

УДК 517.925

## АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕРЕНИЕ ОДНОГО КЛАССА РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ НЕАВТОНОМНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

**А. А. Козьма**

Одес. гос. эконом. ун-т

Украина, 65026, Одесса, ул. Преображенская, 8

e-mail: sanjakos@ukr.net

*For the ordinary differential second-kind equation containing in a right member the sum composed with correctly varying concerning unknown function and its derivative of the first order by nonlinearities, necessary and sufficient existence enough a wide class of monotone solutions, and as exact asymptotic representations of solutions from the given class in a neighborhood of a singular point are established.*

*Для звичайного дифференціального рівняння другого порядку, яке містить у правій частині суму доданків з правильно мінливими відносно невідомої функції та її похідної першого порядку нелінійностями, встановлено необхідні та достатні умови існування широкого класу монотонних розв'язків, а також точні асимптотичні зображення для розв'язків з цього класу в околі особливої точки.*

**1. Постановка задачи.** Рассматривается дифференциальное уравнение второго порядка

$$y'' = \sum_{i=1}^m \alpha_i p_i(t) [1 + r_i(t)] \varphi_{i0}(y) \varphi_{i1}(y'), \quad (1.1)$$

в котором  $\alpha_i \in \{-1, 1\}$ ,  $i = 1, \dots, m$ ,  $p_i : [a, \omega) \rightarrow (0, +\infty)$ ,  $i = 1, \dots, m$ ,  $-\infty < a < \omega \leq +\infty$ <sup>1</sup>) — непрерывно дифференцируемые функции,  $r_i : [a, \omega) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $i = 1, \dots, m$ , — непрерывные функции, удовлетворяющие условиям

$$\lim_{t \uparrow \omega} r_i(t) = 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad (1.2)$$

$\varphi_{ik} : \Delta_k \rightarrow (0, +\infty)$ ,  $k = 0, 1$ ,  $i = 1, \dots, m$ , — непрерывно дифференцируемые функции,

$$\Delta_k = \begin{cases} \text{либо } [y_k, Y_k), \\ \text{либо } (Y_k, y_k], \end{cases} \quad y_k \in \mathbb{R}, \quad Y_k = \begin{cases} \text{либо } 0, \\ \text{либо } \pm\infty, \end{cases} \quad (k = 0, 1)^2 \quad (1.3)$$

причем  $\varphi_{ik}$  такие, что при  $k = 0, 1$ ,  $i = 1, \dots, m$

$$\lim_{\substack{z \rightarrow Y_k \\ z \in \Delta_k}} \varphi_{ik}(z) = \varphi_{ik}^0, \quad 0 \leq \varphi_{ik}^0 \leq +\infty \quad (1.4)$$

<sup>1</sup> При  $\omega = +\infty$  считаем, что  $a > 0$ .

<sup>2</sup> При  $Y_k = +\infty$  ( $Y_k = -\infty$ ) считаем, что  $y_k > 0$  ( $y_k < 0$ ).

и

$$\lim_{\substack{z \rightarrow Y_k \\ z \in \Delta_k}} \frac{z\varphi'_{ik}(z)}{\varphi_{ik}(z)} = \sigma_{ik} = \text{const.} \quad (1.5)$$

Положим

$$\pi_\omega(t) = \begin{cases} t & \text{при } \omega = +\infty, \\ t - \omega & \text{при } \omega < +\infty. \end{cases}$$

**Определение 1.1.** Решение  $y$  уравнения (1.1), заданное на промежутке  $[t_0, \omega) \subset [a, \omega)$ , будем называть  $\Pi_\omega(Y_0, Y_1, \mu_0)$ -решением, где  $-\infty \leq \mu_0 \leq +\infty$ , если оно удовлетворяет следующим условиям:

$$y^{(k)} : [t_0, \omega) \rightarrow \Delta_k, \lim_{t \uparrow \omega} y^{(k)}(t) = Y_k \quad k = 0, 1, \quad (1.6)$$

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{\pi_\omega(t)y''(t)}{y'(t)} = \mu_0, \quad \lim_{t \uparrow \omega} \frac{y''(t)y(t)}{[y'(t)]^2} = 1 \quad \text{при } \mu_0 = \pm\infty. \quad (1.7)$$

В настоящей работе для  $\mu_0 \in \mathbb{R}$  приведены условия, при выполнении которых на любом  $\Pi_\omega(Y_0, Y_1, \mu_0)$ -решении уравнения (1.1) правая его часть асимптотически эквивалентна одному слагаемому. При выполнении этих условий в случае  $\mu_0 \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$  установлены необходимые и достаточные признаки существования  $\Pi_\omega(Y_0, Y_1, \mu_0)$ -решений, а также получены асимптотические представления для таких решений и их производных первого порядка при  $t \uparrow \omega$ . Аналогичные результаты при более жестких условиях на функции  $\varphi_{ik}$ ,  $k = 0, 1$ ,  $i = 1, \dots, m$ , содержатся в работах [1–3].

Отметим, что признаки существования и асимптотика  $\Pi_\omega(Y_0, Y_1, \mu_0)$ -решений уравнения (1.1) при  $\varphi_{i1} \equiv 1$  были указаны В. М. Евтуховым и В. А. Касьяновой в [4, 5], а при  $m = 1$  В. М. Евтуховым и М. А. Белозеровой в [6, 7].

**2. Некоторые априорные свойства  $\Pi_\omega(Y_0, Y_1, \mu_0)$ -решений.** Обозначим  $M = \{1, \dots, m\}$  и покажем, что имеет место следующее утверждение.

**Лемма 2.1.** Пусть  $\mu_0 \in \mathbb{R}$  и для некоторых  $i \in M$  и  $j \in M \setminus \{i\}$  выполняется условие

$$\limsup_{t \uparrow \omega} |\pi_\omega(t)| \left[ \frac{p'_j(t)}{p_j(t)} - \frac{p'_i(t)}{p_i(t)} \right] < \xi_{ij}^0, \quad (2.1)$$

где

$$\xi_{ij}^0 \text{sign } \pi_\omega(t) = (1 + \mu_0)(\sigma_{i0} - \sigma_{j0}) + \mu_0(\sigma_{i1} - \sigma_{j1}).$$

Тогда для каждого  $\Pi_\omega(Y_0, Y_1, \mu_0)$ -решения уравнения (1.1) выполняется предельное соотношение

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{p_j(t)\varphi_{j0}(y(t))\varphi_{j1}(y'(t))}{p_i(t)\varphi_{i0}(y(t))\varphi_{i1}(y'(t))} = 0. \quad (2.2)$$

**Доказательство.** Пусть  $y : [t_0, \omega) \rightarrow \Delta_0$  — произвольное  $\Pi_\omega(Y_0, Y_1, \mu_0)$ -решение уравнения (1.1). Обозначим

$$z_j(t) = \frac{p_j(t)\varphi_{j0}(y(t))\varphi_{j1}(y'(t))}{p_i(t)\varphi_{i0}(y(t))\varphi_{i1}(y'(t))},$$

тогда

$$z'_j(t) = z_j(t) \left[ \frac{p'_j(t)}{p_j(t)} - \frac{p'_i(t)}{p_i(t)} + \frac{y'(t)\varphi'_{j0}(y(t))}{\varphi_{j0}(y(t))} + \frac{y''(t)\varphi'_{j1}(y'(t))}{\varphi_{j1}(y'(t))} - \frac{y'(t)\varphi'_{i0}(y(t))}{\varphi_{i0}(y(t))} - \frac{y''(t)\varphi'_{i1}(y'(t))}{\varphi_{i1}(y'(t))} \right].$$

Запишем последнее соотношение в виде

$$z'_j(t) = \frac{z_j(t)}{|\pi_\omega(t)|} \left[ \frac{|\pi_\omega(t)|p'_j(t)}{p_j(t)} - \frac{|\pi_\omega(t)|p'_i(t)}{p_i(t)} - \frac{|\pi_\omega(t)|y'(t)}{y(t)} \times \right. \\ \left. \times \left( \frac{y(t)\varphi'_{i0}(y(t))}{\varphi_{i0}(y(t))} - \frac{y(t)\varphi'_{j0}(y(t))}{\varphi_{j0}(y(t))} \right) - \frac{|\pi_\omega(t)|y''(t)}{y'(t)} \left( \frac{y'(t)\varphi'_{i1}(y'(t))}{\varphi_{i1}(y'(t))} - \frac{y'(t)\varphi'_{j1}(y'(t))}{\varphi_{j1}(y'(t))} \right) \right].$$

В силу условий (1.5), (1.6)

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{y^{(k)}(t)\varphi'_{lk}(y^{(k)}(t))}{\varphi_{lk}(y^{(k)}(t))} = \sigma_{lk}, \quad k = 0, 1, \quad l = 1, \dots, m. \quad (2.3)$$

Кроме того, согласно условию (1.7) и результатам работ [4, 5] имеют место предельные соотношения

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{\pi_\omega(t)y^{(k+1)}(t)}{y^{(k)}(t)} = 1 - k + \mu_0, \quad k = 0, 1. \quad (2.4)$$

Из (2.1), (2.3) и (2.4) вытекает существование постоянных  $z_j^0 < 0$  и  $t_1 \in [t_0, \omega)$  таких, что выполняется неравенство

$$z'_j(t) \leq \frac{z_j^0 \cdot z_j(t)}{|\pi_\omega(t)|} \quad \text{при } t \in [t_1, \omega),$$

откуда следует, что

$$\ln \left| \frac{z_j(t)}{z_j(t_1)} \right| \leq z_j^0 \operatorname{sign} \pi_\omega(t) \ln \left| \frac{\pi_\omega(t)}{\pi_\omega(t_1)} \right| \quad \text{при } t \in [t_1, \omega).$$

Поскольку выражение, стоящее справа, стремится к  $-\infty$  при  $t \uparrow \omega$ , то

$$\lim_{t \uparrow \omega} z_j(t) = 0.$$

Из этого предельного соотношения следует справедливость (2.2).

### 3. Основные результаты. Введем вспомогательные обозначения

$$I_{i1}(t) = \int_{I_{i1}^0}^t p_i(s) |\pi_\omega(s)|^{\sigma_{i0}} ds \quad I_{i1}^0 = \begin{cases} a, & \text{если } \int_a^\omega p_i(s) |\pi_\omega(s)|^{\sigma_{i0}} ds = +\infty, \\ \omega, & \text{если } \int_a^\omega p_i(s) |\pi_\omega(s)|^{\sigma_{i0}} ds < +\infty. \end{cases}$$

Кроме того, введем функции  $\psi_{ik}(z) = \frac{\varphi_{ik}(z)}{|z|^{\sigma_{ik}}}$ ,  $k = 0, 1$ , которые в силу соотношения (1.5) имеют следующие свойства:

$$\lim_{\substack{z \rightarrow Y_k \\ z \in \Delta_k}} \frac{z\psi'_{ik}(z)}{\psi_{ik}(z)} = 0.$$

**Теорема 3.1.** Пусть  $\mu_0 \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$  и для некоторого  $i \in M$  при всех  $j \in M \setminus \{i\}$  выполняется условие (2.1). Положим, кроме того, что выполняется неравенство  $\sigma_{i0} + \sigma_{i1} \neq 1$ . Тогда для существования  $\Pi_\omega(Y_0, Y_1, \mu_0)$ -решений уравнения (1.1) необходимо, а если выполняется одно из двух условий

$$\mu_0(\sigma_{i1} - 2) \neq 1, \quad \mu_0(\sigma_{i1} - 2) = 1 \quad \text{и} \quad (\sigma_{i1} - 1)(\sigma_{i0} + \sigma_{i1} - 1) > 0, \quad (3.1)$$

то и достаточно, чтобы

$$Y_k = \begin{cases} \pm\infty, & \text{если } \lim_{t \uparrow \omega} |\pi_\omega(t)|^{1-k+\mu_0} = +\infty, \\ 0, & \text{если } \lim_{t \uparrow \omega} |\pi_\omega(t)|^{1-k+\mu_0} = 0, \end{cases} \quad k = 0, 1, \quad (3.2)$$

при  $t \in (a, \omega)$  выполнялись неравенства

$$\alpha_i(1 - \sigma_{i0} - \sigma_{i1})I_{i1}(t)y_1 > 0, \quad (1 + \mu_0)\pi_\omega(t)y_0y_1 > 0 \quad (3.3)$$

и имело место предельное соотношение

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{\pi_\omega(t)I'_{i1}(t)}{I_{i1}(t)} = \mu_0(1 - \sigma_{i0} - \sigma_{i1}). \quad (3.4)$$

Кроме того, каждое из таких решений допускает при  $t \uparrow \omega$  асимптотические представления

$$\frac{|y'(t)|^{1-\sigma_{i0}-\sigma_{i1}} \text{sign } y'(t)}{\psi_{i0}(y(t))\psi_{i1}(y'(t))} = \frac{\alpha_i(1 - \sigma_{i0} - \sigma_{i1})}{|1 + \mu_0|^{\sigma_{i0}}} I_{i1}(t)[1 + o(1)], \quad \frac{y'(t)}{y(t)} = \frac{1 + \mu_0}{\pi_\omega(t)} [1 + o(1)]. \quad (3.5)$$

**Доказательство. Необходимость.** Пусть  $y : [t_0, \omega) \rightarrow \Delta_0$  — произвольное  $\Pi_\omega(Y_0, Y_1, \mu_0)$ -решение уравнения (1.1). Поскольку  $\mu_0 \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$ , из соотношений (2.4) следует справедливость (3.2), второго из неравенств (3.3) и второго из асимптотических представлений (3.5). В силу выполнения условий (1.2) и (2.1) из уравнения (1.1) с учетом леммы 2.1 получаем

$$y''(t) = \alpha_i p_i(t) \varphi_{i0}(y(t)) \varphi_{i1}(y'(t)) [1 + o(1)] \quad \text{при } t \uparrow \omega$$

или, с учетом соотношений (2.4) и определения функций  $\psi_{ik}$ ,  $k = 0, 1$ ,

$$\frac{y''(t)|y'(t)|^{-\sigma_{i0}-\sigma_{i1}}}{\psi_{i1}(y'(t))\psi_{i0}(y(t))} = \frac{\alpha_i}{|1 + \mu_0|^{\sigma_{i0}}} p_i(t)|\pi_\omega(t)|^{\sigma_{i0}} [1 + o(1)] \quad \text{при } t \uparrow \omega, \quad (3.6)$$

$$\frac{|y'(t)|^{1-\sigma_{i0}-\sigma_{i1}} \text{sign } y'(t)}{\psi_{i1}(y'(t))\psi_{i0}(y(t))} = \frac{\alpha_i}{\mu_0 |1 + \mu_0|^{\sigma_{i0}}} p_i(t)|\pi_\omega(t)|^{\sigma_{i0}} \pi_\omega(t) [1 + o(1)] \quad \text{при } t \uparrow \omega. \quad (3.7)$$

Покажем, с учетом условия  $\sigma_{i0} + \sigma_{i1} \neq 1$ , что имеет место асимптотическое представление

$$\frac{|y'(t)|^{1-\sigma_{i0}-\sigma_{i1}} \text{sign } y'(t)}{\psi_{i1}(y'(t))\psi_{i0}(y(t))} = \frac{\alpha_i(1 - \sigma_{i0} - \sigma_{i1})}{|1 + \mu_0|^{\sigma_{i0}}} I_{i1}(t) [1 + o(1)]. \quad (3.8)$$

Поскольку

$$\begin{aligned} \left( \frac{|y'(t)|^{1-\sigma_{i0}-\sigma_{i1}} \text{sign } y'(t)}{\psi_{i1}(y'(t))\psi_{i0}(y(t))} \right)' &= \frac{|y'(t)|^{-\sigma_{i0}-\sigma_{i1}} y''(t)}{\psi_{i1}(y'(t))\psi_{i0}(y(t))} \times \\ &\times \left( 1 - \sigma_{i0} - \sigma_{i1} - \frac{y'(t)\psi'_{i1}(y'(t))}{\psi_{i1}(y'(t))} - \frac{(y'(t))^2}{y(t)y''(t)} \frac{y(t)\psi'_{i0}(y(t))}{\psi_{i0}(y(t))} \right), \end{aligned}$$

принимая во внимание (1.5) – (1.7), свойство функций  $\psi_{ik}$ ,  $k = 0, 1$ , и (3.6), имеем

$$\left( \frac{|y'(t)|^{1-\sigma_{i0}-\sigma_{i1}} \text{sign } y'(t)}{\psi_{i1}(y'(t))\psi_{i0}(y(t))} \right)' = \frac{\alpha_i(1 - \sigma_{i0} - \sigma_{i1})}{|1 + \mu_0|^{\sigma_{i0}}} p_i(t)|\pi_\omega(t)|^{\sigma_{i0}} [1 + o(1)] \quad \text{при } t \uparrow \omega.$$

Интегрируя последнее соотношение от  $t_0$  до  $t$  ( $t \in (t_0, \omega)$ ) с учетом определения функции  $I_{i1}(t)$ , получаем

$$\frac{|y'(t)|^{1-\sigma_{i0}-\sigma_{i1}} \text{sign } y'(t)}{\psi_{i1}(y'(t))\psi_{i0}(y(t))} = c_i + \frac{\alpha_i(1 - \sigma_{i0} - \sigma_{i1})}{|1 + \mu_0|^{\sigma_{i0}}} I_{i1}(t) [1 + o(1)] \quad \text{при } t \uparrow \omega.$$

Если  $I_{i1}^0 = t_0$ , то справедливо (3.8). Покажем, что  $c_i = 0$  при  $I_{i1}^0 = \omega$ . Предположим противное, тогда

$$\frac{|y'(t)|^{1-\sigma_{i0}-\sigma_{i1}} \text{sign } y'(t)}{\psi_{i1}(y'(t))\psi_{i0}(y(t))} = c_i + o(1),$$

и в силу (3.6)

$$\frac{y''(t)}{y'(t)} = \frac{\alpha_i}{|1 + \mu_0|^{\sigma_{i0}}} p_i(t)|\pi_\omega(t)|^{\sigma_{i0}} \left[ \frac{1}{c_i} + o(1) \right] \quad \text{при } t \uparrow \omega.$$

Интегрируя последнее выражение от  $t_0$  до  $t$  ( $t \in (t_0, \omega)$ ), находим

$$\ln |y'(t)| = C_i + \frac{\alpha_i}{|1 + \mu_0|^{\sigma_{i0}}} I_{i1}(t) \left[ \frac{1}{c_i} + o(1) \right] \quad \text{при } t \uparrow \omega.$$

В данном соотношении левая часть при  $t \uparrow \omega$  стремится к бесконечности, а правая — к константе. Полученное противоречие доказывает справедливость (3.8) в случае, когда  $I_{i1}^0 = \omega$ .

Из (3.8) следует выполнение первого из неравенств (3.3) и первого из асимптотических представлений (3.5). Кроме того, в силу (3.7) и (3.8) имеет место предельное соотношение (3.4).

*Достаточность.* Пусть для некоторого  $i \in M$  выполняются условия теоремы и выполняются (3.1)–(3.4). Зафиксировав с помощью (3.2), (3.3) значения  $Y_k$  и окрестности  $\Delta_k$ ,  $k = 0, 1$ , докажем, с учетом идей, заложенных в работе В. М. Евтухова и Е. С. Владовой [8], существование хотя бы одного  $\Pi_\omega(Y_0, Y_1, \mu_0)$ -решения, уравнения (1.1) допускающего при  $t \uparrow \omega$  асимптотические представления (3.5).

Рассмотрим сначала систему соотношений вида

$$\frac{|y'(t)|^{\frac{1}{\Lambda_i}}}{\psi_{i0}(y(t))\psi_{i1}(y'(t))} = \frac{|I_{i1}(t)|}{|\Lambda_i||1 + \mu_0|^{\sigma_{i0}}} [1 + v_1], \quad \frac{y'(t)}{y(t)} = \frac{1 + \mu_0}{\pi_\omega(t)} [1 + v_2], \quad (3.9)$$

в которой  $\Lambda_i = 1/(1 - \sigma_{i0} - \sigma_{i1})$ , и установим, что она однозначно определяет заданные на множестве  $D_0 = [t_0, \omega) \times V_0$ , где  $t_0 \in [a, \omega)$ ,  $V_0 = \{(v_1, v_2) : |v_k| \leq 0,5, k = 1, 2\}$  непрерывно дифференцируемые неявные функции  $y^{(k)} = Y_{ik}(t, v_1, v_2)$ ,  $k = 0, 1$  вида

$$Y_{ik}(t, v_1, v_2) = y_k^0 |\pi_\omega(t)|^{1-k+\mu_0+z_{k+1}(t, v_1, v_2)}, \quad k = 0, 1, \quad (3.10)$$

где  $y_k^0 = \text{sign } y_k$ ,  $|z_{k+1}(t, v_1, v_2)| \leq |1 - k + \mu_0|/2$  при  $(t, v_1, v_2) \in D_0$  и  $\lim_{t \uparrow \omega} z_{k+1}(t, v_1, v_2) = 0$  равномерно по  $(v_1, v_2) \in V_0$ . Для этого, полагая в (3.9)

$$y^{(k)} = y_k^0 |\pi_\omega(t)|^{1-k+\mu_0+z_{k+1}}, \quad (3.11)$$

получаем, с учетом знаковых условий (3.3), систему соотношений вида

$$|\pi_\omega(t)|^{\frac{\mu_0+z_2}{\Lambda_i}} = \frac{|I_{i1}(t)||1 + v_1|}{|\Lambda_i||1 + \mu_0|^{\sigma_{i0}}} \prod_{k=0}^1 \psi_{ik}(y_k^0 |\pi_\omega(t)|^{1-k+\mu_0+z_{k+1}}), \quad (3.12)$$

$$|\pi_\omega(t)|^{z_2-z_1} = |1 + \mu_0|[1 + v_2].$$

Поскольку в силу условия (3.4)  $|I_{i1}(t)| = |\pi_\omega(t)|^{\frac{\mu_0}{\Lambda_i} + u(t)}$ , где  $u(t)$  — непрерывная функция, стремящаяся к нулю при  $t \uparrow \omega$ , систему (3.12) можно записать в виде

$$z_2 = \Lambda_i \left( u(t) + \frac{\ln \left| \frac{1+v_1}{|\Lambda_i||1+\mu_0|^{\sigma_{i0}}} \prod_{k=0}^1 \psi_{ik}(y_k^0 |\pi_\omega(t)|^{1-k+\mu_0+z_{k+1}}) \right|}{\ln |\pi_\omega(t)|} \right), \quad (3.13)$$

$$z_2 - z_1 = \frac{\ln |(1 + \mu_0)[1 + v_2]|}{\ln |\pi_\omega(t)|}.$$

Частично разрешая эту систему относительно  $z_1, z_2$  (как линейную неоднородную), получаем

$$z_k = a_k(t) + b_k(t, v_1, v_2) + Z(t, z_1, z_2), \quad k = 1, 2,$$

где

$$a_1(t) = \Lambda_i u(t) - \Lambda_i \ln(|\Lambda_i| |1 + \mu_0|^{1-\sigma_{i1}}) / \ln |\pi_\omega(t)|,$$

$$a_2(t) = \Lambda_i u(t) - \Lambda_i \ln(|\Lambda_i| |1 + \mu_0|^{\sigma_{i0}}) / \ln |\pi_\omega(t)|,$$

$$b_1(t, v_1, v_2) = \Lambda_i \frac{\ln \left( [1 + v_1][1 + v_2]^{-\frac{1}{\Lambda_i}} \right)}{\ln |\pi_\omega(t)|}, \quad b_2(t, v_1, v_2) = \Lambda_i \frac{\ln[1 + v_1]}{\ln |\pi_\omega(t)|},$$

$$Z(t, z_1, z_2) = \Lambda_i \ln \left[ \prod_{k=1}^2 \psi_{ik}(y_k^0 |\pi_\omega(t)|^{1-k+\mu_0+z_{k+1}}) \right] / \ln |\pi_\omega(t)|.$$

В силу свойств функций  $u, I_i, \psi_{ik}, k = 0, 1$  и условий (3.2), (3.3) имеют место предельные соотношения

$$\lim_{t \uparrow \omega} a_k(t) = 0, \quad k = 1, 2, \quad \lim_{t \uparrow \omega} b_k(t, v_1, v_2) = 0, \quad k = 1, 2, \text{ равномерно по } (v_1, v_2) \in V_0, \quad (3.14)$$

$$\lim_{t \uparrow \omega} Z(t, z_1, z_2) = 0, \quad \lim_{t \uparrow \omega} \frac{\partial Z(t, z_1, z_2)}{\partial z_k} = 0, \quad k = 1, 2, \text{ равномерно по } (z_1, z_2) \in Z_0,$$

где  $Z_0 = \{(z_1, z_2) : |z_{k+1}| \leq |1 - k + \mu_0|/2 (k = 0, 1)\}$ .

Поскольку выполняется (3.14), существует число  $t_0 \in [a, \omega)$  такое, что на множестве  $[t_0, \omega) \times Z_0 \times V_0$  выполняются неравенства

$$|a_k(t) + b_k(t, v_1, v_2) + Z(t, z_1, z_2)| \leq \beta_0/4, \quad k = 1, 2, \quad (3.15)$$

где  $\beta_0 = \min\{|1 + \mu_0|, |\mu_0|\}$ , и условия Липшица

$$|Z(t, z_1^2, z_2^2) - Z(t, z_1^1, z_2^1)| \leq 1/3 \sum_{l=1}^2 |z_l^2 - z_l^1|. \quad (3.16)$$

Зафиксировав число  $t_0$ , обозначим через  $B$  банахово пространство непрерывных и ограниченных на множестве  $\Omega = [t_0, \omega) \times V_0$  вектор-функций  $z = (z_1, z_2) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  с нормой

$$\|z\| = \sup \left\{ \sum_{k=1}^2 |z_k(t, v_1, v_2)| : (t, v_1, v_2) \in \Omega \right\}.$$

Выберем из него подпространство  $B_0$  таких функций из  $B$ , для которых  $\|z\| \leq \beta_0/2$ , и рассмотрим на  $B_0$ , выбрав произвольное число  $\nu \in (0, 1)$ , оператор  $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2)$ , определенный соотношениями

$$\begin{aligned} \Phi_k(z)(t, v_1, v_2) = & z_k(t, v_1, v_2) - \nu |z_k(t, v_1, v_2) - a_k(t) - b_k(t, v_1, v_2) - \\ & - Z(t, z_1(t, v_1, v_2), z_2(t, v_1, v_2))|, \quad k = 1, 2. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Для любого  $z \in B_0$  в силу условия (3.15) имеем

$$|\Phi_k(z)(t, v_1, v_2)| \leq (1 - \nu)|z_k(t, v_1, v_2)| + \frac{\nu\beta_0}{4}, \quad k = 1, 2, \quad \text{при } (t, v_1, v_2) \in \Omega.$$

Поэтому на множестве  $\Omega$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^2 |\Phi_k(z)(t, v_1, v_2)| &\leq (1 - \nu) \sum_{k=1}^2 |z_k(t, v_1, v_2)| + \frac{\nu\beta_0}{2} \leq \\ &\leq (1 - \nu)\|z\| + \frac{\nu\beta_0}{2} \leq (1 - \nu)\frac{\beta_0}{2} + \frac{\nu\beta_0}{2} = \frac{\beta_0}{2}. \end{aligned}$$

Отсюда вытекает, что  $\|\Phi(z)\| \leq \beta_0/2$  и, следовательно,  $\Phi(B_0) \subset B_0$ .

Пусть теперь  $z^1, z^2 \in B_0$ . Тогда в силу (3.16) при  $(t, v_1, v_2) \in \Omega$

$$\begin{aligned} |\Phi_k(z^2)(t, v_1, v_2) - \Phi_k(z^1)(t, v_1, v_2)| &\leq (1 - \nu)|z_k^2(t, v_1, v_2) - z_k^1(t, v_1, v_2)| + \\ &\quad + \nu|Z(t, z_1^2, z_2^2) - Z(t, z_1^1, z_2^1)| \leq \\ &\leq (1 - \nu)|z_k^2(t, v_1, v_2) - z_k^1(t, v_1, v_2)| + \\ &\quad + \frac{\nu}{3} \sum_{l=1}^2 |z_l^2(t, v_1, v_2) - z_l^1(t, v_1, v_2)|, \quad k = 1, 2. \end{aligned}$$

Значит, на множестве  $\Omega$

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^2 |\Phi_k(z^2)(t, v_1, v_2) - \Phi_k(z^1)(t, v_1, v_2)| \leq \\ &\leq \left(1 - \frac{\nu}{3}\right) \sum_{k=1}^2 |z_k^2(t, v_1, v_2) - z_k^1(t, v_1, v_2)| \leq \left(1 - \frac{\nu}{3}\right) \|z^2 - z^1\|, \end{aligned}$$

откуда следует, что

$$\|\Phi(z^2) - \Phi(z^1)\| \leq \left(1 - \frac{\nu}{3}\right) \|z^2 - z^1\|.$$

Таким образом, показано, что оператор  $\Phi$  отображает пространство  $B_0$  в себя и является на нем оператором сжатия. Тогда, согласно принципу сжатых отображений, существует единственная вектор-функция  $z \in B_0$  такая, что  $z = \Phi(z)$ . В силу (3.17) эта непрерывная на множестве  $\Omega$  функция является единственным решением системы (3.13), удовлетворяющим условию  $\|z\| \leq \beta_0/2$ . Из (3.13) с учетом (3.14) следует, что компоненты данного решения стремятся к нулю при  $t \uparrow \omega$  равномерно по  $(v_1, v_2) \in V_0$ . Непрерывная дифференцируемость этого решения на множестве  $\Omega$  непосредственно следует из известной локальной теоремы о существовании неявных функций, определённых системой соотношений. В силу замены (3.11) полученной вектор-функции  $(z_1, z_2)$  соответствует вектор-функция  $(Y_{i0}, Y_{i1})$  с компонентами вида (3.10), которая является решением системы (3.9),

причем с учетом (3.2), (3.3)

$$\lim_{t \uparrow \omega} Y_{ik}(t, v_1, v_2) = Y_k \quad \text{равномерно по } (v_1, v_2) \in V_0, \quad k = 0, 1, \quad (3.18)$$

$$Y_{ik}(t, v_1, v_2) \subset \Delta_k \quad \text{при } (v_1, v_2) \in V_0, \quad t \in [t_1, \omega), \quad \text{где } t_1 \in [t_0, \omega), \quad k = 0, 1.$$

Рассмотрим некоторые свойства функций  $Y_{ik}$ ,  $k = 0, 1$ . В силу (3.18) и свойства функций  $\psi_{jk}$  при  $j \in M$ ,  $k = 0, 1$  равномерно по  $(v_1, v_2) \in V_0$  имеют место предельные соотношения

$$\lim_{t \uparrow \omega} G_{jk}(t, v_1, v_2) = 0, \quad \text{где } G_{jk}(t, v_1, v_2) = \frac{Y_{ik}(t, v_1, v_2) \psi'_{jk}(Y_{ik}(t, v_1, v_2))}{\psi_{jk}(Y_{ik}(t, v_1, v_2))}. \quad (3.19)$$

Теперь в системе (3.9) положим  $y^{(k)} = Y_{ik}(t, v_1, v_2)$ ,  $k = 0, 1$ , и продифференцируем полученные соотношения по  $t$ . В результате получим систему уравнений, линейных относительно  $(Y_{i0})'_t$  и  $(Y_{i1})'_t$ :

$$\begin{aligned} -\frac{\psi'_{i0}(Y_{i0}(t, v_1, v_2))}{\psi_{i0}(Y_{i0}(t, v_1, v_2))} (Y_{i0})'_t + \left( \frac{1}{\Lambda_i Y_{i1}(t, v_1, v_2)} - \frac{\psi'_{i1}(Y_{i1}(t, v_1, v_2))}{\psi_{i1}(Y_{i1}(t, v_1, v_2))} \right) (Y_{i1})'_t &= \frac{I'_{i1}(t)}{I_{i1}(t)} \\ -\frac{Y_{i1}(t, v_1, v_2)}{Y_{i0}^2(t, v_1, v_2)} (Y_{i0})'_t + \frac{1}{Y_{i0}(t, v_1, v_2)} (Y_{i1})'_t &= -\frac{1 + \mu_0}{\pi_\omega^2(t)} [1 + v_2]. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Из данной системы с учетом неравенства  $1 - \sigma_{i0} - \sigma_{i1} \neq 0$ , условия (3.19) и вида функции  $Y_{i0}$  получим, что на множестве  $[t_2, \omega) \times V_0$ ,  $t_2 \in [t_1, \omega)$ , справедливы формулы

$$\begin{aligned} (Y_{i0}(t, v_1, v_2))'_t &= \frac{\frac{Y_{i0}(t, v_1, v_2) I'_{i1}(t)}{I_{i1}(t)} + \frac{1 + \mu_0}{\pi_\omega^2(t)} [1 + v_2] \frac{Y_{i0}^2(t, v_1, v_2)}{Y_{i1}(t, v_1, v_2)} \left( \frac{1}{\Lambda_i} - G_{i1}(t, v_1, v_2) \right)}{\frac{1}{\Lambda_i} - G_{i0}(t, v_1, v_2) - G_{i1}(t, v_1, v_2)}, \\ (Y_{i1}(t, v_1, v_2))'_t &= \frac{\frac{Y_{i1}(t, v_1, v_2) I'_{i1}(t)}{I_{i1}(t)} + \frac{1 + \mu_0}{\pi_\omega^2(t)} [1 + v_2] Y_{i0}(t, v_1, v_2) G_{i0}(t, v_1, v_2)}{\frac{1}{\Lambda_i} - G_{i0}(t, v_1, v_2) - G_{i1}(t, v_1, v_2)}. \end{aligned}$$

В свою очередь, из представлений для  $(Y_{i0})'_t$ ,  $(Y_{i1})'_t$  и условия (3.4) следует, что равномерно по  $(v_1, v_2) \in V_0$  справедливы равенства

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{\pi_\omega(t) (Y_{i0}(t, v_1, v_2))'_t}{Y_{i0}(t, v_1, v_2)} = 1 + \mu_0, \quad \lim_{t \uparrow \omega} \frac{\pi_\omega(t) (Y_{i1}(t, v_1, v_2))'_t}{Y_{i1}(t, v_1, v_2)} = \mu_0. \quad (3.21)$$

Поскольку предельные соотношения (3.19) и (3.21) выполняются равномерно по  $(v_1, v_2) \in V_0$ , воспользовавшись схемой доказательства леммы 2.1, убедились, что равенство

$$\lim_{t \uparrow \omega} H_i(t, v_1, v_2) = 1, \quad (3.22)$$

где

$$H_i(t, v_1, v_2) = \alpha_i \sum_{j=1}^m \alpha_j [1 + r_j(t)] \frac{p_j(t) \varphi_{j0}(Y_{i0}(t, v_1, v_2)) \varphi_{j1}(Y_{i1}(t, v_1, v_2))}{p_i(t) \varphi_{i0}(Y_{i0}(t, v_1, v_2)) \varphi_{i1}(Y_{i1}(t, v_1, v_2))},$$

также выполняется равномерно по  $(v_1, v_2) \in V_0$ . Кроме того, так как вектор-функция  $(Y_{i0}, Y_{i1})$  удовлетворяет системе соотношений (3.9), имеет место равенство

$$\frac{\varphi_{i0}(Y_{i0}(t, v_1, v_2)) \varphi_{i1}(Y_{i1}(t, v_1, v_2))}{Y_{i1}(t, v_1, v_2)} = \alpha_i \Lambda_i \frac{|\pi_\omega(t)|^{\sigma_{i0}}}{I_{i1}(t)} \frac{1}{[1 + v_1][1 + v_2]^{\sigma_{i0}}}. \quad (3.23)$$

Теперь, применяя к уравнению (1.1) преобразование

$$y^{(k)}(t) = Y_{ik}(t, v_1(x), v_2(x)), \quad k = 0, 1, \quad x = \beta \ln |\pi_\omega(t)|, \quad (3.24)$$

$$\beta = \begin{cases} 1, & \text{если } \omega = +\infty, \\ -1, & \text{если } \omega < +\infty, \end{cases}$$

и учитывая, что вектор-функция  $(Y_{i0}, Y_{i1})$  при  $t \in [t_2, \omega)$  и  $(v_1(x), v_2(x)) \in V_0$  удовлетворяет соотношениям

$$\frac{|y'(t)|^{\frac{1}{\Lambda_i}}}{\psi_{i0}(y(t)) \psi_{i1}(y'(t))} = \frac{|I_{i1}(t)|}{|\Lambda_i| |1 + \mu_0|^{\sigma_{i0}}} [1 + v_1(x)], \quad \frac{y'(t)}{y(t)} = \frac{1 + \mu_0}{\pi_\omega(t)} [1 + v_2(x)], \quad (3.25)$$

получаем, с учетом (3.23), систему дифференциальных уравнений вида

$$\begin{aligned} v_1' &= \beta [-h_i(t)[1 + v_1] - (1 + \mu_0)G_{i0}(t, v_1, v_2)[1 + v_1][1 + v_2] + \\ &\quad + (1 - \Lambda_i G_{i1}(t, v_1, v_2))h_i(t)H_i(t, v_1, v_2)[1 + v_2]^{-\sigma_{i0}}], \\ v_2' &= \beta \left[ [1 + v_2] - (1 + \mu_0)[1 + v_2]^2 + \Lambda_i h_i(t)H_i(t, v_1, v_2) \frac{[1 + v_2]^{1-\sigma_{i0}}}{1 + v_1} \right], \end{aligned} \quad (3.26)$$

в которой  $h_i(t) = \frac{\pi_\omega(t) I_{i1}'(t)}{I_{i1}(t)}$ ,  $t$  — функция, обратная к  $x = \beta \ln |\pi_\omega(t)|$ . Данную систему рассмотрим на множестве  $[x_0, +\infty) \times V_0$ , где  $x_0 = \beta \ln |\pi_\omega(t_2)|$ .

Поскольку выполняется (3.22), имеет место равенство

$$H_i(t, v_1, v_2) = 1 + R_{i1}(x, v_1, v_2), \quad (3.27)$$

где функция  $R_{i1}(x, v_1, v_2)$  стремится к нулю при  $x \rightarrow +\infty$  равномерно по  $(v_1, v_2) \in V_0$ . Кроме того, допустимы представления

$$\begin{aligned} [1 + v_2]^{-\sigma_{i0}} &= 1 - \sigma_{i0}v_2 + R_2(v_1, v_2), \\ \frac{[1 + v_2]^{1-\sigma_{i0}}}{1 + v_1} &= 1 - v_1 + (1 - \sigma_{i0})v_2 + R_3(v_1, v_2), \end{aligned} \quad (3.28)$$

в которых функции  $R_k(v_1, v_2)$ ,  $k = 2, 3$ , имеют свойством:  $\lim_{|v_1|+|v_2| \rightarrow 0} \frac{R_k(v_1, v_2)}{|v_1| + |v_2|} = 0$ . Учитывая (3.27) и (3.28), систему (3.26) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} v_1' &= \beta[f_1(x) + c_{11}(x)v_1 + c_{12}(x)v_2 + V_{11}(x, v_1, v_2) + V_{12}(x, v_1, v_2)], \\ v_2' &= \beta[f_2(x) + c_{21}(x)v_1 + c_{22}(x)v_2 + V_{21}(x, v_1, v_2) + V_{22}(x, v_1, v_2)], \end{aligned} \quad (3.29)$$

где

$$\begin{aligned} f_1(x) &= 0, \quad c_{11}(x) = -h_i(t), \quad c_{12}(x) = -\sigma_{i0}h_i(t), \\ f_2(x) &= -\mu_0 + \Lambda_i h_i(t), \quad c_{21}(x) = -\Lambda_i h_i(t), \quad c_{22}(x) = -1 - 2\mu_0 + \Lambda_i(1 - \sigma_{i0})h_i(t), \\ V_{11}(x, v_1, v_2) &= -(1 + \mu_0)G_{i0}(t, v_1, v_2)[1 + v_1][1 + v_2] - \\ &\quad - \Lambda_i h_i(t)G_{i1}(t, v_1, v_2)H_i(t, v_1, v_2)[1 + v_2]^{-\sigma_{i0}} + \\ &\quad + (1 - \Lambda_i G_{i1}(t, v_1, v_2))h_i(t)R_{i1}(x, v_1, v_2)[1 + v_2]^{-\sigma_{i0}}, \\ V_{12}(x, v_1, v_2) &= (1 - \Lambda_i G_{i1}(t, v_1, v_2))h_i(t)H_i(t, v_1, v_2)R_2(v_1, v_2), \\ V_{21}(x, v_1, v_2) &= \Lambda_i h_i(t)R_{i1}(x, v_1, v_2) \frac{[1 + v_2]^{1-\sigma_{i0}}}{1 + v_1}, \\ V_{22}(x, v_1, v_2) &= -(1 + \mu_0)v_2^2 + \Lambda_i h_i(t)H_i(t, v_1, v_2)R_3(v_1, v_2). \end{aligned}$$

В силу (3.4), (3.27), (3.28), определения  $\Lambda_i$  и замены независимой переменной имеют место предельные соотношения

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f_1(x) &= 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} c_{11}(x) = -\mu_0(1 - \sigma_{i0} - \sigma_{i1}), \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} c_{12}(x) = -\mu_0\sigma_{i0}(1 - \sigma_{i0} - \sigma_{i1}), \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f_2(x) &= 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} c_{21}(x) = -\mu_0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} c_{22}(x) = -1 - \mu_0 - \mu_0\sigma_{i0}, \end{aligned}$$

а функции  $V_{lk}(x, v_1, v_2)$ ,  $l = 1, 2$ ,  $k = 1, 2$ , таковы, что

$$\begin{aligned} \lim_{t \uparrow \omega} V_{l1}(x, v_1, v_2) &= 0, \quad l = 1, 2, \quad \text{равномерно по } (v_1, v_2) \in V_0, \\ \lim_{|v_1|+|v_2| \rightarrow 0} \frac{V_{l2}(x, v_1, v_2)}{|v_1| + |v_2|} &= 0, \quad l = 1, 2, \quad \text{равномерно по } x \in [x_0; +\infty). \end{aligned}$$

Таким образом, система (3.29) является квазилинейной системой дифференциальных уравнений с почти постоянными коэффициентами. Характеристическое уравнение для предельной матрицы коэффициентов линейной части имеет вид

$$\begin{vmatrix} -\beta\mu_0(1 - \sigma_{i0} - \sigma_{i1}) - \lambda & -\beta\mu_0\sigma_{i0}(1 - \sigma_{i0} - \sigma_{i1}) \\ -\beta\mu_0 & -\beta(1 + \mu_0 + \mu_0\sigma_{i0}) - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (3.30)$$

или

$$\lambda^2 + \beta(2\mu_0 - \mu_0\sigma_{i1} + 1)\lambda + (1 - \sigma_{i0} - \sigma_{i1})(\mu_0^2 + \mu_0) = 0.$$

Поскольку выполняется условие (3.1), данное характеристическое уравнение не имеет корней с нулевой действительной частью. Таким образом, для системы дифференциальных уравнений (3.29) выполнены все условия теоремы 2.2 работы [9]. Согласно данной теореме система (3.29) имеет хотя бы одно решение  $(v_1, v_2) : [x_1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  (где  $x_1 \geq x_0$ ), стремящееся к нулю при  $x \rightarrow +\infty$ . Этому решению, с учетом преобразования (3.24), соответствует решение уравнения (1.1)  $y(t)$ , которое является  $\Pi_\omega(Y_0, Y_1, \mu_0)$ -решением (в силу (3.18), (3.21)) и вместе со своей производной допускает асимптотические представления (3.5) (с учетом (3.25)).

Заметим, что если наложить некоторые дополнительные ограничения на функции  $\varphi_{ik}$ ,  $k = 0, 1$ , то асимптотические представления для  $\Pi_\omega(Y_0, Y_1, \mu_0)$ -решений и их производных первого порядка при  $t \uparrow \omega$  можно записать в явном виде.

**Определение 3.1.** Будем говорить, что функция  $\varphi_{jk}$ ,  $j \in \{1, \dots, m\}$ ,  $k \in \{0, 1\}$  удовлетворяет условию  $S$ , если для любой непрерывно дифференцируемой функции  $L : \Delta_k \rightarrow (0; +\infty)$  такой, что  $\lim_{\substack{z \rightarrow Y_k \\ z \in \Delta_k}} \frac{zL'(z)}{L(z)} = 0$ , имеет место соотношение  $\psi_{jk}(zL(z)) = \psi_{jk}(z)[1 + o(1)]$  при  $z \rightarrow Y_k$ ,  $z \in \Delta_k$ .

**Теорема 3.2.** Пусть выполняются условия теоремы 3.1 и, кроме этого, функции  $\varphi_{ik}$ ,  $k = 0, 1$ , имеют свойство  $S$ . Тогда при выполнении (3.1)–(3.4) каждое  $\Pi_\omega(Y_0, Y_1, \mu_0)$ -решение уравнения (1.1) при  $t \uparrow \omega$  представимо в виде

$$|y(t)| = |\pi_\omega(t)| \left( \frac{|(1 - \sigma_{i0} - \sigma_{i1})I_{i1}(t)|}{|1 + \mu_0|^{1 - \sigma_{i1}}} \prod_{k=0}^1 \psi_{ik}(y_k^0 |\pi_\omega(t)|^{1 - k + \mu_0}) \right)^{\frac{1}{1 - \sigma_{i0} - \sigma_{i1}}} [1 + o(1)], \quad (3.31)$$

$$|y'(t)| = \left( \frac{|(1 - \sigma_{i0} - \sigma_{i1})I_{i1}(t)|}{|1 + \mu_0|^{\sigma_{i0}}} \prod_{k=0}^1 \psi_{ik}(y_k^0 |\pi_\omega(t)|^{1 - k + \mu_0}) \right)^{\frac{1}{1 - \sigma_{i0} - \sigma_{i1}}} [1 + o(1)]. \quad (3.32)$$

**Доказательство.** Для начала покажем, что функция

$$L_0(z) = \frac{|y(t(z))|}{|\pi_\omega(t(z))|^{1 + \mu_0}},$$

где  $z = y_0^0 |\pi_\omega(t)|^{1 + \mu_0}$ ,  $y_0^0 = \text{sign } y_0$ , является медленно меняющейся при  $z \rightarrow Y_0$ ,  $z \in \Delta_0$  :

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{z \rightarrow Y_0 \\ z \in \Delta_0}} \frac{zL_0'(z)}{L_0(z)} &= \lim_{t \uparrow \omega} \left[ y_0^0 |\pi_\omega(t)|^{1 + \mu_0} \times \frac{1}{y_0^0 (1 + \mu_0) |\pi_\omega(t)|^{\mu_0} \text{sign } \pi_\omega(t)} \times \right. \\ &\quad \left. \times \frac{y_0^0 y'(t) |\pi_\omega(t)|^{1 + \mu_0} - |y(t)| (1 + \mu_0) |\pi_\omega(t)|^{\mu_0} \text{sign } \pi_\omega(t)}{|\pi_\omega(t)|^{2 + 2\mu_0}} \times \frac{|\pi_\omega(t)|^{1 + \mu_0}}{|y(t)|} \right] = \\ &= \lim_{t \uparrow \omega} \left[ \frac{1}{1 + \mu_0} \frac{\pi_\omega(t) y'(t)}{y(t)} - 1 \right] = 0. \end{aligned}$$

Поскольку функция  $\varphi_{i0}$  имеет свойство  $S$ , с учетом медленной изменяемости функции  $L_0$  при  $z \rightarrow Y_0$  ( $z \in \Delta_0$ ) и условия (3.2) получим

$$\psi_{i0}(y(t)) = \psi_{i0}(y_0^0 |\pi_\omega(t)|^{1+\mu_0}) [1 + o(1)] \quad \text{при } t \uparrow \omega. \quad (3.33)$$

Аналогично доказывается, что функция

$$L_1(z) = \frac{|y'(t(z))|}{|\pi_\omega(t(z))|^{\mu_0}}$$

где  $z = y_1^0 |\pi_\omega(t)|^{\mu_0}$ ,  $y_1^0 = \text{sign } y_1$ , является медленно меняющейся при  $z \rightarrow Y_1$ ,  $z \in \Delta_1$ , и, следовательно,

$$\psi_{i1}(y'(t)) = \psi_{i1}(y_1^0 |\pi_\omega(t)|^{\mu_0}) [1 + o(1)] \quad \text{при } t \uparrow \omega. \quad (3.34)$$

Принимая во внимание (3.33), (3.34) и (3.3), первое из соотношений (3.5) можно записать в виде

$$|y'(t)|^{1-\sigma_{i0}-\sigma_{i1}} = \frac{|(1-\sigma_{i0}-\sigma_{i1})I_{i1}(t)|}{|1+\mu_0|^{\sigma_{i0}}} \prod_{k=0}^1 \psi_{ik}(y_k^0 |\pi_\omega(t)|^{1-k+\mu_0}) [1 + o(1)],$$

откуда следует асимптотическое представление (3.32). В свою очередь, из (3.32) с учетом второго из соотношений (3.5) получаем, что имеет место асимптотическое представление (3.31).

**Выводы.** В настоящей работе для уравнения (1.1) выделен достаточно широкий класс  $\Pi_\omega(Y_0, Y_1, \mu_0)$ -решений и в случае  $\mu_0 \in \mathbb{R}$  получены условия, при выполнении которых на любом таком решении правая часть уравнения (1.1) асимптотически эквивалентна одному слагаемому. При выполнении этих условий приведены необходимые и достаточные признаки существования  $\Pi_\omega(Y_0, Y_1, \mu_0)$ -решений уравнения (1.1), для которых  $\mu_0 \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$ , а также асимптотические представления таких решений и их производных первого порядка при  $t \uparrow \omega$ .

1. Козьма А. А. Асимптотические представления одного класса решений существенно нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка // Нелінійні коливання. — 2006. — **9**, № 4. — С. 490–501.
2. Козьма О. О. Асимптотичне поводження розв'язків істотно нелінійних диференціальних рівнянь другого порядку // Наук. вісн. Чернів. ун-ту. Математика. — 2008. — Вип. 374. — С. 55–65.
3. Козьма А. А. Признаки существования одного класса решений существенно нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка // Вісн. Одес. нац. ун-ту. Математика і механіка. — 2009. — **14**. — Вип. 20. — С. 75–90.
4. Евтухов В. М., Касьянова В. А. Асимптотическое поведение неограниченных решений существенно нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка // Укр. мат. журн. — 2005. — **57**, № 3. — С. 338–355.
5. Касьянова В. О. Асимптотичні зображення зникаючих розв'язків істотно нелінійних диференціальних рівнянь другого порядку // Наук. вісн. Чернів. ун-ту. Математика. — 2004. — Вип. 228. — С. 5–19.
6. Белозерова М. А. Асимптотические свойства одного класса решений существенно нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка // Мат. студ. — 2008. — **29**, № 1. — С. 52–62.

7. Белозерова М. А. Асимптотические представления решений неавтономных дифференциальных уравнений второго порядка с нелинейностями, близкими к степенным // Нелінійні коливання. — 2009. — **12**, № 1. — С. 3–15.
8. Евтухов В. М., Владова Е. С. Асимптотические представления решений существенно нелинейных циклических систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. —
9. Евтухов В. М., Самойленко А. М. Условия существования исчезающих в особой точке решений у вещественных неавтономных систем квазилинейных уравнений // Укр. мат. журн. — 2010. — **62**, № 1. — С. 52–80.

*Получено 20.04.11,  
после доработки — 14.07.11*