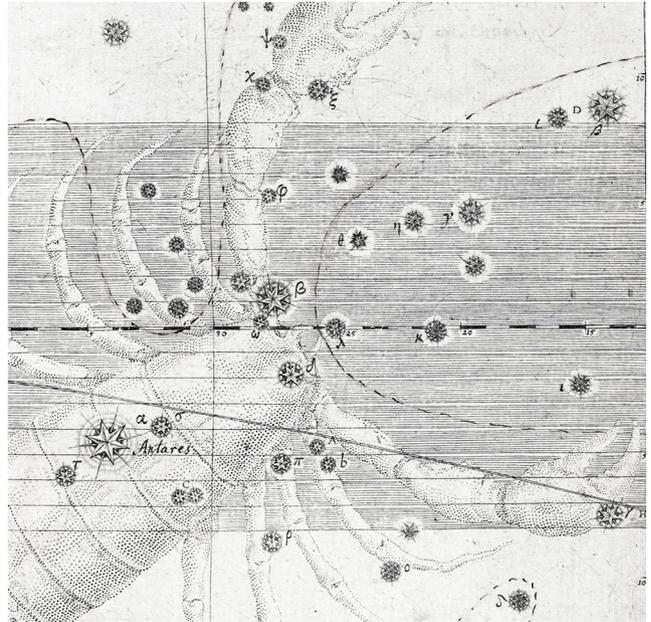
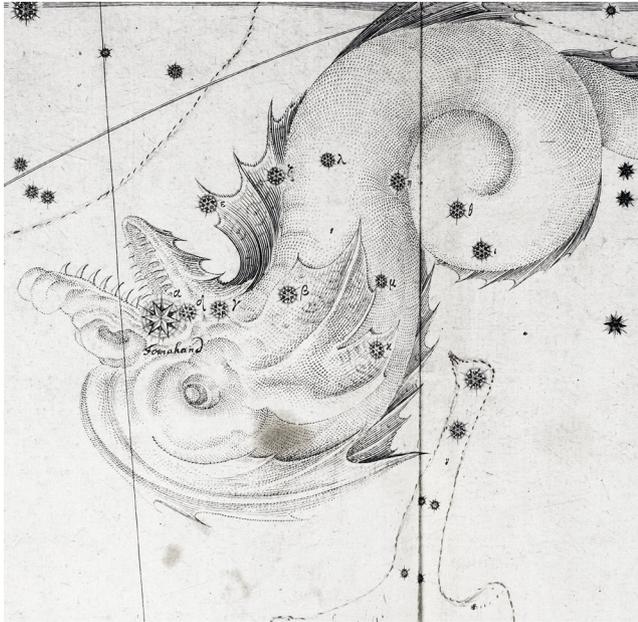


Figura 5a

UNIVERSITAT ROVIRA I VIRGILI

ANÁLISIS GEOMÉTRICO Y ASTRONÓMICO EN LA CATEDRAL DE CHARTRES

Juan Miguel Seguí Colomar

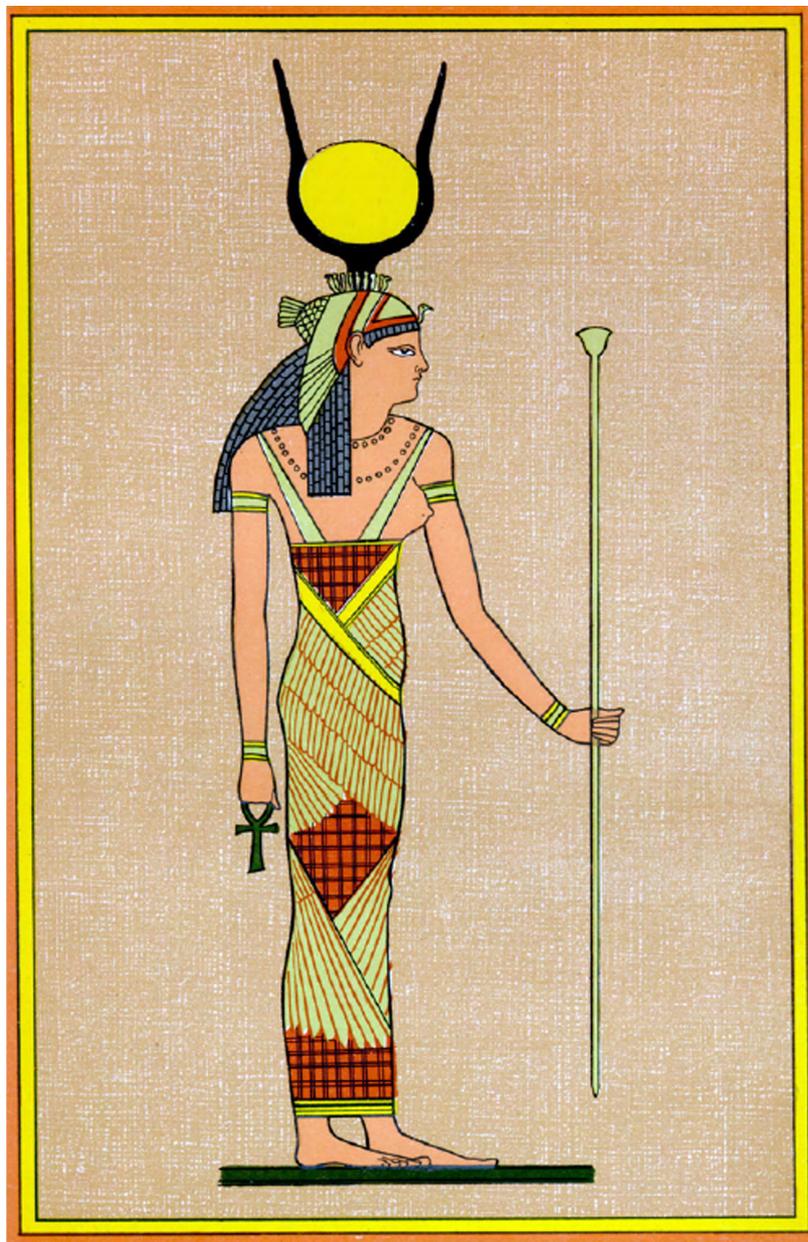


Figura 5b

UNIVERSITAT ROVIRA I VIRGILI

ANÁLISIS GEOMÉTRICO Y ASTRONÓMICO EN LA CATEDRAL DE CHARTRES

Juan Miguel Seguí Colomar

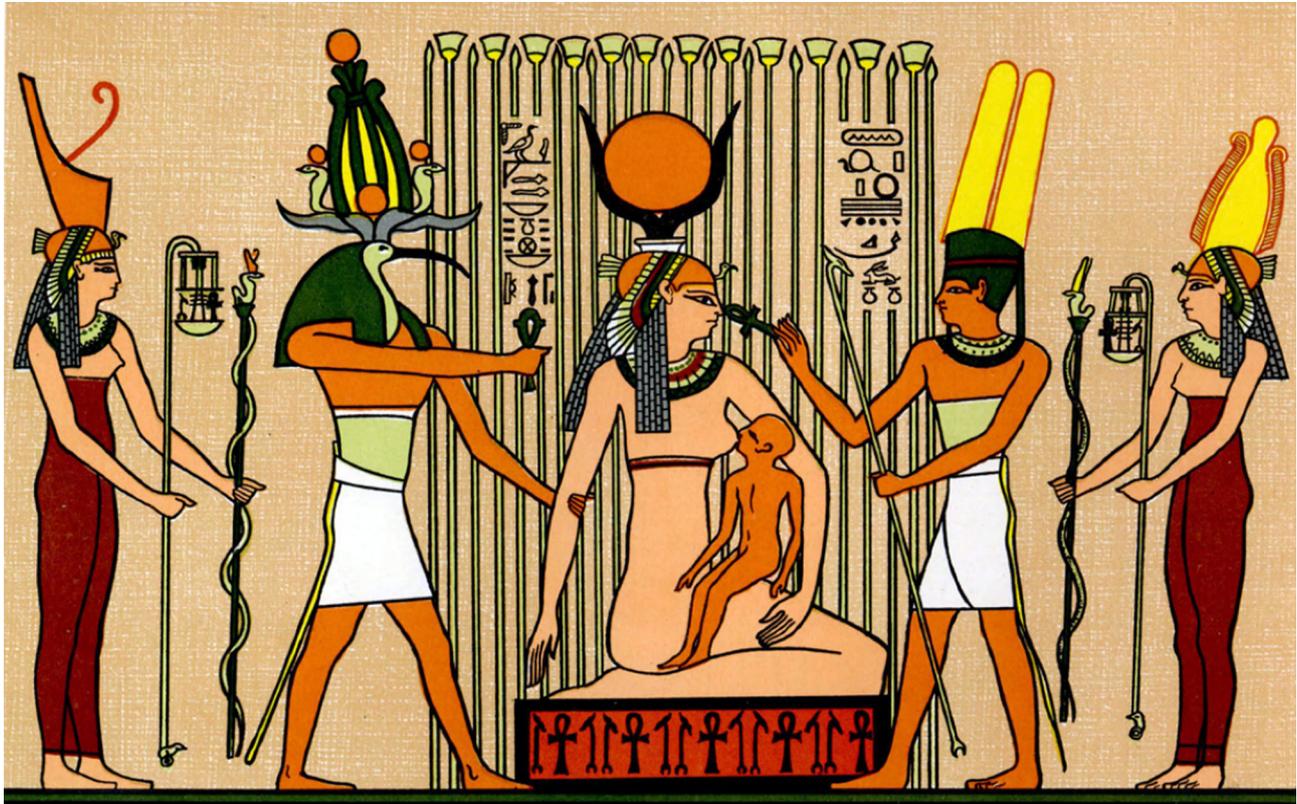


Figura 5c

UNIVERSITAT ROVIRA I VIRGILI

ANÁLISIS GEOMÉTRICO Y ASTRONÓMICO EN LA CATEDRAL DE CHARTRES

Juan Miguel Seguí Colomar

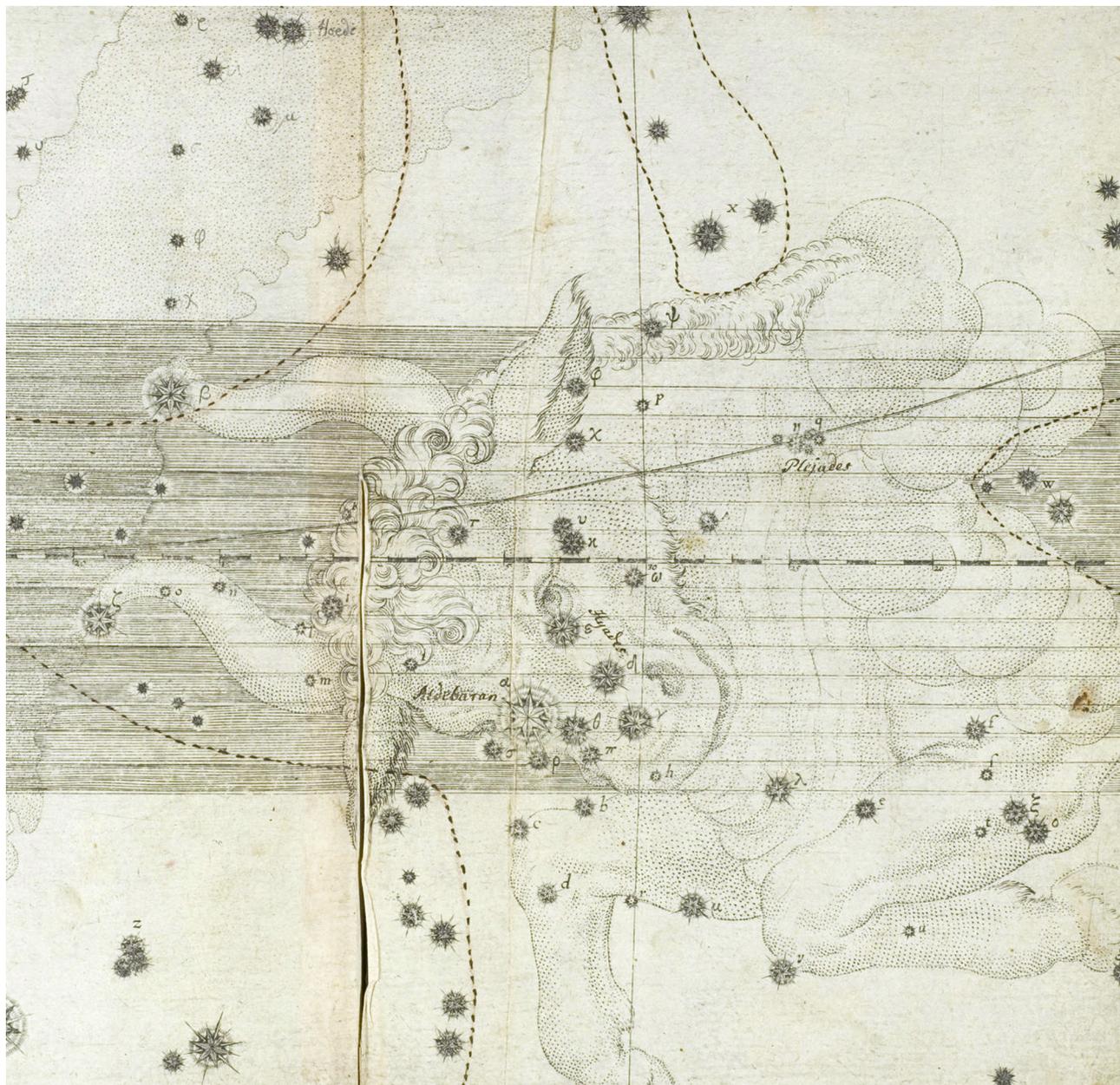


Figura 5d

UNIVERSITAT ROVIRA I VIRGILI

ANÁLISIS GEOMÉTRICO Y ASTRONÓMICO EN LA CATEDRAL DE CHARTRES

Juan Miguel Seguí Colomar

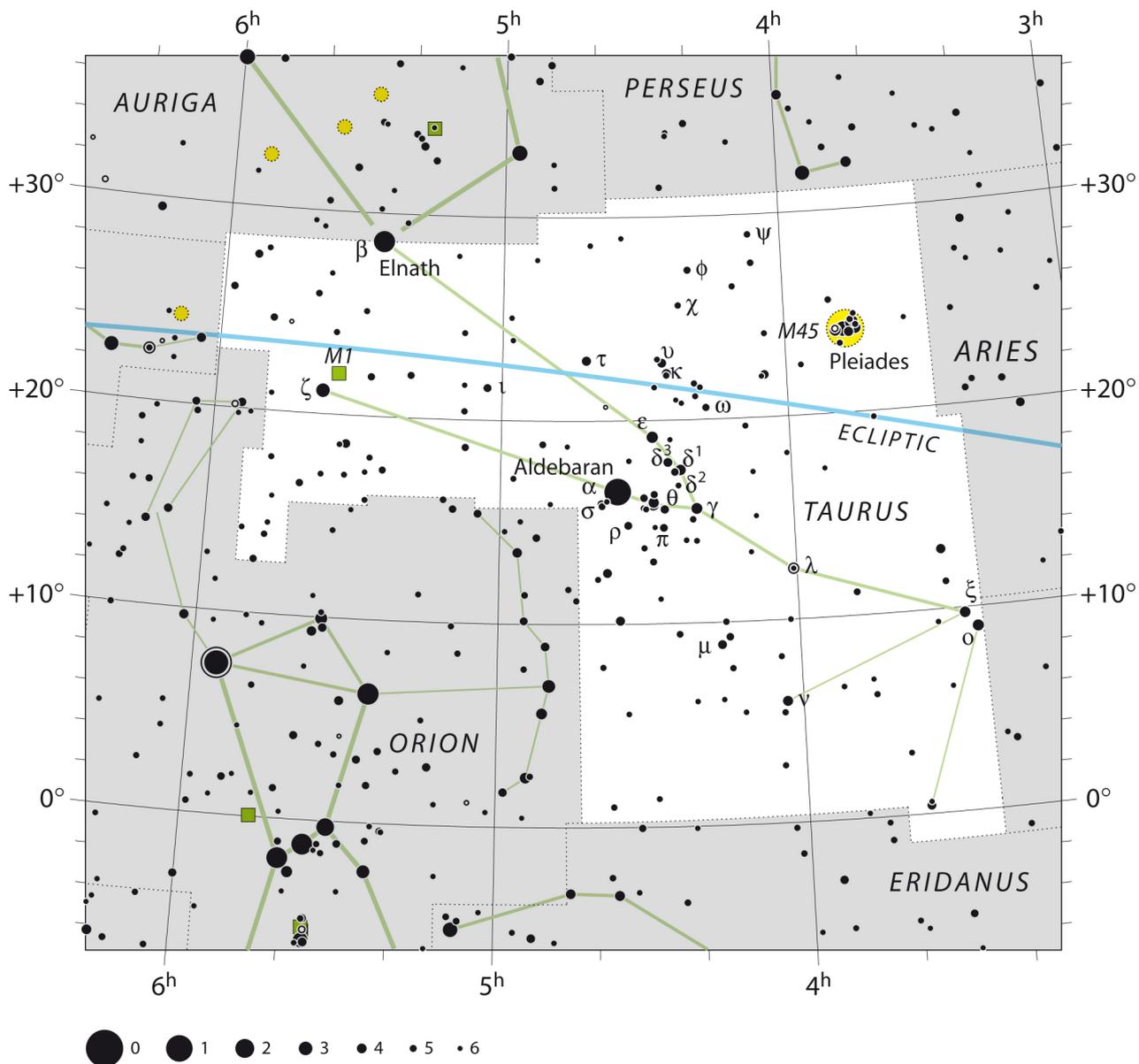


Figura 5e

UNIVERSITAT ROVIRA I VIRGILI

ANÁLISIS GEOMÉTRICO Y ASTRONÓMICO EN LA CATEDRAL DE CHARTRES

Juan Miguel Seguí Colomar



Figura 5f

UNIVERSITAT ROVIRA I VIRGILI

ANÁLISIS GEOMÉTRICO Y ASTRONÓMICO EN LA CATEDRAL DE CHARTRES

Juan Miguel Seguí Colomar

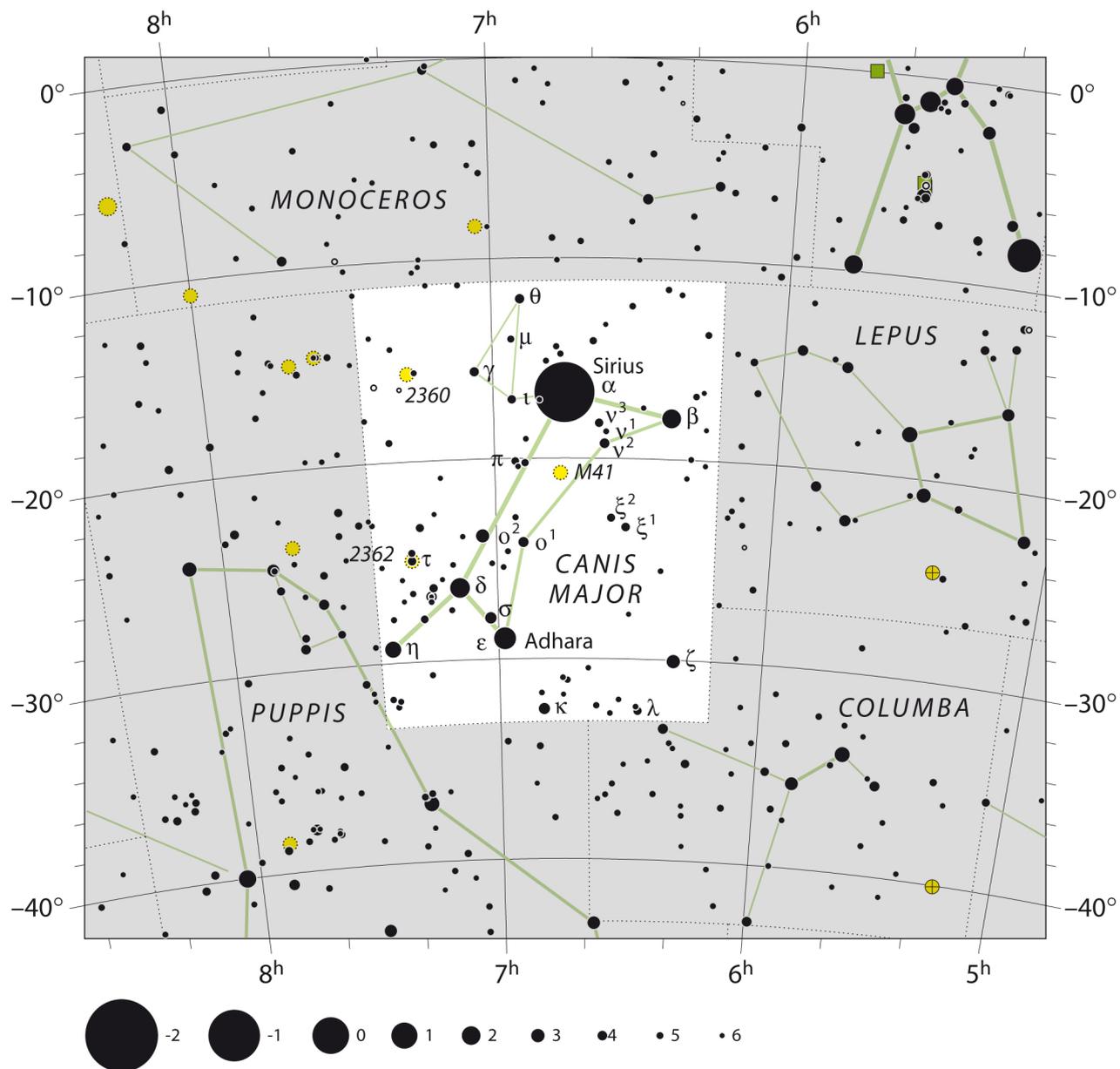


Figura 5g

UNIVERSITAT ROVIRA I VIRGILI

ANÁLISIS GEOMÉTRICO Y ASTRONÓMICO EN LA CATEDRAL DE CHARTRES

Juan Miguel Seguí Colomar

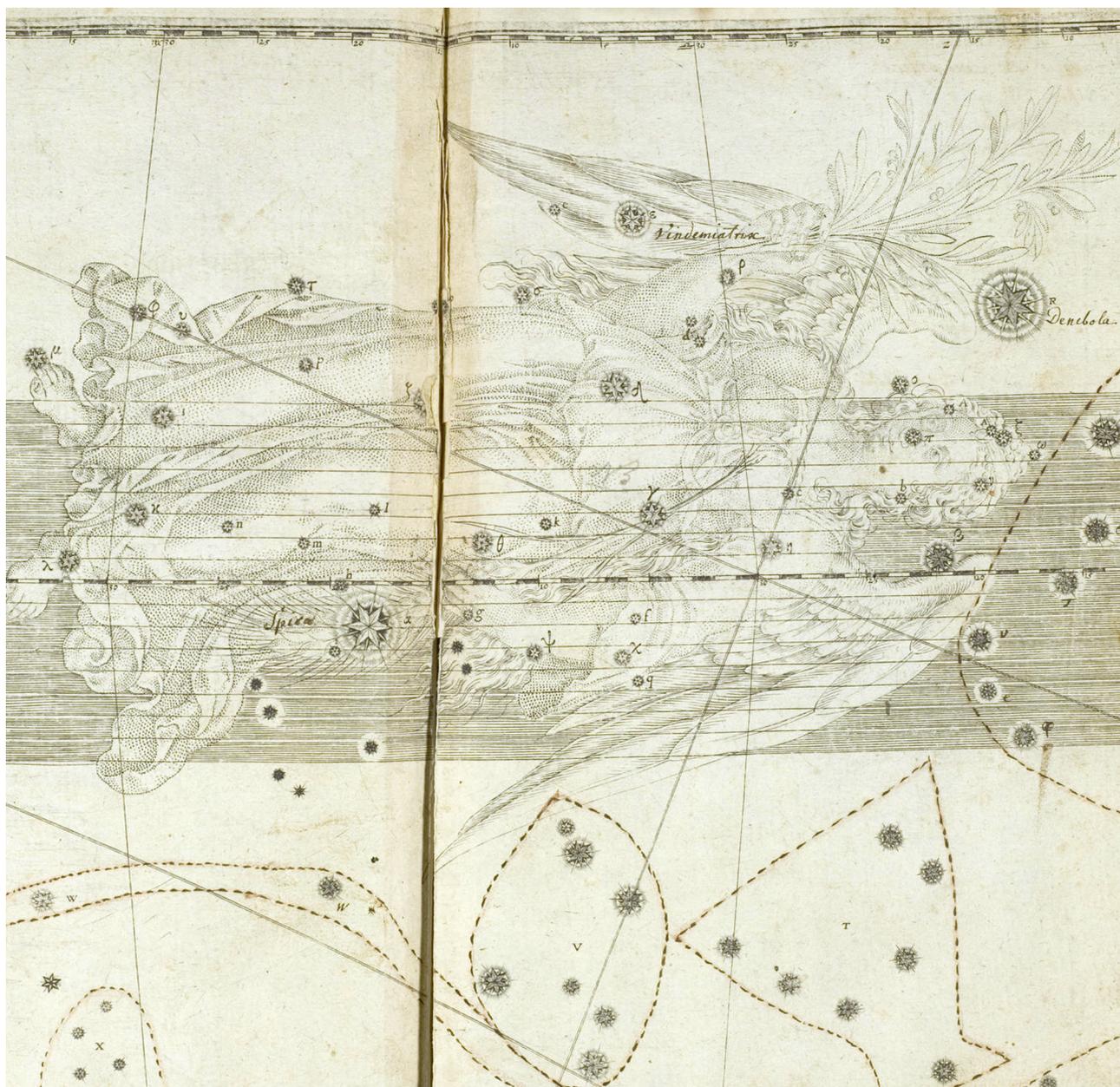


Figura 5h

UNIVERSITAT ROVIRA I VIRGILI

ANÁLISIS GEOMÉTRICO Y ASTRONÓMICO EN LA CATEDRAL DE CHARTRES

Juan Miguel Seguí Colomar

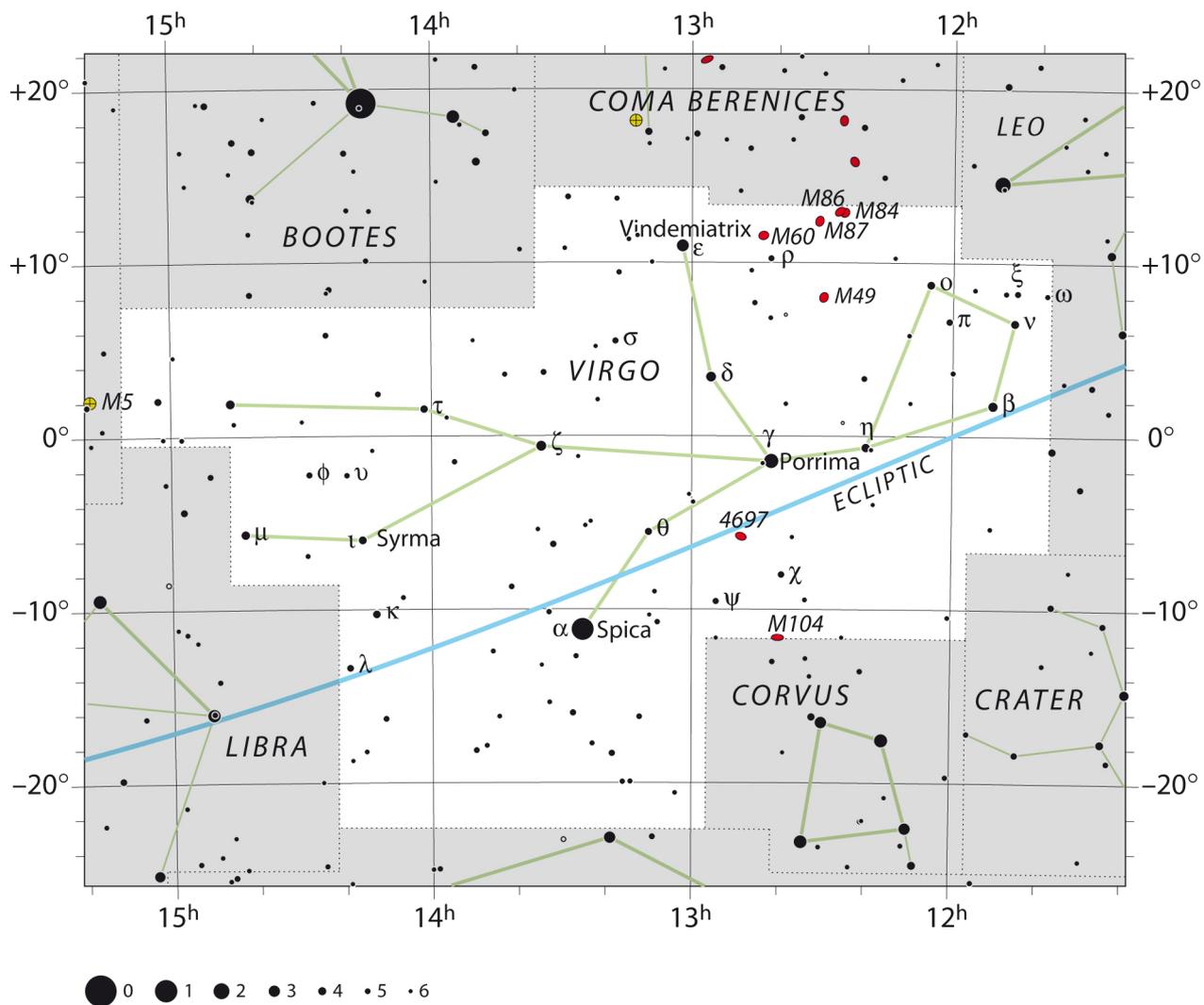


Figura 5i

UNIVERSITAT ROVIRA I VIRGILI

ANÁLISIS GEOMÉTRICO Y ASTRONÓMICO EN LA CATEDRAL DE CHARTRES

Juan Miguel Seguí Colomar



Figura 5j

UNIVERSITAT ROVIRA I VIRGILI

ANÁLISIS GEOMÉTRICO Y ASTRONÓMICO EN LA CATEDRAL DE CHARTRES

Juan Miguel Seguí Colomar

CAPÍTULO VI

CORRELACIÓN ENTRE LA CATEDRAL DE CHARTRES Y LOS CATASTERISMOS DE LA DEIDAD ISIS

Con los fundamentos astronómicos, las técnicas geométricas y los procesos de cálculo computacional mostrados anteriormente, en este capítulo presentamos de manera geométrica y astronómica que todos los días a lo largo del periodo de construcción del edificio –época astronómica *J1200*–: el Laberinto, el Crucero, el Ábside, la Girola y el Rosetón de la Catedral de Chartres siguieron fielmente el patrón astronómico del catasterismo milenario, objetivo y no especulativo, de la deidad Isis –*Elthor*, *Spica*, *Isis*, *Sirio* y *Adhara* de las constelaciones de Tauro, Virgo y Can Mayor–. Y que la probabilidad de que esta coincidencia no se produjera por un simple azar y realmente sea atribuible al arquitecto de la catedral de Chartres es muy alta. Aclaremos que no pretendemos afirmar, ni negar, que los constructores tuvieran en cuenta de forma intencionada estos alineamientos en el diseño de la construcción; pero sí demostramos la existencia geométrica de los mismos.

UNIVERSITAT ROVIRA I VIRGILI

ANÁLISIS GEOMÉTRICO Y ASTRONÓMICO EN LA CATEDRAL DE CHARTRES

Juan Miguel Seguí Colomar

6.1 Consideraciones iniciales.

Como hemos dicho en la sección 5.1: *“Para poder obtener un teorema geométrico-astronómico-arquitectónico con relevancia, objetivo y no de pura coincidencia, es rigurosamente necesario y obligatorio que antes de cualquier elección de los elementos geométricos de la Catedral de Chartres quede determinada de manera objetiva, no arbitraria, y de forma previa, la estrella –o estrellas– que debe ser la que entre en concurso”*. Y como hemos mostrado a lo largo del Capítulo V: de manera objetiva, no especulativa, tenemos el enlace milenario siguiente: Catedral de Notre-Dame de Chartres – Estrellas *Elthor, Spica, Isis, Sirio* y *Adhara*.

Fijado, de manera previa y objetiva, lo anterior. Consideramos el rosetón de la fachada principal de una catedral como “ojo con el que visualizar la bóveda celeste” (Figura 6a y Figura 6b). El motivo de la elección de este elemento arquitectónico es su enorme relevancia y singularidad arquitectónica debida a su impactante tamaño, su complejidad constructiva, su protagonismo compositivo en la fachada principal y su simbolismo. Todas estas cualidades son los motivos por el cual el rosetón ha sido el centro de investigación de muchos estudios; por ejemplo, el análisis geométrico de su textura o de su construcción [Samper y Herrera, 2015], o el estudio de su relación solar con el interior de la catedral [Heilbron, 2001]. El uso del rosetón como “ojo” para visualizar el sol, o sea para proyectar su sombra, ha sido muy normal en las iglesias; por ejemplo, en Santa María del Fiore en Florencia, Santa María degli Angeli e dei Martiri en Roma o entre otras,

Saint Sulpice en París. No obstante, hasta el presente trabajo, nunca ha sido examinado como instrumento astronómico estelar. El rosetón principal también es conocido como “Ojo de Dios”; y nosotros usaremos el centro del mismo como punto por el cual pasará la recta visual con la que visualizaremos la esfera celeste; será el centro del rosetón principal el punto de proyección de los astros, el cual determinará las órbitas astronómicas proyectadas de los mismos. Llamaremos a estas órbitas proyectadas: “trayectorias de los astros”.

Fijados, de entre las 5000 estrellas visibles, y más concretamente de entre las 1028 del *Almagesto*, las 5 estrellas cuyo concurso con la Catedral de Chartres es objetivo (Figura 6c y Figura 6d), y fijado el "ojo" con el que visualizar las mismas –punto de proyección de órbitas celestes–, resta fijar el plano de la Catedral de Chartres sobre el cual proyectar, o sea sobre el cual determinar las trayectorias de los astros, o dicho de otra forma el plano de Catedral de Chartres desde el cual mirar al firmamento a través del rosetón principal. Y es claro que si de planos arquitectónicos se habla, el más relevante y principal es el de planta. Desde ella, y a través del centro de rosetón principal visualizaremos la bóveda celeste (Figura 6e).

Ahora bien, nótese que hacer la observación celeste por parte de los constructores de la Catedral en la época en que la construyeron, era un asunto simple; bastaba ponerse en cualquier sitio y mirar por el punto centro del rosetón. Llamaremos de ahora en adelante a tal punto centro O . Nótese además que el rosetón no tenía siquiera necesariamente porque estar construido físicamente. Bastaba saber la posición que

tendría \mathcal{O} una vez que se contruyera el rosetón. Esta posición, por supuesto, era bien conocida por el maestro de obras de la catedral. Nótese también que en el periodo de construcción era simple encontrar el punto P de la planta de la futura catedral el cual coincidiera con una estrella E cualquiera elegida de la bóveda celeste –claro está con la condición de que E pudiera ser vista desde un punto P de la planta a través de \mathcal{O} – en una noche cualquiera del año y en un momento cualquiera de la noche elegida (sin chistes sobre si llovía, o si la luna era cercana a la estrella en ese momento elegido). Bastaría simplemente, con moverse hasta visualizar por \mathcal{O} el astro E . Esta visualización, directamente sin instrumento o a través de un tubo alargado para determinar sencillamente la dirección de la visual, requiere un mecanismo claramente simple. Y nótese que dada la órbita diaria aparente de E –la cual es una circunferencia en la bóveda celeste y que a partir de ahora siempre llamaremos \mathcal{C}_E (Figura 6c y Figura 6d)– el determinar su trayectoria sobre el plano de planta –o sea, determinar el lugar geométrico de los puntos de la planta desde los cuales se visualiza el astro E , o equivalentemente sobre los cuales se proyecta el astro E – era muy simple, bastaba con repetir el proceso anterior en varios momentos diferentes de la noche. A partir de ahora a ese lugar geométrico, a esa trayectoria, siempre la llamaremos \mathcal{T}_E (Figura 6i).

El verdadero problema radica en construir esas mismas trayectorias \mathcal{T}_E a día de hoy. No podemos ir a catedral de Chartres y mirar de noche la bóveda celeste tal como era en la época de la construcción de la catedral. La catedral se construyó, en su mayor parte, en los 30 años que pasaron entre el 1194 y 1224 (Figura 6f); o sea, que han

transcurrido unos 800 años desde su construcción. En 800 años, a causa del movimiento propio de cada estrella y del movimiento de precesión del eje terrestre (ver 1.11 y 1.12), la configuración estelar de la bóveda celeste es diferente observada desde Chartres. Este problema es completamente insoslayable y hace que la observación actual desde la catedral sea completamente inútil; las trayectorias \mathcal{T}_E relativas a los 5 astros del catasterismo asociado a la catedral determinan curvas, arcos de hipérbola, las cuáles pasan por sitios de la planta los cuáles son diferentes y alejados unos de otros en la época astronómica $J1200$ y la actual. Esto aboca a la dificultad de proceder a computar con algoritmos astronómicos, y de generar las imágenes computadas de las trayectorias obtenidas con tales algoritmos, todo ello mostrado en los Capítulos I, II, III y IV de la presente Tesis.

6.2 Proceso histórico similar al presentado en nuestro trabajo.

Así que la presente Tesis se basa computar, representar computacionalmente, y analizar geométrica y estadísticamente las proyecciones de estrellas a través del rosetón principal de la catedral de Chartres.

Pero este proceso de proyectar órbitas –en particular la órbita de *Sirio*– no es una idea únicamente nuestra, ni es solamente atribuible a la catedral de Chartres; realmente se trata de un proceso que ya fue usado en construcciones clásicas. Un ejemplo de relevancia es el gnomon Clementino en la Basílica de Santa María degli Angeli en Roma [Catamo

y Lucatini, 2002]. El Papa Clemente XI encargó al astrónomo y arqueólogo Francesco Bianchini crear este gnomon; el cual se trata de un ingenioso instrumento que permite ver las órbitas de las estrellas durante el día, y no solo durante la noche, mediante la proyección de sus órbitas diarias sobre la planta de la Basílica, de la misma manera que nosotros hacemos sobre la planta de la catedral de Chartres. De hecho el gnomon Clementino es un reloj de sol sincronizado con el tiempo sidéreo. Usando este reloj de sol es posible observar los tránsitos meridianos del Sol y de las estrellas *Sirio*, *Polar* y *Arturo*, simultáneamente, (Figura 9f y Figura 9g) como arcos de elipse e hipérbola sobre la planta de la basílica. Estos arcos son proyecciones que se producen a través de agujeros en el techo y a través de un agujero en el centro del escudo de armas del Papa –el escudo muestra una estrella en su emblema– colocado en una pared de la basílica a una altura de 20.34 metros (Figura 9f y Figura 9g). En el trabajo de la presente Tesis, repetimos este proceso con la catedral de Chartres y con su rosetón principal, calculando numéricamente las órbitas de las estrellas involucradas.

6.3 Parámetros fundamentales e intrínsecos de la catedral de Chartres.

De entre todos los parámetros de la edificación de la catedral de Chartres, 13 de ellos $\{\lambda, \varphi, \gamma, \mathcal{G}, \mathcal{A}, \mathcal{C}, r, d, \mathcal{L}, \bar{l}, \bar{c}, \bar{a}, \bar{g}\}$ forman un conjunto fundamental, los cuáles explicamos seguidamente (Figura 6e y Figura 6g).

Los primeros constructores que iniciaron en el año 1090 los cimientos del templo, decidieron la ubicación y orientación de la catedral, lo cual pautó las directrices para edificar la Catedral que ha llegado a nuestros días; y esto generó los tres primeros parámetros. O sea, que a pesar de todas las incidencias ocurridas a lo largo de los casi 36 años de ejecución, la longitud λ , la latitud φ y la orientación de la catedral γ (ángulo formado por el paralelo, en el que se encuentra la Catedral, con la línea de tierra de la fachada principal, con sentido positivo de oeste a norte) fueron las constantes que pautaron inicialmente el diseño.

En cuanto a la geometría general de la construcción, tenemos determinadas las distancias de tres posiciones singulares y significativas de la planta de la Catedral en relación a su fachada principal: la girola \mathcal{G} , el ábside \mathcal{A} y el crucero \mathcal{C} . Como podemos observar en la Figura 6f, estos tres últimos parámetros también fueron diseñados y proyectados al principio del proceso constructivo.

En cuanto a los elementos arquitectónicos y simbólicos, se tiene la altura del centro \mathcal{O} del rosetón de la fachada principal r –por el cual proyectaremos las órbitas astronómicas de cuerpos celestes–, y la distancia del centro \mathcal{L} del Laberinto –ubicado en el pavimento de la catedral– hasta su fachada principal. Además, como el pavimento del templo no es totalmente horizontal y va ganando altura a medida que se avanza hacia la girola, para las cuatro posiciones ubicadas en la planta de la catedral $\{\mathcal{G}, \mathcal{A}, \mathcal{C}, \mathcal{L}\}$ deben considerarse sus cotas topográficas verticales respecto la cota más baja correspondiente a la puerta de acceso de la fachada principal. Así pues, consideramos la cota del

laberinto \bar{l} , la cota del crucero \bar{c} , la cota del ábside \bar{a} y la cota de la girola \bar{g} . Obviar este aspecto topográfico podría alterar significativamente todos los resultados; por ejemplo, la diferencia de cota entre el acceso de la catedral y la girola corresponde a más de un metro de altura; ver Figura 6g, además de la Tabla 6a. Los parámetros de ubicación los hemos obtenido por coordenadas GPS y los parámetros de distancia han sido obtenidos empíricamente mediante un medidor láser modelo Leica DISTO™ D510. Todas las medidas, han sido contrastadas posteriormente con un levantamiento gráfico (en planta, alzado y sección) obtenido gracias a la Biblioteca del Departamento of the Austrian Federal Ministry for Education, Arts and Culture y del proyecto Scanproject "Heritage Monuments Board of Austria". En la Figura 6g, podemos observar gráficamente todos los parámetros considerados y tabulados en la Tabla 6a.

PARÁMETROS DE LOCALIZACIÓN		
Longitud λ	Latitud φ	Orientación γ
-1°29'14"	48°26'51"	43°47'43"

PARÁMETROS DE GEOMETRÍA		
Girola \mathcal{G}	Ábside \mathcal{A}	Crucero \mathcal{C}
$g = 113.17 \text{ m}$	$a = 103.52 \text{ m}$	$c = 67.85 \text{ m}$
$\bar{g} = 1.20 \text{ m}$	$\bar{a} = 1.20 \text{ m}$	$\bar{c} = 1.00 \text{ m}$

PARÁMETROS DE ELEMENTOS ARQUITECTÓNICOS

Laberinto \mathcal{L}	Rosetón \mathcal{O}
$l = 32.20 \text{ m}$	$r = 30.75 \text{ m}$
$\bar{l} = 0.60 \text{ m}$	$d = 0.25 \text{ m}$

Tabla 6a. Parámetros determinados intrínsecamente por la Catedral. A efectos celestes, de manera intrínseca a la Catedral de Chartres –o sea, sin hacer referencia a otra posición terrestre como pudiera ser la de Greenwich–, su parámetro intrínseco de longitud λ es irrelevante.

En un giro diario terrestre completo, la Catedral de Chartres visualiza a través de su rosetón todas las estrellas y constelaciones que se encuentran en un círculo \mathcal{C}_δ de la esfera celeste, únicamente determinado por su declinación δ . Esta declinación δ depende de la dirección de la visual por el centro \mathcal{O} del rosetón. Los parámetros (Tabla 6a) determinan 5 direcciones visuales, las cuales son: la recta horizontal $v_{\mathcal{H}}$ –correspondiente a una recta visual paralela al eje longitudinal de la catedral y elevada la altura r –, más las cuatro rectas visuales $v_{\mathcal{L}}$, $v_{\mathcal{C}}$, $v_{\mathcal{A}}$ y $v_{\mathcal{G}}$ que pasan por \mathcal{O} y los respectivos puntos \mathcal{L} , \mathcal{C} , \mathcal{A} y \mathcal{G} (Figura 6g).

Ha de tenerse en cuenta que la proyección ortogonal de \mathcal{O} sobre la planta está descentrada 0.25 m respecto del eje longitudinal de la catedral. Este desplazamiento hacia la izquierda ($d = 0.25 \text{ m}$), recogido en la Tabla 6a, se observa en el alzado de la Figura 6g.

Cabe preguntarse, teniendo en cuenta que aproximadamente la fecha de la construcción de la Catedral de Chartres fue entorno al año Juliano 1200, si los parámetros λ , φ y γ han variado de manera no despreciable hasta nuestra época actual a efectos del presente trabajo por motivos geológicos de la tectónica de placas. A pesar que continuamente se producen movimientos de las placas tectónicas, con los datos ofrecidos por la NASA en el The Global Positioning System (GPS) de la constelación de 30 satélites artificiales, los cuáles son usados para la navegación y la toma de medidas de la posición geodésica [<http://sideshow.jpl.nasa.gov/post/series.html>], la zona gala se encuentra en el centro de una placa tectónica sobre la cual prácticamente no ha existido movimiento de rotación de tal zona en 800 años. De hecho para que tal movimiento de rotación afectase a nuestros propósitos, el intervalo de tiempo geológico debería ser muy superior. Habríamos de alcanzar hasta el Eocene, hace 50 millones de años (Figura 6h), para que afectase a nuestros cálculos [Scotese, 2001]. Y en cuanto al movimiento de traslación se tiene en 800 años una variación de aproximadamente 0.4" segundos de arco sexagesimal en latitud y aproximadamente 0.7" segundos de arco sexagesimal en longitud. Estas variaciones sí afectan a nuestro estudio, aunque de manera despreciable en los resultados de nuestro trabajo.

A continuación buscaremos qué declinación astronómica determinan las 5 visuales arquitectónicas v_H , v_L , v_C , v_A y v_G . A modo resumido, en la Tabla 6b de la sección 6.9 mostraremos la declinación de los astros divisados desde cada una de las cinco posiciones determinadas intrínsecamente por la catedral de Chartres.

6.4 Cálculo de la declinación celeste de la visual horizontal $v_{\mathcal{H}}$

Aunque el geoide terrestre es aproximado por la Asociación de Geodésica Internacional desde 1924 con el Elipsoide Internacional de Referencia –elipsoide de Hayford con semieje mayor de la elipse meridiana $s = 6378.142 \pm 6 \text{ m}$ y excentricidad la de elipse meridiana $\varepsilon = 0.081819 \pm 0.000023$ –, a efectos de proyección visual sobre la esfera celeste, podemos considerar que el geoide es aproximado por una esfera \mathcal{E} , ya que se obtendrán los mismos puntos de proyección sobre la esfera celeste.

Así, dado el valor de los parámetros longitud λ y latitud φ , considerando coordenadas esféricas (ρ, θ, ϕ) (donde $x = \rho \cos \theta \sin \phi$, $y = \rho \sin \theta \sin \phi$, $z = \rho \cos \phi$) con amplitud radián y con origen de coordenadas en el centro de \mathcal{E} , se tiene que la posición de la Catedral de Chartres es $(\theta_c, \phi_c) \cong (0.03, 0.73)$ –el radio ρ de la esfera es irrelevante en el presente trabajo y consideramos a efectos de cálculos $\rho = 1$, y hemos considerado el punto origen del ángulo θ la intersección del ecuador con el meridiano de Greenwich–. Con los datos $(1, \theta_c, \phi_c)$ obtenemos en coordenadas cartesianas que la posición de la catedral es $\vec{C} = (x_c, y_c, z_c) \cong (0.67, 0.02, 0.75)$. Si ahora consideramos –sin perder generalidad a efectos de la esfera celeste pues la longitud λ es irrelevante– que la Catedral de Chartres está en el meridiano con $\theta = \frac{\pi}{2}$, entonces el plano de horizonte está dirigido por los vectores $\vec{v} = (1, 0, 0)$, $\vec{u} = \left(0, \sin\left(\frac{\pi}{2} + \phi_c\right), \cos\left(\frac{\pi}{2} + \phi_c\right)\right) \cong (0, 0.75, -0.66)$. Por tanto, un vector director del eje longitudinal de la catedral es $\vec{w} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \zeta\right) \vec{v} +$

$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \zeta\right)\vec{u}$ donde ζ es la amplitud radián de la orientación $\zeta \cong 0.76$. O sea, que $\vec{w} = (w_x, w_y, w_z) \cong (0.69, 0.54, -0.48)$.

La línea visual $v_{\mathcal{H}}$ –recta paralela al eje longitudinal de la catedral que pasa por el centro del rosetón– es $\mathcal{O} + \mu\vec{w}$ con $\mu \in \mathbb{R}$. Esta visual $v_{\mathcal{H}}$ corta a la esfera celeste en un punto P con coordenadas astronómicas absolutas de ascensión recta y declinación (α, δ_h) ; de tal manera que cada día con el giro terrestre, el punto P cambia –varía su ascensión recta α – generando un círculo \mathcal{C}_{δ_h} de puntos celestes con la misma declinación δ_h . O sea, que \mathcal{C}_{δ_h} es el círculo celeste visualizado horizontalmente por el rosetón cada día, y es la órbita astronómica diaria de las estrellas visualizadas por $v_{\mathcal{H}}$.

Para encontrar la declinación δ_h que determina a la órbita \mathcal{C}_{δ_h} , con nuestros cálculos puede considerarse la esfera celeste de radio 1, y con ello $\phi'_h = \arccos w_z$ y $\delta_h = \frac{\pi}{2} - \phi'_h \cong -0.50$ radián. En conclusión, la línea visual horizontal $v_{\mathcal{H}}$ que pasa por el centro del rosetón visualiza cada día todos los astros del círculo \mathcal{C}_{δ_h} con declinación $\delta_h \cong -28^{\circ}36'22''$ de la esfera celeste (Tabla 6b).

6.5 Cálculo de la declinación celeste de la visual del laberinto $v_{\mathcal{L}}$

Con los vectores \vec{w} y \vec{u} calculamos el vector unitario $\vec{w} \times \vec{u} = \vec{z}$ –donde \times es el producto vectorial– que marca el punto zénit de la bóveda celeste situado en la vertical de la posición de la Catedral de Chartres, así $\vec{z} \cong (0, 0.66, 0.75)$. Con ello, más $r = 30.75 \text{ m}$, $l = 32.20 \text{ m}$, $\bar{l} = 0.60 \text{ m}$ y la

excentricidad del rosetón $d = 0.25 m$ –Tabla 2–, tenemos que la recta visual v_L que pasa por \mathcal{L} y \mathcal{O} es $\mathcal{O} + \mu \vec{l} = \mathcal{O} + \mu \left(\sqrt{l^2 + (r - \bar{l})^2} (\cos(\omega_l) \vec{w} + \sin(\omega_l) \vec{z}) + 0.25 \vec{\zeta} \right)$ con $\mu \in \mathbb{R}$, donde ω_l es la amplitud radián del ángulo $\angle(\vec{w}, \overline{\mathcal{L}\mathcal{O}'})$, y $\vec{\zeta} = \vec{w} \times \vec{z}$ (Figura 4) – \mathcal{O}' sería el centro del rosetón si no estuviera desviado–.

Calculando obtenemos $\vec{\zeta} \cong (0.72, -0.52, 0.46)$, $\omega_l = \arctan\left(\frac{r - \bar{l}}{l}\right)$, y además $\vec{l} = (l_x, l_y, l_z) \cong (22.47, 37.26, 7.26)$. Y la ecuación vectorial con vector normalizado \vec{l}_n , o sea $\|\vec{l}_n\| = 1$, de la recta visual v_L es $\mathcal{O} + \mu \vec{l}_n$ con $\vec{l}_n = (l_{xn}, l_{yn}, l_{zn}) \cong (0.51, 0.85, 0.16)$.

Similarmente al caso de la visual v_H , la visual v_L corta a la esfera celeste en un punto P con coordenadas astronómicas absolutas de ascensión recta y declinación (α, δ_l) ; de tal manera que cada día con el giro terrestre, el punto P cambia –varía su ascensión recta α – generando un círculo \mathcal{C}_{δ_l} de puntos celestes con la misma declinación δ_l . O sea, que \mathcal{C}_{δ_l} es el círculo astronómico visualizado desde el centro del laberinto por el rosetón cada día, y es la órbita astronómica diaria de las estrellas visualizadas por v_L .

Para encontrar la declinación δ_l que determina a la órbita \mathcal{C}_{δ_l} , con nuestros cálculos puede considerarse la esfera celeste de radio 1, y con ello $\phi'_l = \arccos l_{zn}$ y $\delta_l = \frac{\pi}{2} - \phi'_l \cong 0.17$ radián. En conclusión, la línea visual v_L que pasa por el centro del laberinto y por el centro del rosetón

visualiza cada día todos los astros del círculo \mathcal{C}_{δ_l} con declinación $\delta_l \cong +09^\circ 28' 24''$ de la esfera celeste (Tabla 6b).

6.6 Cálculo de la declinación celeste de la visual del crucero v_c

De manera similar al apartado anterior, con $c = 67.85 m$ y $\bar{c} = 1.00 m$ –Tabla 6b–, tenemos que la recta visual v_c que pasa por el crucero de la catedral y el centro del rosetón es $\mathcal{O} + \mu \vec{c} = \mathcal{O} + \mu \left(\sqrt{c^2 + (r - \bar{c})^2} (\cos(\omega_c) \vec{w} + \sin(\omega_c) \vec{z}) + 0.25 \vec{\zeta} \right)$ con $\mu \in \mathbb{R}$, donde ω_c es la amplitud radián del ángulo $\angle(\vec{w}, \overline{\mathcal{C}\mathcal{O}'})$.

Calculando obtenemos $\vec{c} = (c_x, c_y, c_z) \cong (47.14, 56.25, -10.11)$ con $\omega_c = \arctan\left(\frac{r - \bar{c}}{c}\right)$. Y la ecuación vectorial con vector normalizado \vec{c}_n , o sea $\|\vec{c}_n\| = 1$, de la recta visual v_c es $\mathcal{O} + \mu \vec{c}_n$ con $\vec{c}_n = (c_{xn}, c_{yn}, c_{zn}) \cong (0.64, 0.76, -0.14)$.

Similarmente al caso de la visual v_l , la visual v_c corta a la esfera celeste en un punto P con coordenadas astronómicas absolutas de ascensión recta y declinación (α, δ_c) ; de tal manera que cada día con el giro terrestre, el punto P cambia –varía su ascensión recta α – generando un círculo \mathcal{C}_{δ_c} de puntos celestes con la misma declinación δ_c . O sea, que \mathcal{C}_{δ_c} es el círculo astronómico visualizado desde el centro del crucero por el rosetón cada día, y es la órbita astronómica diaria de las estrellas visualizadas por v_c .

Para encontrar la declinación δ_c que determina a la órbita \mathcal{C}_{δ_c} , con nuestros cálculos puede considerarse la esfera celeste de radio 1, y con ello $\phi'_c = \arccos c_{zn}$ y $\delta_c = \frac{\pi}{2} - \phi'_c \cong -0.14$ radián. En conclusión, la línea visual v_c que pasa por el centro del crucero y por el centro del rosetón visualiza cada día todos los astros del círculo \mathcal{C}_{δ_c} con declinación $\delta_c \cong -07^{\circ}50'29''$ de la esfera celeste –Tabla 6b–.

6.7 Cálculo de la declinación celeste de la visual del ábside $v_{\mathcal{A}}$

De manera similar a la posición desde el laberinto y el crucero, con $a = 103.52 m$ y $\bar{a} = 1.20 m$ –Tabla 6b–, tenemos que la recta visual $v_{\mathcal{A}}$ que pasa por el ábside de la catedral y el centro del rosetón es $\mathcal{O} + \mu\bar{a} = \mathcal{O} + \mu\left(\sqrt{a^2 + (r - \bar{a})^2}(\cos(\omega_a)\vec{w} + \sin(\omega_a)\vec{z}) + 0.25\vec{\zeta}\right)$ con $\mu \in \mathbb{R}$, donde ω_a es la amplitud radián del ángulo $\angle(\vec{w}, \overrightarrow{\mathcal{AO}'})$.

Calculando obtenemos $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z) \cong (71.83, 75.39, -27.34)$ con $\omega_a = \arctan\left(\frac{r - \bar{a}}{a}\right)$. Y la ecuación vectorial con vector normalizado \vec{a}_n , o sea $\|\vec{a}_n\| = 1$, de la rectal visual $v_{\mathcal{A}}$ es $\mathcal{O} + \mu\vec{a}_n$ con $\vec{a}_n = (a_{xn}, a_{yn}, a_{zn}) \cong (0.67, 0.70, -0.25)$.

Similarmente a las visuales $v_{\mathcal{L}}$ o v_c , la visual $v_{\mathcal{A}}$ corta a la esfera celeste en un punto P con coordenadas astronómicas absolutas de ascensión recta y declinación (α, δ_a) ; de tal manera que cada día con el giro terrestre, el punto P cambia –varía su ascensión recta α – generando un

círculo \mathcal{C}_{δ_a} de puntos celestes con la misma declinación δ_a . O sea, que \mathcal{C}_{δ_a} es el círculo astronómico visualizado desde el centro del ábside por el rosetón cada día, y es la órbita astronómica diaria de las estrellas visualizadas por $v_{\mathcal{A}}$.

Para encontrar la declinación δ_a que determina a la órbita \mathcal{C}_{δ_a} , con nuestros cálculos puede considerarse la esfera celeste de radio 1, y con ello $\phi'_a = \arccos a_{zn}$ y $\delta_a = \frac{\pi}{2} - \phi'_a \cong -0.26$ radián. En conclusión, la línea visual $v_{\mathcal{A}}$ que pasa por el centro del ábside y por el centro del rosetón visualiza cada día todos los astros del círculo \mathcal{C}_{δ_a} con declinación $\delta_a \cong -14^{\circ}42'34''$ de la esfera celeste –Tabla 6b–.

6.8 Cálculo de la declinación celeste de la visual de la girola v_g

De manera similar a la posición desde el laberinto, el crucero y el ábside, con $g = 113.17 m$ y $\bar{g} = 1.20 m$ –Tabla 6b–, tenemos que la recta visual v_g que pasa por el centro de la girola de la catedral y el centro del rosetón es $\mathcal{O} + \mu \vec{g} = \mathcal{O} + \mu(\sqrt{g^2 + (r - \bar{g})^2}(\cos(\omega_g)\vec{w} + \sin(\omega_g)\vec{z}) + 0.25\vec{\zeta})$ con $\mu \in \mathbb{R}$, donde ω_g es la amplitud radián del ángulo $\angle(\vec{w}, \vec{g}\mathcal{O}')$.

Calculando obtenemos $\vec{g} = (g_x, g_y, g_z) \cong (78.50, 80.60, -31.96)$ con $\omega_g = \arctan\left(\frac{r - \bar{g}}{g}\right)$. Y la ecuación vectorial con vector normalizado \vec{g}_n , o sea $\|\vec{g}_n\| = 1$, de la recta visual v_g es $\mathcal{O} + \mu \vec{g}_n$ con $\vec{g}_n = (g_{xn}, g_{yn}, g_{zn}) \cong (0.67, 0.69, -0.27)$.

Similarmente a las visuales v_L , v_C o v_A , la visual v_G corta a la esfera celeste en un punto P con coordenadas astronómicas absolutas de ascensión recta y declinación (α, δ_g) ; de tal manera que cada día con el giro terrestre, el punto P cambia –varía su ascensión recta α – generando un círculo \mathcal{C}_{δ_g} de puntos celestes con la misma declinación δ_g . O sea, que \mathcal{C}_{δ_g} es el círculo astronómico visualizado desde el centro de la girola por el rosetón cada día, y es la órbita astronómica diaria de las estrellas visualizadas por v_G .

Para encontrar la declinación δ_g que determina a la órbita \mathcal{C}_{δ_g} , con nuestros cálculos puede considerarse la esfera celeste de radio 1, y con ello $\phi'_g = \arccos g_{zn}$ y $\delta_g = \frac{\pi}{2} - \phi'_g \cong -0.28$ radián. En conclusión, la línea visual v_G que pasa por el centro del ábside y por el centro del rosetón visualiza cada día todos los astros del círculo \mathcal{C}_{δ_g} con declinación $\delta_g \cong -15^\circ 51' 19''$ de la esfera celeste –Tabla 6b–.

6.9 Declinaciones de astros determinadas intrínsecamente por la Catedral de Chartres.

A modo de resumen de las secciones anteriores, mostramos la siguiente Tabla 6b que recoge las declinaciones de los astros visualizados desde los parámetros: Girola, Ábside, Crucero, Laberinto y Horizonte de la planta de la catedral.

ÁMBITO ARQUITECTÓNICO	DECLINACIÓN
Girola \mathcal{G}	$\delta_g \cong -15^{\circ}51'19''$
Ábside \mathcal{A}	$\delta_a \cong -14^{\circ}42'34''$
Crucero \mathcal{C}	$\delta_c \cong -07^{\circ}50'29''$
Laberinto \mathcal{L}	$\delta_l \cong +09^{\circ}28'24''$
Horizonte \mathcal{H}	$\delta_h \cong -28^{\circ}36'22''$

Tabla 6b. Declinaciones de los astros determinadas intrínsecamente por la Catedral de Chartres.

6.10 Declinaciones celestes en la época astronómica $J1200$ determinadas por el catasterismo de la deidad Isis.

Para poder hacer afirmaciones científicas objetivas, hemos tomando coordenadas celestes de ascensión recta y declinación de las posiciones astronómicas en la esfera celeste.

Las declinaciones celestes de la sección anterior –Tabla 6b–, son intrínsecas de la Catedral de Chartres, y no dependen de la época astronómica; dicho de otra forma, dependen solamente de la propia catedral y son invariantes a lo largo de los 800 años de tiempo transcurrido desde la época de su construcción hasta la nuestra actual. Esto es así, debido a que la variación por motivos geológicos a causa del movimiento tectónico es irrelevante –tal y como hemos comentado en el penúltimo párrafo de la Sección 6.3–.

Sin embargo, claramente aparece un problema insoslayable, la posición de las estrellas varía en la esfera celeste en todo momento. La variación es grande a causa del movimiento del eje terrestre de precesión de equinoccios, y es pequeña a causa del movimiento propio de cada una de las estrellas. Pero, en cualquier caso, la variación combinada por ambos movimientos es un efecto que ha de tenerse en cuenta de manera ineludible. O sea, las posiciones astronómicas de los diferentes astros, sí varían de manera relevante a lo largo de 800 años. Como dijimos al final de la sección 1.8, para el propósito del presente trabajo, basta tener en cuenta solo el equinoccio medio; dicho de otra forma, basta considerar el movimiento estelar propio y el movimiento de precesión terrestre sin considerar los efectos del movimiento de nutación, de la aberración, los cuáles en el presente estudio no tienen relevancia.

Las posiciones de las estrellas, actualmente –Figura 6c y Figura 6d– son muy similares a las de la época de referencia *J2000* –la cual corresponde al 1 de enero a las 12^h según meridiano de Greenwich del

año Gregoriano 2000, o sea la que corresponde a la época del día Juliano $JD(2451545.0)$ -. Sin embargo, la época astronómica que consideramos, a causa del movimiento estelar y de precesión terrestre, es la de la construcción de la Catedral de Chartres, la misma la fijaremos en la Época astronómica $J1200$ -la cual corresponde al 19 de diciembre a las 12^h meridiano Greenwich del año Juliano 1199 CE; o sea, es la época del día Juliano $JD(2159345.0)$ -.

Para otorgar la posición astronómica a cada estrella en la esfera celeste acudiremos a la base de datos SIMBAD [SIMBAD]. Así, tenemos las siguientes posiciones celestes en la Época de referencia $J2000.0$ de las estrellas listadas en la Tabla 6c por orden de declinación celeste -los datos son en ICRS coord. (ep= $J2000.0$)-. Ahora bien, como hemos dicho, hemos de tener en cuenta el desplazamiento continuo de cada astro en la esfera celeste a causa de la precesión de equinoccios y su movimiento propio; y con ello encontrar la verdadera posición y declinación en la época $J1200.0$ de construcción de la Catedral de Chartres (Figura 6f). Con los cálculos y programas de computación pertinentes, explicitados en los temas anteriores, encontramos las posiciones celestes en la época $J1200.0$ y los mostramos en la Tabla 6c.

Isis	Ascensión R. α	Declinación δ	Movimiento	Movimiento
	<i>J2000.0</i>	<i>J2000.0</i>	Propio <i>mas/yr α</i>	Propio <i>mas/yr δ</i>
Elthor	04 ^h 00 ^m 41 ^s	+12°29'25''	-8.02	-14.42
Spica	13 ^h 25 ^m 12 ^s	-11°09'41''	-42.35	-30.67
Isis	07 ^h 03 ^m 45 ^s	-15°37'60''	-0.14	-11.36
Sirio	06 ^h 45 ^m 09 ^s	-16°42'58''	-546.01	-1223.07
Adhara	06 ^h 58 ^m 38 ^s	-28°58'20''	+3.24	+1.33

Isis	Ascensión R. α	Declinación δ	Movimiento	Movimiento
	<i>J1200.0</i>	<i>J1200.0</i>	Propio <i>mas/yr α</i>	Propio <i>mas/yr δ</i>
Elthor	03 ^h 16 ^m 53 ^s	+09°55'02''	-8.02	-14.42
Spica	12 ^h 43 ^m 32 ^s	-06°52'23''	-42.35	-30.67
Isis	06 ^h 27 ^m 35 ^s	-14°44'56''	-0.14	-11.36
Sirio	06 ^h 09 ^m 51 ^s	-15°54'24''	-546.01	-1223.07
Adhara	06 ^h 27 ^m 14 ^s	-28°08'33''	+3.24	+1.33

Tabla 6c. Coordenadas celestes del catasterismo de Isis en la época astronómica *J2000.0* y *J1200.0*.

6.11 Correlación gráfica de las órbitas del catasterismo de Isis con los elementos de la planta de la Catedral de Chartres.

Como hemos ya apuntado, la Catedral de Chartres sería irrelevante si en el estudio solo se tuviera en cuenta la localización de la catedral $\{\lambda, \varphi\}$. Esto es así porque entonces solo la latitud φ tendría algo

de importancia, y la longitud λ sería prescindible a causa de la rotación diaria de la esfera celeste. Por ello, para alcanzar cualquier conclusión de interés y realmente relacionada con la Catedral deben añadirse al estudio los parámetros arquitectónicos intrínsecos de la misma $\{\gamma, \mathcal{G}, \mathcal{A}, \mathcal{C}, r, d, \mathcal{L}, \bar{l}, \bar{c}, \bar{a}, \bar{g}\}$.

Cada uno de los cinco astros del catasterismo de la deidad Isis –*Elthor*, *Spacia*, *Isis*, *Sirio* y *Adhara*– posee diariamente una órbita circular diaria \mathcal{C}_{Elt} , \mathcal{C}_{Spi} , \mathcal{C}_{Isi} , \mathcal{C}_{Sir} y \mathcal{C}_{Adh} en la esfera celeste.

Con los 13 parámetros $\{\lambda, \varphi, \gamma, \mathcal{G}, \mathcal{A}, \mathcal{C}, r, d, \mathcal{L}, \bar{l}, \bar{c}, \bar{a}, \bar{g}\}$, proyectaremos sobre las diferentes plataformas de la catedral de Chartres las anteriores 5 órbitas diarias a través del centro del rosetón principal de la catedral. Con estas proyecciones, obtendremos sobre las distintas plataformas interiores cuatro trayectorias \mathcal{T}_i , las cuáles veremos que son arcos de hipérbola, correspondientes a cada astro – \mathcal{T}_{Elt} , \mathcal{T}_{Spi} , \mathcal{T}_{Isi} i \mathcal{T}_{Sir} – respectivamente y una quinta trayectoria \mathcal{T}_{Adh} correspondiente a la estrella *Adhara*. Esta última trayectoria no se proyectará dentro de la planta de la catedral; para observar esta estrella desde el interior, deberíamos de elevarnos del suelo y situarnos horizontalmente a la misma cota que el centro del rosetón.

Una vez hechas las proyecciones, con los algoritmos y programas informáticos mostrados en los capítulos anteriores, representamos gráficamente las trayectorias \mathcal{T}_i en la época astronómica *J1200.0* introduciendo todos los valores de los resultados de los cálculos en formato vectorial CAD; y además hemos redibujado con precisión la

planta de la catedral de Chartres; el resultado puede observarse en la Figura 6i. Destaca rápidamente que las trayectorias de los cuatro astros T_i cortan el eje central de la catedral.

Queda bien manifiesto gráficamente a partir de la Figura 6i, que las trayectorias T_{Elt} , T_{Spi} , T_{Isi} y T_{Sir} están correlacionadas con los puntos \mathcal{G} , \mathcal{A} , \mathcal{C} y \mathcal{L} .

En el gráfico se observa que la correlación no es exacta, puesto que se aprecian visualmente pequeñas desviaciones con T_{Elt} , T_{Isi} y T_{Sir} , además de una mayor desviación con T_{Spi} . Estas desviaciones que se observan gráficamente en la Figura 6i no pueden considerarse las reales, pues se muestran amplificadas en la figura por motivos geométricos. El primer motivo que genera amplificación visual es la posición geométrica angular de las plataformas con las rectas visuales de proyección v_L , v_C , v_A y v_G ; y el segundo motivo que genera tal amplificación es el conjunto de las pequeñas diferencias de las declinaciones de estas rectas visuales de proyección con las declinaciones de los catasterimos.

Con independencia de las cuestiones visuales que se observan en el gráfico de la Figura 6i, cabe preguntarse por el efecto en la correlación de otras posibles desviaciones reales generadas por motivos relacionados con la construcción del templo, por ejemplo: por decisiones del arquitecto durante el proceso constructivo, por errores e imprecisiones de ejecución o incluso por asentamientos estructurales de la edificación a lo largo de los 800 años transcurridos.

En cualquier caso, como hemos dicho, gracias a todos los cálculos pertinentes tanto geométricos, computacionales, como astronómicos, claramente se observa correlación vía el gráfico obtenido en la Figura 6i, o sea que se observa claramente que las trayectorias \mathcal{T}_{Elt} , \mathcal{T}_{Spi} , \mathcal{T}_{Isi} y \mathcal{T}_{Sir} están correlacionadas con los puntos \mathcal{G} , \mathcal{A} , \mathcal{C} y \mathcal{L} .

Ahora bien, lo anterior no es más que una afirmación subjetiva, “es un asunto visual con su consiguiente carga de error subjetivo”. Por tanto, procedemos entonces a realizar un riguroso estudio geométrico/estadístico a fin de mostrar y medir matemáticamente cuánto de perfecta o de errónea es la correlación entre las trayectorias astronómicas y los parámetros de la Catedral de Chartres.

6.12 Medida geométrico/estadística rigurosa de la correlación de la órbitas de los astros del catasterismo de Isis con los elementos de la planta de la catedral.

Hemos visto en la Figura 6i que aparentemente las trayectorias \mathcal{T}_i tienen correlación con los elementos \mathcal{G} , \mathcal{A} , \mathcal{C} y \mathcal{L} . Pero esa apariencia, ya que es visual, está cargada para cada persona que observe la figura de su propia subjetividad. Pretendemos entonces encontrar una medida matemática objetiva que muestre sin ambigüedad subjetiva un valor que ofrezca la verdadera correlación que realmente existe de forma geométrica entre las órbitas \mathcal{C}_{Elt} , \mathcal{C}_{Spi} , \mathcal{C}_{Isi} , \mathcal{C}_{Sir} y \mathcal{C}_{Adh} y los elementos \mathcal{L} , \mathcal{C} , \mathcal{A} , \mathcal{G} y \mathcal{H} .

Dicho de otra forma, buscamos una medida de la verdadera correlación la cual determine si la posición de estos elementos de la Catedral se proyectan sobre los astros *Elthor*, *Spica*, *Isis*, *Sirio* y *Adhara* a través del centro O del rosetón principal; o sea, más precisamente: se trata de confirmar si existe o no correlación efectiva, y con qué magnitud geométrica/estadística existe, entre las declinaciones celestes obtenidas en la sección 6.10 –Tabla 6c del J1200– y las declinaciones celestes recogidas en la sección 6.9 –Tabla 6b–.

La metodología para el cálculo de esa medida es la siguiente que vamos a describir:

1) Calcularemos estadísticamente con qué probabilidad se puede descartar la hipótesis nula h_0 = "*No existe correlación lineal entre las declinaciones determinadas por las órbitas de los astros de Isis y las declinaciones determinadas por la catedral*", o sea calcularemos el nivel de significancia κ . La probabilidad de equivocarnos al aceptar la existencia de correlación lineal es $1 - \kappa$, y los cálculos para encontrar esa probabilidad los haremos aplicando el *test - t de Student* con $n-2$ grados de libertad, donde $n=5$ es el número de coordenadas.

2) Calcularemos en qué proporción tal correlación lineal hace que las declinaciones del catasterismo de Isis expliquen las declinaciones de la Catedral. Los cálculos para encontrar el tanto por ciento de la explicación ofrecida por la correlación los haremos

aplicando el coeficiente ajustado de determinación de *Pearson* en tanto por ciento $\eta_{adj}^2 \times 100$.

3) Calcularemos una medida de similitud geométrica entre los dos conjuntos de coordenadas con la desviación geométrica $D \in [0^\circ, 180^\circ]$ –la máxima desviación posible es 180° grados exagesimales– entre la recta de la regresión lineal y la bisectriz del primer y tercer cuadrante, dentro del intervalo de parámetros de las coordenadas del problema. Más concretamente: calcularemos la desviación $D = \max_{x \in [a, b]} |\rho + x \tan \theta - x|$, donde $y = b + x \tan \theta$ es la ecuación de la recta de regresión, y $y = x$ es la ecuación de la bisectriz, y aquí a y b son respectivamente el mínimo y máximo de las coordenadas. La amplitud θ del ángulo de la pendiente de la recta de regresión la obtenemos con el cálculo clásico de variancias y covariancias; y el parámetro ρ lo obtenemos con el cálculo clásico de medias y variancias.

4) Calcularemos cuál es la probabilidad F de que la coincidencia obtenida entre las declinaciones del catasterismo de la deidad Isis y las declinaciones de los parámetros de la catedral de Chartres se haya producido por casualidad; o sea que calcularemos la probabilidad de que tal coincidencia no sea más que un mero resultado aleatorio simplemente atribuible simplemente al azar y no a que se haya producido expresamente por el diseñador de Chartres.

Fijado y descrito el proceso de la metodología, calculamos:

La siguiente Tabla 6d muestra conjuntamente las declinaciones correspondientes a los parámetros de la Catedral de Chartres y al catasterismo de Isis en la época astronómica $J1200.0$.

Catasterismo de Isis $J1200.0$		Catedral de Chartres	
Estrellas	Declinaciones δ	Elementos Arquitectónicos	Declinaciones δ
Elthor	$+09^{\circ}55'02'' = p_1$	Laberinto \mathcal{L}	$+09^{\circ}28'24'' = q_1$
Spica	$-06^{\circ}52'23'' = p_2$	Crucero \mathcal{C}	$-07^{\circ}50'29'' = q_2$
Isis	$-14^{\circ}44'56'' = p_3$	Ábside \mathcal{A}	$-14^{\circ}42'34'' = q_3$
Sirio	$-15^{\circ}54'24'' = p_4$	Girola \mathcal{G}	$-15^{\circ}51'19'' = q_4$
Adhara	$-28^{\circ}08'33'' = p_5$	Horizonte \mathcal{H}	$-28^{\circ}36'22'' = q_5$

Tabla 6d. Declinaciones astronómicas del catasterismo de la deidad Isis y de los elementos de la catedral en la época astronómica $J1200.0$.

Con los datos de la Tabla 6d obtenemos que la media $m_p = \sum_{i=1}^{i=5} \frac{p_i}{5}$ de los p_i es $m_p \cong -11.15$, y la media m_q de los q_i es $m_q \cong -11.51$. La desviación típica $\sigma_p = \sqrt{\sum_{i=1}^{i=5} \frac{(p_i - m)^2}{5}}$ de los p_i es $\sigma_p \cong 12.54$, y la media σ_q de los q_i es $\sigma_q \cong 12.45$. La covariancia $\sigma_{pq} = \sum_{i=1}^{i=5} \frac{(p_i - m_p)(q_i - m_q)}{5}$ entre los p_i y q_i es $\sigma_{pq} \cong 156.09$. Por tanto, el coeficiente de correlación de Pearson $R_{pq} = \frac{\sigma_{pq}}{\sigma_q \sigma_p}$ de los dos conjuntos es $R_{pq} \cong 0.99$. En consecuencia el coeficiente ajustado de determinación de Pearson $\eta_{adj}^2 = 1 - (1 - R_{pq}^2) \frac{5-1}{5-2-1}$ es $\eta_{adj}^2 \cong 0.98$.

Además $t_{pq} = \left| \frac{R_{pq}\sqrt{5-2}}{\sqrt{1-R_{pq}^2}} \right| \cong 12.16$, con lo cual aplicando el *Test-t* de

Student con $5 - 2$ grados de libertad se rechaza la hipótesis nula h_0 con el nivel de significancia κ tal que $\kappa \cong 0.0005$, o sea $1 - \kappa \cong 0.9994$.

El parámetro de amplitud angular $\tan\theta = \frac{\sigma_{pq}}{\sigma_p^2}$ es $\tan\theta \cong 0.99$, y el parámetro central $\rho = m_q - \frac{\sigma_{pq}}{\sigma_p^2} m_p$ es $\rho \cong -0.44^\circ$, además el rango $[a, b]$ de parámetros p_i es $[-28.14, 9.92]$. Con todo ello la desviación geométrica D es $D \cong 0.52^\circ$.

La tabla de contingencia de doble entrada que modela el problema tratado es la siguiente. Dividimos los 180° grados exagesimales posibles de la declinación en 180 partes I_i , o sea un grado para cada parte $I_i = [90 - (i - 1), 90 - i], i = 1 \div 180$. Sea st_i la función $st_i = \begin{cases} 0 & \text{if } A \cap I_i = \emptyset \\ 1 & \text{if } A \cap I_i \neq \emptyset \end{cases}$ con $A = \{p_j\}_{j=1}^5$, y sea la función $\overline{st}_i = \begin{cases} 0 & \text{if } A \cap I_i \neq \emptyset \\ 1 & \text{if } A \cap I_i = \emptyset \end{cases}$, y sea la función $ch_i = \begin{cases} 0 & \text{if } B \cap I_i = \emptyset \\ 1 & \text{if } B \cap I_i \neq \emptyset \end{cases}$ con $B = \{q_j\}_{j=1}^5$, y sea la función $\overline{ch}_i = \begin{cases} 0 & \text{if } B \cap I_i \neq \emptyset \\ 1 & \text{if } B \cap I_i = \emptyset \end{cases}$.

Con esas funciones se construyen las siguientes dos funciones $st_sh_i =$

$$st_i + ch_i = \begin{cases} 0 & \text{if } [A \cap I_i = \emptyset \text{ and } B \cap I_i = \emptyset] \\ 1 & \text{if } [A \cap I_i = \emptyset \text{ and } B \cap I_i \neq \emptyset] \text{ or } [A \cap I_i \neq \emptyset \text{ and } B \cap I_i = \emptyset] \\ 2 & \text{if } [A \cap I_i \neq \emptyset \text{ and } B \cap I_i \neq \emptyset] \end{cases} \quad y$$

$$\overline{st_sh}_i = \overline{st}_i + \overline{ch}_i =$$

$$\begin{cases} 0 & \text{if } [A \cap I_i \neq \emptyset \text{ and } B \cap I_i \neq \emptyset] \\ 1 & \text{if } [A \cap I_i = \emptyset \text{ and } B \cap I_i \neq \emptyset] \text{ or } [A \cap I_i \neq \emptyset \text{ and } B \cap I_i = \emptyset] \\ 2 & \text{if } [A \cap I_i = \emptyset \text{ and } B \cap I_i = \emptyset] \end{cases}.$$

Y con lo anterior se construye la citada Tabla 6e de contingencia siguiente:

	I_1	...	I_{80}	I_{81}	I_{82}	...	I_{96}	I_{97}	I_{98}	I_{99}	...	I_{104}
st_sh_i	0	...	0	2	0	...	0	1	1	0	...	0
$\overline{st_sh_i}$	2	...	2	0	2	...	2	1	1	2	...	2
<i>total</i>	2	...	2	2	2	...	2	2	2	2	...	2

	I_{105}	I_{106}	I_{107}	...	I_{118}	I_{119}	I_{120}	...	I_{180}	<i>total</i>
st_sh_i	2	2	0	...	0	2	0	...	0	10
$\overline{st_sh_i}$	0	0	2	...	2	0	2	...	2	350
<i>total</i>	2	2	2	...	2	2	2	...	2	360

Tabla 6e. Tabla de contingencia de doble entrada de las coincidencias de las declinaciones.

Entonces tal como hemos mostrado en la sección 3.4 de la presente Tesis: A fin de encontrar cuál es la probabilidad de que el resultado "existe coincidencia en las declinaciones" no es un resultado aleatorio, aplicamos primero el χ^2 - test de Pearson con 179 grados de libertad. Calculando, como en la sección 3.4, encontramos esta es una tabla no aleatoria con probabilidad $P_{\chi^2} \simeq 0.9999999997$.

Esta probabilidad es muy alta, por tanto existe muy alta evidencia estadística de que las coincidencias de declinaciones no se hayan producido por un proceso aleatorio, sino que haya sido un proceso intencionado.

Ahora bien, a pesar del gran tamaño de la tabla, la cual posee 179 grados de libertad, las frecuencias esperadas de las mismas son menores que 5. Por eso, podría llegar a pensarse que hemos tomado una decisión incorrecta con el uso del χ^2 – test de Pearson.

A fin de disipar cualquier duda, aplicamos también exacto-test de Fisher-Irwin. Calculando, como en la sección 3.4, encontramos que esta tabla procede de un proceso no aleatorio con probabilidad $P_F \simeq 0.9999997$. En consecuencia, existe muy alta evidencia estadística de que el resultado "existe coincidencia en las declinaciones" no se haya producido por un proceso aleatorio, sino que haya sido un proceso intencionado.

Finalmente:

La Tabla 6f muestra el resumen de las medidas obtenidas como resultados: la probabilidad de existencia de correlación lineal; el coeficiente ajustado de determinación de Pearson en tanto por ciento $\eta_{adj}^2 \times 100$; la desviación geométrica D y la probabilidad F de no ser un resultado aleatorio.

Parámetros estadísticos	$1 - \kappa, R_{pq}$	$\eta_{adj}^2 \times 100$	D	F
	0.9994, 0.99	98%	0°.52	0.9999997

Tabla 6f. Resumen de las medidas obtenidas como resultados del estudio geométrico/estadístico.

6.13 Correlación del catasterismo de Isis con la catedral de Chartres.

La anterior Tabla 6f recoge, resumidamente, las medidas obtenidas como resultado de los cálculos.

Y con tal tabla obtenemos lo siguiente:

1) Existe una correlación lineal entre la configuración estelar de las declinaciones del catasterismo de la deidad Isis –en la época astronómica $J1200.0$ de la construcción de la catedral de Chartres– y las declinaciones del diseño constructivo de la catedral con probabilidad $1 - \kappa = 0.9994$ y coeficiente de correlación de Pearson $R_{pq} \cong 0.99$.

2) Esta correlación lineal hace que las declinaciones generadas por los parámetros constructivos $\{\lambda, \varphi, \gamma, \mathcal{G}, \mathcal{A}, \mathcal{C}, r, d, \mathcal{L}, \bar{l}, \bar{c}, \bar{a}, \bar{g}\}$ de la catedral de Chartres sean explicadas casi en su totalidad, al $\eta_{adj}^2 \times 100 = 98\%$, por las declinaciones estelares de Isis.

3) La desviación geométrica $D \in [0^\circ, 180^\circ]$ –la máxima desviación posible es 180° grados exagesimales– entre las dos configuraciones de declinaciones estelares es muy pequeña $D = 0^\circ.52$.

4) La probabilidad de que tal coincidencia de configuraciones celestes no sea un resultado aleatorio, o sea la probabilidad de que el resultado no se haya producido por un simple azar no atribuible al diseñador de Chartres es $F = 0.9999997$.

5) Esta correlación, no ocurrió un solo día, si no que ocurría cada día a lo largo de todos los años de la construcción de la catedral, a causa del lento movimiento estelar propio y de precesión del eje terrestre –veremos esta afirmación con precisión en el Capítulo VII–.

O sea, dicho llanamente, con lo anterior podemos decir que en este trabajo hemos demostrado de manera geométrica y astronómica que en la época astronómica *J1200.0*: el Laberinto, el Crucero, el Ábside, la Girola y el Rosetón de la Catedral de Chartres siguieron fielmente el patrón astronómico del catasterismo milenario, objetivo y no especulativo, de la deidad Isis –*Elthor, Spica, Isis, Sirio y Adhara* de las constelaciones de Tauro, Virgo y Can Mayor–. Y que la probabilidad de que esta coincidencia no se produjera por un simple azar y realmente fuera atribuible al arquitecto de la catedral de Chartres es muy alta.

Y como se ha comentado en capítulos anteriores de esta Tesis: no existe margen a la duda, que pueda afectar a las afirmaciones del párrafo anterior, sobre la instrumentación óptica disponible en la época de la construcción de la catedral, pues el catasterismo de Isis –*Elthor, Spica, Isis, Sirio y Adhara*– está muy lejos del límite visual del ojo humano sin ayuda de aparatos ópticos; y tampoco hay margen para la duda sobre el conocimiento del catasterismo de Isis por parte de los constructores, pues son estrellas conocidas desde hace miles de años por las culturas mediterráneas y muy bien conocidas por la cultura global occidental. Además de no existir duda en la relación histórica de Isis con Notre-Dame.

UNIVERSITAT ROVIRA I VIRGILI

ANÁLISIS GEOMÉTRICO Y ASTRONÓMICO EN LA CATEDRAL DE CHARTRES

Juan Miguel Seguí Colomar

Figuras relacionadas con el Capítulo VI

Figura 6a. Alzado principal de la Catedral de Chartres. Dibujo de la *Monographie de la Cathédrale de Chartres* del autor Jean-Baptiste-Antoine Lassus.

Figura 6b. Representación gráfica del rosetón de la fachada principal a través de la cual proyectaremos las órbitas astronómicas.

Figura 6c y d. Órbitas celestes C_{δ_h} , C_{δ_l} , C_{δ_c} , C_{δ_a} y C_{δ_g} , correspondientes a \mathcal{H} , \mathcal{L} , \mathcal{C} , \mathcal{A} y \mathcal{G} respectivamente – Boreal figura superior y Austral figura inferior–. Los círculos negros corresponden a las estrellas que son catasterismos de la deidad Isis en la época $J2000.0$ mientras que las marcas negras de cinco puntas representan las mismas estrellas en la época $J1200.0$.

Figura 6e. Parámetros arquitectónicos y de ubicación determinados por la Catedral de Chartres.

Figura 6f. Cronología constructiva de la Catedral de Chartres.

Figura 6g. Parámetros geométricos, arquitectónicos y simbólicos determinados por la Catedral de Chartres.

Figura 6h. Gráfico del estado geológico de la tierra en el Mioceno.

Figura 6i. Trayectorias \mathcal{T}_i sobre la planta de la Catedral de Chartres.

UNIVERSITAT ROVIRA I VIRGILI

ANÁLISIS GEOMÉTRICO Y ASTRONÓMICO EN LA CATEDRAL DE CHARTRES

Juan Miguel Seguí Colomar



Figura 6a

UNIVERSITAT ROVIRA I VIRGILI

ANÁLISIS GEOMÉTRICO Y ASTRONÓMICO EN LA CATEDRAL DE CHARTRES

Juan Miguel Seguí Colomar

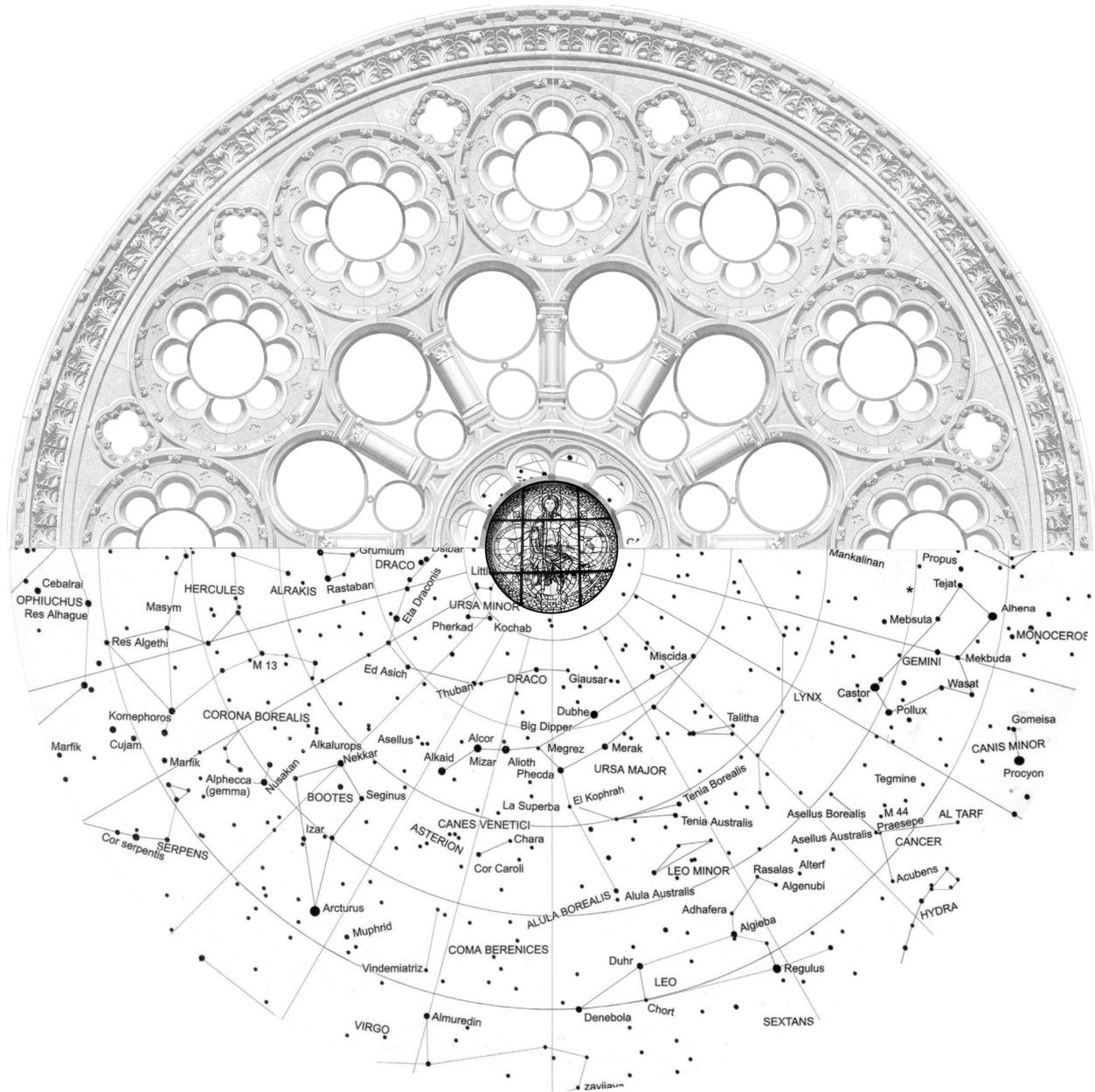


Figura 6b

UNIVERSITAT ROVIRA I VIRGILI

ANÁLISIS GEOMÉTRICO Y ASTRONÓMICO EN LA CATEDRAL DE CHARTRES

Juan Miguel Seguí Colomar

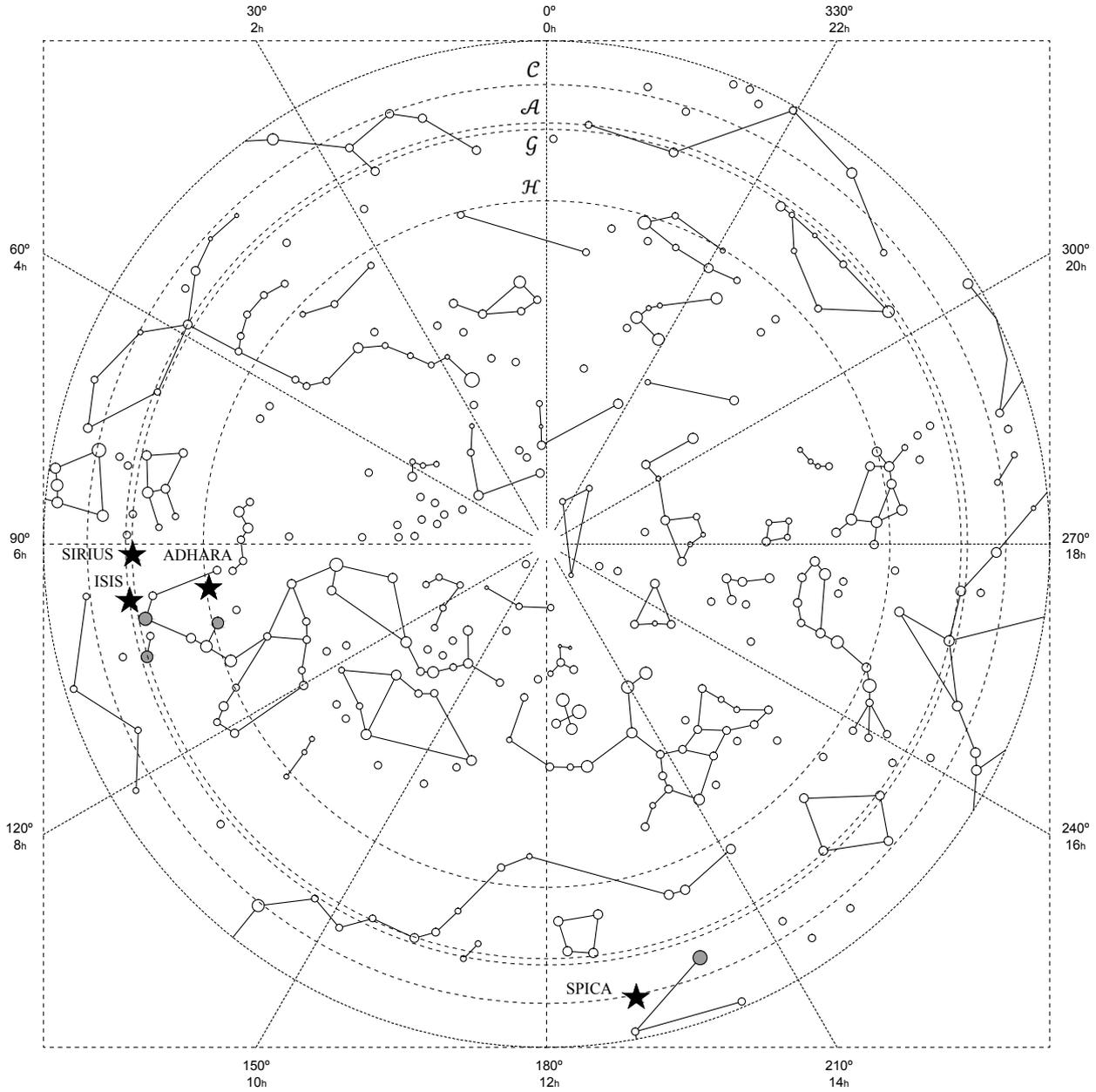


Figura 6c

UNIVERSITAT ROVIRA I VIRGILI

ANÁLISIS GEOMÉTRICO Y ASTRONÓMICO EN LA CATEDRAL DE CHARTRES

Juan Miguel Seguí Colomar

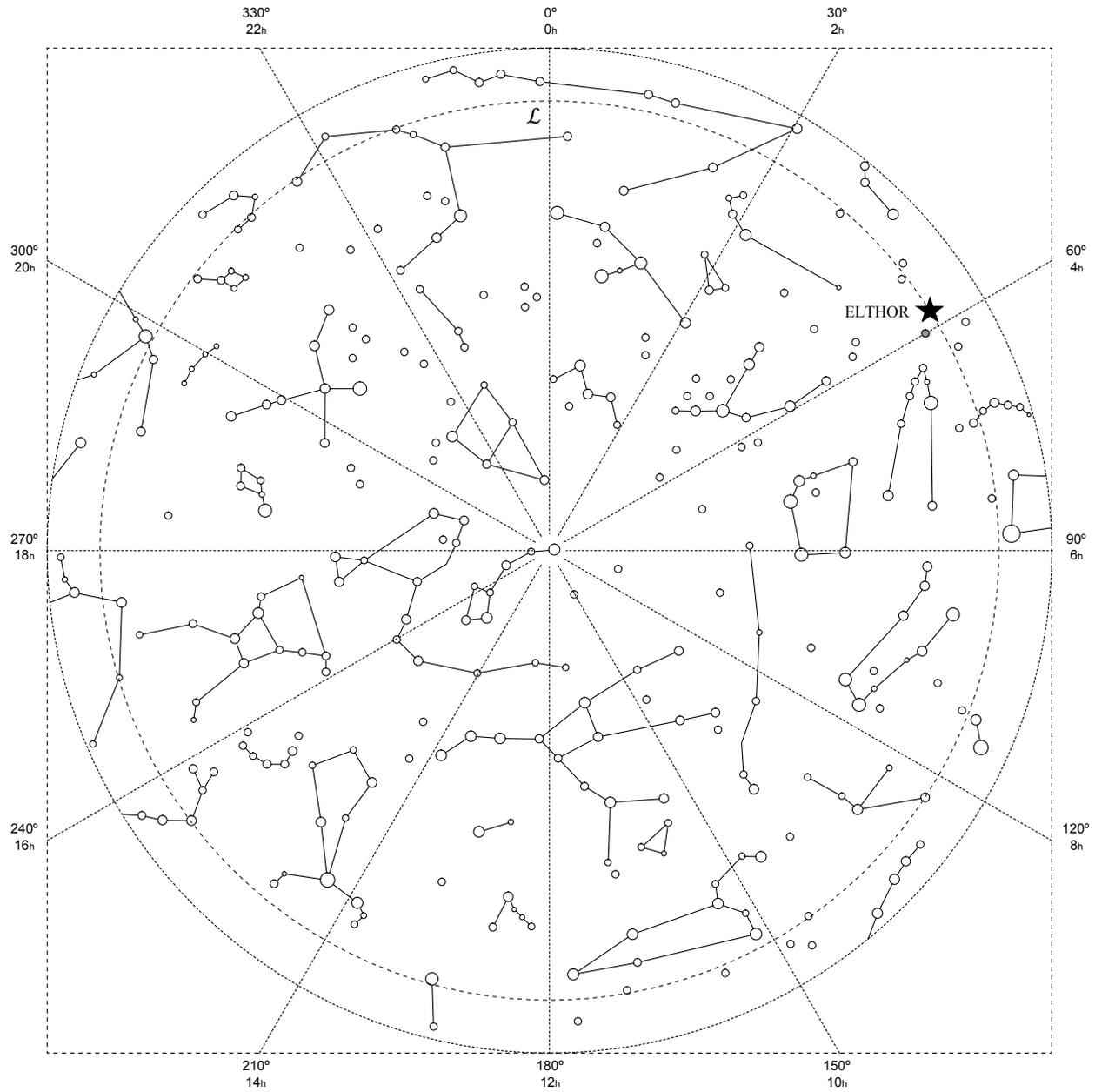


Figura 6d

UNIVERSITAT ROVIRA I VIRGILI

ANÁLISIS GEOMÉTRICO Y ASTRONÓMICO EN LA CATEDRAL DE CHARTRES

Juan Miguel Seguí Colomar

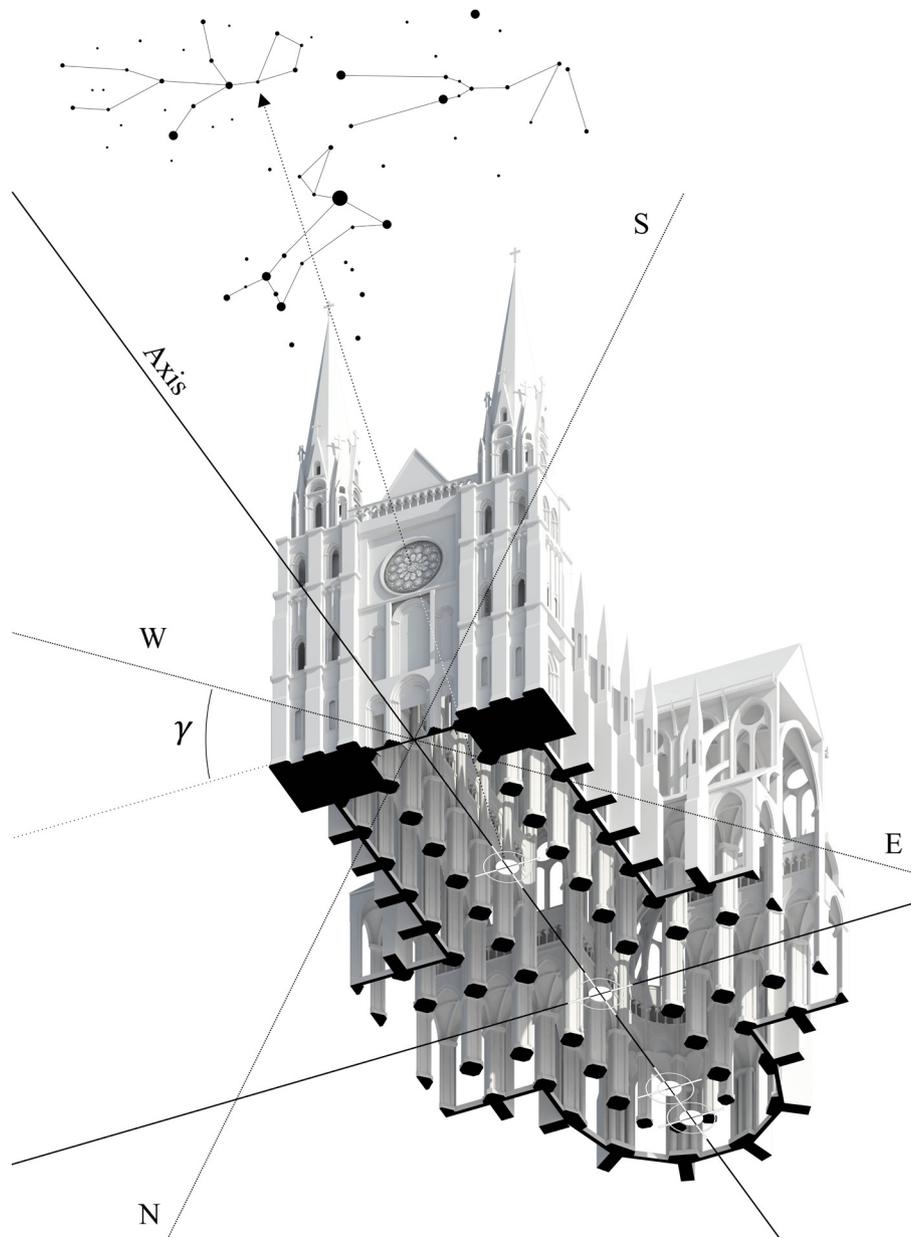
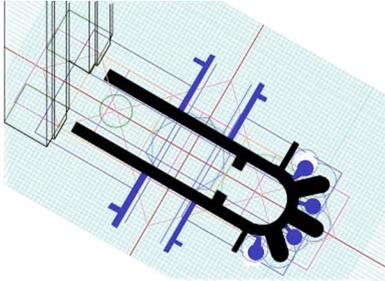


Figura 6e

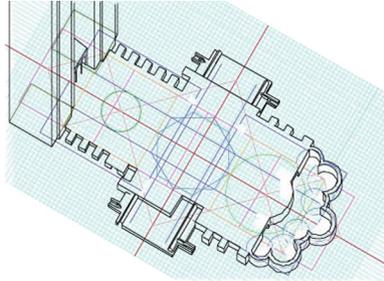
UNIVERSITAT ROVIRA I VIRGILI

ANÁLISIS GEOMÉTRICO Y ASTRONÓMICO EN LA CATEDRAL DE CHARTRES

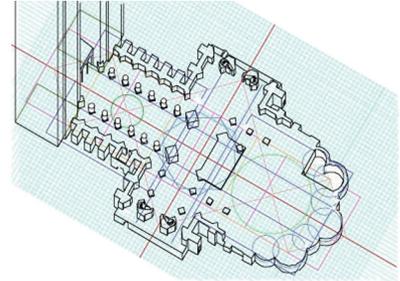
Juan Miguel Seguí Colomar



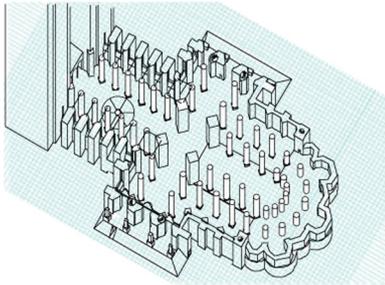
CRIPTA DE 1090



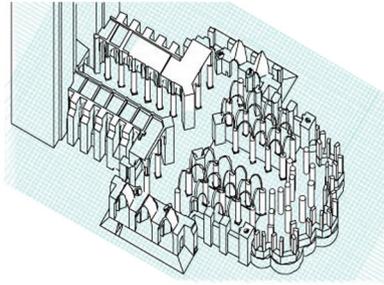
1195



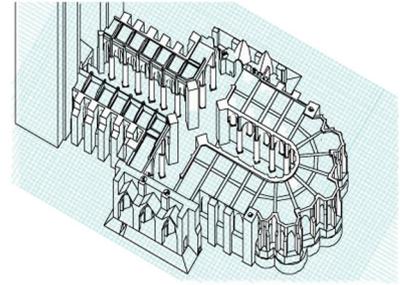
1198



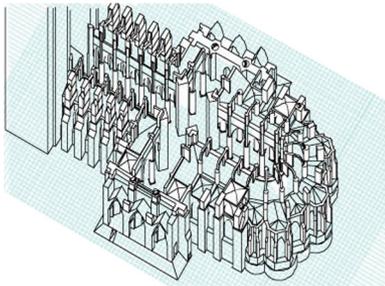
1201



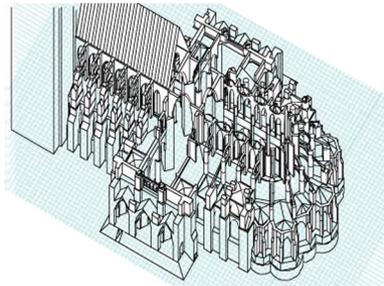
1205



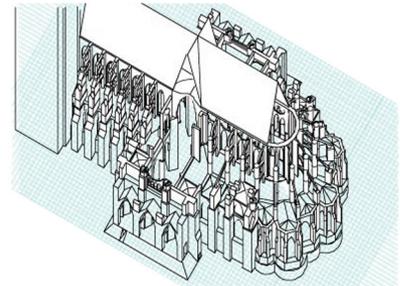
1208



1217



1223



1226

Figura 6f

UNIVERSITAT ROVIRA I VIRGILI

ANÁLISIS GEOMÉTRICO Y ASTRONÓMICO EN LA CATEDRAL DE CHARTRES

Juan Miguel Seguí Colomar

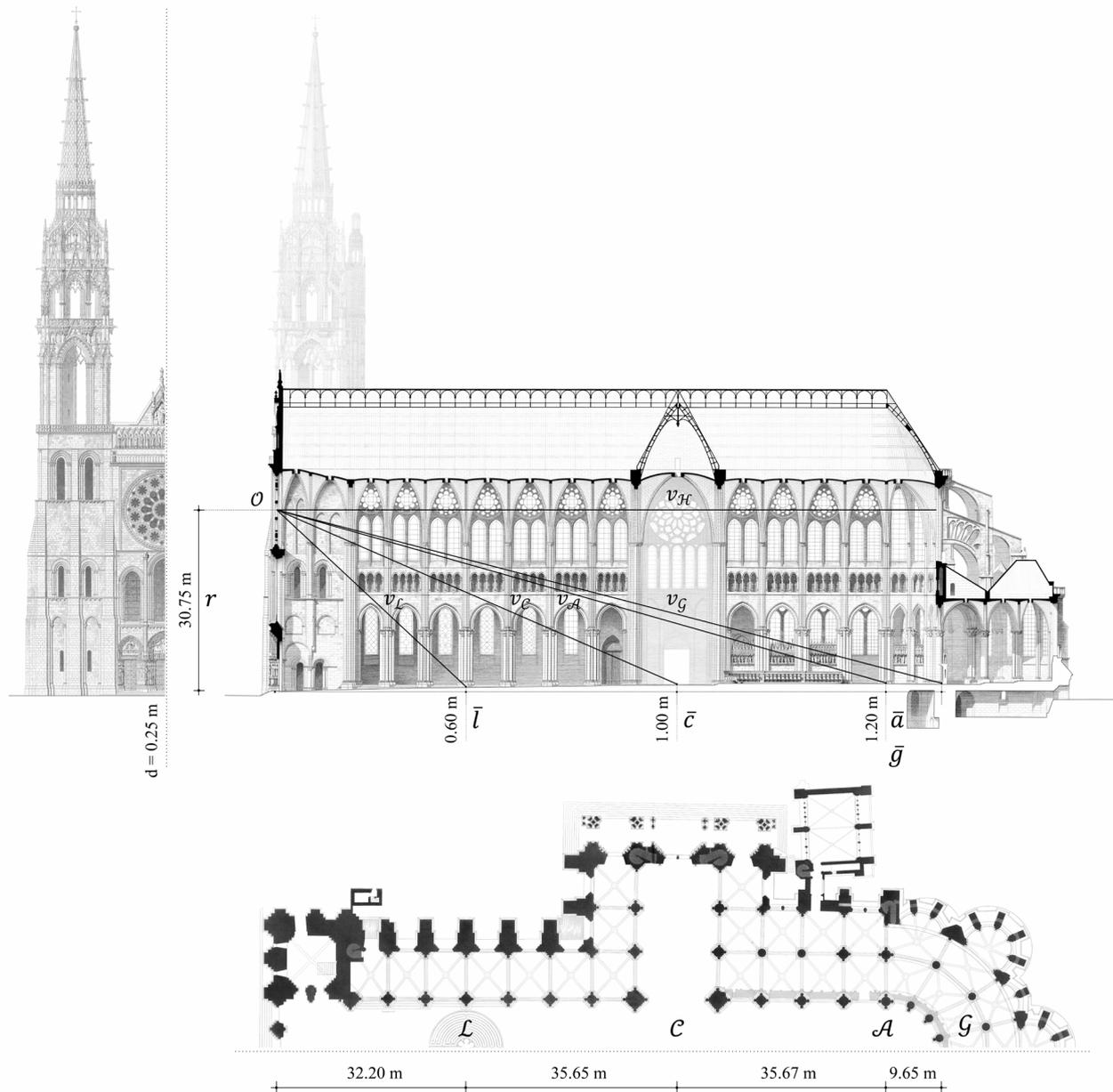


Figura 6g

UNIVERSITAT ROVIRA I VIRGILI

ANÁLISIS GEOMÉTRICO Y ASTRONÓMICO EN LA CATEDRAL DE CHARTRES

Juan Miguel Seguí Colomar

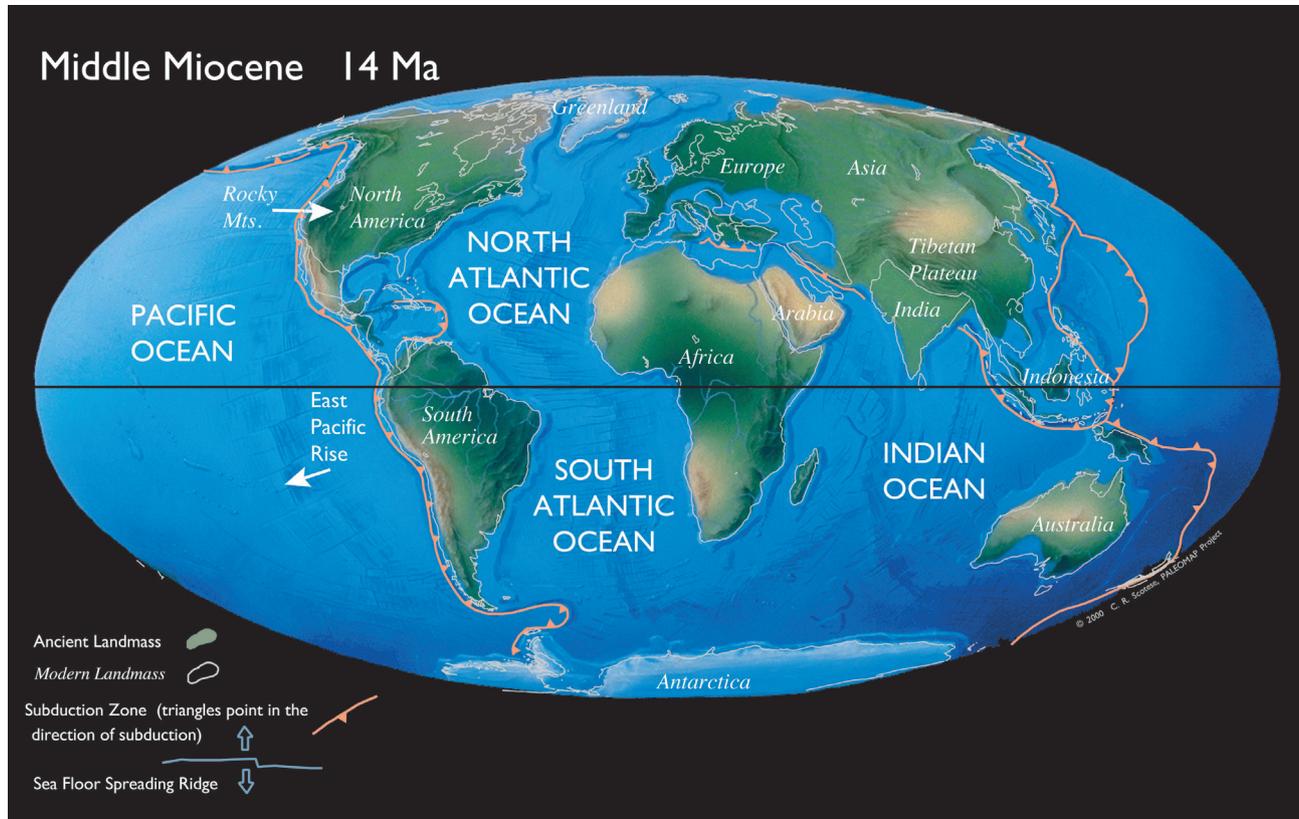


Figura 6h

UNIVERSITAT ROVIRA I VIRGILI

ANÁLISIS GEOMÉTRICO Y ASTRONÓMICO EN LA CATEDRAL DE CHARTRES

Juan Miguel Seguí Colomar

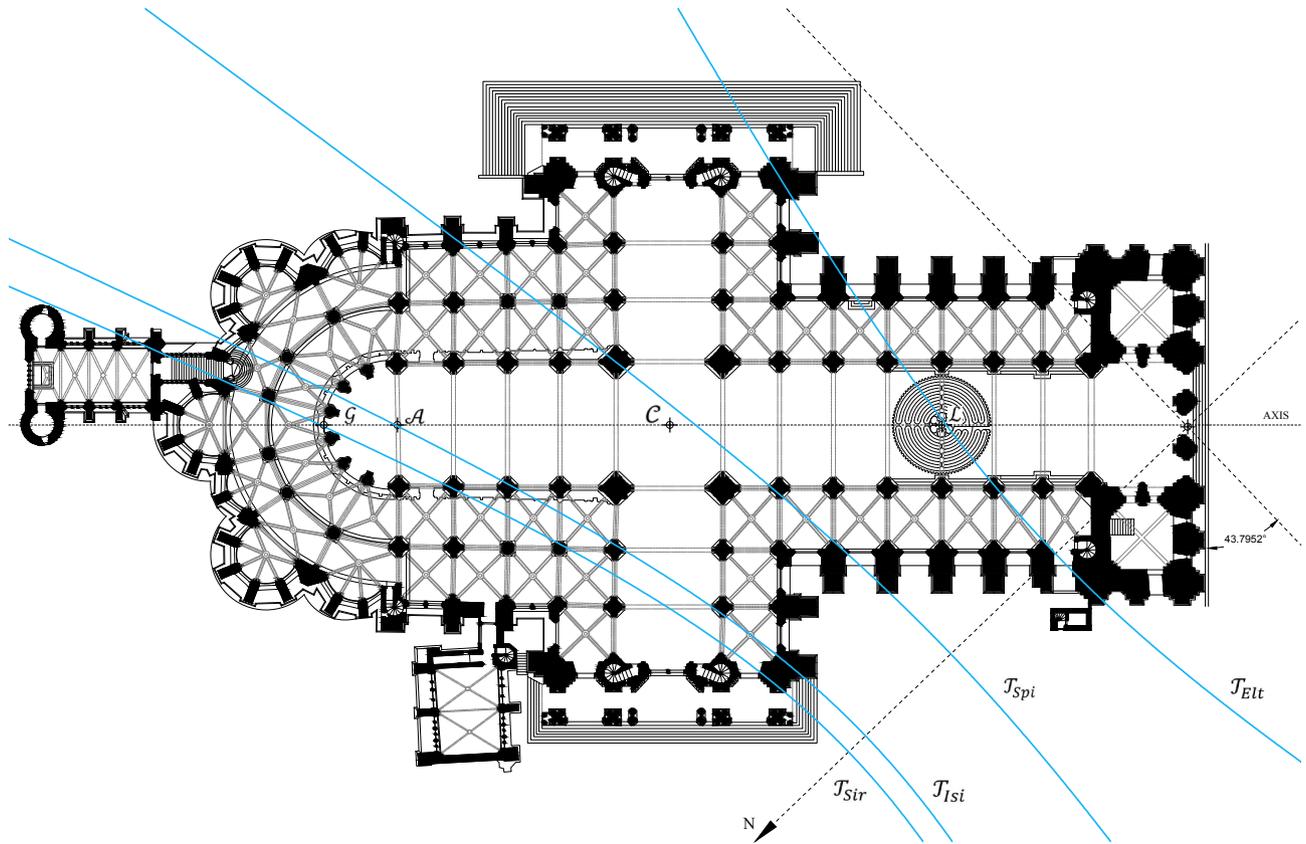


Figura 6i

UNIVERSITAT ROVIRA I VIRGILI

ANÁLISIS GEOMÉTRICO Y ASTRONÓMICO EN LA CATEDRAL DE CHARTRES

Juan Miguel Seguí Colomar

CAPÍTULO VII

DETERMINACIÓN DE LA UBICACIÓN DEL LABERINTO DE LA CATEDRAL DE CHARTRES

Presentamos la correlación geométrico-astronómica que existió entre dos elementos arquitectónicos relevantes de la Catedral de Chartres: el rosetón de su fachada principal y su laberinto. Se trata de una correlación que sucedía todos los días a lo largo del periodo de construcción del edificio –época astronómica *J1200*–. La mitología clásica helenística relaciona el laberinto con la constelación de Tauro, y además esta constelación catasteriza a Notre-Dame –la diosa Isis–; por ello, para el análisis proyectaremos las órbitas diarias de las estrellas principales de la constelación a través del centro del rosetón obteniendo sus trayectorias sobre la planta de la catedral. Demostramos que *Elthor* –única estrella del firmamento llamada “*el toro*” y ubicada en el centro de la constelación– se proyectaba diariamente con precisión sobre el centro del laberinto. Aclaremos, de nuevo como en el capítulo anterior, que no pretendemos afirmar, ni negar, que los constructores tuvieran en cuenta de forma intencionada este alineamiento en el diseño de la construcción; pero sí mostramos la existencia geométrica del mismo. De todas formas, hablaremos de las posibles motivaciones mitológico/religiosas para crear esta alineación (Notre-Dame/Isis/diosa-vaca/Tauro/Minotauro/Laberinto).

UNIVERSITAT ROVIRA I VIRGILI

ANÁLISIS GEOMÉTRICO Y ASTRONÓMICO EN LA CATEDRAL DE CHARTRES

Juan Miguel Seguí Colomar

7.1 Consideraciones iniciales.

El trabajo presentado en este capítulo consiste en una investigación geométrica y astronómica que analiza con más detalle la especial correlación (que se observa en el capítulo anterior) que existió entre dos elementos arquitectónicos relevantes de la catedral Chartres: el rosetón de su fachada principal y su laberinto (Figura 7a y Figura 7b).

No se trata de una investigación histórica, en el sentido de que no pretendemos afirmar, ni negar, que los constructores de la Catedral de Chartres tuvieron en cuenta en el diseño de forma intencionada esa especial correlación. Consiste la misma en un alineamiento mostrado en el Capítulo VI; pero ahora lo analizaremos más profundamente y demostraremos que sucedía todos los días a lo largo del periodo de construcción del edificio –época astronómica *J1200*–, con independencia de si los constructores de la catedral lo tuvieron en cuenta en la composición de los elementos en el transcurso de la edificación (Figura 6f).

No conocemos textos medievales –como pueden ser: gráficos, medidas o cálculos– que expliciten las decisiones tomadas por los constructores de la Catedral de Chartres, las cuáles nos aporten los datos necesarios para poder demostrar si usaron esta alineación. A pesar de ello, no es inverosímil su uso, porque las técnicas para su aplicación efectiva en la puesta en obra –tanto geométricas, constructivas y de observación astronómica– son simples; además de que los cuerpos celestes involucrados eran bien conocidos en la Edad Media, fácilmente

localizables en el firmamento, y accesibles a simple vista sin necesidad de instrumentos ópticos modernos; con el añadido de que las disciplinas que aquí intervienen, geometría y astronomía, eran dos artes que los maestros de obra de la Edad Media debían dominar [McVaugh y Behrends, 1971; Jeauneau, 2009; McCluskey, 1998]. Por tanto, dada la viabilidad de aplicar la correlación, y dada la importancia de los objetos que involucra –tanto arquitectónicos como celestes–, consideramos de interés presentarla de manera separada del capítulo anterior y estudiarla en profundidad, pues con ello se aporta un nuevo enfoque y análisis sobre un patrimonio arquitectónico y cultural de relevancia internacional.

Ya hemos hablado anteriormente de la importancia del rosetón principal de la catedral. En cuanto al Laberinto, digamos que las más tempranas representaciones conocidas de laberintos datan de finales del Neolítico y principios de la Edad del Bronce [Reed, 1992]. El primer pavimento conocido, con laberinto, en el contexto cristiano se encuentra en Argelia en la Basílica de San Reparatus en Chelf (año 324 C.E.) [Fawcett, 2001]. Al principio, los laberintos aparecieron principalmente en manuscritos, pero durante el siglo XII comenzaron a realizarse en las catedrales e iglesias de Italia y a lo largo del siglo XIII se extendieron en Francia. De todos los laberintos medievales, el más conocido es, sin duda, el de la Catedral de Chartres. Son muchas las preguntas sobre los laberintos de la Edad Media, y numerosas las utilidades que se les atribuyen, en especial al de Chartres; por ejemplo, uso penitencial para ser recorrido de rodillas y alcanzar el centro a modo de peregrinaje a la Jerusalén celestial, o uso litúrgico para realizar manifestaciones

rituales en el día de Pascua de resurrección [Wright, 2001]. Incluso, hay teorías que sostienen que el laberinto –con sus 122 semicírculos perimetrales, 28 en cada uno de sus cuatro cuadrantes– sirvió como calendario lunar para determinar la Semana Santa en la liturgia cristiana [Critchlow et al., 1975; Artress, 1995].

Ahora bien, varios han sido los trabajos intentando dar respuesta a la existencia del propio Laberinto de Chartres [Tomasini, 2015]; incluso algunos basados en la relación entre ambos elementos arquitectónicos –laberinto y rosetón– teniendo en cuenta solo sus dimensiones y ubicaciones [Critchlow et al., 1975; Ferré, 2001; Santarcangeli, 2002; Laporte y Odette, 1997]. Hasta el presente trabajo, el rosetón de la fachada principal nunca ha sido considerado como un instrumento astronómico relativo a las estrellas. Aquí en esta Tesis ya hemos mostrado una correlación geométrico-astronómica que relaciona el rosetón y los elementos de la planta de Chartres con el catasterismo de la diosa Isis. Seguidamente, estudiaremos con más profundidad la relación del laberinto con la estrella *Elthor* de la constelación de Tauro, constelación la cual está mitológicamente ligada al laberinto.

Bien sabemos ya, por el capítulo anterior, que proyectamos los astros de la esfera celeste por el centro del rosetón de la fachada principal, y con sus órbitas astronómicas diarias obtenemos las trayectorias de los mismos sobre la planta de la Catedral, y que este proceso no es solo atribuible a la Catedral de Chartes.

7.2 Breve descripción del Laberinto de la Catedral de Chartres.

No se sabe con seguridad cuándo concretamente fue construido el Laberinto, aunque existen varias teorías que lo intentan determinar. Las investigaciones de John James [James, 1977 y 1990] y Craig Wright [Wright, 2001] sugieren que el Laberinto tuvo que ser construido en los primeros años del siglo XIII –durante el inicio del periodo de construcción de la catedral, la cual en su mayor parte fue construida entre 1194 y 1226 (Figura 7b)–.

El Laberinto está determinado geoméricamente por una elipse cuyos ejes mayor y menor miden 12.903 m y 12.895 m , respectivamente. El centro \mathcal{L} del Laberinto está situado sobre el eje longitudinal de la catedral y dista $l = 32.20\text{ m}$ respecto de la entrada de la fachada principal. El recorrido del laberinto se va enroscando hasta terminar en un círculo concéntrico a la elipse de diámetro 3.035 m . John James [James, 1990] determinó la longitud del recorrido total del laberinto en 264.40 m , y una anchura del camino en 0.34 m .

Antiguamente, en su interno concéntrico círculo central, existía una placa de cobre. Aunque no se conoce concretamente su diseño, varios son los autores [Wright, 2001; Connolly, 2005; Villeté, 1994] que se decantan a favor de la versión de que en este elemento metálico central estaba grabada una representación del combate entre Teseo y el Minotauro. Esta original representación del Minotauro en el centro del laberinto de Chartres, aportaría un indicio más de apoyo –junto a las razones aludidas en la introducción– a la no inverosímil posibilidad del uso, por los constructores, de la correlación que en este trabajo

presentamos (Figura 7c). Sobre este asunto, el Sr. Gilles Fresson – Rectorado de la Catedral de Chartres– nos aporta el siguiente comentario:

“Las verdaderas fuentes bibliográficas sobre la placa central se reducen a una sola fuente la cual desapareció en el siglo XVIII; se trata de un manuscrito de Courtois, en el que afirmaba que el grabado representaba el combate entre Teseo y el Minotauro. Este manuscrito fue citado por Doublet de Boisthibault, "Notice sur le labyrinthe de la cathédrale de Chartres" Revue archéologique, vol. VIII, part 2, 1852. No obstante, también fue citado en una Memoria de Janvier de Flainville, localizada en la Bibliothèque Municipale de Chartres, la cual también desapareció en 1944. A pesar de este extravío, se sabe que Janvier de Flainville dijo que no consiguió reconocer tal representación, pues la placa estaba tan deteriorada que le pareció muy difícil determinar a ciencia cierta cualquier figura.”

Esta placa, junto con la relación mitológica helénica de la constelación de Tauro con el Laberinto, más el catasterismo de la constelación en relación a Isis, Notre-dame, es lo que da pie a considerar con más detenimiento la correlación del Laberinto de Chartres con *Elthor* de Tauro.

7.3 Órbitas astronómicas diarias y trayectorias diarias de proyección de la constelación de Tauro sobre la planta de la Catedral Chartres.

Cada una de las estrellas de la constelación de Tauro realiza diariamente una órbita circular \mathcal{C} en el firmamento con el giro de la esfera celeste (Figura 6d).

Con los parámetros considerados en la sección 6.3 (Tabla 6a) proyectamos las órbitas diarias \mathcal{C}_i de las 20 estrellas más brillantes de la constelación de Tauro –catalogadas por Bayer con magnitud visual $v \leq 6$ y tabuladas en la Tabla 7a y Tabla 7b– sobre la planta de la catedral de Chartres a través del centro del rosetón \mathcal{O} . Hemos construido la tabla, en *J1200*, gracias a los algoritmos presentados en el Capítulo II y el Capítulo IV de la presente Tesis.

Bayer	Nombre	Flujo v	Movimiento Propio		J2000	
			mas/yr α	mas/yr δ	Ascensión R. α	Declinación δ
α	<i>Aldebarán</i>	0.87	63.45	-188.94	04 ^h 35 ^m 55 ^s	12° 30' 33"
β	<i>Al Nath</i>	1.65	22.76	-173.58	05 ^h 26 ^m 17 ^s	28° 36' 26"
γ	<i>Hyadum I</i>	3.65	115.46	-23.42	04 ^h 19 ^m 47 ^s	15° 37' 39"
δ	<i>Hyadum II</i>	3.77	106.56	-29.18	04 ^h 22 ^m 56 ^s	17° 32' 33"
ϵ	<i>Ain</i>	3.53	106.19	-37.84	04 ^h 28 ^m 36 ^s	19° 10' 49"
ζ	<i>Alhecka</i>	2.97	1.78	-20.07	05 ^h 37 ^m 38 ^s	21° 08' 33"
η	<i>Alcyone</i>	2.85	19.34	-43.67	03 ^h 47 ^m 29 ^s	24° 06' 18"
θ	<i>Tetha I</i>	3.85	104.97	-15.14	04 ^h 28 ^m 34 ^s	15° 57' 43"
θ	<i>Tetha II</i>	3.41	108.42	-26.74	04 ^h 28 ^m 39 ^s	15° 52' 15"
κ	<i>Kappa I</i>	4.21	105.1	-45.04	04 ^h 25 ^m 22 ^s	22° 17' 37"
κ	<i>Kappa II</i>	5.28	111.97	-47.71	04 ^h 25 ^m 25 ^s	22° 11' 59"
λ	<i>Elthor</i>	3.41	-8.02	-14.42	04 ^h 00 ^m 40 ^s	12° 29' 25"
ν	<i>Furibundus</i>	3.89	4.72	-3.78	04 ^h 03 ^m 09 ^s	05° 59' 21"
ξ	<i>Ushakaron</i>	3.73	50.58	-39.54	03 ^h 27 ^m 10 ^s	09° 43' 57"
o	<i>Omicron</i>	3.62	-67.04	-78.04	03 ^h 24 ^m 48 ^s	09° 01' 43"
ρ	<i>Rho</i>	4.66	103.2	-26.48	04 ^h 33 ^m 50 ^s	14° 50' 39"
Ω	<i>Omega</i>	4.93	-39.41	-60.79	04 ^h 17 ^m 15 ^s	20° 34' 42"
b	<i>111 Tau</i>	5.01	105.57	-15.00	04 ^h 28 ^m 50 ^s	13° 02' 51"
c	<i>Hyades 90</i>	4.27	102.40	-15.78	04 ^h 38 ^m 09 ^s	12° 30' 39"
d	<i>Hyades 88</i>	4.25	43.13	-52.71	04 ^h 35 ^m 39 ^s	10° 09' 38"
e	<i>30 Tau</i>	5.07	26.00	-28.84	03 ^h 48 ^m 16 ^s	11° 08' 35"
f	<i>5 Tau</i>	4.10	18.25	-1.92	03 ^h 30 ^m 52 ^s	12° 56' 12"

Tabla 7a. Coordenadas celestes, en la época *J2000*, de las principales estrellas de la constelación de Tauro. Destacamos la estrella *Elthor*, la cual es la quinta más brillante de toda la constelación.

Bayer	Nombre	Flujo v	Movimiento Propio		J1200	
			mas/yr α	mas/yr δ	Ascensión R. α	Declinación δ
α	<i>Aldebarán</i>	0.87	63.45	-188.94	03 ^h 50 ^m 30 ^s	14° 32' 51"
β	<i>Al Nath</i>	1.65	22.76	-173.58	04 ^h 36 ^m 08 ^s	27° 30' 51"
γ	<i>Hyadum I</i>	3.65	115.46	-23.42	03 ^h 34 ^m 48 ^s	13° 21' 26"
δ	<i>Hyadum II</i>	3.77	106.56	-29.18	03 ^h 37 ^m 21 ^s	15° 19' 17"
ϵ	<i>Ain</i>	3.53	106.19	-37.84	03 ^h 42 ^m 28 ^s	17° 03' 10"
ζ	<i>Alhecka</i>	2.97	1.78	-20.07	04 ^h 50 ^m 07 ^s	20° 15' 19"
η	<i>Alcyone</i>	2.85	19.34	-43.67	03 ^h 00 ^m 44 ^s	21° 18' 39"
θ	<i>Tetha I</i>	3.85	104.97	-15.14	03 ^h 43 ^m 23 ^s	13° 50' 13"
θ	<i>Tetha II</i>	3.41	108.42	-26.74	03 ^h 43 ^m 30 ^s	13° 44' 59"
κ	<i>Kappa I</i>	4.21	105.1	-45.04	03 ^h 38 ^m 20 ^s	20° 06' 18"
κ	<i>Kappa II</i>	5.28	111.97	-47.71	03 ^h 38 ^m 24 ^s	20° 00' 45"
λ	<i>Elthor</i>	3.41	-8.02	-14.42	03 ^h 16 ^m 53 ^s	09° 55' 01"
ν	<i>Furibundus</i>	3.89	4.72	-3.78	03 ^h 21 ^m 01 ^s	03° 27' 59"
ξ	<i>Ushakaron</i>	3.73	50.58	-39.54	02 ^h 44 ^m 20 ^s	06° 40' 09"
o	<i>Omicron</i>	3.62	-67.04	-78.04	02 ^h 42 ^m 16 ^s	05° 56' 37"
ρ	<i>Rho</i>	4.66	103.2	-26.48	03 ^h 48 ^m 55 ^s	12° 48' 53"
Ω	<i>Omega</i>	4.93	-39.41	-60.79	03 ^h 31 ^m 00 ^s	18° 15' 54"
b	<i>111 Tau</i>	5.01	105.57	-15.00	03 ^h 44 ^m 29 ^s	10° 56' 02"
c	<i>Hyades 90</i>	4.27	102.40	-15.78	03 ^h 53 ^m 52 ^s	10° 33' 32"
d	<i>Hyades 88</i>	4.25	43.13	-52.71	03 ^h 52 ^m 07 ^s	08° 01' 50"
e	<i>30 Tau</i>	5.07	26.00	-28.84	03 ^h 04 ^m 54 ^s	08° 22' 59"
f	<i>5 Tau</i>	4.10	18.25	-1.92	02 ^h 47 ^m 17 ^s	09° 44' 44"

Tabla 7b. Coordenadas celestes, en la época J1200, de las principales estrellas de la constelación de Tauro. Destacamos la estrella *Elthor*, la cual es la quinta más brillante de toda la constelación.

Con estas proyecciones de órbitas C_i , obtenemos sobre el pavimento de la catedral las trayectorias diarias T_i correspondientes a cada astro –con subíndice i –. Todo ello con los procesos de las secciones 2.7 y 4.5; el resultado puede observarse en la Figura 7d.

Destacamos dos hechos. El primero, que gran parte de las trayectorias diarias T_i de las estrellas de la constelación pasaban por la superficie del laberinto, y en concreto las trayectorias de estrellas importantes como T_{Ald} de *Aldebarán*, T_{Elt} de *Elthor* y T_{Ush} de *Ushakaron* (Figura 7e). El segundo, que la constelación diariamente barría al completo todo el área del laberinto.

Además de lo anterior, un singular tercer hecho destacado, y que resalta, es la precisión con la cual la trayectoria T_{Elt} de *Elthor* pasaba por el centro \mathcal{L} del Laberinto. Con los cálculos procesados, obtenemos que la desviación entre T_{Elt} y \mathcal{L} fue de 4.60 centímetros en *J1200.0*; llegando incluso –como explicaremos en la sección siguiente y mostraremos en la Figura 7f– a ser tal desviación de 0.00 centímetros en los primeros años de la construcción de la Catedral, o sea que la coincidencia llegó a producirse de manera exacta dentro de los 32 años del periodo de la construcción de la mayor parte de la Catedral.

En resumen, cada día en la época astronómica *J1200* se tenía el alineamiento arquitectónico-geométrico-astronómico entre: *Elthor*, \mathcal{O} y \mathcal{L} .

7.4 La correlación sucedía todos los días a lo largo del periodo de construcción del edificio cuando se implantó el Laberinto en la planta de la Catedral.

En la sección anterior hemos presentado, con más precisión que en el capítulo anterior, el alineamiento de *Elthor* con los dos elementos arquitectónicos ($O - L$). Ahora bien, se trata del alineamiento calculado en el día juliano $JD(2159345.0)$ determinado por la época astronómica $J1200.0$. El día juliano $JD(2159345.0)$ corresponde al 19 de diciembre a las 12^h meridiano Greenwich del año Juliano 1199 CE. Hemos dicho que el laberinto fue construido en los primeros años durante el inicio del periodo de construcción de la catedral, la cual en su mayor parte fue construida entre 1194 y 1226 (Figura 6f). Y hemos repetido a lo largo de la presente Tesis que la correlación, determinada ya geométrica, arquitectónica y astronómicamente por el alineamiento *Elthor*– $O - L$, sucedía todos los días a lo largo del periodo de construcción del edificio, y eso es a causa del lento cambio de la precesión terrestre y los movimientos propios de cada estrella en la esfera celeste. Para demostrar tal afirmación calculamos de nuevo la trayectoria diaria \mathcal{T}_{Elt} de *Elthor* en los dos extremos del periodo de construcción aludido. O sea, volvemos a calcular \mathcal{T}_{Elt} : en el día juliano $JD(2157165.0)$ el cual corresponde al 1 de enero a las 12^h meridiano Greenwich del año Juliano 1194 CE, y en el día juliano $JD(2169219.0)$ el cual corresponde al 31 de diciembre a las 12^h meridiano Greenwich del año Juliano 1226 CE –llamamos $\mathcal{T}_{\text{Elt}-1194}$ y $\mathcal{T}_{\text{Elt}-1226}$, respectivamente, a estas dos trayectorias diarias– (Tabla 7c).

Con todo el proceso de cálculo se obtiene que la desviación entre $\mathcal{T}_{\text{Elt-1194}}$ y \mathcal{L} era de 6.81 centímetros; y que la desviación entre $\mathcal{T}_{\text{Elt-1226}}$ y \mathcal{L} era de 5.31 centímetros; y dejando además el centro \mathcal{L} del Laberinto entre ambas trayectorias, con lo cual la desviación llegó incluso a ser nula. El detalle de las tres trayectorias diarias $\mathcal{T}_{\text{Elt-1194}}$, \mathcal{T}_{Elt} , $\mathcal{T}_{\text{Elt-1226}}$ se muestra en la Figura 7f. Estas desviaciones demuestran que efectivamente la alineación $\text{Elthor}-O-\mathcal{L}$ persistía diariamente a lo largo de la construcción.

<i>J1194.0</i>			
Bayer	Estrella	R. Ascensión α	Declinación δ
λ	<i>Elthor</i>	03 ^h 16 ^m 34 ^s	09° 53' 44"

<i>J1200.0</i>			
Bayer	Estrella	R. Ascensión α	Declinación δ
λ	<i>Elthor</i>	03 ^h 16 ^m 53 ^s	09° 55' 01"

<i>J1226.0</i>			
Bayer	Estrella	R. Ascensión α	Declinación δ
λ	<i>Elthor</i>	03 ^h 18 ^m 21 ^s	10° 00' 55"

Tabla 7c. Coordenadas celestes de *Elthor* a lo largo de la construcción de la Catedral de Chartres, época astronómica *J1194.0 - J1200.0 - J1226.0*.

7.5 Comentarios finales sobre la motivación y propósito de crear la alineación.

Ya hemos indicado anteriormente que varios han sido los trabajos intentando dar respuesta a la existencia del Laberinto de Chartres; incluso algunos basados en relaciones de ubicación entre otros elementos arquitectónicos de la catedral, como por ejemplo el rosetón de la fachada principal. Hasta la presente Tesis, el rosetón de la fachada principal nunca ha sido considerado como un instrumento astronómico relativo a las estrellas. También hemos dicho que es conocido que, en el círculo interior del laberinto de la catedral de Chartres, antiguamente existió una placa de cobre. Aunque no se conoce concretamente su diseño, varios son los autores que se han decantado a favor de la versión de que en este elemento metálico central estaba grabada una representación del combate clásico entre Teseo y el Minotauro. Esta original representación del Minotauro en el centro del Laberinto de Chartres, aportaría un indicio más de apoyo a la no inverosímil posibilidad del uso, por los constructores, de la correlación que en este trabajo hemos presentado.

Estos incidios históricos, nos han sugerido considerar, de entre las 48 constelaciones recogidas en el Almagesto de Ptolomeo y reconocidas en la Edad Media por el mundo occidental, la constelación de Tauro con sus 142 estrellas visibles sin aparatos ópticos. Entonces en esta investigación hemos proyectado las órbitas diarias C_i de tales estrellas, a través del centro del rosetón de la fachada principal, y en la época de construcción de la catedral –época astronómica $J1200-$, y hemos

obtenido así las trayectorias diarias \mathcal{T}_i de las estrellas sobre la planta de la edificación. Los resultados obtenidos, descritos con precisión en la sección anterior, los mostramos en la Figura 7d y detalladamente en la Figura 7f.

Podemos con todo afirmar que en el transcurso de la construcción, todo el área al completo del laberinto era barrido diariamente por la constelación de Tauro (Figura 7d). Y además podemos afirmar que gran parte de las trayectorias diarias \mathcal{T}_i de las estrellas de la constelación pasaban por la superficie del laberinto, en concreto las trayectorias de estrellas importantes como \mathcal{T}_{Ald} de *Aldebarán* (α Tau) –el ojo del toro– y \mathcal{T}_{Ush} de *Ushakaron* (ξ Tau) –las patas–, mostrando la distribución de partes importantes del catrasterismo del toro sobre la superficie completa del laberinto (Figura 7e). Y en particular, podemos afirmar que se producía de forma bastante precisa la correlación consistente en el alineamiento *Elthor*- \mathcal{O} - \mathcal{L} . Dicho de forma más clara: la estrella *Elthor* –única estrella la cual posee el nombre de la constelación de Tauro, “el toro” y que se encuentra en el corazón del catasterismo de tal constelación, Figura 7e–, el centro \mathcal{O} del rosetón de la fachada principal y el centro \mathcal{L} del laberinto se alineaban con precisión en la época astronómica *J1200.0*. Esta correlación persistía diariamente a lo largo de los 32 años del periodo de la construcción de la mayor parte de la Catedral de Chartres, e incluso llegó a producirse de manera exacta.

En cuanto a las posibles motivaciones para crear tal alineación por parte de los constructores de Chartres, ya hemos comentado la mitología que relaciona la constelación de Tauro con el Laberinto, y la

placa que había en su círculo central. Además de la relación de Notre Dame = Isis = María, la diosa vaca de la maternidad del panteón egipcio, con la constelación. Pero además puede hacerse hincapié en la centralidad de *Elthor*. *Elthor*, como hemos visto, es el centro anatómico de Tauro, el corazón el pecho del toro, y también el centro gráfico según la representación clásica de Bayer, y de hecho según la representación clásica Helenística, que aún no siendo *Elthor* la estrella más brillante de la constelación, (aunque es nada más y nada menos que la quinta más brillante de entre 142) no es de importancia menor, pues es la estrella central que une la parte superior e inferior de la constelación. Esto hace que no sea de extrañar la alineación del "centro" del Laberinto con *Elthor* siendo esta estrella el "centro" de Tauro. Todo esto junto, ofrece suficientes indicios para considerar verosímil que los constructores crearan de manera intencionada la alineación.

Aún así, no hemos pretendido afirmar, ni negar, que los constructores tuvieran en cuenta de forma intencionada este alineamiento en el diseño de la construcción; pero sí hemos demostrado la existencia geométrica del mismo entre estos elementos arquitectónicos. Con ello, aportamos un nuevo enfoque y análisis relativo a la Catedral de Chartres –patrimonio arquitectónico y cultural de relevancia–, que relaciona objetiva y compositivamente dos elementos arquitectónicos de la propia edificación.

Figuras relacionadas con el Capítulo VII

Figura 7a. Redibujado del rosetón de la fachada principal de la Catedral de Chartres. Elemento arquitectónico considerado en el análisis.

Figura 7b. Redibujado del laberinto de la Catedral de Chartres. Elemento simbólico considerado en el análisis.

Figura 7c. Esquema de la alineación entre el rosetón de la fachada principal, el laberinto y la constelación de Tauro. La representación de la constelación es la que ofrece públicamente la Unión Astronómica Internacional (www.iau.org).

Figure 7d. Trayectorias \mathcal{T}_i sobre la planta de la catedral de Chartres. En color azul las correspondientes a las estrellas de Tauro y especialmente en rojo la correspondiente a *Elthor*. De manera genérica, se indica en color negro el mallado de declinaciones.

Figure 7e. *Tabula Vigesima Tertia, TAVRVS* de *Uranometria* de Johann Bayer. Universitätsbibliothek Heidelberg. <http://digi.ub.uni-heidelberg.de/diglit/bayer1648/0076>.

Figure 7f. Detalle en color negro de las trayectorias $\mathcal{T}_{Ushakaron}$, \mathcal{T}_{Elthor} y $\mathcal{T}_{Aldebaran}$ en la época astronómica *J1200*. Detalle en color azul de la trayectoria \mathcal{T}_{Elthor} en la época astronómica *J1194* y *J1226*.

UNIVERSITAT ROVIRA I VIRGILI

ANÁLISIS GEOMÉTRICO Y ASTRONÓMICO EN LA CATEDRAL DE CHARTRES

Juan Miguel Seguí Colomar

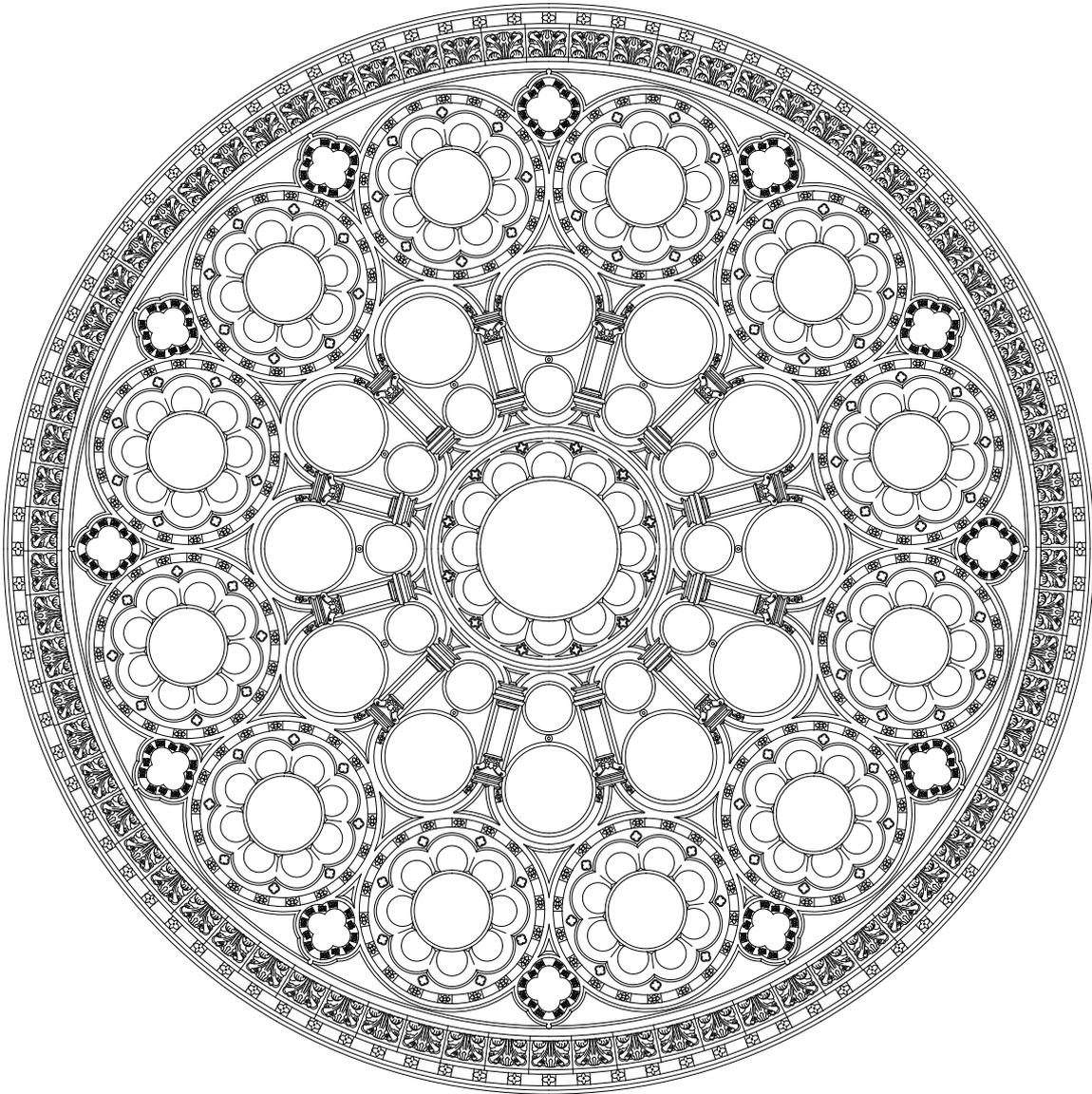


Figura 7a

UNIVERSITAT ROVIRA I VIRGILI

ANÁLISIS GEOMÉTRICO Y ASTRONÓMICO EN LA CATEDRAL DE CHARTRES

Juan Miguel Seguí Colomar

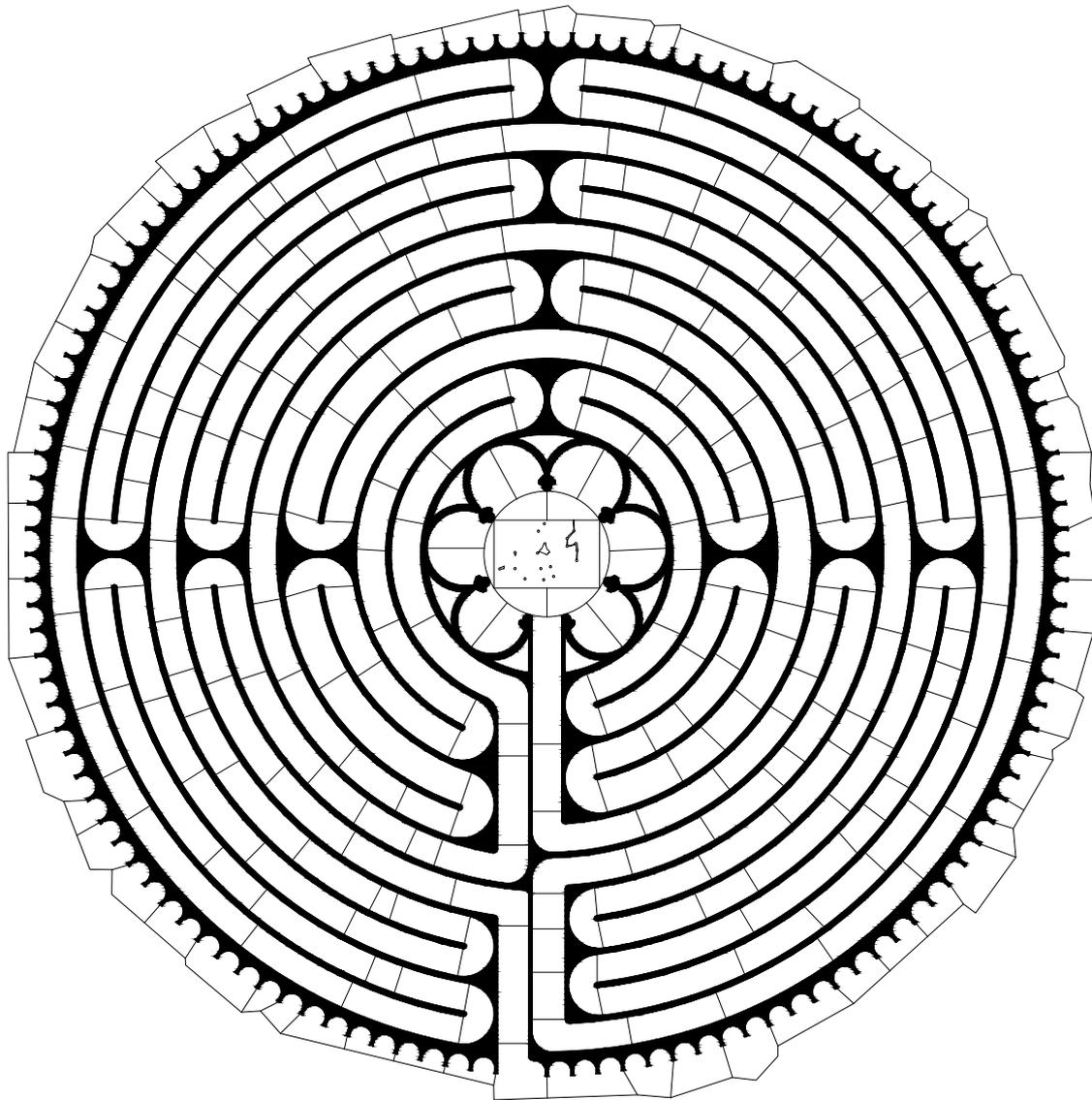


Figura 7b

UNIVERSITAT ROVIRA I VIRGILI

ANÁLISIS GEOMÉTRICO Y ASTRONÓMICO EN LA CATEDRAL DE CHARTRES

Juan Miguel Seguí Colomar

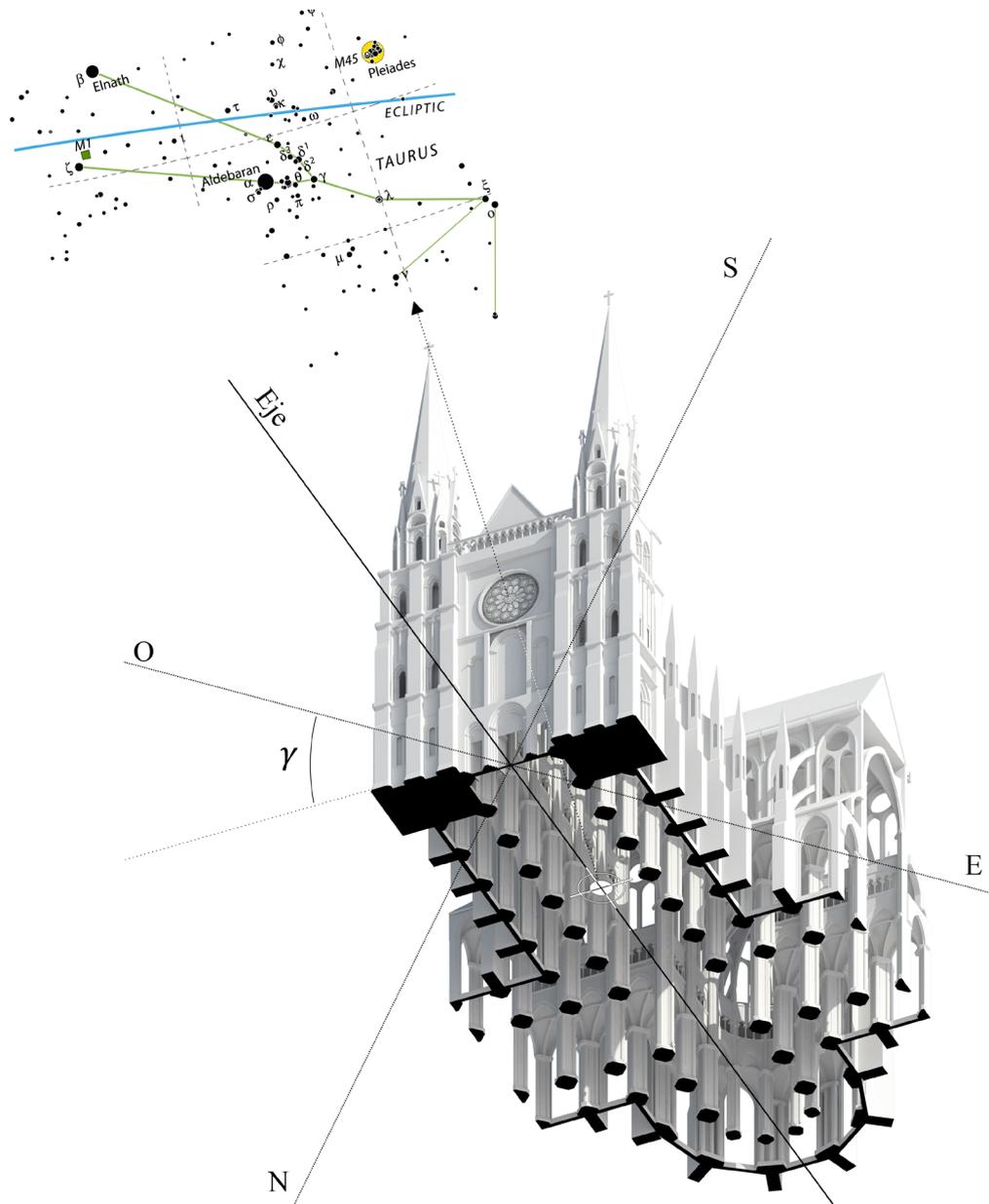


Figura 7c

UNIVERSITAT ROVIRA I VIRGILI

ANÁLISIS GEOMÉTRICO Y ASTRONÓMICO EN LA CATEDRAL DE CHARTRES

Juan Miguel Seguí Colomar

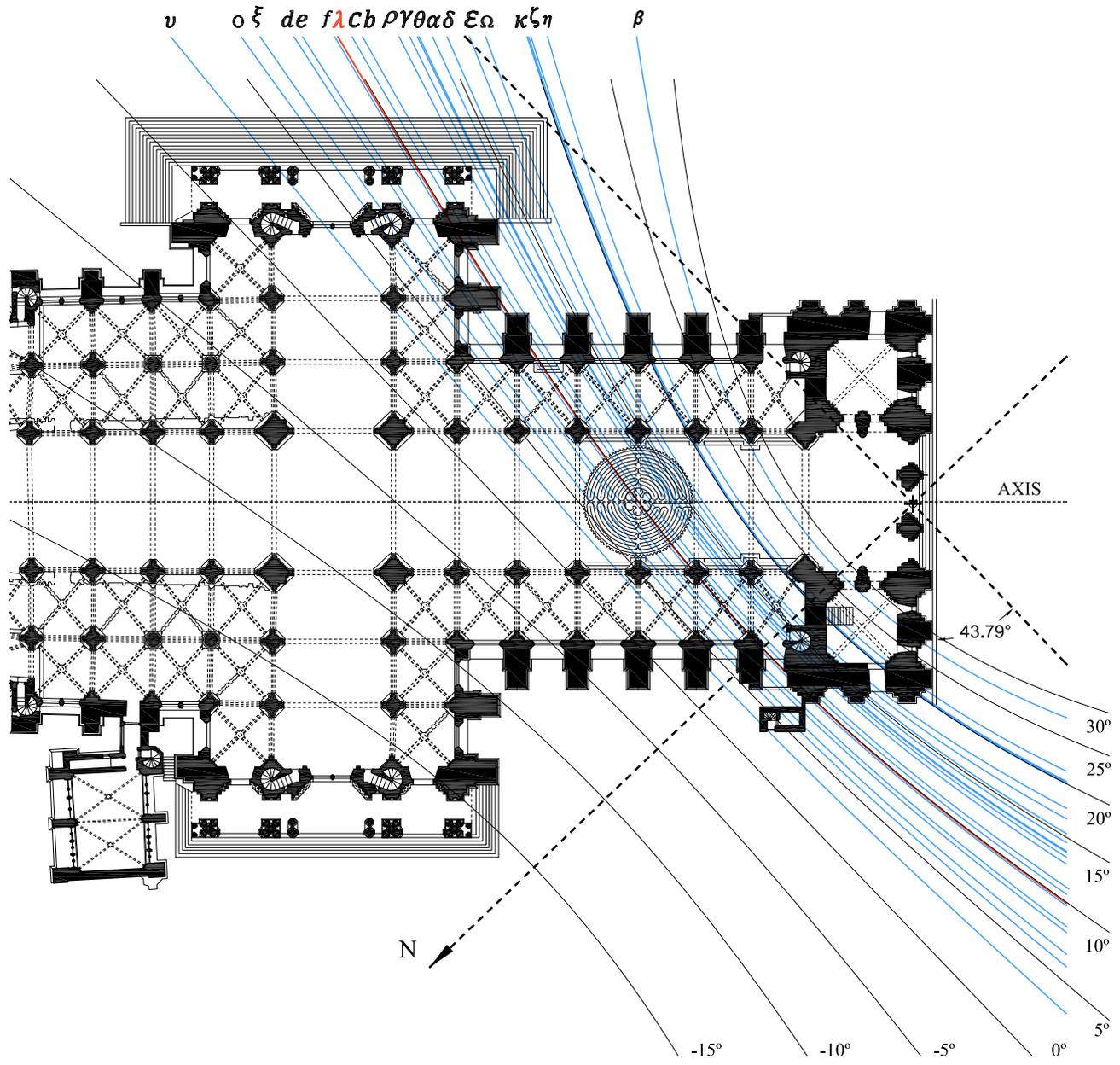


Figura 7d

UNIVERSITAT ROVIRA I VIRGILI

ANÁLISIS GEOMÉTRICO Y ASTRONÓMICO EN LA CATEDRAL DE CHARTRES

Juan Miguel Seguí Colomar

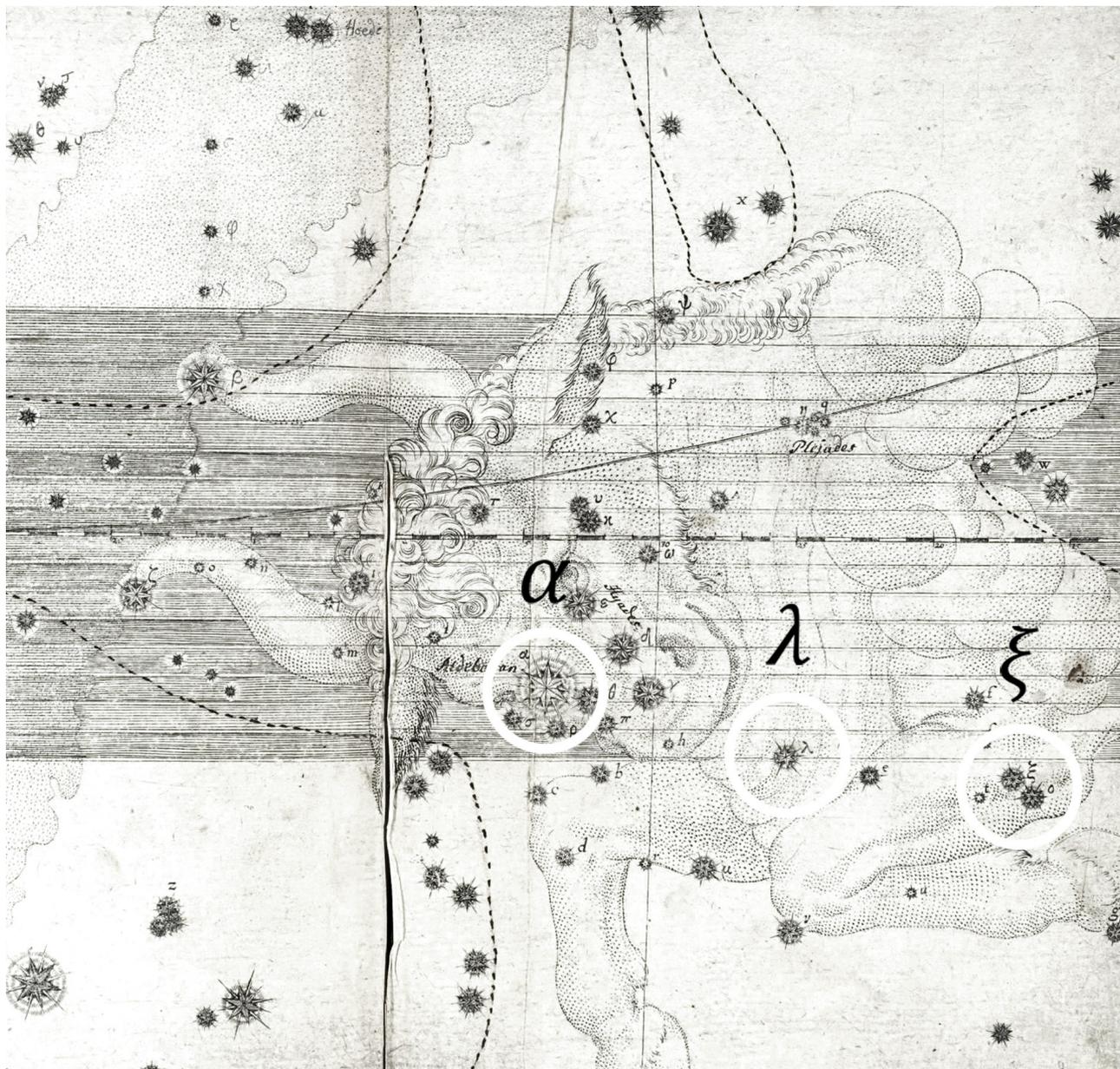


Figura 7e

UNIVERSITAT ROVIRA I VIRGILI

ANÁLISIS GEOMÉTRICO Y ASTRONÓMICO EN LA CATEDRAL DE CHARTRES

Juan Miguel Seguí Colomar

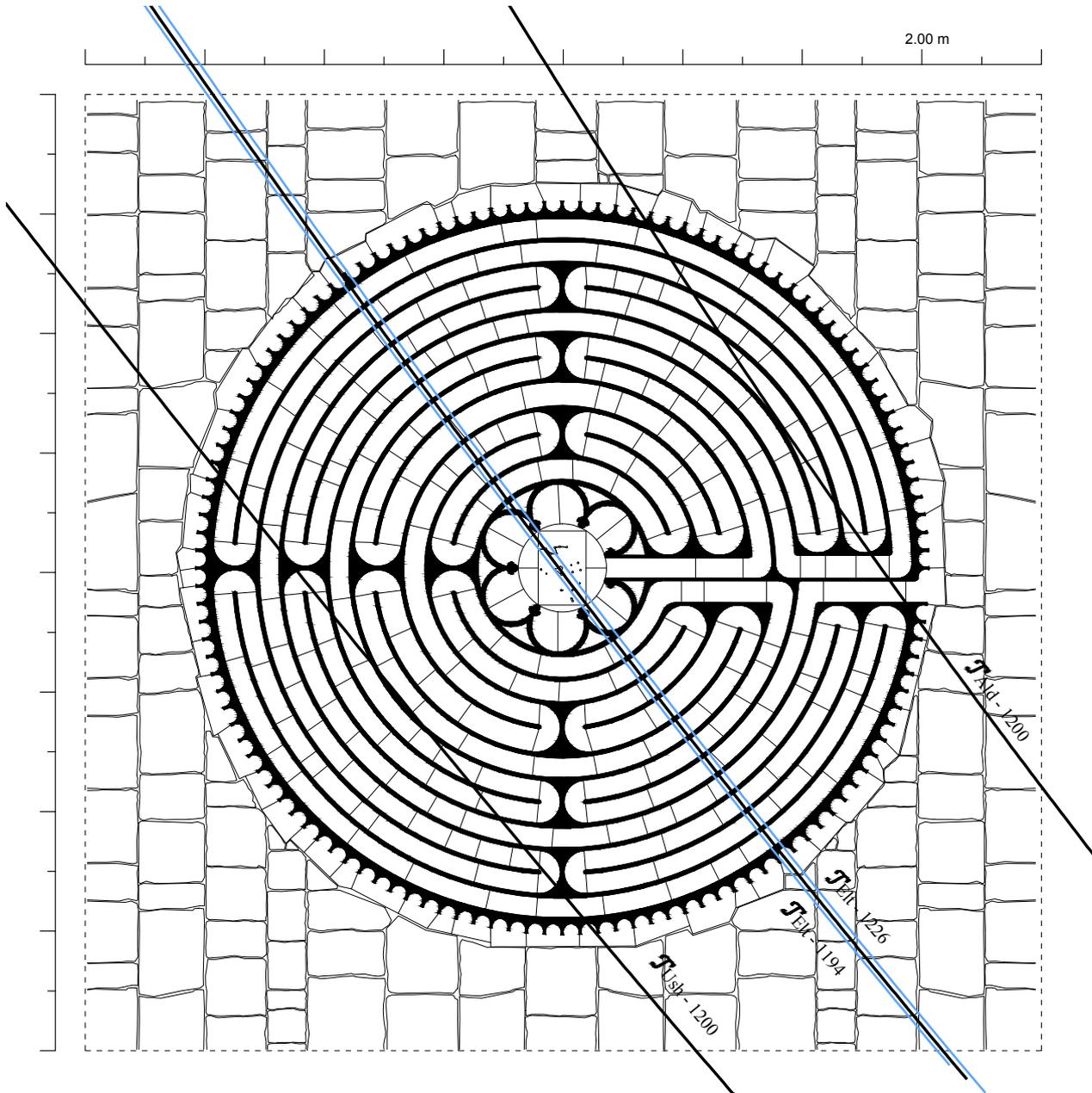


Figura 7f

UNIVERSITAT ROVIRA I VIRGILI

ANÁLISIS GEOMÉTRICO Y ASTRONÓMICO EN LA CATEDRAL DE CHARTRES

Juan Miguel Seguí Colomar

CAPÍTULO VIII

RESUMEN DE RESULTADOS DE LA PRESENTE TESIS

Una vez aplicada la geometría, astronomía y estadística; calculado todo lo necesario vía computo numérico; y presentados los resultados gráficamente: en este capítulo expresaremos, a modo de **resumen de la presente Tesis**, los resultados en forma de "*teoremas arquitectónicos*".

Como dijimos en la introducción: la expresión "*teoremas arquitectónicos*", más propia de la Geometría que de la Arquitectura, la usamos para hacer hincapié y recalcar que los resultados obtenidos son independientes del observador, y están despojados de subjetividad; son afirmaciones las cuales, bajo *hipótesis arquitectónicas*, usando conceptos geométricos, estadísticos y astronómicos aportan *tesis arquitectónicas*.

UNIVERSITAT ROVIRA I VIRGILI

ANÁLISIS GEOMÉTRICO Y ASTRONÓMICO EN LA CATEDRAL DE CHARTRES

Juan Miguel Seguí Colomar

8.1 Teorema 1. La determinación arquitectónica de: el Laberinto, el Crucero, el Ábside, la Girola y el Rosetón de la fachada principal de la Catedral de Chartres, sigue fielmente el patrón astronómico del catasterismo milenario de la deidad egipcia Isis = Notre-Dame.

Más concretamente, hemos demostrado que:

- 1) Existe una correlación lineal entre la configuración estelar de las declinaciones del catasterismo milenario, objetivo y no especulativo, de la deidad Isis –*Elthor, Spica, Isis, Sirio y Adhara* de las constelaciones de Tauro, Virgo y Can Mayor–, en la época astronómica *J1200.0* de la construcción de la Catedral de Chartres, y las declinaciones del diseño constructivo de la Catedral con probabilidad $1 - \kappa = 0.9994$ y coeficiente de correlación de Pearson $R_{pq} \cong 0.99$.
- 2) Esta correlación lineal hace que las declinaciones generadas por los parámetros constructivos $\{\lambda, \varphi, \gamma, \mathcal{G}, \mathcal{A}, \mathcal{C}, r, d, \mathcal{L}, \bar{l}, \bar{c}, \bar{a}, \bar{g}\}$ de la Catedral de Chartres sean explicadas casi en su totalidad, al $\eta_{adj}^2 \times 100 = 98\%$, por las declinaciones estelares de Isis.
- 3) La desviación geométrica $D \in [0^\circ, 180^\circ]$ –la máxima desviación posible es 180° grados exagesimales– entre las dos configuraciones de declinaciones estelares es muy pequeña $D = 0^\circ.52$.
- 4) La probabilidad de que tal coincidencia de configuraciones celestes no sea un resultado aleatorio, o sea la probabilidad de que el resultado

no se haya producido por un simple azar no atribuible al diseñador de Chartres es $F = 0.9999997$.

5) Esta correlación, no ocurrió un solo día, si no que ocurría cada día a lo largo de los 32 años iniciales de la construcción de la Catedral, a causa del lento movimiento estelar propio y de precesión del eje terrestre.

Además, hemos hecho notar que:

No existe margen a la duda, que pueda afectar a las afirmaciones del párrafo anterior, sobre la instrumentación óptica disponible en la época de la construcción de la catedral, pues el catasterismo objetivo y milenario de Isis –*Elthor, Spica, Isis, Sirio* y *Adhara*– está muy lejos del límite visual del ojo humano sin ayuda de aparatos ópticos; y tampoco hay margen para la duda sobre el conocimiento del catasterismo de Isis por parte de los constructores, pues son estrellas conocidas desde hace miles de años por las culturas mediterráneas y muy bien conocidas por la cultura global occidental.

8.2 Teorema 2. El centro del Laberinto y del Rosetón de la fachada principal de la Catedral de Chartres estuvieron alineados con la estrella central *Elthor* de la constelación de Tauro la cual es catasterismo de Isis = Notre-Dame; fue la alineación con total precisión y además cubría la constelación, en su trayectoria diaria, completamente al Laberinto.

Más concretamente, hemos demostrado que:

1) Cada día en la época astronómica *J1200* se tenía el alineamiento arquitectónico-geométrico-astronómico entre: *Elthor*, \mathcal{O} y \mathcal{L} (estrella central *Elthor* de la constelación de Tauro catasterismo de Isis, centro del Rosetón principal y centro del Laberinto).

Además hemos demostrado que:

2) Gran parte de las trayectorias diarias \mathcal{T}_i de las estrellas de la constelación pasaban por la superficie del laberinto, y en concreto las trayectorias de estrellas importantes como \mathcal{T}_{Ald} de *Aldebarán*, \mathcal{T}_{Elt} de *Elthor* y \mathcal{T}_{Ush} de *Ushakaron* (Figura 7e).

3) La constelación diariamente barría al completo todo el área del Laberinto.

4) Y resalta la precisión con la cual la trayectoria \mathcal{T}_{Elt} de *Elthor* pasaba por el centro \mathcal{L} del Laberinto. Con los cálculos procesados, obtenemos que la desviación entre \mathcal{T}_{Elt} y \mathcal{L} fue de 4.60 centímetros en *J1200.0*; llegando incluso a ser tal desviación de 0.00 centímetros en los primeros años de la construcción de la catedral, o sea que la

coincidencia llegó a producirse de manera exacta dentro de los 32 años del periodo de la construcción de la mayor parte de la catedral.

Y además, hemos hecho notar, que:

En cuanto a las posibles motivaciones para crear tal alineación por parte de los constructores de Chartres, hemos comentado la mitología que relaciona la constelación de Tauro con el Laberinto, que es conocido que en el círculo interior del laberinto de la Catedral de Chartres, antiguamente existió una placa de cobre. Aunque no se conoce concretamente su diseño, varios son los autores que se han decantado a favor de la versión de que en este elemento metálico central estaba grabada una representación del combate clásico entre Teseo y el Minotauro. Además hemos comentado la equivalencia Notre Dame = Isis = María, la diosa vaca de la maternidad del panteón egipcio, y su catasterismo egipcio en la constelación. Además puede hacerse hincapié en la centralidad de *Elthor*. *Elthor*, como hemos visto, es el "centro" anatómico de Tauro, el corazón el pecho del toro, y también el "centro" gráfico según la representación clásica de Bayer, y de hecho según la representación clásica Helenística, que aún no siendo *Elthor* la estrella más brillante de la constelación, (aunque es nada más y nada menos que la quinta más brillante de entre 142) no es de importancia menor, pues es la estrella central que une la parte superior e inferior de la constelación. Esto hace que no sea de extrañar la alineación del "centro" del Laberinto con *Elthor* siendo esta estrella el "centro" de Tauro. Todo esto junto, ofrece suficientes indicios para considerar verosímil que los constructores crearan de manera intencionada la alineación.

CAPÍTULO IX

ESTUDIOS EN CURSO RELACIONADOS CON LA TESIS DOCTORAL

En este Capítulo IX presentamos tres trabajos que usan las mismas técnicas y base computacional presentadas en los Capítulos II y III. La estructura de los mismos sigue un formato de artículo debido que son trabajos que se están evaluando o se evaluarán próximamente en revistas científicas especializadas.

El primer trabajo, presentado en la Sección 9.1, titulado "*Revisión geométrica y astronómica de la Teoría de Lous Charpentier*" consiste en evaluar una teoría sobre la especial ubicación geográfica de varias Catedrales Góticas francesas.

El segundo trabajo, presentado en la Sección 9.2, titulado "*Una determinación de la ubicación de las fuentes de la Plaza de San Pedro del Vaticano por medio de su obelisco egipcio y la estrella Sirio*" muestra que la estrella Sirio –la más brillante del firmamento nocturno– permite determinar la localización de las fuentes que decoran la Plaza, aclarando así diferentes disquisiciones históricas.

Y el tercer trabajo, presentado en la Sección 9.3, titulado "*Proyección gráfica de la constelación del Dragón sobre la planta de la Sagrada Familia a través de su rosetón de la fachada de la Natividad*" consiste en visualizar –con técnicas geométricas, gráficas y astronómicas– la Constelación del Dragón desde el interior del Templo de la Sagrada Familia diseñada por el Arquitecto Antoni Gaudí.

UNIVERSITAT ROVIRA I VIRGILI

ANÁLISIS GEOMÉTRICO Y ASTRONÓMICO EN LA CATEDRAL DE CHARTRES

Juan Miguel Seguí Colomar

SECCIÓN 9.1

REVISIÓN GEOMÉTRICA Y ASTRONÓMICA DE LA TEORÍA DE LOUIS CHARPENTIER

En el año 1969, el historiador Louis Charpentier publicó –sin rigor científico– una teoría donde afirmaba, de manera simple y sin apoyo geométrico ni astronómico, que once Catedrales Notre-Dame francesas fueron ubicadas geográficamente tomando como modelo la geometría de la Constelación de Virgo; más concretamente Charpentier dice: *“Existe, en lo que antaño fuera la Galia Bélgica, en las antiguas provincias de Champaña, Picardía, Ile-de-France y Neustria, cierto número de catedrales bajo la adoración de Notre-Dame (de los siglos XII y XIII). Ahora bien, esas iglesias trazan, sobre el terreno, y casi exactamente, la constelación de Virgo tal como se presenta en el cielo”*. El conjunto de catedrales a las que Charpentier se refiere está formado por aquellas que se encuentran en las ciudades de: Bayeux, Rouen, Évreux, Chartres, Etampes, Paris, Abbeville, Amiens, Laon, Reims y Epine. Nuestro estudio aquí presente pretende: primero, revisar esta teoría con rigor geométrico, astronómico y estadístico, contrastando así la simple afirmación que Charpentier hizo; y segundo, ampliar esta revisión incorporando en el análisis todo el conjunto de catedrales Notre-Dame francesas construidas entre los siglos XII-XIII, por lo tanto ampliar la muestra estadística de Charpentier con un total de 18 construcciones. En definitiva: ¿es realmente cierto que las Catedrales Notre-Dame francesas fueron ubicadas según el mapa estelar de Virgo?

UNIVERSITAT ROVIRA I VIRGILI

ANÁLISIS GEOMÉTRICO Y ASTRONÓMICO EN LA CATEDRAL DE CHARTRES

Juan Miguel Seguí Colomar

1. Introducción

La arqueo-astronomía –ciencia que estudia la relación de la astronomía con los yacimientos y arquitecturas de los pueblos de la antigüedad– requiere la precisión de los métodos de la matemática y de la astronomía para determinar la posición de los astros en tiempos remotos y para relacionar la ubicación de los monumentos y templos con los fenómenos celestes. Se han realizado múltiples estudios arqueo-astronómicos en las últimas décadas, como por ejemplo: las relaciones astronómicas con las arquitecturas Mayas [Ashmore y Sabloff, 2003; Aveni y Horst, 1978 y 1986; Šprajc y Sánchez, 2012]; la demostración empírica del uso del conocidísimo monumento de Stonehenge como un previsor de eclipses [Hoyle, 1966]; la correlación entre el emplazamiento de las 3 pirámides de la meseta de Giza y la ubicación de las tres estrellas centrales del cinturón de Orión [Bauval y Gilbert, 1994]; el análisis solar a través de las oberturas de las Catedrales Góticas [Heilbron, 2001]; e incluso, la relación entre la orientación de las estructuras de los templos griegos con ciertas constelaciones [Hannah, 2013; González y Belmonte, 2014].

Como se observa con estos ejemplos, para las civilizaciones del pasado las construcciones sagradas eran emplazamientos dedicados al culto de los dioses y a los fenómenos celestes. Las observaciones astronómicas que desde ellos se realizaban no obedecían solamente al interés por comprender la naturaleza, sino que implicaban la posibilidad de comunicarse con las divinidades y entender sus designios. La disposición de los edificios sagrados debía reflejar el orden cósmico, por

esta razón muchos templos de la antigüedad se encuentran alineados en correspondencia con el desplazamiento de los astros en la bóveda celeste.

Este trabajo pretende evaluar una teoría sobre la especial ubicación geográfica de varios templos enmarcados en uno de los estilos arquitectónicos más relevantes. Las Catedrales Góticas constituyen una creación artística de entre las más importantes y punteras de la historia de la humanidad; en especial las dedicadas a la adoración de Notre-Dame. Son creaciones promovidas por inquietudes religioso-transcendentales, patrones estéticos e influencias sociales; y en las cuales se aglutinó un gran conocimiento científico. Estas peculiaridades sumadas a la especial ubicación geográfica/astronómica de once Catedrales Notre-Dame francesas hacen que tenga interés revisar con métodos precisos la Teoría de Louis Charpentier. Aquí, comprobaremos con técnicas geométricas y astronómicas si la ubicación de ciertas catedrales Notre-Dame francesas realmente tiene o no correlación con la posición de varias estrellas concretas de la Constelación de Virgo.

Louis Charpentier afirma [Charpentier, 1969], que las Catedrales Notre-Dame francesas están ubicadas geográficamente "siguiendo" la Constelación de Virgo (Figura 9a). Para ello procede con los siguientes pasos:

1. Considera 11 catedrales ubicadas en las siguientes ciudades: Bayeux, Rouen, Évreux, Chartres, Etampes, Paris, Abbeville, Amiens, Laon, Reims y Epine.

2. Considera la constelación de Virgo.
3. Asigna a cada una de las catedrales mencionadas una estrella de la constelación de Virgo.
4. Presenta dos dibujos (Figura 9b y Figura 9c), los cuales consisten en una línea poligonal más unos cuantos puntos; un dibujo es para catedrales y el otro para estrellas asignadas. Los dibujos pretenden seguir la posición geográfica de las primeras y la posición astronómica de las segundas.
5. Con los dos dibujos anteriores Charpentier concluye la afirmación siguiente: *"Existe, en lo que antaño fuera la Galia Bélgica, en las antiguas provincias de Champaña, Picardía, Ile-de-France y Neustria, cierto número de catedrales bajo la adoración de Notre-Dame (las de los siglos XII y XIII). Ahora bien, esas iglesias trazan, sobre el terreno, y casi exactamente, la constelación de Virgo tal como se presenta en el cielo."* Capítulo 2, Páginas 38 y 39 [Charpentier, 1969].

1.1 Problemas del proceso y de la afirmación de Louis Charpentier

1.1.1 Problemas del proceso

1. De todas las Catedrales Notre-Dame francesas de los siglos XII y XIII, él solo considera 11. No obstante, l'Église Saint-Vulfran d'Abbeville no es Notre-Dame.
2. Él no considera las 15 estrellas más brillantes –más visibles– de la constelación de Virgo, las cuáles determinan clásicamente la figura de Virgo. Lo que hace, pero no lo dice, es considerar todas las estrellas, visibles por el ojo humano, que se encuentran en la zona de la esfera celeste asignada a la constelación de Virgo. Dicho de forma más precisa: considera todas las 96 estrellas que tienen magnitud visual $v \leq 6$ de la zona de la esfera celeste asignada a la constelación de Virgo.
3. No dice cómo determina la asignación de cada estrella a cada catedral. Claramente él asigna Spica a Reims y Porrima a Chartres –suponemos que fija esta asignación por ser las dos estrellas más brillantes y porque considera que estas dos catedrales son las dos más importantes–. En cuanto al resto de la asignación "nos parece" que Charpentier sigue el siguiente proceso:
 - 3.1. Charpentier presenta un dibujo no coordinado, plano, poligonal –y que respeta poco la posición geográfica de las catedrales–; el cual es un pentágono más 7 puntos que no están en sus lados. Los

vértices del pentágono corresponden a 5 catedrales, además 6 de los otros 7 puntos los asigna a sendas 6 catedrales y, finalmente, un punto carece de asignación (Figura 9b).

3.2. Charpentier presenta un dibujo no coordinado, plano, poligonal –y que respeta poco la posición astronómica de las estrellas–; el cual es un hexágono más 11 puntos que no están en sus lados. Los vértices del hexágono corresponden a 6 de las 96 estrellas visibles, 8 de los otros 11 los asigna a sendas 11 estrellas –asignación de entre las 96 visibles– y finalmente, tres puntos carecen de asignación (Figura 9c).

3.3. La elección de Spica ($\alpha - Virginis$) y Porrima ($\gamma - Virginis$) en el dibujo de la Figura 2, ya la hemos comentado al inicio de apartado 3; sin embargo, no sabemos –pues Charpentier no lo dice– cómo él hace la elección del resto de estrellas.

3.4. Finalmente, Charpentier procede a realizar su afirmación basándose en una simple apreciación visual de ambos dibujos. Sin embargo, nosotros planteamos aquí ya de forma disruptiva que: Si nos limitamos a la comparación de ambas figuras por pura apreciación visual entonces claramente inferimos que no hay suficiente evidencia objetiva para concluir que es cierta la afirmación de Charpentier. Visualmente no existe relación entre ambas figuras. Proceder a extraer una conclusión pretendidamente científica y objetiva –pues Charpentier habla de arquitectura, geografía y astronomía– por vía de apreciación visual y con tales dibujos es incorrecto.

Además de lo anteriormente dicho, observando los dos dibujos de Charpentier (Figura 9b y Figura 9c), parece que él hace la elección de las 14 estrellas considerando la figura de las 11 catedrales y asignándoles las 14 estrellas visibles más cercanas a ellas. Pero ¿en qué época?, pues además del movimiento terrestre de precesión de equinoccios, las estrellas tienen cada una de ellas su movimiento propio. Y ¿cómo ha dispuesto Charpentier las catedrales junto a las estrellas para tomar las medidas?, y ¿cómo hace el cálculo de las medidas? Charpentier no dice nada sobre esto.

Se observa que considerando la Época astronómica de referencia $J2000$ –correspondiente a la época del día Juliano $JD(2451545.0)$ – la figura de las estrellas (Figura 9c) está rotada respecto al ecuador celeste e invertida al observar la esfera celeste desde la Tierra. La (Figura 9b) también está un poco rotada respecto al ecuador terrestre.

1.1.2 Problemas de la afirmación

Una vez que tengamos resueltos los problemas aludidos en la anterior sección, hacemos aquí hincapié en que: un simple proceso visual sobre las dos figuras presentadas por Charpentier no permite afirmar científicamente que "una explica la otra". En cualquier caso, para poder afirmar de manera geoméricamente objetiva que una figura explica la otra se habría de proceder, por ejemplo, con los siguientes pasos:

1. Tomar coordenadas precisas y consistentes al problema planteado. O sea, tomar coordenadas de longitud y latitud terrestres además de coordenadas de ascensión recta y declinación celestes, en una época adecuada.
2. Mostrar estadísticamente que se puede descartar la hipótesis nula $h_0 =$ "No existe correlación lineal entre las coordenadas de los puntos de ambas figuras" con alta probabilidad, o sea con bajo nivel de significancia α . La probabilidad de tal existencia es $1 - \alpha = 0.99$, y los cálculos para encontrar esa probabilidad los haremos aplicando el *test - t de Student* con $n-2$ grados de libertad, donde n es el número de coordenadas consideradas.
3. Mostrar que tal correlación lineal hace que una figura explique la otra en una alta proporción. Los cálculos para encontrar el tanto por ciento de la explicación ofrecida por la correlación los haremos aplicando el coeficiente ajustado de determinación de *Pearson* en tanto por ciento $\eta_{adj}^2 \times 100$.
4. Y dado que cuanto más similitud posea una figura respecto a la otra ocurre que más similares serán las coordenadas, entonces hay además que: Mostrar que la desviación entre la recta de regresión lineal y la bisectriz del primer y tercer cuadrante es pequeña, dentro del intervalo de parámetros de las coordenadas del problema. Más concretamente: Mostrar que el $d = \max_{x \in [a,b]} |b + x \tan \theta - x|$ es pequeño, donde $y = b + x \tan \theta$ es la ecuación de la recta de regresión, $y = x$ es la ecuación de la

bisectriz, a y b son respectivamente el mínimo y máximo de las coordenadas. La amplitud θ del ángulo de la pendiente de la recta de regresión la obtenemos con el cálculo clásico de variancias y covariancias; el parámetro b los obtenemos con el cálculo clásico de medias y variancias.

Sin embargo, nada de todo lo considerado en esta sub-sección, o alguna metodología similar, es ni siquiera mencionado por Charpentier.

2. Revisión de la Teoría de Louis Charpentier.

Mostrados todos los problemas anteriores, vamos a revisar la Teoría de Charpentier.

2.1 Consideraciones previas

1. Resolveremos el primer y principal problema consistente en que Charpentier considera solo once catedrales (y una no es Notre-Dame), procediendo doblemente: Por un lado, revisaremos la teoría con el conjunto de las 11 catedrales consideradas por el propio Charpentier; y por otro lado, revisaremos la misma teoría incorporando en el estudio todas las Catedrales Notre-Dame francesas construidas entre los siglos XII y XIII. Este segundo conjunto está formado por las siguientes 18 Notre-Dame Catedrales: Bayeux, Rouen, Evreux, Chartres, Etampes, Paris, Amiens, Laon, Reims, Epine, Rodez, Clermont, Coutances, Strasbourg, Noyon, Sées, Senlis y Verdun.

2. Aceptamos considerar todas las estrellas visibles a simple vista en la zona celeste asignada a la constelación de Virgo; o sea, aceptamos considerar las 96 estrellas que tienen magnitud visual $v \leq 6$ de la zona de la esfera celeste asignada a la constelación de Virgo. Pueden encontrarse los datos astronómicos de tales estrellas, por ejemplo, en la base de datos astronómicos SIMBAD [SIMBAD].

3. Para poder hacer afirmaciones científicas objetivas tomamos coordenadas celestes de ascensión recta y declinación de la posición en la esfera celeste de las estrellas; y con ello, claramente aparece un primer problema insoslayable: La posición de las estrellas varía en la esfera celeste en todo momento. La variación es grande a causa del movimiento del eje terrestre de precesión de equinoccios, y es pequeña a causa del movimiento propio de cada una de las estrellas. Pero, en cualquier caso en este tipo de estudio, la variación combinada por ambos movimientos es un efecto que ha de tenerse en cuenta de manera ineludible. Charpentier no especifica ninguna época astronómica. Nosotros fijaremos la *J1200.0* –época astronómica cercana a la construcción de las catedrales–, la cual corresponde al 19 de diciembre a las 12^h según meridiano de Greenwich del año Gregoriano 1199 CE; o sea, es la época del día Juliano *JD(2159345.0)*. El lector puede acudir a cualquier libro sobre astronomía, como por ejemplo [Martín, 1990; Meeus, 1991, Capítulo 7, páginas 59-66], para aclarar correctamente la definición y cálculos de: año Gregoriano de CE, año Juliano de

CE y BCE, día Juliano JD(*) y época astronómica J*. Téngase cuidado con no confundir "día del año Juliano" de CE y BCE correspondiente al calendario Juliano propuesto por Julio César, con "día Juliano" JD(*) correspondiente al cómputo temporal propuesto por Joseph Scaliger.

4. Hemos comentado que la figura geográfica (Figura 9b), está un poco rotada respecto del ecuador terrestre y que, considerando la época astronómica de referencia $J2000$, la figura estelar (Figura 9c) está rotada respecto el ecuador celeste e invertida al observar la esfera celeste desde la Tierra; lo mismo ocurre en la época que nosotros hemos fijado –época $J1200.0$ –. Para obtener la posición estelar del dibujo de Charpentier se necesita hacer una rotación de la posición estelar hasta hacer coincidir la inclinación del segmento que une las catedrales de Chartres y Reims de su Figura 9b con la inclinación del segmento que une las estrellas Porrima (γ) y Spica (α) de su Figura 9c.

2.2 Transformación estelar de las Catedrales

¿Cómo dispuso Charpentier las catedrales junto a las estrellas para tomar las medidas?, y ¿cómo hizo el cálculo de las medidas? Charpentier no dice nada sobre estas cuestiones, pero parece que procedió de la manera siguiente: Él primero realizó un plano de las catedrales, el cual es la Figura 9b, procurando seguir la posición geográfica. Seguidamente, él tomó una carta estelar donde figuraban todas las 96 estrellas con magnitud $v \leq 6$ de la zona de la esfera celeste

de Virgo, sin tener en cuenta los efectos de la curvatura al superponerla sobre un plano. Después él invirtió, rotó y escaló y suponemos que superpuso esta zona de Virgo de la carta estelar sobre su Figura 9b haciendo coincidir el segmento Chartres-Reims con el segmento Porrina-Spica. Finalmente, con ello, él tomó distancias sobre tal plano de la Figura 9b eligiendo las estrellas cercanas y así construir la Figura 9c.

Sea como fuere, aunque el proceso hubiera sido el anteriormente descrito, Charpentier cometió burdos errores en el proceso de distribución estelar y toma de medidas. Además visualmente sus dos figuras no parecen tener correlación objetiva.

Nosotros procederemos con un método geométrico objetivo de transformación estelar de catedrales –transformación de catedrales a astros–. Con tal transformación estelar, podremos comparar correctamente las posiciones entre las catedrales y las estrellas con total rigor matemático.

2.2.1 Pasos geométricos de la Transformación Estelar de catedrales

Procedemos a transformar las catedrales en astros con los siguientes pasos (el lector puede saltarse esta sección, la cual es muy técnica, e ir directamente a la sección de Resultados):

1. Consideramos las coordenadas de longitud/latitud terrestres, en grados sexagesimales, y con ellas situamos a las catedrales en una esfera de radio 1.
2. Consideramos las coordenadas de ascensión recta/declinación celestes, en grados sexagesimales, en la época astronómica $J1200$ y con ellas situamos a las 96 estrellas visibles en la misma esfera de radio 1. Para ello aplicaremos el cálculo del algoritmo riguroso para la precesión y movimiento estelar propio de cada estrella, determinado en el capítulo 21 (p. 131-142) de Meeus [Meeus, 1991], transformando las posiciones de la época astronómica de referencia $J2000.0$ en sus correspondientes en la época $J1200.0$.
3. Calculamos los vectores \vec{s} , \vec{p} , \vec{r} , \vec{c} y \vec{Q} , con origen el centro de la esfera, correspondientes a los vectores de posición de Spica, Porrina, Reims, Chartres y cada Catedral, respectivamente.
4. Calculamos las amplitudes ξ , η y ζ de los ángulos $\angle(\vec{s}, \vec{p})$, $\angle(\vec{r}, \vec{c})$ y $\angle(\vec{r}, \vec{Q})$ respectivamente.
5. Calculamos $h(\vec{Q})$ el vector homotético esférico de \vec{Q} en el subespacio vectorial $\langle \vec{r}, \vec{Q} \rangle$ con $h(\vec{r}) = \vec{r}$ y $\arccos \angle(\vec{r}, h(\vec{Q})) = \zeta \frac{\xi}{\eta}$ y $\det_{(\vec{r}, \vec{Q})}(\vec{r}, h(\vec{Q})) > 0$. O sea, aplicamos a cada catedral, con posición \vec{Q} , la homotecia esférica con centro en Reims que transforma $\angle(\vec{r}, \vec{c})$ –el ángulo de Reims a Chartres– en un ángulo

$\angle(\vec{r}, h(\vec{c}))$ cuya amplitud es la del ángulo de Spica a Porrima $\angle(\vec{s}, \vec{p})$, y obtenemos la posición $h(\vec{Q})$. Es decir, escalamos las distancias de la configuración de las catedrales de tal manera que la distancia angular de Reims a Chartres se transforma en la distancia angular de Spica a Porrima, manteniendo Reims inmóvil en su lugar inicial.

6. Calculamos $h'(\vec{Q})$ el vector rotado $h(\vec{Q})$ con ángulo de rotación $\angle(\vec{r}, \vec{s})$. O sea, aplicamos a cada vector de posición de catedral $h(\vec{Q})$ la rotación con eje vectorial perpendicular al sub-espacio vectorial $\langle \vec{r}, \vec{s} \rangle$ y con ángulo de rotación $\angle(\vec{r}, \vec{s})$; esta rotación transforma el vector \vec{r} de Reims en el vector \vec{s} de Spica y el vector relativo a Chartres $h(\vec{c})$ en $h'(\vec{c})$, así como el vector relativo a una catedral $h(\vec{Q})$ en $h'(\vec{Q})$. Es decir, una vez escalada la configuración de las catedrales rotamos la misma hasta superponer Reims sobre Spica.
7. Calculamos $h''(\vec{Q})$ el rotado de $h'(\vec{Q})$ con ángulo de rotación $\angle(h'(\vec{c}) - \vec{s} \cos \angle(h'(\vec{c}), \vec{s}), \vec{p} - \vec{s} \cos \angle(\vec{p}, \vec{s}))$. O sea, aplicamos a cada vector de posición de catedral $h'(\vec{Q})$ la rotación con eje vectorial \vec{s} y ángulo de rotación $\angle(h'(\vec{c}) - \vec{s} \cos \angle(h'(\vec{c}), \vec{s}), \vec{p} - \vec{s} \cos \angle(\vec{p}, \vec{s}))$, esta rotación transforma el vector de posición de relativo a Chartres $h'(\vec{c})$ en el vector de posición de \vec{p} Porrima, así como el vector relativo a una catedral $h'(\vec{Q})$ en el vector $h''(\vec{Q})$. Es decir, una vez escalada la configuración de las catedrales, y rotada la misma hasta superponer Reims sobre Spica, volvemos a rotarla

para tener superpuestos a la vez: Reims sobre Spica y la posición homotética de Chartres $h(\vec{c})$ sobre Porrima.

Con todos los cálculos anteriores conseguimos en la esfera celeste en la época $J1200.0$ las 96 estrellas de la constelación de Virgo con magnitud $v \leq 6$, además de una constelación de astros correspondientes a las 19 catedrales (11 correspondientes a la lista de catedrales consideradas por Charpentier y 8 más que proceden de la ampliación de las catedrales Notre-Dame consideradas en el punto 1 de la subsección 2.1). Estos 19 astros de más los llamaremos "constelación de catedrales".

Todos estos 115 "astros" poseen sus coordenadas celestes de ascensión recta y declinación; y poseen la virtud de respetar la configuración geográfica relativa entre las propias catedrales y la configuración celeste relativa entre las propias estrellas; y además coincide el segmento esférico de Chartres a Reims con el segmento de Spica a Porrima. Con tales coordenadas celestes podemos hacer los cálculos numéricos precisos, que determinan qué estrella de las 96 de la Constelación de Virgo es la más cercana en la esfera celeste para cada uno de los 18 astros de la constelación de catedrales Notre-Dame francesas y al astro de l'Église Saint-Vulfran d'Abbeville.

3. Resultados

En esta sección presentamos los resultados obtenidos a partir de todos los procesos y cálculos determinados en la sección anterior 2 y la sub-sección 1.1.2.

La Figura 9d muestra las posiciones obtenidas, en la época astronómica *J1200*, de las estrellas de la constelación de Virgo y de los astros de la constelación de Catedrales. Hacemos notar al lector que en la Figura 9d la forma de la constelación de Virgo y de las catedrales está un poco deformada con la forma que visualmente se tiene en la esfera celeste real. Esta pequeña deformación se debe a que la figura muestra de manera plana no esférica las posiciones poniendo directamente en ejes cartesianos de coordenadas la ascensión recta y la declinación.

La Tabla 9a muestra, en la época astronómica *J1200*, las coordenadas celestes obtenidas de los 19 astros de la constelación de catedrales, así como las coordenadas celestes de las 19 estrellas de la constelación de Virgo más cercanas a cada uno de los 19 anteriores. La Tabla 9a muestra también los nombres de las catedrales y de las estrellas.

Con los datos ofrecidos por la Tabla 9a, como dijimos en el punto 1 de la sección 2.1, procederemos doblemente. Estudiaremos, por un lado, los datos obtenidos para el conjunto de las 11 catedrales que considera Charpentier; y por otro lado, estudiaremos los datos obtenidos para el conjunto ampliado de las 18 catedrales Notre-Dame francesas. Así, la Tabla 9b muestra: la probabilidad $1 - \alpha$ de existencia de correlación

lineal, el coeficiente de determinación en tanto por ciento $\eta_{adj}^2 \times 100$ y la desviación d de la regresión con la bisectriz. Y todo ello para el conjunto de las 11 Catedrales de Charpentier y para el conjunto de las 18 Catedrales Notre-Dame francesas de los siglos XII y XIII.

		ESTRELLA	COORDENADAS ESTRELLA	
		HR	Ascensión R.	Declinación
SELECCIÓN SEGÚN CHARPENTIER	Bayeux	4849	12 ^h 5 ^m 37.6791250 ^s	14°4'4.1641190"
	Rouen	5015	12 ^h 37 ^m 16.878490 ^s	9°47'4.3109730"
	Évreux	4910	12 ^h 15 ^m 22.322177 ^s	7°48'39.855297"
	Chartres	4825/26	12 ^h 01 ^m 18.52210 ^s	2°58'21.587016"
	Etampes	4799	11 ^h 55 ^m 48.828021 ^s	-1°22'58.731901"
	Paris	4921	12 ^h 18 ^m 41.771192 ^s	0°34'36.780305"
	Abbeville	5105	12 ^h 53 ^m 44.561439 ^s	7°53'26.742933"
	Amiens	5059	12 ^h 45 ^m 27.188996 ^s	3°4'46.7251610"
	Laon	5100	12 ^h 51 ^m 17.769377 ^s	-5°55'9.3598880"
	Reims	5056	12 ^h 43 ^m 31.564639 ^s	-6°52'23.372331"
	Epine	5064	12 ^h 44 ^m 58.242162 ^s	-8°25'47.947076"
NOTRE-DAME AÑADIDAS	Rodez	4544	11 ^h 10 ^m 14.471963 ^s	-0°54'51.624328"
	Clermont	4587	11 ^h 19 ^m 54.794488 ^s	-5°53'57.912681"
	Countances	4828	12 ^h 01 ^m 15.581718 ^s	14°41'29.391682"
	Strasbourg	5001	12 ^h 33 ^m 26.583728 ^s	-15°35'14.59941"
	Noyon	5050	12 ^h 43 ^m 14.084654 ^s	-0°52'17.710399"
	Sées	4829	12 ^h 01 ^m 21.763772 ^s	11°14'41.471508"
	Senlis	4963	12 ^h 28 ^m 50.269841 ^s	-1°10'45.619041"
	Verdun	5068	12 ^h 45 ^m 23.043947 ^s	-11°42'29.73044"

Tabla 9a. Resultados obtenidos en el *J1200*: Constelación de Catedrales y estrellas de Virgo más cercanas.

		ESTRELLA	COORDENADAS CATEDRALES	
		HR	Ascensión R.	Declinación
SELECCIÓN SEGÚN CHARPENTIER	Bayeux	4849	12 ^h 9 ^m 48.7094840 ^s	15°35'56.720184"
	Rouen	5015	12 ^h 27 ^m 15.713797 ^s	7°29'6.36513100"
	Évreux	4910	12 ^h 15 ^m 35.944996 ^s	6°6'22.90223400"
	Chartres	4825/26	12 ^h 01 ^m 18.522154 ^s	2°58'21.5870160"
	Etampes	4799	12 ^h 05 ^m 47.1847750 ^s	-0°18'14.823203"
	Paris	4921	12 ^h 19 ^m 17.430765 ^s	0°4'0.743046000"
	Abbeville	5105	12 ^h 51 ^m 45.145209 ^s	5°48'47.3997240"
	Amiens	5059	12 ^h 48 ^m 59.888310 ^s	3°3'47.34973700"
	Laon	5100	12 ^h 49 ^m 19.394603 ^s	-4°2'53.3731310"
	Reims	5056	12 ^h 43 ^m 31.564639 ^s	-6°52'23.372331"
	Epine	5064	12 ^h 38 ^m 58.773674 ^s	-9°44'53.256722"
NOTRE-DAME AÑADIDAS	Rodez	4544	10 ^h 07 ^m 22.358837 ^s	-11°54'56.42601"
	Clermont	4587	10 ^h 54 ^m 0.3175930 ^s	-11°29'42.74417"
	Countances	4828	11 ^h 57 ^m 45.858628 ^s	18°34'9.308647"
	Strasbourg	5001	12 ^h 56 ^m 20.205342 ^s	26°17'11.799537"
	Noyon	5050	12 ^h 45 ^m 07.022796 ^s	-1°05'3.775192"
	Sées	4829	11 ^h 56 ^m 56.701027 ^s	9°42'18.979333"
	Senlis	4963	12 ^h 31 ^m 14.125907 ^s	-0°12'13.774850"
	Verdun	5068	12 ^h 51 ^m 45.144497 ^s	-13°26'37.86306"

Tabla 9a. Resultados obtenidos en el *J1200*: Constelación de Catedrales y estrellas de Virgo más cercanas.

	$1 - \alpha$	$\eta_{adj}^2 \times 100$	d
Catedrales según la Teoría de Charpentier	1.00	95.08	1.12°
Selección completa de Catedrales Notre-Dame	1.00	89.10	6.02°

Tabla 9b. Resultados geométrico-estadísticos.

Para aquellos lectores que deseen repetir los cálculos para obtener los datos de la Tabla 9b hacemos notar lo siguiente: Antes de hacer los cálculos de regresión entre estrellas y catedrales se multiplican por 15 las coordenadas de ascensión recta para que tengan la misma escala que la declinación; y luego se traslada el intervalo de las ascensiones rectas hasta centrarlo con el intervalo de las declinaciones, obteniendo así un único intervalo $[a, b]$ comentado en el punto d) de la sección 1.1.2. Este intervalo $[a, b]$ se calcula para los dos estudios: un intervalo para las $22 = 11 \times 2$ coordenadas de ascensión recta y declinación de las estrellas de Virgo y de los astros de las catedrales de la Tabla 9a en el caso de las 11 catedrales de Charpentier; y otro intervalo para las $36 = 18 \times 2$ coordenadas de la Tabla 9a en el caso de las 18 catedrales Notre-Dame.

4. Conclusiones

Con los resultados de la Tabla 9b concluimos lo siguiente:

Efectivamente, Louis Charpentier eligió un conjunto de 11 catedrales – 10 Catedrales Notre-Dame francesas y l'Église Saint-Vulfran d'Abbeville, construidas entre los siglos XII y XIII– que verifican que existe un subconjunto de 11 estrellas de entre las 96 con magnitud $v \leq 6$ de la Constelación de Virgo, tal que las figuras geométricas de ambos conjuntos poseen similitud. El 1% de la máxima variación angular posible 180° es 1.8° , por ello una variación de 1.12° es aceptable para mostrar similitud geométrica. La Tabla 9b muestra que la separación geométrica entre las dos figuras, dada por la desviación con la regresión, es de 1.12° . Sin embargo la similitud no es muy alta, pues estadísticamente la regresión muestra que una figura explica a la otra en un 95%, y no en un 99% tal como es esperable para una muy alta evidencia de similitud.

Muy al contrario a lo anterior ocurre al ampliar el estudio al conjunto de las 18 Catedrales Notre-Dame francesas de los siglos XII y XIII. El parámetro de la Tabla 9b muestra que se tiene solo un nivel de explicación estadística entre las figuras de un 89.10%. Y además se tiene una separación geométrica dada por la desviación de la regresión de 6.12° , la cual es mayor al 1.8° que se espera para la evidencia de similitud. Con ello podemos afirmar que para el conjunto completo de las catedrales Notre-Dame: no existe ningún subconjunto de 18 estrellas de entre las 96 con magnitud $v \leq 6$ de la Constelación de Virgo

con similitud geométrica entre ambos conjuntos de estrellas y catedrales.

En resumen, en el presente trabajo mostramos con rigor científico que: Existe un subconjunto de 11 estrellas de la constelación de Virgo con similitud geométrica, no muy alta, al conjunto de las 11 catedrales elegidas por Charpentier. Y no existe ningún subconjunto de 18 estrellas de la constelación de Virgo con similitud geométrica al conjunto de las 18 catedrales Notre-Dame francesas de los siglos XII y XIII.

Figuras relacionadas con la Sección 9.1 del Capítulo IX.

Figura 9a. Reproducción gráfica de la Teoría de Louis Charpentier sobre la cartografía de Francia.

Figura 9b. Dibujo realizado por Charpentier sobre la posición geográfica de las Catedrales. [Charpentier, 1969 - Capítulo 2, Página 37].

Figura 9c. Dibujo realizado por Charpentier sobre la posición astronómica de las estrellas. [Charpentier, 1969 - Capítulo 2, Página 37].

Figura 9d. Resultado gráfico en el *J1200*. Constelación de Virgo y Constelación de Catedrales consideradas por Charpentier (marcadas con una cruz) y Constelación de Catedrales Notre-Dame que incorporamos en el estudio (marcadas con un cuadrado).

UNIVERSITAT ROVIRA I VIRGILI

ANÁLISIS GEOMÉTRICO Y ASTRONÓMICO EN LA CATEDRAL DE CHARTRES

Juan Miguel Seguí Colomar

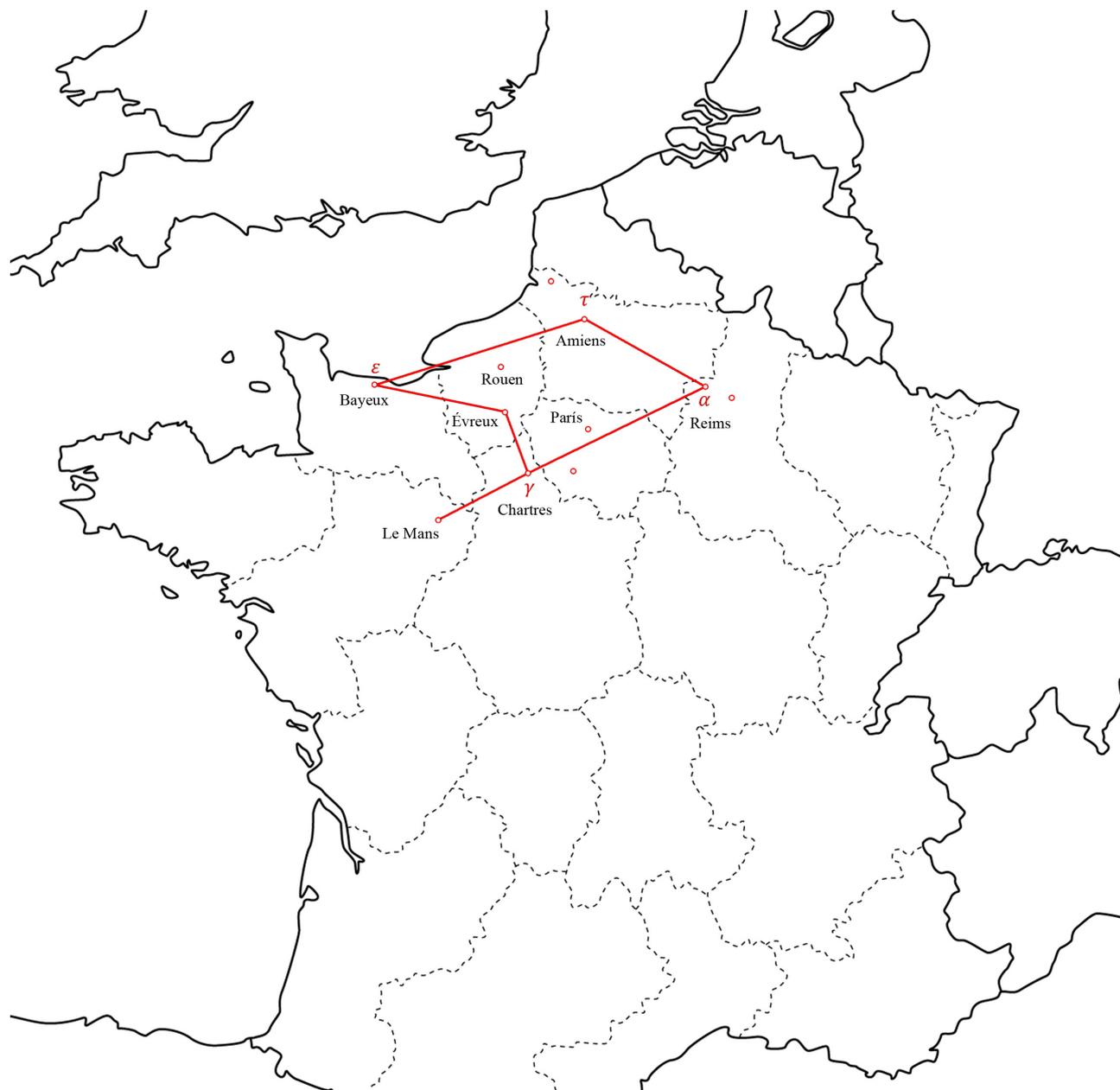


Figura 9a

UNIVERSITAT ROVIRA I VIRGILI

ANÁLISIS GEOMÉTRICO Y ASTRONÓMICO EN LA CATEDRAL DE CHARTRES

Juan Miguel Seguí Colomar

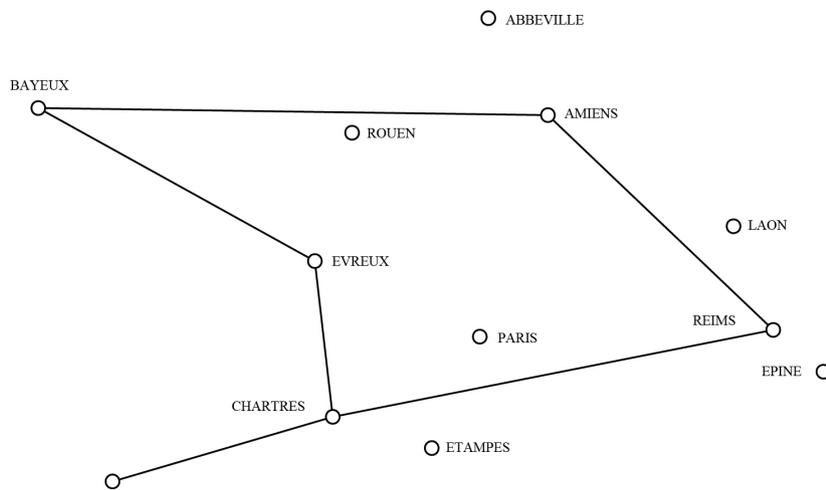


Figura 9b

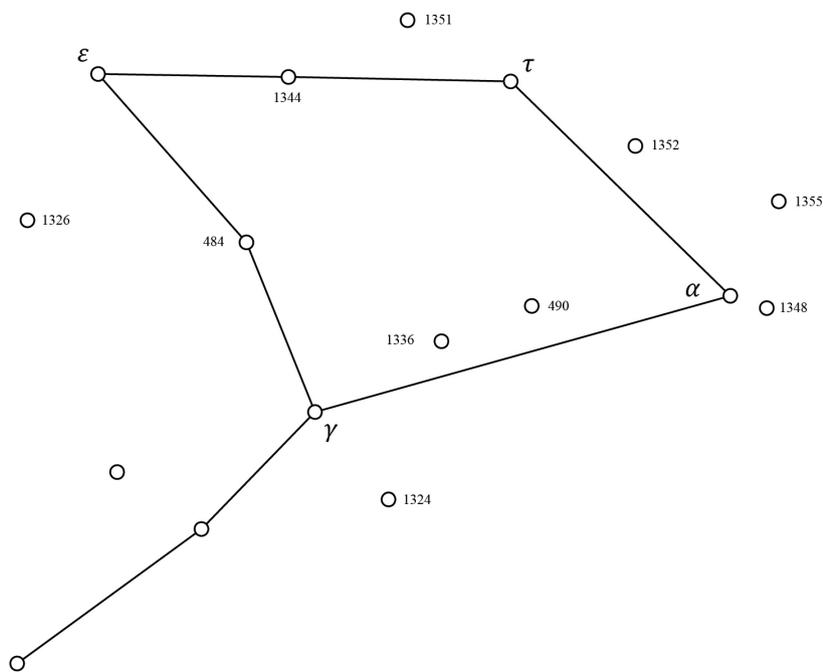


Figura 9c

UNIVERSITAT ROVIRA I VIRGILI

ANÁLISIS GEOMÉTRICO Y ASTRONÓMICO EN LA CATEDRAL DE CHARTRES

Juan Miguel Seguí Colomar

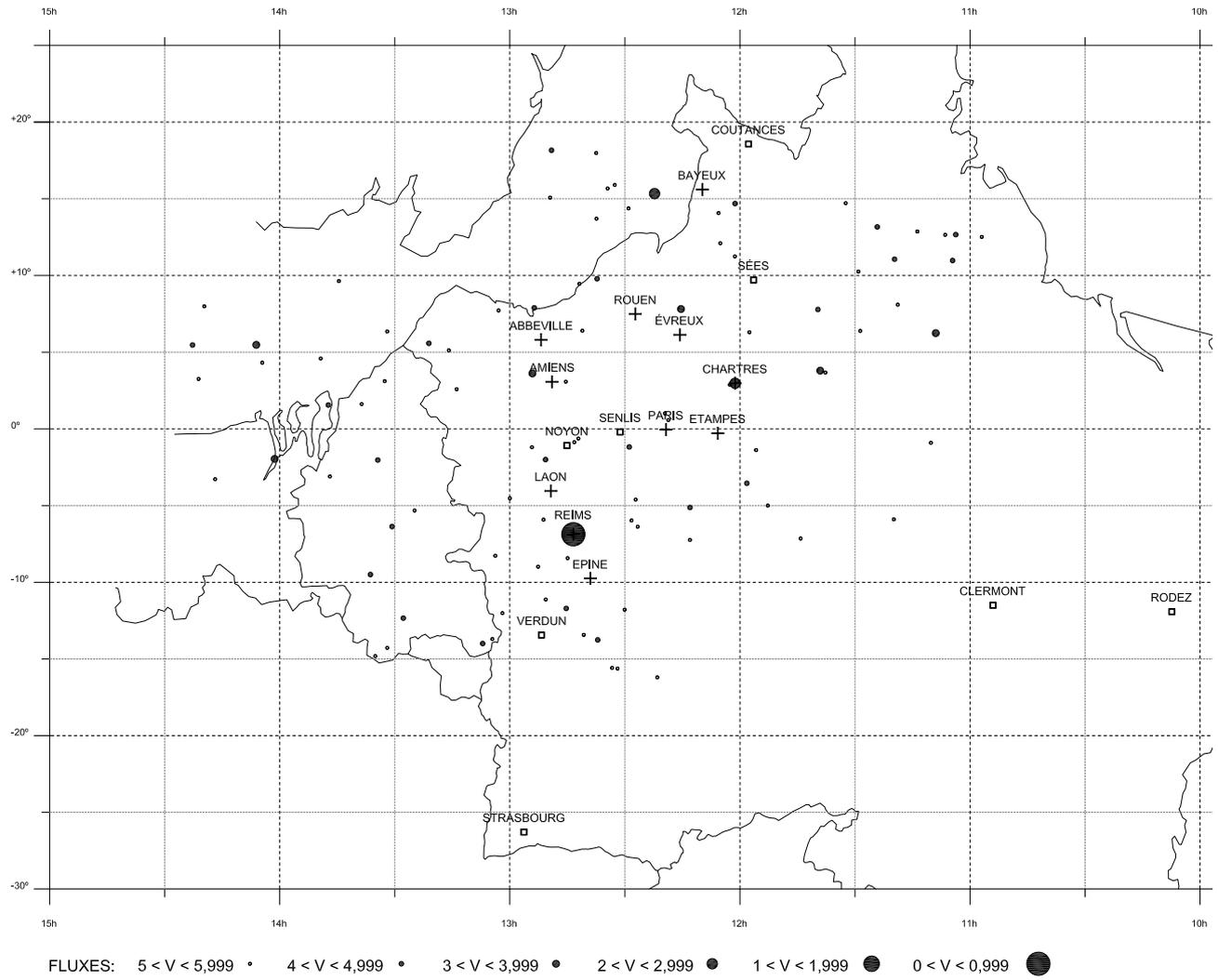


Figura 9d

UNIVERSITAT ROVIRA I VIRGILI

ANÁLISIS GEOMÉTRICO Y ASTRONÓMICO EN LA CATEDRAL DE CHARTRES

Juan Miguel Seguí Colomar

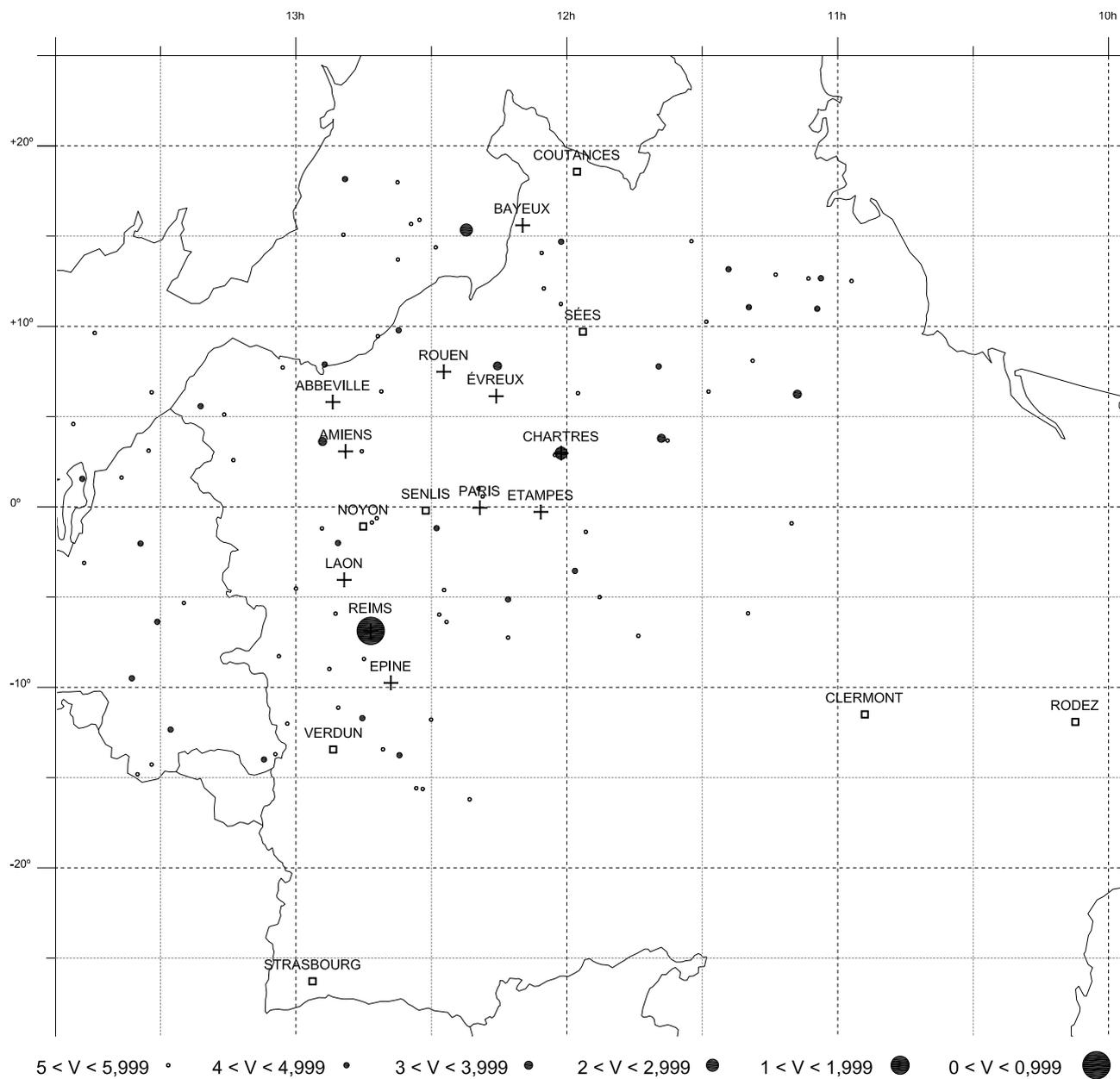


Figura 9d

UNIVERSITAT ROVIRA I VIRGILI

ANÁLISIS GEOMÉTRICO Y ASTRONÓMICO EN LA CATEDRAL DE CHARTRES

Juan Miguel Seguí Colomar

SECCIÓN 9.2

UNA DETERMINACIÓN DE LA UBICACIÓN DE LAS FUENTES DE LA PLAZA DE SAN PEDRO DEL VATICANO POR MEDIO DE SU OBELISCO EGIPCIO Y LA ESTRELLA SIRIO

En el presente trabajo, mostramos: 1) que no es cierto que la geometría de la plaza de San Pedro permita determinar la localización de sus dos fuentes y 2) que no es cierto que la sombra del obelisco de Calígula en el centro de la plaza determine la localización de las fuentes. Contrariamente, mostramos que la estrella Sirio –la más brillante del firmamento nocturno– sí permite determinar la localización de las fuentes. Esta determinación consiste en el alineamiento arquitectónico-geométrico-astronómico que existió en la época astronómica *J1677* de la construcción de la plaza, entre: la estrella Sirio - el Obelisco - y una de las Fuentes diseñada por Carlo Maderno.

UNIVERSITAT ROVIRA I VIRGILI

ANÁLISIS GEOMÉTRICO Y ASTRONÓMICO EN LA CATEDRAL DE CHARTRES

Juan Miguel Seguí Colomar

1. Introducción y consideraciones iniciales

El presente trabajo consiste en una investigación geométrica y astronómica que ofrece una determinación de la ubicación de las fuentes de la Plaza de San Pedro del Vaticano mediante una alineación que existió entre las fuentes, el obelisco situado en el centro de la plaza –traído de Egipto por el Emperador Calígula [Stevens, 2000]– y la estrella Sirio (Figura 9e); fue un alineamiento geométrico, el cual mostraremos que sucedía todos los días a lo largo del periodo en que se proyectó la plaza –época astronómica *J1677*–. Y dejamos claro desde este principio, que el presente trabajo no consiste en una investigación histórica, en el sentido de que no pretendemos afirmar, ni negar, que el diseñador de la plaza –el arquitecto Gian Lorenzo Bernini– considerase esta alineación de forma intencionada, o no, a la hora de situar las fuentes.

Como veremos, la alineación conformaba una correlación que permitía determinar la posición de las fuentes que decoran la plaza; mientras que –como mostraremos– no es cierta la afirmación de que la *determinación de la posición de las fuentes se puede hacer vía la posición de los focos de la elipse que pasa por los extremos de los ejes del óvalo que configura la plaza* –y no es cierta la afirmación a pesar de que se pueda encontrar repetidamente por internet, y a pesar de que incluso haya sido recogida en la literatura científica, por ejemplo [McCluskey, 1998; Sparavigna, 2015; Villani, 2012]–.

Por tanto, dada la facilidad de aplicar la correlación que mostraremos – Sirio es la estrella más visible del firmamento nocturno–, dado que esta sí que es una correlación que puede ser usada como determinación geométrica, y dada la importancia de los objetos que involucra –tanto arquitectónicos como celestes–, consideramos de interés presentar la alineación; pues con ello se aporta un nuevo enfoque en el análisis de un patrimonio arquitectónico y cultural de relevancia internacional.

1.1 Caso similar en el procedimiento y en la simbología

Como veremos más adelante, la correlación que presentaremos consiste en una alineación astronómico-arquitectónica, la cual encontraremos procediendo a proyectar, calculando numéricamente, en la planta de la plaza de San Pedro, la órbita diaria de la estrella Sirio a través de los símbolos situados sobre el obelisco.

1.1.1 Similitud en el procedimiento

Este proceso de proyectar órbitas –en particular la órbita de *Sirio*– no es una idea únicamente nuestra; realmente se trata de un proceso que ya fue usado en construcciones clásicas. Un ejemplo de relevancia es el gnomon Clementino en la Basílica de Santa María degli Angeli en Roma [Catamo y Lucatini, 2002]. El Papa Clemente XI encargó al astrónomo y arqueólogo Francesco Bianchini crear este gnomon; el cual se trata de un ingenioso instrumento que permite ver las órbitas de las estrellas durante el día, y no solo durante la noche, mediante la proyección de sus órbitas diarias sobre la planta de la Basílica, de la misma manera

que mostraros hacemos sobre la planta de la catedral de Chartres. De hecho el gnomon Clementino es un reloj de sol sincronizado con el tiempo sidéreo. Usando este reloj de sol es posible observar los tránsitos meridianos del Sol y de las estrellas *Sirio*, *Polar* y *Arturo*, simultáneamente, como arcos de elipse e hipérbola sobre la planta de la basílica. Estos arcos son proyecciones que se producen a través de agujeros en el techo y a través de un agujero en el centro del escudo de armas del Papa –el escudo muestra una estrella en su emblema– colocado en una pared de la basílica a una altura de 20.34 metros (Figura 9f y Figura 9g).

De manera análoga, en este trabajo repetiremos el mismo proceso pero con la simbología situada en la parte superior del obelisco central de la Plaza de San, calculando numéricamente las órbitas de las estrellas implicadas en la investigación.

1.1.2 Similitud en la simbología

Lo dicho anteriormente incide en la similitud del procedimiento que usaremos, pero además se tiene similitud en la simbología. La simbología que culmina el obelisco reproduce los símbolos que encontramos en el escudo papal de Alejandro VII, y además podemos observar similitudes con los símbolos que componen el escudo papal de Clemente XI referente al ejemplo arquitectónico anterior; obsérvese la Figura 9h para notar las similitudes aludidas.

1.2 Diseño de Bernini para la Plaza de San Pedro: disposición de las fontanas

Es bien sabido que Bernini proyectó la plaza –entre 1655 y 1667– con un diámetro máximo de 198,12 m (887,23 palmos romanos = 650 feet long) entre los dos arcos de columnatas; el punto medio de tal diámetro es determinado por el original obelisco egipcio de Calígula; el obelisco localiza la posición central de la plaza; geoméricamente la plaza está conformada con un óvalo de Serlio de tipo cuarto basado en el *Vesica Piscis* [Paul, 2001; Serlio y Scamozzi, 1600], cuyos centros –*centro del colonnato*– están claramente marcados en el pavimento de la plaza [Gridgeman, 1970; Wittkower, 1940; Krufft, 1979; Pinto, 1976] (Figura 9i).

En 1613 se situó en la plaza una primera fuente diseñada por Carlo Maderno; la posición primitiva de la fuente la marcamos en color naranja en la Figura 9j. Bernini en 1677 decidió recolocar la fuente de Maderno en línea con el obelisco sobre el eje mayor del óvalo de la plaza. La segunda fuente –idéntica a la primera excepto porque posee, a modo de ornamentación, el escudo papal de Clemente XI a diferencia de la primera que posee el escudo de Pablo V– fue diseñada y situada por Bernini simétrica a la primera respecto del eje menor del óvalo de la plaza. La disposición final de las fuentes las representamos en color azul en la Figura 9j.

Como hemos dicho al principio de esta introducción, se pueden encontrar citas afirmando que: *el par de fontanas se encuentra localizado en los focos de la elipse que tiene como ejes los ejes del óvalo*

de la plaza. Sin embargo, realizando un replanteo concreto con datos de la referencia vaticana [Dandini, 1816], tomando unas medidas *in situ* con un laser meter (Leica DISTO™ D510) y realizando un documento gráfico de comprobación con un Software Vectorial tipo CAD, observamos que la afirmación anterior no es cierta. Y la afirmación no es cierta: tanto si se considera el óvalo interior marcado sobre el pavimento de la plaza, como si se considera el óvalo exterior de la plaza, es decir el óvalo que configura el perímetro de la columnata. O sea, que en contra de ciertas afirmaciones, expondremos aquí que: la geometría intrínseca de la plaza no determina la posición del par de fontanas (Figura 9j).

En la Figura 9j mostramos de forma esquemática varias interpretaciones que realiza el autor del libro [Timoty, 1974] sobre cómo fue cambiando la posición de las fuentes a medida que se iba ajustando el diseño del espacio público de la plaza. En estos documentos no se observan evidencias gráficas ni interpretaciones geométricas sobre de cómo se situaron las fuentes en relación a su entorno inmediato. Además, incluso, si nos remontamos a dibujos originales de Bernini, mostrados en el libro [Timoty, 1974] procedentes de la Biblioteca Apostólica Vaticana, observamos que ni siquiera posiciona las fuentes en el replanteo inicial de la plaza (Figura 9k).

En cuanto a la geometría que determina el obelisco central de la plaza, varios trabajos han estudiado el obelisco como gnomon [Sparavigna, 2015], o sea que lo han estudiado como proyector de la sombra solar,

pero como mostramos en la Figura 9i, la sombra del obelisco no determina de manera intrínseca la posición de las fuentes.

Hasta el presente artículo, que nosotros sepamos, el obelisco nunca ha sido considerado como un instrumento astronómico relativo a las estrellas. Y como hemos afirmado al inicio del trabajo presente, mostraremos una correlación geométrico-astronómica sí puede ser usada como determinación de la ubicación de las fuentes. La determinación se genera por alineamiento con la estrella más brillante del firmamento nocturno a través del original obelisco egipcio. Esta correlación –la cual, como hemos dicho, no afirmamos ni negamos que fuera usada por Bernini– es objetiva y sí ofrece intrínsecamente una determinación de la posición concreta de las fuentes en la Plaza de San Pedro.

Así, en este artículo, consideramos la simbología escultórica colocada por el Papa Alejandro VII sobre el obelisco de Calígula y la usaremos como centro de proyección de la esfera celeste. A través de esta simbología ornamental delimitada entre la punta del obelisco y la estrella metálica de ocho puntas, proyectaremos las órbitas astronómicas diarias de la estrella Sirio obteniendo una franja de trayectorias sobre la *Piazza di San Pietro*. Dicho de manera más llana: el proceso en el cual se basa el presente trabajo consiste en proyectar, sobre la plaza, la órbita astronómica de la estrella más brillante del cielo a través de la punta del obelisco y de su estrella escultórica; y obtenemos tal proyección mediante métodos de cálculo numérico, geometría y algoritmos astronómicos.

1.3 Los focos de la Plaza de San Pedro no determinan la localización de las fontanas

Hemos afirmado en la subsección 1.2 que la geometría intrínseca de la Plaza no determina la localización de las fuentes. En contra de ciertas afirmaciones, vamos a ver que las fuentes no están localizadas por *focos* de la elipse que tiene como ejes los ejes del óvalo de la plaza, ni del óvalo interior marcado sobre el pavimento de la plaza, ni del óvalo exterior de la plaza que configura el perímetro de la columnata.

Sea O el centro de la plaza, el cual es la posición del obelisco. Sean C y C' los centros del colonnato. Sea $c = d(C, C')$ la distancia entre ellos. Sea $\frac{c}{2} = d(O, C)$ la distancia entre O y C . Se tiene que $c = 66,04 m = 295,74$ *palmas romanos*. Sean G y G' los dos puntos que localizan las fuentes. Sea $d = d(O, G)$ la distancia entre O y las fuentes, se tiene que $d = 59,43 m = 266,14$ *palmas romanos*, (Figure 9I).

Mediante el procedimiento de construcción cuarto de Serlio, con los centros C y C' se obtiene el óvalo exterior que llamaremos S_e ; sabemos que $3c = 198,12 m = 887,23$ *palmas romanos*. La recta CC' soporta el segmento AA' el cual es el eje mayor de S_e , los puntos A y A' son vértices de S_e . Así que $3c = d(A, A')$. Hacemos los cálculos geométricos y obtenemos que el segmento BB' , el cual es el segmento que forma el eje transversal menor de S_e , es tal que $c * (4 - \sqrt{3}) = d(B, B')$. Sea ahora la elipse E_e cuyos vértices son A, A', B, B' . Calculando obtenemos que los focos F_e y F_e' de la elipse E_e ; y tenemos que la distancia de estos focos al

obelisco es $d(O, F_e) = \sqrt{\frac{4\sqrt{3}-5}{2}} * c = 64,84 m = 290,38 \text{ palmos romanos}$,
(Figure 9l).

En el óvalo interior que llamaremos S_i ; midiendo en la plaza sabemos que la recta CC' soporta el segmento MM' , el cual es el eje mayor de S_i y los puntos M y M' son vértices de S_i , tal que $2m = d(M, M') = 181,51 m = 812,85 \text{ palmos romanos}$. Hacemos los cálculos geométricos y obtenemos que el segmento NN' , el cual es el segmento que forma el eje transversal menor de S_i , es tal que $c * (1 - \sqrt{3}) + 2m = d(N, N')$. Sea ahora la elipse E_i cuyos vértices son M, M', N, N' . Calculando obtenemos que los focos F_i y F_i' de la elipse E_i ; y tenemos que la distancia de estos focos al obelisco es $d(O, F_i) = \frac{\sqrt{3}-2}{2} * c^2 - m * (1 - \sqrt{3}) * c = 61,91 m = 277,24 \text{ palmos romanos}$,
(Figure 9l).

Lo anterior muestra que tanto la distancia del foco de la elipse exterior $d(O, F_e)$ como la distancia del foco de la elipse interior $d(O, F_i)$ están lejos de la distancia de las fuentes $d(O, G)$. Por tanto la geometría de la plaza no determina la localización de las fuentes.

1.4 La sombra del obelisco no determina la localización de las fontanas.

También hemos afirmado en la subsección 1.2 que considerando el obelisco como gnomon, o sea como proyector de la sombra solar, su

sombra tampoco determina de manera intrínseca la posición de las fuentes.

Hemos hecho los cálculos pertinentes, y los mostramos en la parte inferior de la Figura 9i.

En esa Figura 9i mostramos al lector las proyecciones de la sombra de la punta del obelisco sobre la Plaza. La trayectoria negra inferior, que es un arco de hipérbola, corresponde al recorrido de hace la sombra el día del solsticio de verano. La trayectoria negra superior, que es un arco de hipérbola, corresponde al recorrido de hace la sombra el día del solsticio de invierno. La trayectoria negra intermedia, que es una línea recta, se trata del recorrido que hace la sombra en los dos días del los equinoccios de primavera y otoño.

Las trayectorias coloreadas en: amarillo, rojo, azul y verde, son las analemas. O sea cada una de estas líneas es la trayectoria de la sombra a lo largo de todos los días de año en una hora determinada. Por ejemplo la analema más pequeña central es la correspondiente a las 12 horas del medio día; igualmente la analema vecina de la izquierda corresponde a las 11 horas, y la de la derecha a las 13 horas. El color amarillo de cada analema corresponde a las proyecciones en los días de primavera, el rojo en los días de verano, el azul en los días de otoño y el verde en los días de invierno.

Es claro, como mostramos en la Figura 9i, que la analema de las 12 horas, la cual es la única que podría llegar a determinar la posición de

la fuente, realmente no determina de manera intrínseca la localización de esa fuente.

Una vez que acabamos de demostrar que ni la geometría de la plaza, ni la sombra del obelisco, ofrecen una determinación de la localización de las fuentes, proseguimos con el trabajo aquí presentado.

2. Parámetros iniciales para las proyecciones de la órbita diaria de la estrella Sirio sobre la Plaza de San Pedro.

2.1 Parámetros del Obelisco de Calígula

Para calcular la trayectoria diaria de la estrella Sirio sobre la Plaza de San Pedro, a través de la simbología situada sobre el obelisco desde el vértice a la estrella de ocho puntas, primero necesitamos determinar los parámetros arquitectónicos del obelisco $\{\lambda, \varphi, r\}$, Figura 9e, Figura 9m y Figura 9n. Estos parámetros son: su longitud $\lambda = 12^h 24' 26''$, su latitud $\varphi = 41^{\circ} 54' 08''$ y la altura del símbolo desde donde proyectaremos, $h = 34.88 m$ para la punta del obelisco y $h = 38.65 m$ para la estrella.

2.2 Época astronómica J1677

A continuación, con el objetivo de determinar la proyección de las órbitas diarias conviene decidir en qué época astronómica debemos realizar los cálculos.

A continuación, necesitamos fijar para determinar las proyecciones de las órbitas, a causa del movimiento precesión terrestre y del movimiento propio de cada estrella, es la época astronómica; pues tal época condiciona la posición de los astros y los cálculos de proyección.

La posición de las estrellas varía en la esfera celeste en todo momento. La variación es grande a causa del movimiento del eje terrestre de precesión de equinoccios, y es pequeña a causa del movimiento propio de cada una de las estrellas. Pero, en cualquier caso, la variación combinada por ambos movimientos es un efecto que ha de tenerse en cuenta de manera ineludible. O sea, las posiciones astronómicas de los diferentes astros, varían de manera relevante a lo largo de los más de 400 años que hace que se construyó la Plaza de San Pedro.

Las posiciones actuales de las estrellas son similares a las de la Época de referencia $J2000$ –la cual corresponde al 1 de enero a las 12^h según meridiano de Greenwich del año Gregoriano 2000, o sea la que corresponde a la época del día Juliano $JD(2451545.0)$ –. Pero la época astronómica, a causa del movimiento estelar, que consideramos es la de la construcción de la Plaza de San Pedro (periodo en que se situaron de nuevo las fuentes) que fijaremos en la Época astronómica $J1677$; o sea, es la época del día Juliano $JD(2333569,25)$ –.

El lector puede acudir a libros sobre astronomía [Martín, 1990; Meeus, 1991] para aclarar correctamente la definición y cálculos de: año Gregoriano de CE, año Juliano de CE y BCE, día Juliano $JD(*)$ correspondiente al cómputo temporal propuesto por Joseph Scaliger.

Para otorgar la posición astronómica a cada estrella en la esfera celeste acudiremos a la base de datos SIMBAD [SIMBAD]. Así, tenemos las siguientes posiciones celestes en la Época de referencia $J2000.0$ de la estrella Sirio listada en la Tabla 9c. Ahora bien, como hemos dicho, hemos de tener en cuenta el desplazamiento continuo de cada astro en la esfera celeste a causa de la precesión de equinoccios y su movimiento propio; y con ello encontrar la verdadera posición y declinación en la época $J1677.0$ de construcción de la Plaza de San Pedro. Con los cálculos y programas de computación pertinentes, presentados en el Capítulo II y el Capítulo IV de la presente Tesis, encontramos las posiciones celestes en la época $J1677.0$ y los mostramos seguidamente en la Tabla 9c.

Bayer	Nombre propio	Flujo v	Movimiento propio		$J2000.0$	
			mas/yr in α	mas/yr in δ	Ascensión α	Declinación δ
α	<i>Sirio</i>	1.46	-546.01	-1223.07	06 ^h 45 ^m 09 ^s	-16° -42' -58"

Bayer	Nombre propio	Flujo v	Movimiento propio		$J1677.0$	
			mas/yr in α	mas/yr in δ	Ascensión α	Declinación δ
α	<i>Sirio</i>	1.46	-546.01	-1223.07	06 ^h 30 ^m 57 ^s	-16° -18' -35"

Tabla 9c. Coordenadas celestes de Sirio, la estrella más brillante de la constelación de Canis Majoris.

3. Proyecciones resultantes

Una vez que hemos encontrado la posición de Sirio en la esfera celeste en la época de la construcción de la plaza, época astronómica *J1677*, posición recogida en la Tabla 9c, procedemos a proyectar la órbita diaria celeste de Sirio sobre la plaza a través de la simbología colocada sobre el obelisco. Para ello creamos nuestro propio programa informático de cálculo numérico y mostramos el resultado al lector en la Figura 9o.

La órbita diaria celeste de Sirio, proyectada a través de la punta del obelisco, genera una trayectoria $\mathcal{T}_{\text{azul}}$ que hemos pintado en color azul. Igualmente la proyectada a través de la estrella sobre el obelisco genera una trayectoria $\mathcal{T}_{\text{rojo}}$ que hemos pintado en color rojo. E igualmente las proyecciones entre la punta y la estrella (se encuentra la simbología de las montañas) generan una banda de trayectorias que hemos pintado en color amarillo.

Como el lector podrá observar, estas trayectorias forman una banda de proyección de la estrella más importante del firmamento a través de la simbología sobre el obelisco. Y esta banda determina de manera intrínseca, objetiva, la localización de las fuentes. Y dado el lento movimiento del eje terrestre de precesión y del movimiento propio de Sirio en la esfera celeste entonces podemos afirmar de manera geométrica lo siguiente: cada día en la época astronómica *J1677* se tenía el alineamiento arquitectónico-geométrico-astronómico entre: Sirio-Obelisco-Fuente. Por lo tanto, la ubicación de las fuentes queda

determinada por la estrella Sirio –en la época *J1677*– y el centro de la simbología papal situado en la parte superior del obelisco egipcio.

4. Conclusiones

A lo largo del presente trabajo, hemos mostrado que no es cierto que la geometría de la plaza de San Pedro permita determinar la localización de sus dos fuentes. Igualmente hemos mostrado que la sobra del obelisco de Calígula en el centro de la plaza permita determinar la localización de las fuentes. Contrariamente, hemos mostrado que la estrella Sirio, la más brillante del firmamento nocturno, sí permite determinar la localización de las fuentes (Figura 9o y Figura 9p). Esta determinación consiste en el alineamiento arquitectónico-geométrico-astronómico que existía en la época astronómica *J1677* de la construcción de la plaza, entre: Sirio-Obelisco-Fuente. La proyección de la órbita diaria de Sirio a través de la simbología papal sobre el obelisco genera una banda que localiza las fuentes (Figura 9o y Figura 9p); incluso si afinamos esta proyección y analizamos el punto central de este símbolo papal, observamos que la trayectoria solo se desvía 14 centímetros del centro de la fuente (Tabla 9d). Como hemos dicho, no pretendemos afirmar, ni negar, que Bernini tuviera en cuenta de forma intencionada este alineamiento en el diseño de la construcción; pero sí mostramos la existencia geométrica de tal alineamiento.

Distancia	Metros	Palmos romanos
$d(F_e, G)$	5,41 <i>m</i>	24,23 <i>pr</i>
$d(F_i, G)$	2,48 <i>m</i>	11,11 <i>pr</i>
Trayectoria Estrella: $d(\mathcal{T}_{\text{azul}}, G)$	2,87 <i>m</i>	12,85 <i>pr</i>
Trayectoria Obelisco: $d(\mathcal{T}_{\text{rojo}}, G)$	3,20 <i>m</i>	14,33 <i>pr</i>
Trayectoria intermedia: $d(\mathcal{T}_{\text{negra}}, G)$	0,14 <i>m</i>	1,79 <i>pr</i>

Tabla 9d. Distancias de los focos y de las trayectorias proyectadas al centro de la fuente.

UNIVERSITAT ROVIRA I VIRGILI

ANÁLISIS GEOMÉTRICO Y ASTRONÓMICO EN LA CATEDRAL DE CHARTRES

Juan Miguel Seguí Colomar

Figuras relacionadas con la Sección 9.2 del Capítulo IX.

Figura 9e. Sección esquemática de los elementos arquitectónicos y celestes considerados en el análisis.

Figura 9f. Representación gráfica que muestra las proyecciones de las órbitas de las estrellas de Sirio (1), Arturo (2) y la Polar (3) sobre el pavimento de Santa María degli Angeli e dei Martiri en Roma [Catamo y Lucarini, 2002, página 54].

Figura 9g. Fotografía del escudo de armas del Papa Clement XI con su respectivo agujero. A la vez, fotografía de las trayectorias de la órbita de la estrella Polar sobre el pavimento de la iglesia entre la época astronómica *J1700* y la época astronómica *J2500*.

Figura 9h. A la izquierda, el escudo papal de Alejandro VII. Al centro, decoración que culmina el obelisco de la Plaza de San Pedro. A la derecha, escudo papal de Clemente XI.

Figura 9i. Redibujado en planta y sección de la geometría de la plaza en base a las medidas de la referencia vaticana [Dandini, 1816] y algunas medidas concretas realizadas *in situ*, como por ejemplo el parámetro *h*. En la planta superior se observa: la posición de las fuentes y la posición de los focos de las respectivas. En la planta inferior se observa que a nivel de asoleamiento no existe ninguna correlación entre el obelisco y las fuentes.

Figura 9j. Interpretación del diseño de la plaza de San Pedro por Timoty K. Kitao [Timoty, 1974]. A la izquierda, propuesta trapezoidal de Bernini. En el centro, primera propuesta ovalada de Bernini. A la derecha, primer plan revisado de Bernini con sus respectivas arcadas relacionadas con sus puntos ejecución. En color naranja la posición de la fuente preexistente diseñada por Carlo Maderno y en color azul la posición de las fuentes que encontramos actualmente y recolocadas por Bernini.

Figura 9k. A la izquierda, estudio realizado por Bernini sobre del pavimento de la zona de estudio. A la derecha, dibujo realizado por Bernini sobre las relaciones entre el columnado perimetral y la plaza central [Timoty, 1974].

Figura 9l. Esquema de la explicación geométrica explicada en esta subsección 1.3.

Figura 9m. Figuras realizadas por Giovanni Battista Piranesi de la Plaza de San Pedro del Vaticano.

Figura 9n. A la izquierda, fotografía del obelisco de Calígula. A la derecha, esquema acotado del obelisco.

Figura 9o. En color azul, trayectoria de la órbita de Sirio sobre la Plaza de San Pedro a través de la punta del obelisco. En color rojo, trayectoria de la órbita de Sirio sobre la Plaza de San Pedro a través de la estrella del símbolo papal. En amarillo, franja de proyección correspondiente a

las trayectorias de Sirio a través de todos los puntos que conforman el símbolo papal.

Figura 9p. Detalle gráfico de los resultados.

UNIVERSITAT ROVIRA I VIRGILI

ANÁLISIS GEOMÉTRICO Y ASTRONÓMICO EN LA CATEDRAL DE CHARTRES

Juan Miguel Seguí Colomar

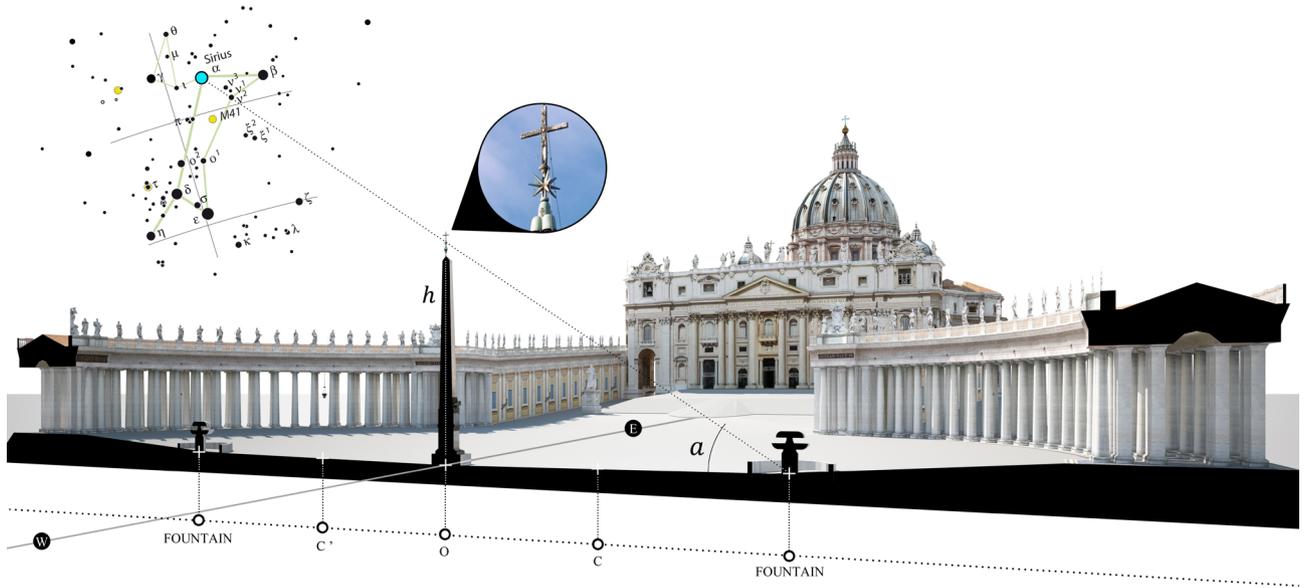
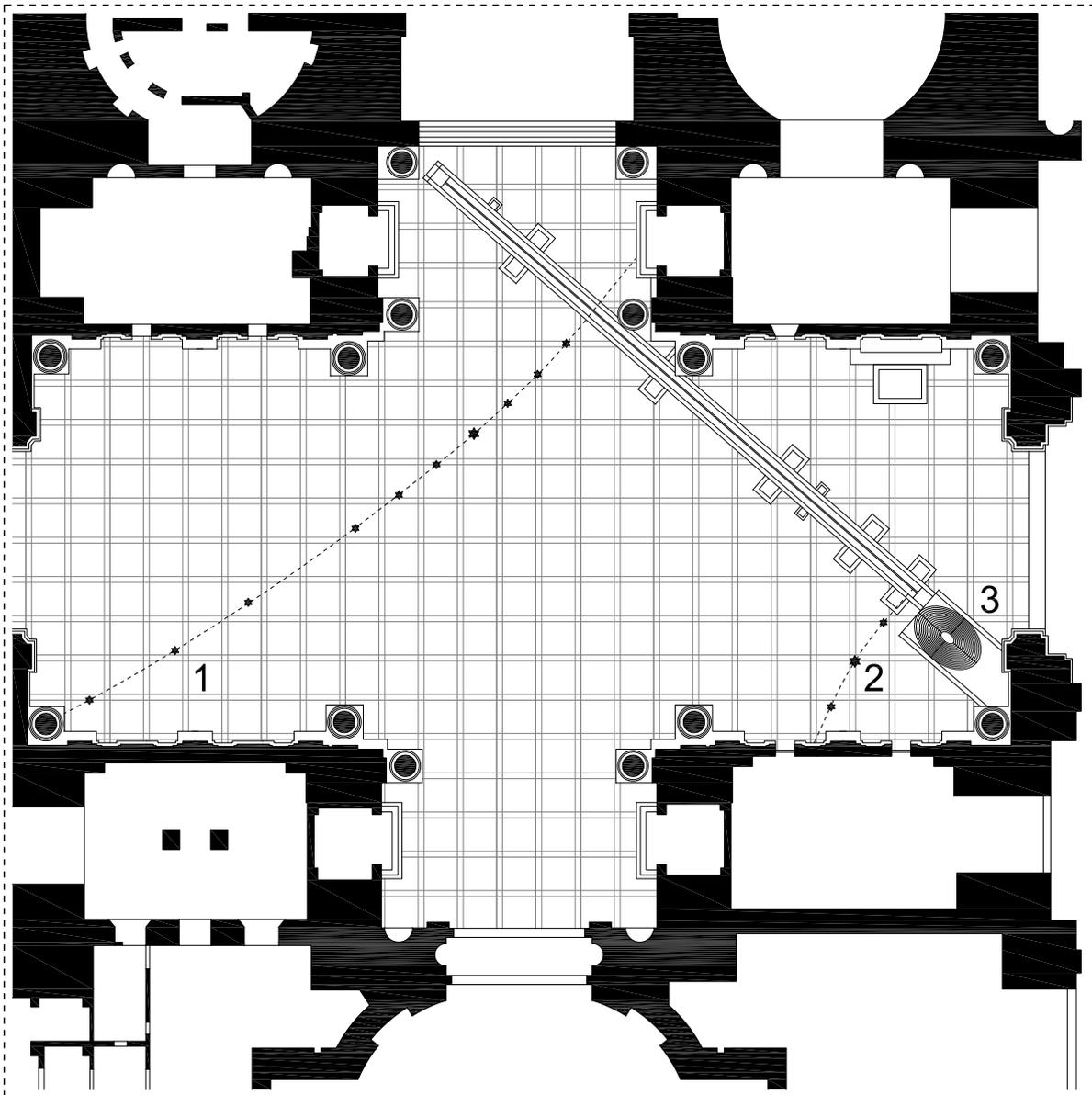


Figura 9e

UNIVERSITAT ROVIRA I VIRGILI

ANÁLISIS GEOMÉTRICO Y ASTRONÓMICO EN LA CATEDRAL DE CHARTRES

Juan Miguel Seguí Colomar



10 m

Figura 9f

UNIVERSITAT ROVIRA I VIRGILI

ANÁLISIS GEOMÉTRICO Y ASTRONÓMICO EN LA CATEDRAL DE CHARTRES

Juan Miguel Seguí Colomar

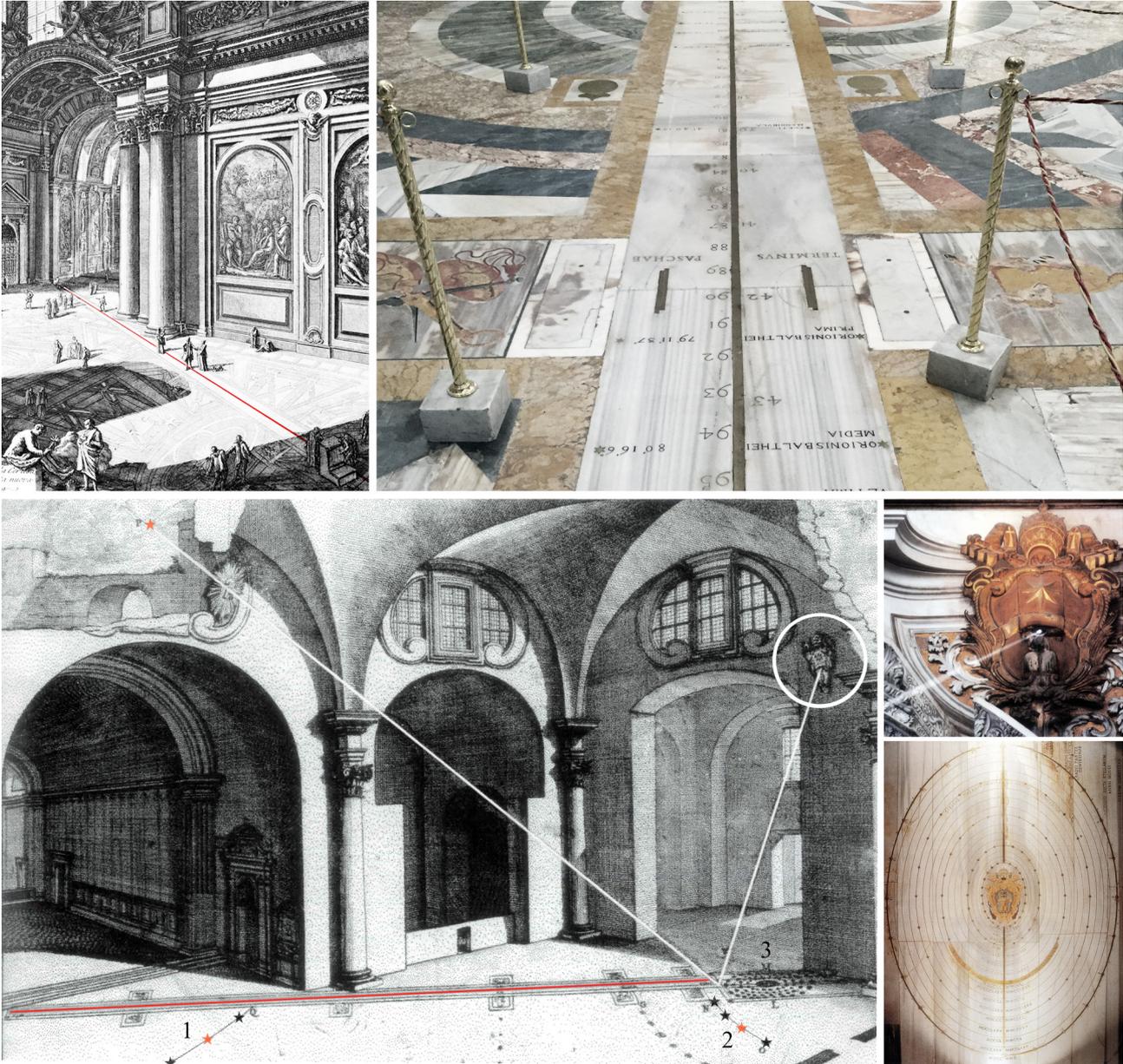


Figura 9g

UNIVERSITAT ROVIRA I VIRGILI

ANÁLISIS GEOMÉTRICO Y ASTRONÓMICO EN LA CATEDRAL DE CHARTRES

Juan Miguel Seguí Colomar



Figura 9h

UNIVERSITAT ROVIRA I VIRGILI

ANÁLISIS GEOMÉTRICO Y ASTRONÓMICO EN LA CATEDRAL DE CHARTRES

Juan Miguel Seguí Colomar

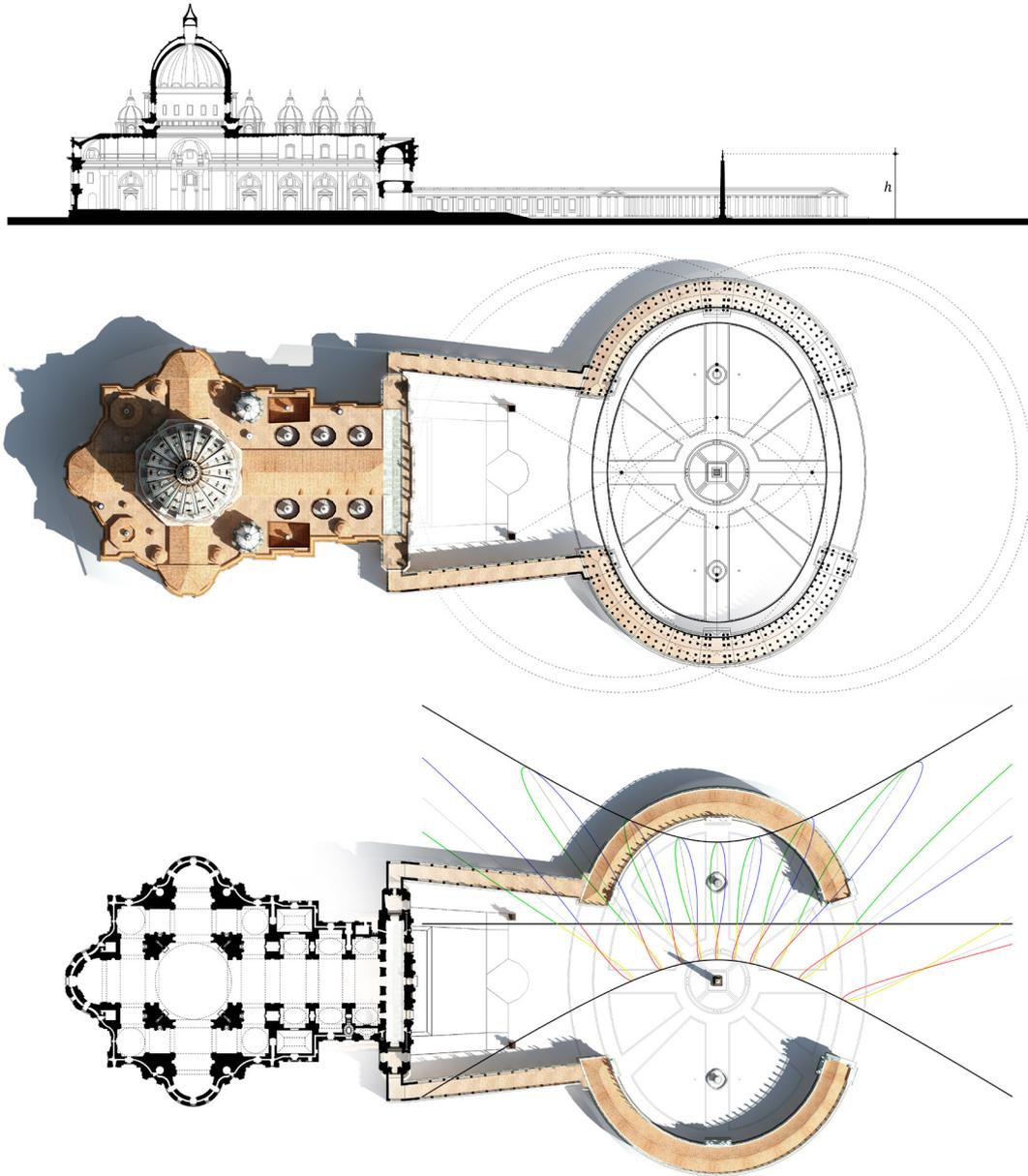


Figura 9i

UNIVERSITAT ROVIRA I VIRGILI

ANÁLISIS GEOMÉTRICO Y ASTRONÓMICO EN LA CATEDRAL DE CHARTRES

Juan Miguel Seguí Colomar

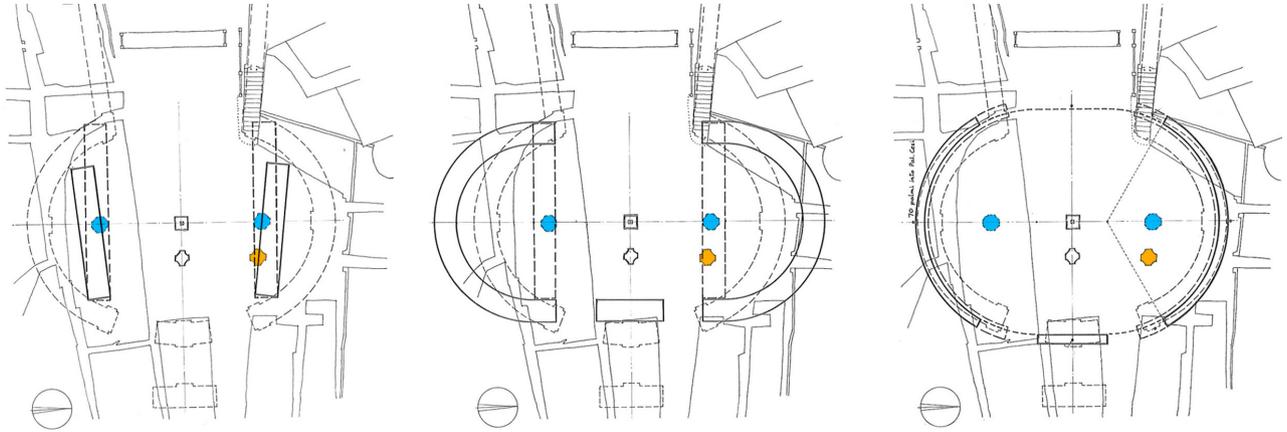


Figura 9j

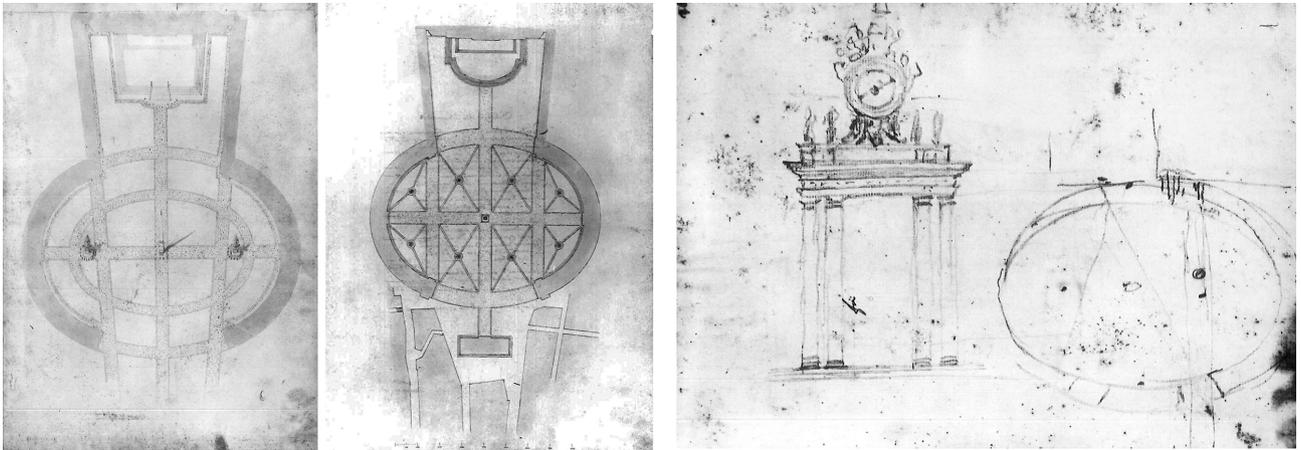
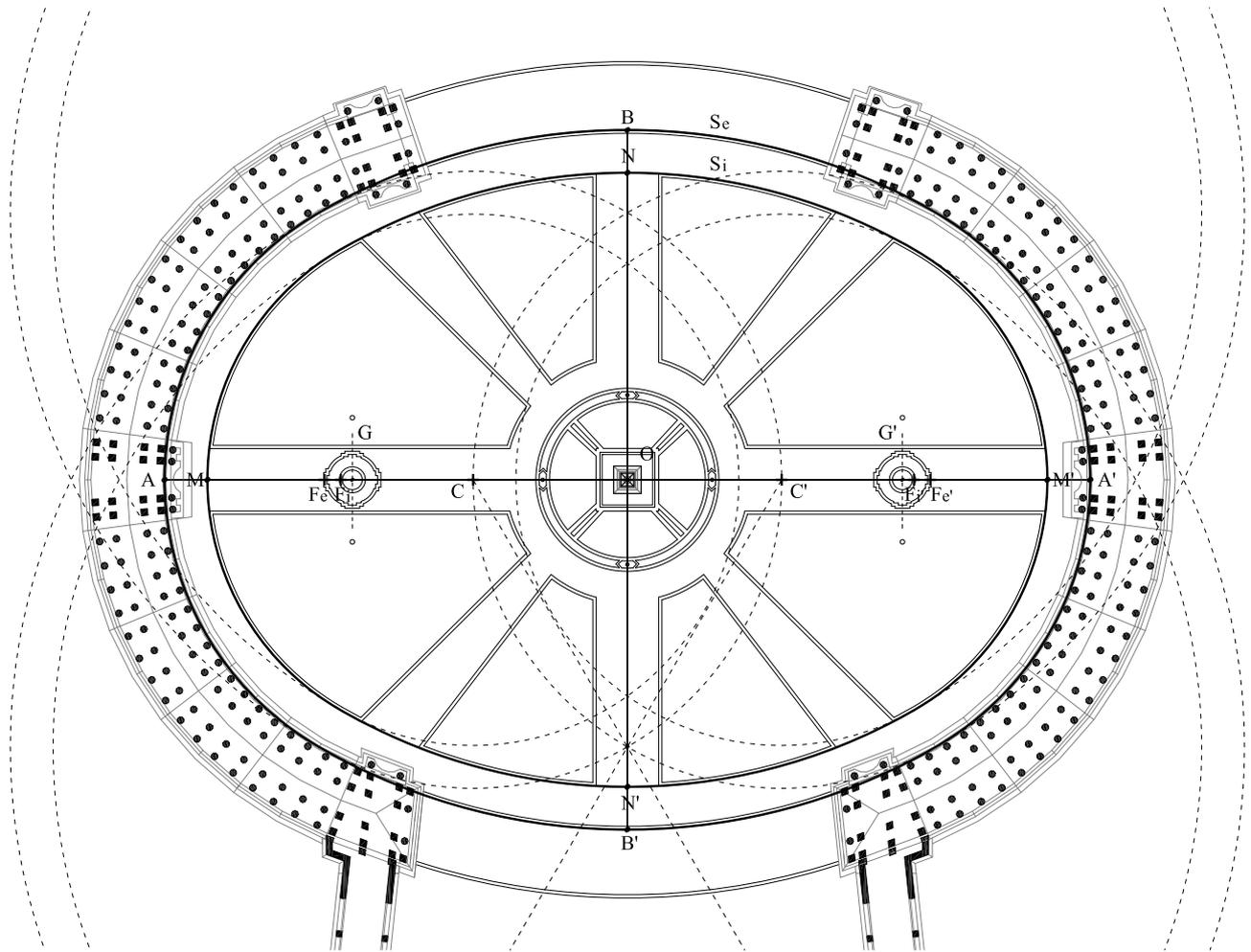


Figura 9k

UNIVERSITAT ROVIRA I VIRGILI

ANÁLISIS GEOMÉTRICO Y ASTRONÓMICO EN LA CATEDRAL DE CHARTRES

Juan Miguel Seguí Colomar



UNIVERSITAT ROVIRA I VIRGILI

ANÁLISIS GEOMÉTRICO Y ASTRONÓMICO EN LA CATEDRAL DE CHARTRES

Juan Miguel Seguí Colomar

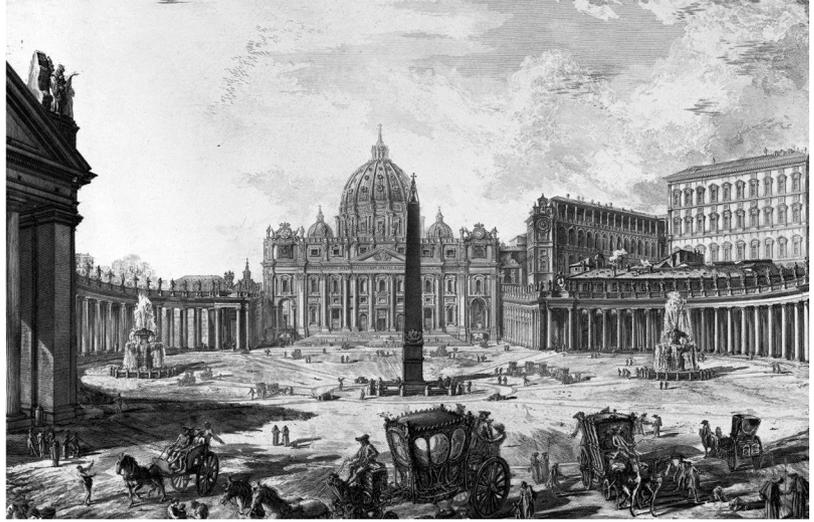
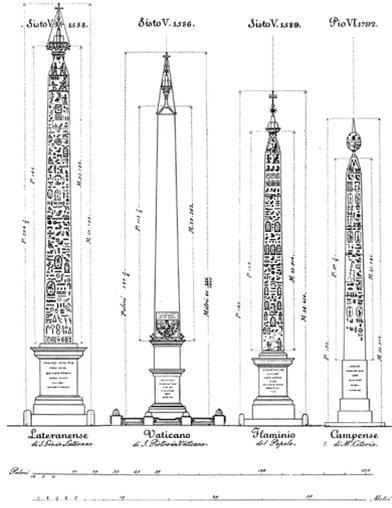


Figura 9m

UNIVERSITAT ROVIRA I VIRGILI

ANÁLISIS GEOMÉTRICO Y ASTRONÓMICO EN LA CATEDRAL DE CHARTRES

Juan Miguel Seguí Colomar

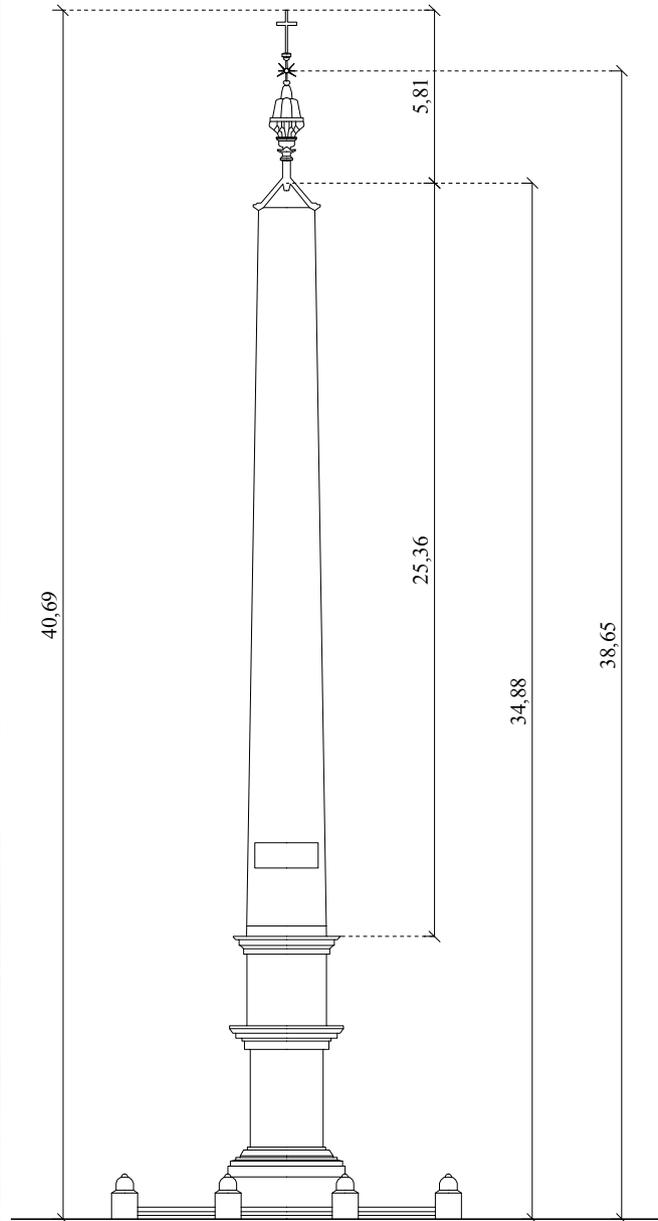


Figura 9n

UNIVERSITAT ROVIRA I VIRGILI

ANÁLISIS GEOMÉTRICO Y ASTRONÓMICO EN LA CATEDRAL DE CHARTRES

Juan Miguel Seguí Colomar

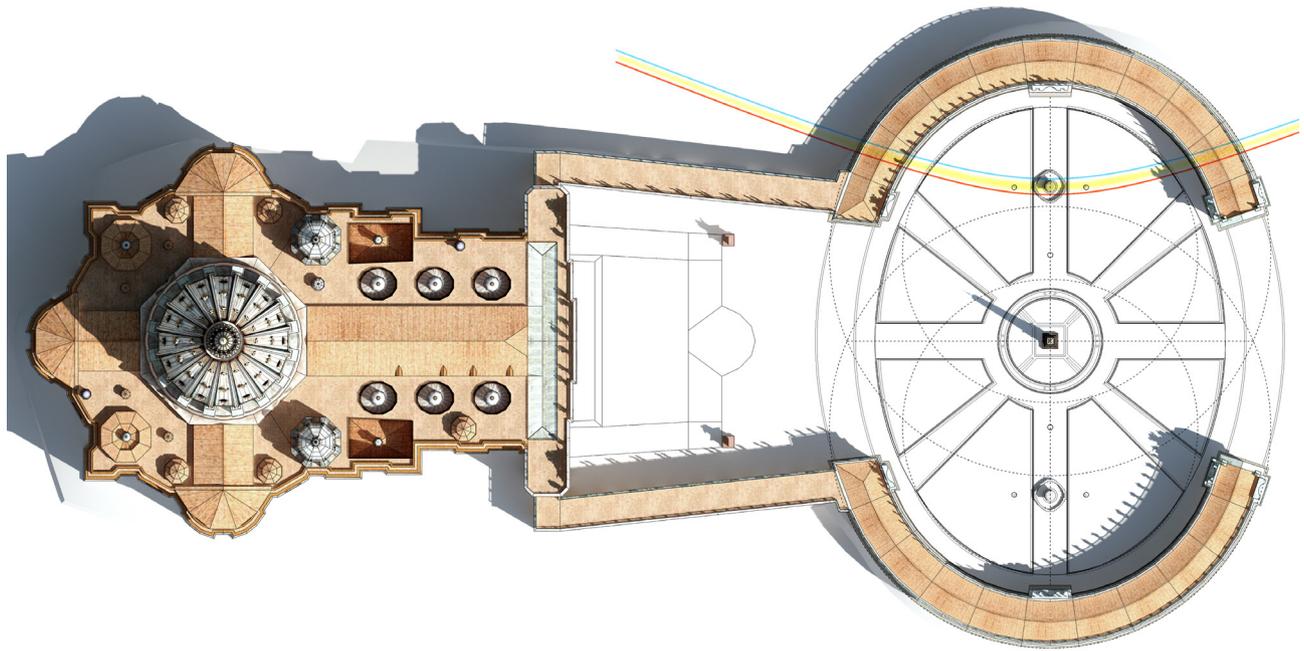


Figura 9o

UNIVERSITAT ROVIRA I VIRGILI

ANÁLISIS GEOMÉTRICO Y ASTRONÓMICO EN LA CATEDRAL DE CHARTRES

Juan Miguel Seguí Colomar

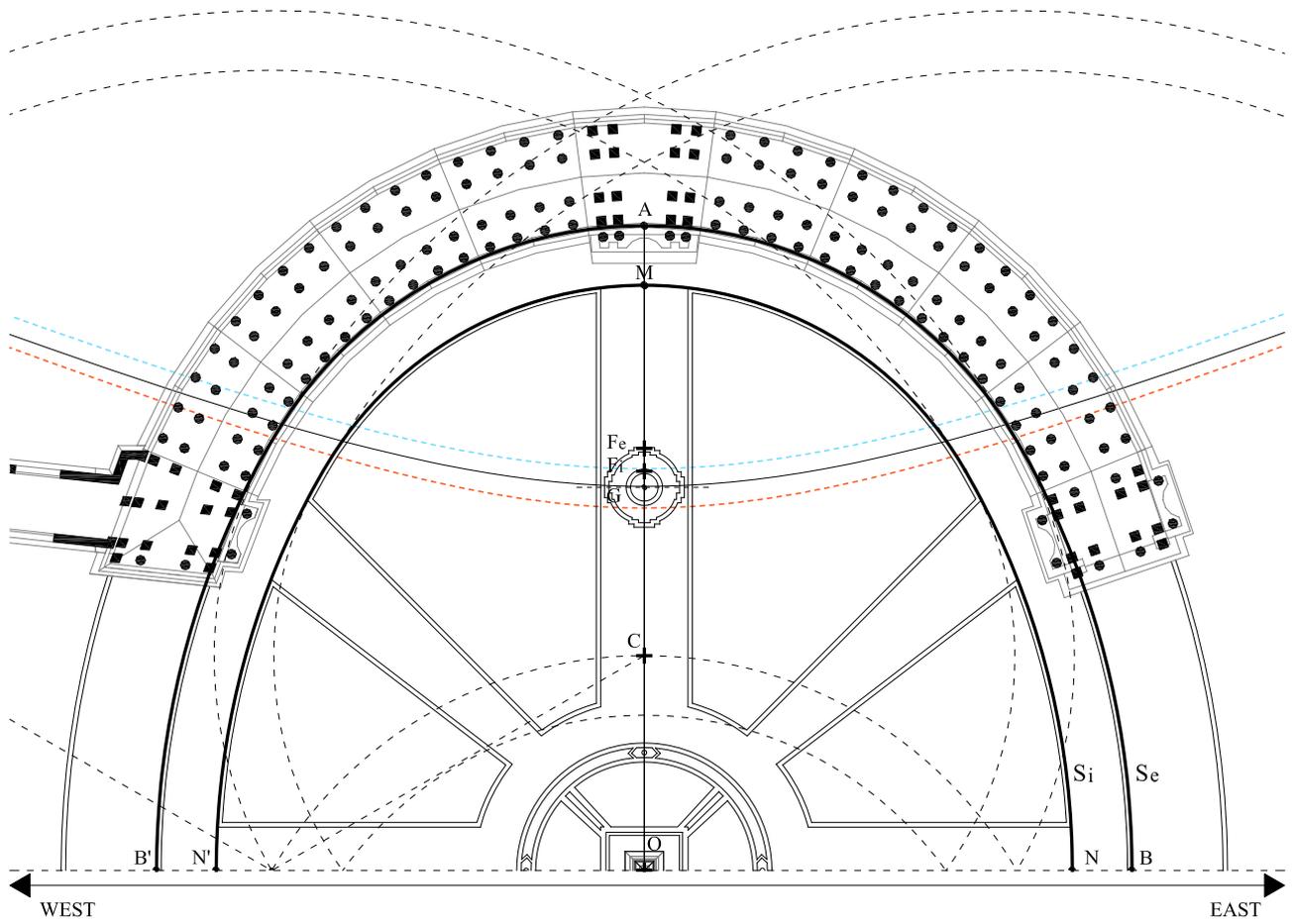


Figura 9p

UNIVERSITAT ROVIRA I VIRGILI

ANÁLISIS GEOMÉTRICO Y ASTRONÓMICO EN LA CATEDRAL DE CHARTRES

Juan Miguel Seguí Colomar

SECCIÓN 9.3

PROYECCIÓN GRÁFICA DE LA CONSTELACIÓN DEL DRAGÓN SOBRE LA PLANTA DE LA SAGRADA FAMILIA A TRAVÉS DE SU ROSETÓN DE LA FACHADA DE LA NATIVIDAD

Es bien conocida la tendencia del arquitecto Antoni Gaudí a presentar reptiles en la mayoría de sus obras; incluso en su obra más relevante, la Sagrada Familia. Son varios los reptiles que pueden observarse, sin dificultad, esculpidos sobre las fachadas de este templo expiatorio; sin embargo, no se visualiza ningún reptil en el interior ni desde el interior del edificio. Ahora bien, la afirmación anterior *no es del todo cierta*. En esta investigación desvelamos –con técnicas geométricas, gráficas y astronómicas– que sí es posible visualizar un reptil desde el interior.

UNIVERSITAT ROVIRA I VIRGILI

ANÁLISIS GEOMÉTRICO Y ASTRONÓMICO EN LA CATEDRAL DE CHARTRES

Juan Miguel Seguí Colomar

1. Los reptiles de Gaudí

Es bien conocida la tendencia del arquitecto Antoni Gaudí a presentar reptiles en la mayoría de sus obras (Figura 9q); incluso en su obra más relevante, la Sagrada Familia. Este templo no es solamente su construcción más conocida, en la cual trabajó más tiempo (1883-1926), sino que es el proyecto que explica mejor la evolución de su obra y en el cual concentra los ideales espirituales, artísticos y técnicos del autor. Son varios los reptiles que pueden observarse, sin dificultad, esculpidos sobre las fachadas del Templo de la Sagrada Familia (Figura 9r); sin embargo, no se visualiza ningún reptil en el interior ni desde el interior del Templo. Ahora bien, la afirmación anterior *no es del todo cierta*, puesto que en esta investigación desvelamos que sí es posible visualizar un reptil desde el interior.

Este trabajo, aquí presentado, muestra con técnicas gráficas y geométricas que el reptil aludido se puede visualizar y está sutilmente relacionado con una de las fachadas del propio Templo; además se trata de un reptil similar a una serpiente o a los dragones de las mitologías oriental y maya.

2. La Natividad

En 1892 Antoni Gaudí inicia los cimientos para la fachada de la Natividad porque, según manifiesta el propio arquitecto: "Si en lugar de hacer esta fachada decorada, ornamentada y turgente hubiera

empezado por la de la Pasión, dura, pelada y como hecha de huesos, la gente se habría distanciado" [Barral, 1999].

La única fachada diseñada y ejecutada completamente por Gaudí – fachada de la Natividad– está dedicada al nacimiento de Jesús. Está orientada a nordeste y está dividida en tres pórticos dedicados a la Esperanza, a la Fe y a la Caridad. El diseño de esta composición está culminado con cuatro torres dedicadas a cuatro santos y rematada por dos símbolos muy particulares que atribuyen el nombre de "Natividad" a la fachada. El primero, el Árbol de la Vida que alude al propio nacimiento; y el segundo, un rosetón que es telón de fondo de una escena escultórica que representa la coronación de la Virgen María, es decir la divina maternidad (Figura 9s) [Puig, 1929; Ràfols, 1928; Martinell, 1952]. Por lo tanto, la fachada representa según el dogma de la religión cristiana la natividad de Jesús –deidad cristiana–. O dicho de forma equivalente, se trata del parto de la Virgen María –deidad cristiana–.

Es conocido que la interacción de las civilizaciones de oriente próximo generó interrelación e influencia en los panteones de deidades de las diferentes religiones –islámica, cristiana, judía, romana, griega, asiria, sumeria, egipcia–, siendo la egipcia una de las más antiguas. Y por tanto, nada descubrimos al decir que la religión cristiana está influenciada por la religión egipcia. Varias son las características que relacionan a las deidades cristianas –Virgen María y su hijo Jesús– con las deidades egipcias –Isis y su hijo Horus– [Campbell, 1965; Plutarch, 1st century BCE]. Se podría entonces esperar una relación análoga entre

la Natividad e Isis; sin embargo, la deidad Isis aunque posee la característica innegable de ser por excelencia la diosa de la maternidad, no se la reconoce por ser la diosa del parto y por consiguiente tampoco de la Natividad. No debe confundirse maternidad (entrega vital y general a efectos de: alimentar, cuidar, proteger e instruir) con natividad (acto concreto y momentáneo de nacer y parir).

La deidad egipcia la cual es claramente caracterizada por ser diosa del parto y de la fertilidad (tanto de dioses como de humanos) es la deidad Ta-Urt, a veces identificada como madre de la propia Isis [Wilkinson, 2003]. Ta-Urt, también reconocida como Taweret o Thoueris –y muchas veces identificada con la deidad Àpet– era representada en posición vertical, con una cabeza de hipopótamo, con cola de cocodrilo, con garras de león y a veces, con los pechos de mujer (Figura 9t) [Wallis, 1904].

Catasterizar –o sea, transformar a los miembros del panteón de deidades en sus correspondientes astros, cuerpos celestes o estructuras astrales, de la esfera celeste– fue algo común en las diferentes civilizaciones. Y si la religión griega claramente catasterizaba, igualmente lo hacía la egipcia e históricamente mucho antes que la griega [Allen, 1889; Eratosthenes, 2nd century BCE].

La deidad Ta-Urt fue catasterizada en el firmamento por los egipcios ya en el 3500 BCE con una constelación que representaba la cabeza de un hipopótamo [Eratosthenes, 2nd century BCE]. La estrella más importante de tal constelación representaba directamente a la deidad, y

era llamada Taurt-Isis. Con el paso del tiempo y con el conocimiento medieval astronómico totalmente influenciado por Ptolomeo [Ptolemy, 2nd century CE], algunas constelaciones determinadas por las civilizaciones antiguas pervivieron y otras fueron transformadas. En el caso de la constelación de Ta-Urt, esta pasó a formar parte de una nueva constelación reconocida por Ptolomeo, y representada clásicamente por Bayer [Ptolemy, 2nd century CE; Bayer, 1603], correspondiente a la cabeza de la constelación del Dragón (Figura 9u). La estrella más brillante de la constelación de Dragón, la cual es la misma estrella Taurt-Isis de la constelación egipcia del hipopótamo, se la conoce actualmente con el nombre Gamma Draconis (*γ Dra*), y también con el nombre Etanin (nombre árabe que significa “serpiente” a causa del conjunto de toda la constelación). De facto, Bayer también recoge en su Uranometría el nombre *Serpens* para la constelación *Draco*. Y en efecto, al observar la representación clásica medieval aportada por Bayer, el dragón de Bayer tiene un aspecto totalmente reptil que recuerda claramente a una serpiente, o incluso recuerda a los dragones de las mitologías oriental y maya.

Con lo anterior, podemos considerar los dos conceptos siguientes:

a) Actualmente el catasterismo occidental de la deidad egipcia del parto de los dioses es la constelación del Dragón; y con ello, se deduce que la actual constelación que representa la Natividad es la constelación del Dragón.

b) De todos los elementos ornamentales que encontramos en la fachada de la Natividad que nos sugieren una relación directa con el significado de nacer, destacamos el rosetón que preside la escena escultórica que representa la Coronación de la Virgen [Puig, 1929; Ràfols, 1928; Martinell, 1952].

La singularidad arquitectónica de un rosetón es debida a: su impactante tamaño, su complejidad constructiva, su protagonismo compositivo en la fachada principal y a su simbolismo históricamente conocido. Todas estas cualidades son los motivos por el cual los rosetones de construcciones tan importantes como las Catedrales –y por supuesto, la Sagrada Familia– han sido el centro de investigación de muchos estudios; por ejemplo, el análisis geométrico de su textura o de su construcción [Samper y Herrera, 2015] e incluso, el estudio de su relación luminosa solar con el interior de la catedral [Heilbron, 2001]. En el presente trabajo, consideramos el rosetón como instrumento astronómico estelar.

Popularmente, el rosetón principal de un templo es conocido como "Ojo de Dios"; y por ello, con el fin de relacionar las dos ideas a) y b) anteriores –el Rosetón del Templo y la Constelación del Dragón–, usaremos el centro del rosetón como punto central de proyección geométrica y visual de la esfera celeste. A través del rosetón principal de la Fachada del Nacimiento de la Sagrada Familia proyectaremos las órbitas astronómicas de los astros de la Constelación del Dragón obteniendo las trayectorias de los mismos sobre la planta del Templo de la Sagrada Familia. Dicho de manera más llana, proyectar sobre la

planta del Templo las órbitas astronómicas de las estrellas a través del rosetón original diseñado por Gaudí es el proceso en el cual se basa el presente trabajo.

3. Proyección de la Constelación del Dragón a través del rosetón principal sobre la planta del Templo de la Sagrada Familia

Para proceder al cálculo de la proyección de las órbitas estelares de la Constelación del Dragón sobre la planta de la Sagrada Familia a través su rosetón principal, necesitamos previamente encontrar los siguientes 4 parámetros de la edificación del Templo $\{\lambda, \varphi, \gamma, r\}$ (Tabla 9e). En cuanto su ubicación, se trata de la longitud λ , la latitud φ y la orientación del Templo γ (ángulo formado por el paralelo terrestre en el que se encuentra la Sagrada Familia con la línea de tierra de la fachada de la Natividad, con sentido positivo de oeste a norte). Y en cuanto al elemento por el cual proyectaremos las órbitas de las estrellas consideramos la altura del centro del rosetón de la fachada principal respecto el pavimento del Templo ($r = 36.34 \text{ m}$).

Los parámetros de ubicación los hemos obtenido por coordenadas GPS y la altura del centro del rosetón hasta el pavimento ha sido facilitada por el Equipo Técnico de la Sagrada Familia encabezado por el arquitecto Dr. Jaume Serrallonga.

UBICACIÓN			ROSETÓN
Longitud λ	Latitud φ	Orientación γ	Rosetón \mathcal{O}
-2.175	41.404	-135.046	$r = 36.34 m$

Tabla 9e. Parámetros determinados intrínsecamente por la Sagrada Familia.

El segundo aspecto que necesitamos fijar para determinar las proyecciones de las órbitas, a causa del movimiento precesión terrestre y del movimiento propio de cada estrella, es la época astronómica; pues tal época condiciona la posición de los astros y los cálculos de proyección.

La posición de las estrellas varía en la esfera celeste en todo momento. La variación es grande a causa del movimiento del eje terrestre de precesión de equinoccios, y es pequeña a causa del movimiento propio de cada una de las estrellas. Pero, en cualquier caso, la variación combinada por ambos movimientos es un efecto que ha de tenerse en cuenta de manera ineludible. O sea, las posiciones astronómicas de los diferentes astros, varían de manera relevante a lo largo de los más de 100 años que hace que se construyó la Fachada de la Natividad.

Las posiciones actuales de las estrellas son similares a las de la Época de referencia $J2000$ –la cual corresponde al 1 de enero a las 12^h según meridiano de Greenwich del año Gregoriano 2000, o sea la que corresponde a la época del día Juliano $JD(2451545.0)$ –. Pero la época astronómica, a causa del movimiento estelar, que consideramos es la de

la construcción de la Fachada de la Natividad que fijaremos en la Época astronómica $J1900$ –la cual corresponde al 31 de diciembre a las 12^h meridiano Greenwich del año Juliano 1899 CE; o sea, es la época del día Juliano $JD(2415020)$ –.

El lector puede acudir a libros sobre astronomía [Martín, 1990; Meeus, 1991] para aclarar correctamente la definición y cálculos de: año Gregoriano de CE, año Juliano de CE y BCE, día Juliano $JD(*)$ correspondiente al cómputo temporal propuesto por Joseph Scaliger.

Como hemos dicho, para hacer los cálculos pertinentes –tal que a partir de las coordenadas celestes de ascensión recta y declinación de cualquier estrella en la época astronómica $J2000$ obtendremos sus correspondientes coordenadas en la época astronómica $J1900$ – hemos tenido en cuenta el movimiento terrestre de precesión de equinoccios y el movimiento propio de cada estrella, y hemos usado las fórmulas de algoritmos astronómicos de métodos rigurosos los cuales el lector puede encontrar en [Meeus, 1991], y los datos estelares de la base SIMBAD [SIMBAD]. Los resultados, para las 14 primeras estrellas determinadas por Johann Bayer de la Constelación de Dragón en su Uranometría (*Tabvla Tertía. DRACO.* http://lhldigital.lindahall.org/cdm/ref/collection/astro_atlas/id/118), los presentamos en la siguiente Tabla 9f y Tabla 9g.

Bayer i	Flujo v	<i>Movimiento propio</i>		<i>J2000.0</i>	
		mas/yr in α	mas/yr in δ	Ascensión R. α	Declinación δ
α	3.68	-56.34	17.21	14 ^h 04 ^m 23 ^s	64°22'33"
β	2.81	-15.89	12.28	17 ^h 30 ^m 25 ^s	52°18'04"
γ	2.23	-8.48	-22.79	17 ^h 56 ^m 36 ^s	51°29'20"
δ	3.07	95.74	91.92	19 ^h 12 ^m 33 ^s	67°39'41"
ϵ	3.84	79.31	39.08	19 ^h 48 ^m 10 ^s	70°16'04"
θ	3.17	-20.43	19.61	17 ^h 08 ^m 47 ^s	65°42'52"
η	2.74	-17.02	56.95	16 ^h 23 ^m 59 ^s	61°30'51"
ϑ	4.01	-319.51	334.97	16 ^h 01 ^m 53 ^s	58°33'54"
ι	3.29	-8.36	17.08	15 ^h 24 ^m 55 ^s	58°57'57"
κ	3.89	-58.79	10.68	12 ^h 33 ^m 28 ^s	69°47'17"
ξ	3.75	93.82	78.5	17 ^h 53 ^m 31 ^s	56°52'21"
λ	3.85	-40.97	-19.19	11 ^h 31 ^m 24 ^s	69°19'51"
χ	3.58	531.21	-349.71	18 ^h 21 ^m 03 ^s	72°43'58"
ν	4.88	142.65	62.43	17 ^h 32 ^m 16 ^s	55°10'22"

Tabla 9f. Coordenadas celestes de 14 estrellas de la Constelación del Dragón en la época *J2000.0*.

Bayer i	Flujo v	<i>Movimiento propio</i>		<i>J1900.0</i>	
		mas/yr in α	mas/yr in δ	Ascensión R. α	Declinación δ
α	3.68	-56.34	17.21	14 ^h 01 ^m 40 ^s	64°51'14"
β	2.81	-15.89	12.28	17 ^h 28 ^m 10 ^s	52°22'31"
γ	2.23	-8.48	-22.79	17 ^h 54 ^m 16 ^s	51°30'02"
δ	3.07	95.74	91.92	19 ^h 12 ^m 32 ^s	67°29'08"
ϵ	3.84	79.31	39.08	19 ^h 48 ^m 31 ^s	70°00'47"
θ	3.17	-20.43	19.61	17 ^h 08 ^m 29 ^s	65°50'16"
η	2.74	-17.02	56.95	16 ^h 22 ^m 37 ^s	61°44'26"
ϑ	4.01	-319.51	334.97	15 ^h 59 ^m 58 ^s	58°49'56"
ι	3.29	-8.36	17.08	15 ^h 22 ^m 42 ^s	59°18'59"
κ	3.89	-58.79	10.68	12 ^h 29 ^m 12 ^s	70°20'22"
ξ	3.75	93.82	78.5	17 ^h 51 ^m 48 ^s	56°53'17"
λ	3.85	-40.97	-19.19	11 ^h 25 ^m 27 ^s	69°52'59"
χ	3.58	531.21	-349.71	18 ^h 22 ^m 59 ^s	72°41'21"
ν	4.88	142.65	62.43	17 ^h 30 ^m 18 ^s	55°14'26"

Tabla 9g. Coordenadas celestes de 14 estrellas de la Constelación del Dragón en la época *J1900.0*.

4. Resultados gráficos de la proyección

Cada uno de los astros de la constelación de *Draco-Serpens* realizan diariamente una órbita circular \mathcal{C} en la esfera celeste (a efectos de notación, cada astro i tendrá sus órbita C_i).

Con los parámetros considerados $\{\lambda, \varphi, \gamma, r\}$, proyectamos C_i sobre el pavimento del Templo las órbitas diarias –a través del centro del rosetón \mathcal{O} – de las primeras estrellas catalogadas por Bayer y tabulados los cálculos para las mismas en la Tabla 9f y Tabla 9g. Con estas proyecciones de C_i , obtenemos sobre el pavimento de la Sagrada Familia las trayectorias diarias T_i correspondientes a cada astro –con subíndice i –.

Para representar gráficamente las trayectorias T_i en la época astronómica $J1900.0$ y para tener un total control en el proceso gráfico, hemos diseñado nuestro propio programa informático con el que hemos introducido todos los valores en formato vectorial CAD además de redibujar con precisión la planta de la Sagrada Familia gracias a un documento vectorial cedido por el Equipo Técnico Oficial del Templo; el resultado puede observarse en la Figura 9v.

5. Conclusiones

Son varios los reptiles que pueden observarse, sin dificultad, esculpidos sobre las fachadas exteriores de la Sagrada Familia desde su

exterior; sin embargo, aparentemente no se visualiza ningún reptil en el interior ni desde el interior del Templo. Ahora bien, en esta investigación desvelamos con técnicas geométricas, gráficas y astronómicas que sí es posible visualizar un reptil desde el interior. Más concretamente, desde el crucero de la Sagrada Familia puede verse a través del rosetón principal de la Fachada de la Natividad la Constelación del Dragón (*Serpens*) –la cual es el actual Catasterismo de la Natividad que proviene directamente del antiguo catasterismo egipcio de la deidad Ta-Urt, protectora del parto de los dioses–. Inversamente, toda la Constelación *Draco-Serpens* puede proyectarse enteramente en el interior del Templo sobre su planta a través del "Ojo de Dios" (Figura 9w).

Observando en detalle la Figura 9w obtenemos que, cuando Gamma Draconis (γ Dra) –la estrella más brillante de toda la Constelación del Dragón, "Etanin"– se proyecta en el eje longitudinal de la nave central de la Sagrada Familia, toda la cabeza de la serpiente –formada por las cuatro estrellas γ Dra, β Dra, ξ Dra y ν Dra– se proyecta en el crucero del Templo; y además, en esta posición toda la constelación se proyecta completamente en el interior de la edificación.

Así, en resumen, en este trabajo hemos considerado el rosetón de la Sagrada Familia como un instrumento astronómico. Con ello, y en base a su concreta posición en el diseño del Templo, hemos relacionado la fachada de la Natividad con la Constelación *Draco-Serpens* y la hemos representado gráficamente –vía proyección astronómica– sobre la planta.

Figuras relacionadas con la Sección 9.3 del Capítulo IX.

Figura 9q. En la fila superior y de izquierda a derecha, esculturas pétreas –que aluden a reptiles– situadas en las siguientes obras arquitectónicas: Casa Botines, Parc de la Ciutadella, Parc Güell y Casa Batlló. En la fila inferior y de izquierda a derecha, ornamentaciones en hierro forjado de esculturas –que aluden a reptiles– en los siguientes elementos: Farolas en la Plaza Real de Barcelona, Puerta de acceso a la Finca Güell, Detalle de Casa Vicens y Fuente de Hércules en el Palacio Real de Pedralbes.

Figura 9r. Esculturas de reptiles que se encuentran en el exterior de la Sagrada Familia.

Figura 9s. Fotografías históricas de la fachada de la Natividad y detalle del rosetón central [Prévost y Descharnes, 1969].

Figura 9t. Reproducciones de la diosa Àpet o Ta-Urt.

Figura 9u. "*Tabula Tertia. DRACO*" de Uranometría de Bayer. Universitäts Bibliothek Heidelberg. <http://digi.ub.uni-heidelberg.de/diglit/bayer1648/0016>.

Figura 9v. Sección transversal del templo y trayectorias diarias \mathcal{T}_i sobre la planta de la Sagrada Familia, y proyección gráfica diaria de *Draco*-

Serpens en el instante en que γ *Dra* "Etanin" pasa por el eje central del Templo.

Figura 9w. Detalle de las trayectorias diarias \mathcal{T}_i sobre la planta de la Sagrada Familia y visión interior del Templo desde el crucero hasta el rosetón de la Fachada de la Natividad.



Figura 9q



Figura 9r

UNIVERSITAT ROVIRA I VIRGILI

ANÁLISIS GEOMÉTRICO Y ASTRONÓMICO EN LA CATEDRAL DE CHARTRES

Juan Miguel Seguí Colomar



Figura 9s

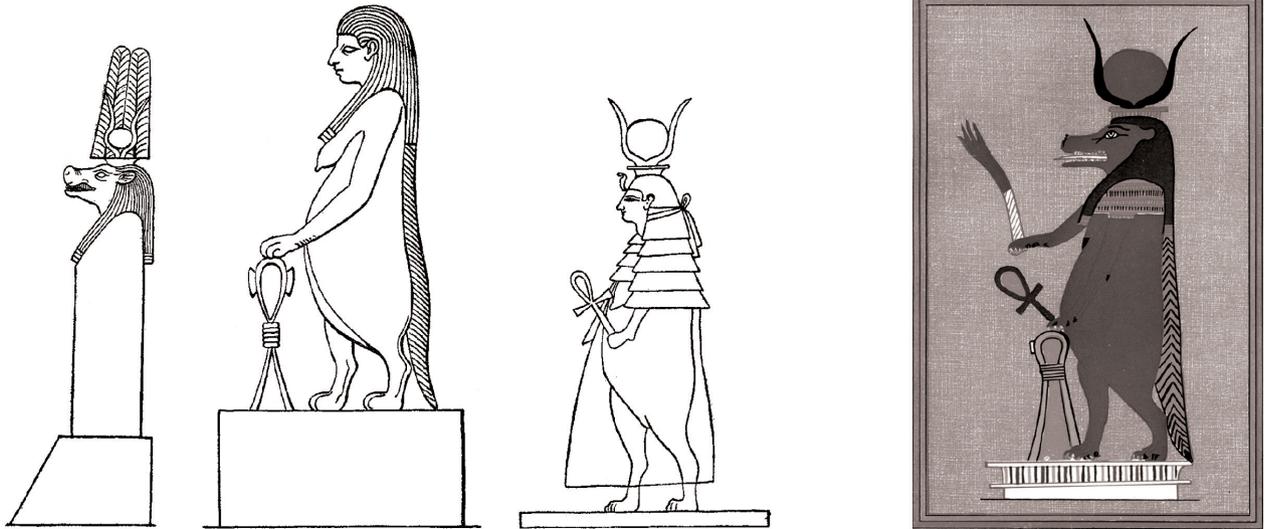


Figura 9t

UNIVERSITAT ROVIRA I VIRGILI

ANÁLISIS GEOMÉTRICO Y ASTRONÓMICO EN LA CATEDRAL DE CHARTRES

Juan Miguel Seguí Colomar

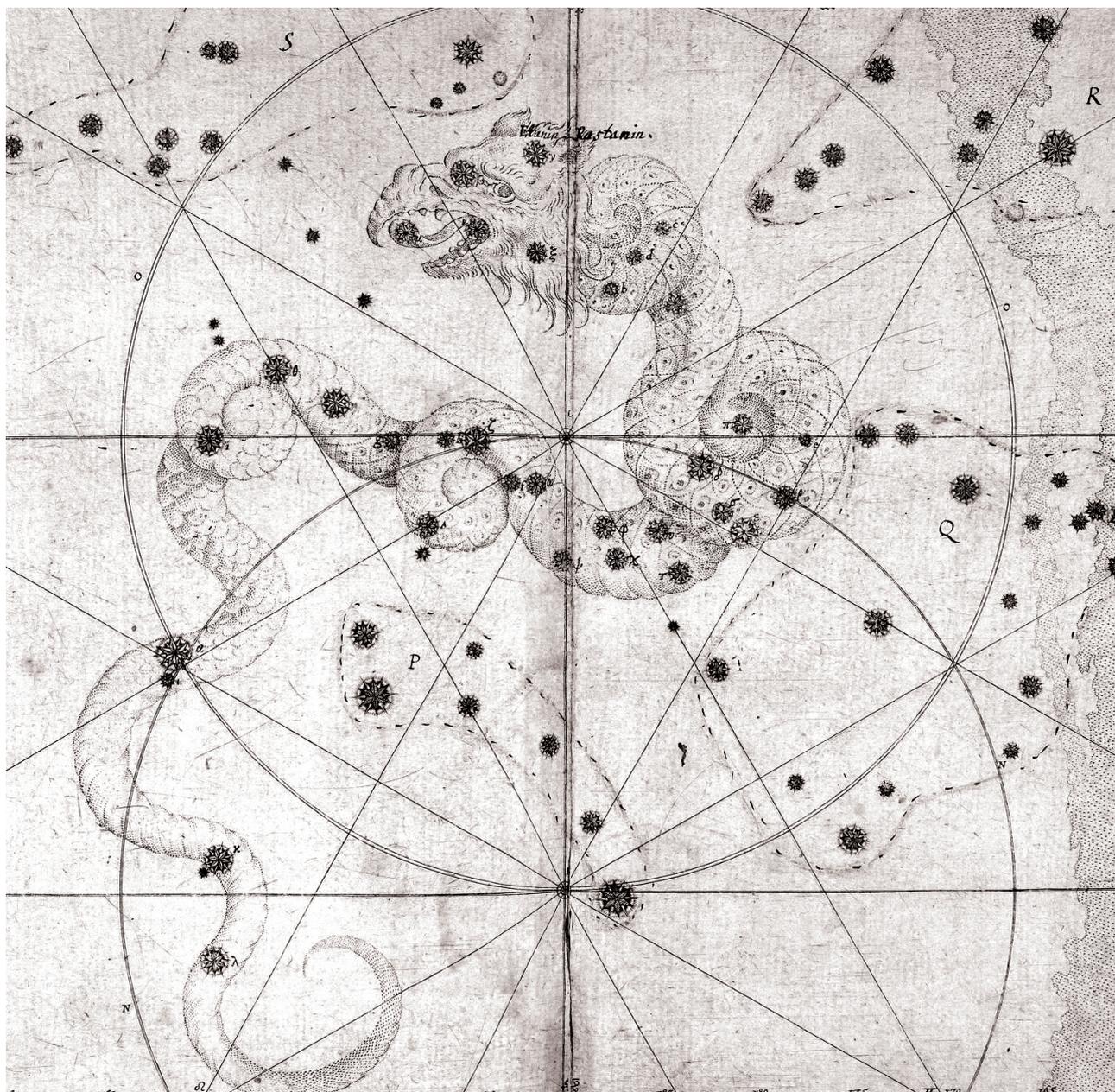


Figura 9u

UNIVERSITAT ROVIRA I VIRGILI

ANÁLISIS GEOMÉTRICO Y ASTRONÓMICO EN LA CATEDRAL DE CHARTRES

Juan Miguel Seguí Colomar



Figura 9v

UNIVERSITAT ROVIRA I VIRGILI

ANÁLISIS GEOMÉTRICO Y ASTRONÓMICO EN LA CATEDRAL DE CHARTRES

Juan Miguel Seguí Colomar

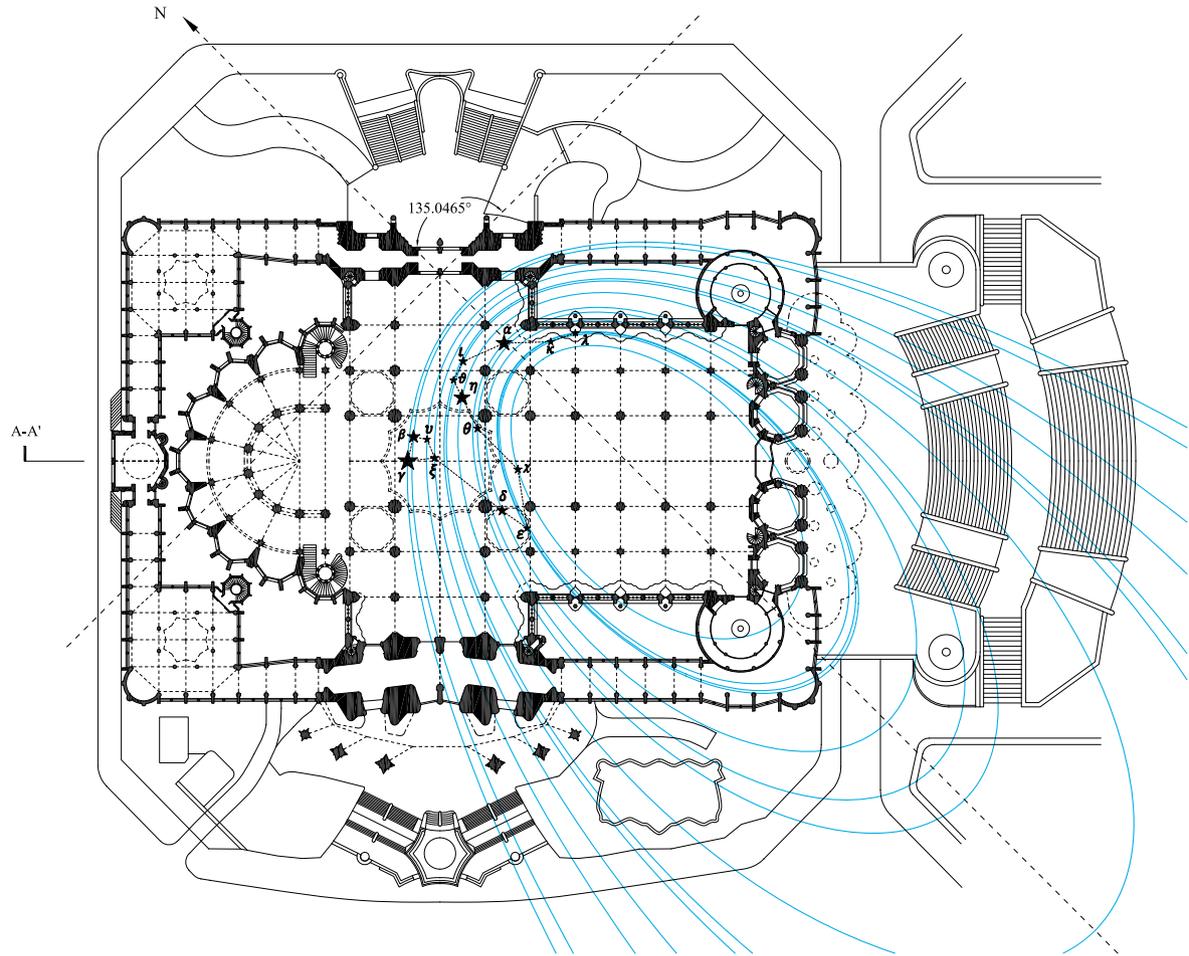


Figura 9v

UNIVERSITAT ROVIRA I VIRGILI

ANÁLISIS GEOMÉTRICO Y ASTRONÓMICO EN LA CATEDRAL DE CHARTRES

Juan Miguel Seguí Colomar

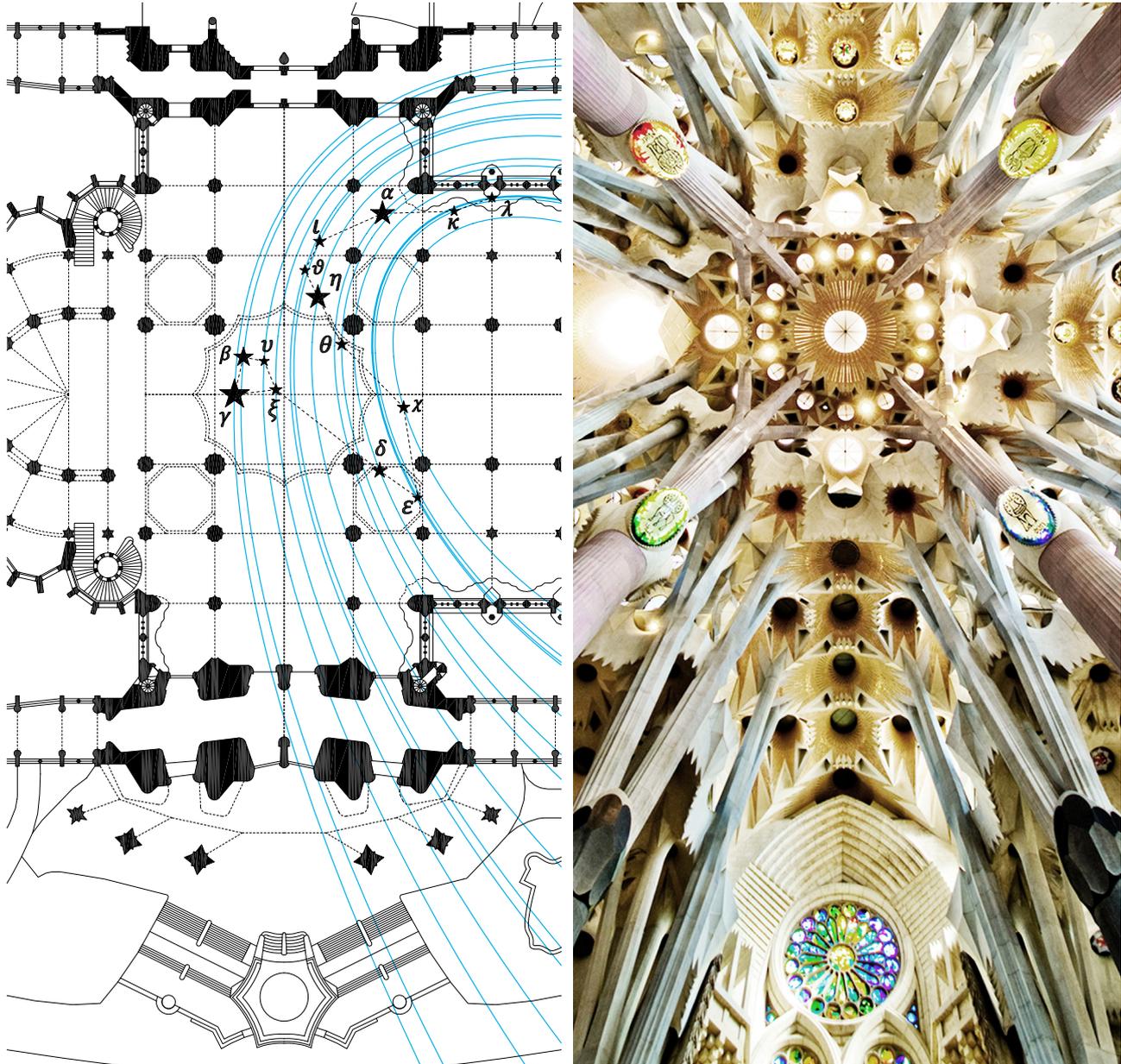


Figura 9w

UNIVERSITAT ROVIRA I VIRGILI

ANÁLISIS GEOMÉTRICO Y ASTRONÓMICO EN LA CATEDRAL DE CHARTRES

Juan Miguel Seguí Colomar

Referencias bibliográficas

Allen, R. H. 1889. *Star Names: Their Lore and Meaning*. Dover Publications, Inc. United States of America.

Artress, L. 1995. *Walking a Sacred Path: Rediscovering the Labyrinth as a Spiritual Tool*. Riverhead Books. New York.

Ashmore, W. y Sabloff, J. A. 2003. Interpreting ancient Maya civic plans: reply to Smith. *Latin American Antiquity*, 14: 229-236.

Aveni, A. F. y Horst H. 1978. Los observatorios astronómicos en Chichén Itzá, Mayapán y Paalmul. *Boletín de la Escuela de Ciencias Antropológicas de la Universidad de Yucatán*, 6 (32): 2-13.

Aveni, A. F. y Horst, H. 1986. Maya city planning and the calendar. *Transactions of the American Philosophical Societ*, Vol.76, Part 7.

Baines, J. 1991. Egyptian Myth and Discourse: Myth, Gods and the early written and iconographic record. *Journal of Near Eastern Studies*, 50 (2): 81-105.

Barral, X. 1999. *Art de Catalunya. Arquitectura religiosa moderna i contemporània*. L'isard. Barcelona.

Bauval, R. y Gilbert, A. 1994. *The Orion Mystery, Unlocking the Secrets of the Pyramids*. Three rivers press. New York.

Bayer, J. 1603. *Uranometria: omnium asterismorum continens schemata, no a methodo delineata, aereis laminis expressa*. Augustae Vindelicorum: Excudit Christophorus Mangus. Augsburg.

Catamo, M. y Lucarini, C. 2002. *Il cielo in Basilica. La Meridiana della Basilica di Santa Maria degli Angeli e dei Martiri in Roma*. Edizioni AGAMI. Roma.

Campbell, J. 1965. *The Masks of God: Occidental Mythology*. Secker & Warburg. London.

Charpentier, L. 1969. *Les Mystères de la Cathédrale de Chartres*. Plaza&Janes, S.A. Spain.

Eratosthenes of Cyrene 2nd century BCE and Schaubach J.C. 1975. *Eratosthenis Catasterismi cum interpretatione latina et commentario*. Gottingae, apud Vandenhoeck et Ruprecht.

Connolly, D. K. 2005. At the Center of the World: The Labyrinth Pavement of Chartres Cathedral. In: Blick S, Tekippe R, editors. *Art and Architecture of late medieval pilgrimage in northern Europe and the British isles text*. Boston: Brill Academic Publishers: 285–314.

Critchlow, K.; Carroll, J. y Vaughan L. 1975. *Chartres Maze, a model of the universe?*. Rilko Occasional Paper. London.

Curl, J. S. 2000. Egypt in Rome. *Interdisciplinary Science Reviews*, 25 (1): 53-64.

Dandini, E. 1816. *Descrizione della Sacrosanta Basilica Vaticana sue Piazze Portici Grotte Sacristie Parti Superiori Interne ed Esterne e Loro Misure*. Edizione Terza. Roma.

Dunand, F. 1973. *Le culte d'Isis dans le basin oriental de la méditerranée*. Brill "EPRO 26". Leiden.

Fawcett, J. 2001. *Historic Floors: Their history and conservation*. Butterworth Heinemann. Oxford.

Ferré, R. 2001. *Origin, symbolism and design of the Chartres labyrinth*. One Way Press. St. Louis, MO.

Galindo, J. 1994. *Arqueoastronomía en la América antigua*. Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología. Editorial Equipo Sirius. México.

Ginovart, J.L.; Samper, A.; Herrera, B. Coll, S. and Costa, A. 2016. Geometry of the icosikaidigon in Orvieto cathedral. *Nexus Network Journal*, 18 (2): 419-438.

Gridgeman, N. T. 1970. Quadrarcs, St. Peter's, and the Colosseum. *The Mathematics Teacher* 63: 209-215.

González-García, A.C. y Belmonte, J. A. 2014. Sacred Architecture Orientation Across the Mediterranean: A Comparative Statistical Anaylisis. *Mediterranean Archaeology and Archaeometry*, 14(2): 95-113.

Hannah, R. 2013. Greek Temple Orientation: The case of the Older Parthenon in Athens. *Nexus Network Journal*, 15 (3): 423-443.

Hart, G. 1990. *Egyptian Myths*. British Museum Publications. University of Texas Press. Austin.

Heilbron, J.L. 2001. *The sun in the church. Cathedrals as solar observatories*. Harvard University Press. London.

Hoyle, F. 1966. Stonehenge: an eclipse predictor. *Nature*, 211: 454-456.

James, J. 1977. The mystery of the great labyrinth, Chartres cathedrale. *Studies in Comparative Religion* 11(2): 92-115.

James, J. 1990. *The master masons of Chartres*. West Grinstead Publishing. Leura, NSW Australia.

Jeauneau, É. 2009. *Rethinking the School of Chartres*. Toronto: University of Toronto Press.

Kruft, H. W. 1979. The origin of the oval in Bernini's Piazza S. Pietro. *The Burlington Magazine*, 121 (921):796-801.

Laporte, K. y Odette, J. 1997. *Le labyrinthe déchiffre*. Éditions Garnier. Chartres.

Magli, G. 2016. Sirius and the project of the megalithic enclosures at Gobekli Tepe. *Nexus Network Journal*, 18: 337-346.

Martín, F. 1990. *Astronomía*. Parainfo. Madrid.

Martinell, C. 1952. *La Sagrada Familia*. Editorial AYMA. Barcelona.

McCluskey, S. 1998. *Astronomies and Cultures in Early Medieval Europe*. Cambridge University Press. Cambridge.

McVaugh, M. and Behrends, F. 1971. Fulbert of Chartres' Notes on Arabic Astronomy. *Manuscripta: A Journal for Manuscript Research*, 172-177.

Meeus, J. 1991. *Astronomical Algorithms*. Willmann-Bell, Inc. Richmond. Virginia.

NASA website. <http://sideshow.jpl.nasa.gov/post/series.html>.

Peters, C.H.F. y Knobel, E.B. 1915. *Ptolemy's Catalogue of Stars, a revision of the almagest*. Washington: The Carnegie Institution of Washington.

Plutarch 1st century BCE and translated by Babbitt F.C. 1936. *Moralia, Volume V* . Loeb Classical Library No. 306. Harvard University Press. London.

Pinto, J. 1976. Circle and oval in the square of Saint Peter's: Bernini's art of planning by Timothy K. Kitao. *Journal of the society of architectural historians*, 35 (3): 234-235.

Prévost, C. y Descharnes, R. 1969. *La visió artística i religiosa de Gaudí*. Aymà S. A. Editora. Barcelona.

Ptolemy 2nd century CE and edidit Heiberg J.L. 1903. *Claudii Ptolemaei opera quae extant omnia. Syntaxis Mathematica*. Volume 1 and 2. Lipsiae, In aedibus B. G. Teubneri.

Puig, I. 1929. *El temple de la Sagrada Família*. Editorial Barcino. Barcelona.

Rafols, J. F. 1928. *Antoni Gaudí*. Editorial Canosa. Barcelona.

Reed, P. 1992. *The Idea of the Labyrinth: from Classical Antiquity through the Middle Ages*. Cornell University Press. London.

Rosin, P. R. 2001. On Serlio's constructions of ovals. *The Mathematical Intelligencer*, 23: 58-69.

Samper, A. y Herrera, B. 2015. A Study of the Roughness of Gothic Rose Windows. *Nexus Network Journal*, 18 (2): 397-417.

Santarcangeli, P. 2002. *El libro de los laberintos*. Siruela. Madrid.

Scotese, C.R. 2001. *Atlas of Earth History. Volume 1, Paleogeography*. PALEOMAP Project. Arlington.

Serlio, S. y Scamozzi, G. D. 1600. Tutte l'opere d'architettura et prrospectiva [i.e. prospettiva] di Sebastiano Serlio Bolognese. In Vinegia: presso gli heredi di Francesco de' Franceschi.

SIMBAD. website. <http://simbad.u-strasbg.fr/simbad>.

Sparavigna, A. 2015. Light and Shadows in Bernini's Oval of Saint Peter's Square. *PHILICA.COM Article number 540*.

Šprajc, I. y Sánchez, P. 2012. Orientaciones astronómicas en la arquitectura Maya de las Tierras Bajas: nuevos datos e interpretaciones. XXV Simposio de Investigaciones Arqueológicas en Guatemala. pp.952-972. Ministerio de cultura y deportes, Instituto de Antropología e Historia y Asociación Tikal. Guatemala.

Stevens, J. 2000. Egypt in Rome - an introductory essay I: Isis, obelisks, and the Isaeum Campense. *Interdisciplinary Science Reviews*, 25 (1): 53-64.

Timoty, K. K. 1974. *Circle and oval in the square of Saint Peter's: Bernini's art of planning*. New York Univesity Press. New York.

Tomasini, M.C. 2015. La orientación de la catedral de Chartres y su relación con los solsticios. Una lectura Neoplatónica. *Cuadernos Medievales*, 18: 24-37.

Tran, V. 1973. *Isis Lactans, Corpus des monuments gréco-romains d'Isis allaitant Harpocrate*. Brill "EPRO 27". Leiden.

Villani, V. Geometria e software geometrico - Il punto di vista di un matematico. Proceedings of the third cabri geometry international conference. Edizioni Nuova Cultura. Edited by Giuseppe Accascina and Giovanni Margiotta. 2012. Roma. pp: 149-174.

Villete, J. 1994. *La labyrinth de la cathédrale de Chartres*, from Monde médiéval et société chartraine: Actes du colloque international organisé par la Ville et le Diocèse de Chartres à l'occasion du 8e centenaire de la Cathédrale de Chartres 8-10 septembre 1994. Ed. Jean-Robert Armogathe (Paris, Picard, 1994): 307.

Wallis, E. A. 1904. *The Gods of the Egyptians or Studies in Egyptian Mythology (Volume 2)*. Methuen & Company. Londres.

Wilkinson, R. 2003. *Todos los dioses del Antiguo Egipto*. Oberón. Madrid.

Witt, R. E. 1971. *Isis in the Graeco-Roman world*. Cornell University Press. New York.

Wittkower, R. 1940. A counter-project to bernini's "Piazza di San Pietro". *Journal of the warburg and courtauld institutes*, 3 (1-2): 88-106.

Wright, C. 2001. *The Maze and the Warrior: Symbols in Architecture, Theology and Music*. London: Harvard University Press. p.307, nota 37.

UNIVERSITAT ROVIRA I VIRGILI

ANÁLISIS GEOMÉTRICO Y ASTRONÓMICO EN LA CATEDRAL DE CHARTRES

Juan Miguel Seguí Colomar

Índice alfabético

A

Aberración, 13, 108, 136, 288
Ábside, 10, 15, 235, 276, 277, 284, 285, 286
Adhara, 23, 241, 242, 245, 269, 271, 290,
291, 294, 296, 301, 355, 356
Aldebarán, 70, 244, 331, 332, 333, 337, 357
Analemas, 11, 54, 62, 63, 64, 161, 403
Antoni Gaudí, 359, 439, 441, 473
Años, 11, 42, 73
Arturo, 21, 70, 72, 275, 397, 411

B

Bayer, 238, 240, 241, 242, 244, 247, 248,
330, 331, 332, 335, 338, 339, 358, 406,
444, 448, 449, 450, 451, 453, 469
Bóveda, 29, 30, 32, 34, 52, 54, 55, 60, 61,
66, 67, 111, 234, 281, 364

C

Calendario, 11, 12, 49, 91
Canis Major, 241, 242, 245
Catasterismo, 296, 452
Catedral de Chartres, 23, 238, 329
Celeste, 11, 13, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35,
36, 42, 44, 45, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 60,
61, 66, 67, 68, 73, 74, 98, 99, 100, 101,
111, 155, 234, 280, 281, 283, 284, 285,
289, 364, 368, 371, 372, 376, 407

Ch

Chartres, 3, 5, 9, 10, 13, 14, 15, 16, 17, 21,
22, 23, 24, 26, 27, 89, 111, 112, 113,

114, 115, 116, 152, 155, 160, 161, 198,
229, 232, 233, 234, 236, 237, 238, 240,
243, 245, 269, 271, 273, 274, 275, 278,
279, 280, 281, 287, 288, 289, 290, 291,
292, 293, 295, 296, 300, 301, 303, 323,
325, 326, 327, 328, 329, 330, 335, 336,
337, 338, 339, 355, 356, 357, 358, 361,
364, 366, 370, 372, 373, 374, 375, 376,
378, 379, 397, 469, 470, 471, 472, 475

C

Círculo, 31, 32, 33, 34, 36, 37, 38, 39, 40,
41, 42, 52, 54, 55, 56, 57, 244, 278, 281,
282, 283, 284, 285, 286, 328, 336, 358
Círculos astronómicos, 11, 32
Constelación, 14, 243, 359, 361, 364, 376,
378, 379, 381, 383, 445, 446, 448, 449,
450, 452
Coordenadas celestes, 11, 52, 290, 331,
332, 335, 406, 449, 450
Coordenadas ecuatoriales, 12, 94, 95
Coordenadas horizontales, 12, 92
Correlación, 10, 15, 16, 119, 290, 300
Crucero, 15, 276, 277, 283, 284, 285, 452,
454

D

Día Juliano, 11, 12, 14, 51, 91, 195
Dragón, 17, 40, 359, 444, 445, 446, 448,
449, 450, 452

E

Eje, 30, 31, 32, 44, 53, 60, 65, 66, 73, 115,
116, 278, 280, 281, 288, 292, 328, 371,
375, 398, 401, 402, 405, 407, 447, 452,
454
Elnath, 244
Elthor, 17, 23, 240, 242, 243, 244, 245, 269,
271, 290, 291, 294, 296, 301, 323, 327,
329, 331, 332, 333, 334, 335, 337, 338,
339, 355, 356, 357, 358
Época astronómica, 12, 92, 289, 368, 404,
405, 448
Equinoccio medio, 12, 99, 102, 288
Eratosthenes, 241, 242, 443, 469
Esfera, 29, 30, 31, 34, 36, 37, 42, 45, 52, 53,
61, 69, 70, 98, 233, 278, 280, 281, 282,
283, 284, 285, 286, 287, 288, 289, 291,
330, 334, 366, 368, 371, 372, 376, 377,
400, 405, 406, 407, 443, 445, 447, 451
Etanim, 14, 199

F

Fachada, 10, 17, 22, 89, 234, 271, 276, 303,
323, 325, 327, 328, 336, 337, 339, 355,
357, 359, 441, 442, 445, 446, 452, 453

G

Girola, 15, 276, 285, 286

H

Hora media, 11, 45, 46, 62, 63, 64
Hora verdadera, 11, 44, 45, 58, 60, 61
Horizontal, 15, 62, 65, 276, 278, 280, 281

I

Isis, 14, 15, 16, 17, 22, 23, 235, 236, 237,
238, 239, 240, 241, 242, 243, 245, 247,
269, 271, 287, 290, 291, 293, 294, 295,
296, 300, 301, 303, 323, 327, 329, 338,
355, 356, 357, 358, 442, 443, 444, 470,
475, 476

J

J1200, 13, 15, 23, 24, 111, 112, 152, 235,
269, 274, 287, 289, 290, 291, 294, 296,
300, 301, 303, 323, 325, 330, 332, 333,
334, 335, 336, 337, 339, 355, 357, 371,
372, 374, 376, 377, 378, 379, 383

L

Laberinto, 15, 16, 17, 23, 235, 240, 243,
244, 245, 277, 281, 282, 284, 285, 323,
325, 326, 327, 328, 329, 333, 334, 335,
336, 337, 339, 357, 358
Louis Charpentier, 9, 17, 361, 364, 366,
370, 381, 383

M

Magnitud aparente, 12, 71, 107
Maternidad, 14, 22, 237, 238, 239, 240,
245, 338, 358, 442, 443
Minotauro, 243, 245, 248, 323, 328, 329,
336, 358
Mitología griega, 14, 243
Movimiento, 12, 13, 29, 30, 31, 33, 34, 42,
46, 53, 54, 58, 65, 66, 67, 69, 70, 71, 73,
98, 99, 100, 133, 136, 288, 289, 368,
371, 374, 405, 406, 407, 447, 448
Movimiento propio, 11, 69, 136, 406, 449,
450
Movimientos aparentes, 11, 30

N

Natividad, 17, 359, 441, 442, 443, 444, 445,
446, 447, 448, 452, 453, 454
Notre-Dame, 14, 17, 20, 21, 23, 234, 236,
237, 238, 245, 271, 323, 355, 357, 361,
364, 365, 366, 370, 376, 377, 380, 381,
382, 383
Nutación terrestre, 12, 58, 72

P

Plaza de San Pedro, 17, 359, 395, 397, 398,
400, 401, 404, 405, 406, 411, 412
Pléyades, 244
Polar, 32, 36, 104
Precesión terrestre, 11, 58, 65
Proyección, 12, 17, 359, 446
Ptolomeo, 25, 30, 70, 71, 231, 238, 336,
444

R

Reloj de Sol, 11, 58, 62
Rosetón, 10, 14, 17, 22, 23, 58, 89, 97, 98,
161, 198, 234, 243, 271, 272, 274, 275,
276, 278, 281, 282, 283, 284, 285, 286,
291, 294, 303, 323, 325, 326, 327, 330,
336, 337, 339, 357, 359, 442, 445, 446,
451, 452, 453, 454

S

Sagrada Familia, 10, 14, 17, 198, 199, 204,
359, 439, 441, 445, 446, 447, 451, 452,
453, 454, 472
Sirio, 17, 21, 23, 70, 72, 241, 242, 245, 269,
271, 274, 290, 291, 294, 296, 301, 355,
356, 359, 393, 395, 396, 400, 404, 406,
407, 408, 411, 412

Spica, 13, 23, 72, 107, 111, 112, 113, 114,
115, 117, 152, 155, 160, 240, 241, 242,
245, 269, 271, 290, 294, 296, 301, 355,
356, 366, 367, 372, 373, 374, 375, 376

T

Tabla de contingencia, 13, 124, 125
Tauro, 14, 16, 17, 23, 34, 68, 238, 239, 240,
241, 243, 244, 247, 269, 301, 323, 327,
329, 330, 331, 332, 336, 337, 339, 355,
357, 358
Ta-Urt, 443, 452, 453
Taurus, 240, 242, 245
Teorema, 17, 355, 357
Teoría, 9, 17, 359, 364, 370, 380, 383
Test de Fisher-Irwin, 13, 120, 122, 123,
127, 128, 299
Test de Pearson, 13, 126, 127, 298, 299
Test de Student, 13, 119, 120
Tiempo dinámico, 11, 14, 45, 47, 51, 69,
195
Tiempo medio, 11, 45
Tiempo sidéreo, 21, 43, 94, 275, 397
Tiempo verdadero, 11, 42, 44, 46, 59, 60
Trayectorias, 13, 16, 22, 23, 161, 234, 272,
273, 291, 292, 293, 323, 327, 330, 333,
334, 335, 337, 339, 357, 400, 403, 407,
409, 411, 413, 445, 451, 453, 454

U

Ushakaron, 244, 331, 332, 333, 337, 339,
357

V

Vaticano, 17, 359, 395, 412
Virgen María, 14, 236, 237, 238, 245, 442
Virgo, 20, 23, 35, 107, 112, 234, 238, 241,
242, 245, 248, 269, 301, 355, 361, 364,

365, 366, 371, 373, 376, 377, 378, 379, 380, 381, 382, 383	292, 293, 301, 330, 356, 366, 367, 368, 371, 445
visual, 15, 22, 72, 107, 241, 244, 272, 273, 278, 280, 281, 282, 283, 284, 285, 286,	

Este trabajo se ha maquetado con un formato cuadrado de 21x21 centímetros; dejando 2 centímetros de margen en los lados no encolados y 6 centímetros en el margen de encuadernación. El estilo tipográfico usado es Bookman Old Style, tamaño número diez –a excepción de algunos apartados–, alineación justificada y interlineado del párrafo a 1,5 líneas.

El soporte interior es de papel estucado satín de 135 gramos y el soporte de la portada se conforma con un papel tipo estucado satín de 300 gramos y acabado laminado mate.

La primera tirada ha sido de 15 ejemplares.

UNIVERSITAT ROVIRA I VIRGILI

ANÁLISIS GEOMÉTRICO Y ASTRONÓMICO EN LA CATEDRAL DE CHARTRES

Juan Miguel Seguí Colomar