Università degli Studi di Pisa

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI
Corso di Laurea in Matematica

TESI DI LAUREA

Periodicità nei giochi combinatori: il caso di un gioco non ottale

Candidato:
Lorenzo Lami

Relatore:
Prof. Alessandro Berarducci

Anno Accademico 2010-2011

Introduzione

Questa tesi si situa nell'ambito della teoria dei giochi combinatori come si intende in [2,5,7,13,20]. La teoria dei giochi combinatori è quella disciplina che si pone come scopo principale la risoluzione dei giochi a due giocatori, deterministici e a informazione completa.

Lo spunto è stato quello di analizzare un particolare gioco combinatorio, che in questa tesi chiameremo *Astron*, propostomi dal Prof. Alessandro Berarducci, al fine di trovare esplicitamente una strategia vincente per uno dei due giocatori. Si tratta di un gioco di natura topologica (vedi [4]) non precedentemente studiato, affine come presentazione, ma non come struttura, al più famoso *Sprouts* (vedi [7,14]).

Il primo passo di questa tesi è stato quello di ridurre *Astron* ad un gioco combinatorio. Esiste una ampia letteratura nella quale sono state sviluppate tecniche specifiche per l'individuazione di strategie vincenti per ampie classi di giochi combinatori. In particolare nell'ambito dei cosiddetti giochi simmetrici risulta possibile, almeno in linea di principio, associare ad ogni configurazione un opportuno numero ordinale, chiamato *nimero*, che determina se la data configurazione è vincente o perdente per un dato giocatore (vedi [11,21,22]).

Talvolta nell'analisi dei giochi ci si limita a fornire soluzioni ultra-deboli (nel senso di [1,23]), cioè risultati non costruttivi riguardanti l'esistenza di una strategia vincente. È esemplare il caso del gioco *Hex*, di cui sono stati forniti numerosi risultati riguardo l'esistenza delle relative strategie vincenti (vedi [9,10]); ad oggi, nonostante si sappia che il primo giocatore ha una strategia vincente, tale strategia è ignota ed il gioco è ancora giocato. Diversamente in questa tesi non ci siamo limitati a stabilire l'esistenza di strategie vincenti ma abbiamo anche cercato, tramite l'uso dei *nimeri*, di fornire un algoritmo per trovare tutte le mosse perfette disponibili a partire da una configurazione qualunque.

Computazionalmente però questo algoritmo basato sul calcolo dei nimeri, nonostante sia comunque più efficiente dell'analisi esaustiva del gioco (vedi [15]), può risultare comunque inefficace a seconda della complessità del gioco analizzato. Un risultato di periodicità di Guy e Smith rende efficace il calcolo dei nimeri per una particolare sottoclasse dei giochi simmetrici: i giochi ottali (vedi [13]). Il rappresentante paradigmatico di questa classe è il ben noto gioco del *Nim* (vedi [5]), da cui il nome *nimeri* (vedi [7]).

Sfortunatamente però il gioco da noi analizzato, pur essendo riconducibile ad un gioco combinatorio simmetrico, non rientra in questa sottoclasse. Abbiamo dovuto pertanto sviluppare delle tecniche nuove per analizzarlo, giungendo in tal modo ad una estensione del teorema di periodicità di Guy e Smith. Questo ci ha permesso di fornire una soluzione forte, con costo computazionale costante, in particolari configurazioni. In realtà la nostra tecnica si può applicare a qualsiasi configurazione, ma la complessità del gioco pone seri problemi di calcolo. Abbiamo inoltre formulato alcune congetture per estendere i risultati fin'ora ottenuti a casi più generali che ci riserviamo di studiare in futuro.

Indice

Capitolo 1

Da zero al teorema di periodicità

In questo capitolo verranno esposti i principali risultati della teoria combinatoria dei giochi relativi ai giochi simmetrici, con particolare attenzione ai giochi ottali. La teoria presentata è stata riorganizzata e rielaborata seguendo l'idea di modellare un gioco simmetrico con un insieme ben fondato (nel senso di Zermelo-Fraenkel) come accennato in [20]; l'approccio scelto è una semplificazione di quello adottato in [7] dove i giochi vengono modellati con una costruzione insiemistica più generale, ma ridondante nel caso dei soli giochi simmetrici; inoltre in letteratura vi sono altri modi di descrivere questa teoria, come ad esempio modellare un gioco combinatorio con un grafo [6].

La scelta di modellare i giochi simmetrici con gli insiemi ben fondati è stata fatta per poter sfruttare vari risultati della teoria degli insiemi, i quali fanno da supporto alle definizioni e alle dimostrazioni di questa tesi e, al contempo, mantenere una descrizione sintetica, efficace e generale (fornita appunto dagli insiemi) che permetta di trattare semplicemente i tipi di giochi cui siamo interessati.

1.1 I giochi simmetrici

1.1.1 Cosa è un gioco combinatorio

Un *gioco combinatorio* è un gioco:

- a due giocatori;
- sequenziale, cioè un gioco in cui i giocatori muovono in sequenza uno alla volta, alternandosi;
- a informazione completa, cioè un gioco in cui non esistono elementi rilevanti ai fini del gioco che sono sconosciuti ai giocatori;

- senza elementi aleatori, cioè, data una mossa di un giocatore, la posizione successiva è individuata in maniera univoca;
- ben fondato, cioè un gioco in cui ogni partita termina in un numero finito di mosse.

Esempi di giochi combinatori sono gli Scacchi, il Go e il Tris.

Un gioco combinatorio si dice *simmetrico* se, in ogni sua posizione, i due giocatori hanno le stesse mosse a disposizione. I giochi menzionati come esempio non sono simmetrici, infatti negli scacchi il giocatore che gioca con i bianchi non può muovere i pezzi neri, e viceversa: negli scacchi le mosse a disposizione dei due giocatori non solo sono diverse, ma sono addirittura disgiunte.

Nei giochi combinatori simmetrici una partita finisce quando non ci sono più mosse disponibili. Se il giocatore senza mosse disponibili viene dichiarato perdente, si dice che si è adottata la regola del *normal play*; invece nel caso in cui si dichiara vincitore, si dice che si è adottata la regola del *misère play*.

Ad esempio, il gioco che consiste nel nominare a turno un numero naturale strettamente più piccolo del numero detto dall'avversario è un gioco combinatorio simmetrico; è giocabile sia in *normal play* che in *misère play* ed è noioso in entrambe le versioni.

La struttura di un gioco è rappresentata dalle mosse effettuabili, cioè dai collegamenti che indicano da quali posizioni si può muovere in quali altre posizioni; una posizione P quindi si può identificare con l'insieme delle sue *opzioni*, cioè l'insieme delle posizioni raggiungibili con una mossa a partire da P. Ma ognuna di queste posizioni può essere a sua volta identificata con l'insieme delle sue opzioni, e così via... Questa osservazione fornisce un efficace approccio per modellare i giochi combinatori simmetrici: l'uso degli insiemi, in cui $A \in B$ significa che A è un'opzione di B (cioè che si può muovere da B in A).

Premesso ciò, cerchiamo la struttura che raccolga al suo interno gli insiemi in cui ogni partita termina in un numero finito di mosse, che nel linguaggio degli insiemi si traduce nella condizione che non esistono successioni $\in$-discendenti infinite. Tale struttura è ben nota e prende il nome di Gerarchia di Von Neumann.

Definizione 1.1.1. $\mathbb{V}$ è la Gerarchia di Von Neumann, definita come segue:

$$\mathbb{V} = \bigcup_{\alpha \in On} \mathbb{V}_\alpha \, , \qquad \mathbb{V}_\alpha = \begin{cases} \varnothing & \text{se } \alpha = 0 \\ \wp(\mathbb{V}_\beta) & \text{se } \alpha = \beta + 1 \\ \displaystyle\bigcup_{\beta < \alpha} \mathbb{V}_\beta & \text{se } \alpha \text{ è un ordinale limite} \end{cases}$$

Adesso possiamo presentare quella che adotteremo come la definizione formale di gioco combinatorio simmetrico:

Definizione 1.1.2. Un *gioco combinatorio simmetrico* G è un elemento di $\mathbb{V}$.

Due giocatori giocano a un gioco scegliendo alternativamente un elemento dell'insieme che ha scelto l'altro giocatore, fino a che non è più possibile farlo. Partendo da un insieme esplicito, un esempio è la partita seguente:

passo 0 si concorda il gioco $\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$;

passo 1 giocatore 1 muove in $\{\varnothing\} \in \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$;

passo 2 giocatore 2 muove obbligatoriamente in $\varnothing \in \{\varnothing\}$;

passo 3 giocatore 1 non può muovere e ha perso.

Osservazione 1.1.3. Il fatto che gli elementi della gerarchia di Von Neumann siano ben fondati garantisce che ogni partita termini dopo un numero finito di mosse.

Da questo punto in poi considereremo esclusivamente giochi combinatori simmetrici $G \in \mathbb{V}$ con la convenzione del *normal play* e li chiameremo "giochi simmetrici" o più semplicemente "giochi". Ogni gioco contiene dentro di sé sia le informazioni riguardanti la posizione iniziale, sia le regole per giocare al gioco stesso; tutto quello che sarà necessario sapere per individuare un gioco è l'insieme che lo rappresenta.

Il problema, nonché lo scopo della teoria combinatoria dei giochi, è principalmente quello di capire se esistono strategie vincenti per il primo o per il secondo giocatore e, in caso affermativo, come trovarle. Intuitivamente, una posizione ha una strategia vincente per il primo giocatore se ha tra le sue opzioni una posizione con una strategia vincente per il secondo giocatore (strategia che, dopo la mossa del secondo giocatore, può essere seguita fino alla vittoria). D'altro canto, una posizione ha una strategia vincente per il secondo giocatore se e solo se ogni sua opzione ha una strategia vincente per il primo giocatore (se così non fosse, il secondo giocatore avrebbe una mossa dalla quale non ci sono strategie vincenti per il primo giocatore).

Chiamando $\mathscr{N}$ (che sta per "Next player win") la classe delle posizioni con una strategia vincente per il primo giocatore e $\mathscr{P}$ (che sta per "Previous player win") la classe delle posizioni con una strategia vincente per il secondo giocatore, abbiamo quindi la seguente osservazione:

Osservazione 1.1.4.

- $G \in \mathscr{P} \Leftrightarrow \forall g \in G \quad g \in \mathscr{N}$
- $G \in \mathscr{N} \Leftrightarrow \exists g \in G \quad g \in \mathscr{P}$

Presentiamo innanzitutto un risultato che ci garantisce che il problema di trovare una strategia vincente (per l'uno o l'altro giocatore) è sempre ben posto.

Teorema 1.1.5. *Le due classi $\mathscr{P}$ e $\mathscr{N}$ formano una partizione di $\mathbb{V}$.*

Dimostrazione. Per induzione ben fondata su $(\mathbb{V}, \in)$ dimostriamo che $G \in \mathscr{N} \Leftrightarrow G \notin \mathscr{P}$. Preso un gioco G, per ipotesi induttiva $\forall g \in G \;\; (g \in \mathscr{N}) \Leftrightarrow (g \notin \mathscr{P})$. Dalla tautologia

$$(\exists g \in G \;\; g \in \mathscr{P}) \Leftrightarrow \neg(\forall g \in G \;\; g \notin \mathscr{P})$$

segue che

$$(\exists g \in G \;\; g \in \mathscr{P}) \Leftrightarrow \neg(\forall g \in G \;\; g \in \mathscr{N}).$$

Dall'Osservazione 1.1.4 segue quindi che $G \in \mathscr{N} \Leftrightarrow G \notin \mathscr{P}$, da cui la tesi. $\square$

Corollario 1.1.6. *In ogni gioco esiste esattamente un giocatore con una strategia vincente.*

Stabilire se un dato gioco appartiene a $\mathscr{P}$ oppure a $\mathscr{N}$ può essere molto difficle. Presentiamo adesso una classe di giochi, la quale sarà utile in seguito, per i quali è facile stabilire se appartengono a $\mathscr{P}$ oppure a $\mathscr{N}$.

Esempio 1.1.7 (Generatori del Nim)**.** Il gioco del Nim N_α, con $\alpha \in On$, definito da $N_\alpha = \alpha$ è un gioco in cui il primo giocatore ha una strategia vincente se e solo se $\alpha \neq \varnothing$.

1.1.2 Somma di giochi

Introdurremo adesso una nuova operazione su $\mathbb{V}$, la somma, e ne analizzeremo le sue proprietà.

Definizione 1.1.8 (Somma di giochi)**.** Dati due giochi G e H, la loro somma è l'insieme

$$G \oplus H = \{g \oplus H,\; G \oplus h \mid g \in G,\; h \in H\}$$

Osserviamo innanzitutto che la definizione è ben posta per il teorema di ricorsione (Teorema 1.3.4). Adesso vediamo di capire quale sia l'idea sotto tale definizione.

Intuitivamente, la somma di giochi $A \oplus B$ corrisponde al gioco in cui, a turno, un giocatore sceglie uno dei due giochi e fa una mossa nel gioco scelto, lasciando invariati gli altri. La somma di giochi rappresenta in maniera efficace l'idea di "pezzi di gioco indipendenti fra loro", in cui le mosse fatte in una parte del gioco (che può essere, per esempio, la prima traversa della scacchiera) non influenzano quello che succede in altre parti del gioco (ad esempio, l'ottava traversa della scacchiera); il motivo per cui è utile considerare la somma tra giochi è perché quando una posizione di gioco è decomponibile come somma di giochi più semplici (appunto, le sue parti "indipendenti"), la sua analisi si può ricondurre all'analisi delle sue componenti (come specificato nel Teorema 1.1.23).

Una proprietà fondamentale della somma di giochi è il fatto di poter fare induzione sulla classe delle somme fra giochi (vedi Teorema 1.3.3). Vediamo adesso di applicare questa induzione per dimostrare alcune proprietà di base della somma tra giochi:

Proposizione 1.1.9. *Se G, H, K sono giochi, allora:*

1. $G \oplus H$ *è un gioco.*
2. $G \oplus \varnothing = G$
3. $\big(G \oplus H\big) \oplus K = G \oplus \big(H \oplus K\big)$
4. $G \oplus H = H \oplus G$

Dimostrazione.

1. Per induzione ben fondata su $(\mathbb{V}^2, \prec)$ (vedi la Proposizione 1.3.2). Per ipotesi induttiva $\forall g \in G \quad g \oplus H \in \mathbb{V}$ e $\forall h \in H \quad G \oplus h \in \mathbb{V}$; quindi, grazie all'assioma di rimpiazzamento e al fatto che G e H sono insiemi, esistono:
$$\sup_{g \in G} \mathscr{R}(g \oplus H) = \alpha \qquad \sup_{h \in H} \mathscr{R}(G \oplus h) = \beta$$
dove $\mathscr{R}$ è il rango di un insieme in $(\mathbb{V}, \in)$ (vedi Definizione 1.3.6). Posto $\gamma = \max\{\alpha, \beta\}$, abbiamo che $G \oplus H \subseteq \mathbb{V}_\gamma$, da cui $G \oplus H \in \mathbb{V}_{\gamma+1}$.

2. Per definizione abbiamo che: $G \oplus \varnothing = \{g \oplus \varnothing \mid g \in G\}$, ma per ipotesi induttiva $g \oplus \varnothing = g$, da cui la tesi.

3. Per definizione abbiamo che:
$$(G \oplus H) \oplus K = \{G \oplus h, g \oplus H\} \oplus K = \{(G \oplus h) \oplus K, (g \oplus H) \oplus K, (G \oplus H) \oplus k\}$$
$$G \oplus (H \oplus K) = G \oplus \{h \oplus K, H \oplus k\} = \{g \oplus (H \oplus K), G \oplus (h \oplus K), G \oplus (H \oplus k)\}.$$
Ma per ipotesi induttiva
$$\{(G \oplus h) \oplus K, (g \oplus H) \oplus K, (G \oplus H) \oplus k\} = \\ \{G \oplus (h \oplus K), g \oplus (H \oplus K), G \oplus (H \oplus k)\},$$
da cui la tesi.

4. Per definizione abbiamo che:
$$G \oplus H = \{G \oplus h,\ g \oplus H\},\ H \oplus G = \{h \oplus G,\ H \oplus g\}.$$
Ma per ipotesi induttiva
$$\{G \oplus h,\ g \oplus H\} = \{h \oplus G,\ H \oplus g\}$$
da cui la tesi.

□

Esempio 1.1.10 (Nim)**.** La più piccola classe di giochi contenente On e chiusa per somma è la classe dei giochi chiamata *Nim* e corrisponde alle somme finite di giochi definiti nell'Esempio 1.1.7. Intuitivamente, nel caso di somme $N_{n_1} \oplus \ldots \oplus N_{n_k}$ (con $k, n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$), fare una partita al Nim si può interpretare nel seguente modo: si predispongono tante scatole piene di palline, e a turno ogni giocatore sceglie una scatola ed ne estrae un numero positivo di palline (chi non può più estrarre ha perso). Le palline estratte da una scatola non influenzano in alcun modo le palline nelle altre scatole: ecco come questo gioco sia esprimibile tramite somma di giochi più semplici (i giochi presentati nell'Esempio 1.1.7).

Il Nim, come vedremo in seguito, gioca un ruolo centrale nella teoria dei giochi simmetrici.

1.1.3 Il campo dei nimeri

Definizione 1.1.11 (Mex)**.** Dato un insieme S, si definisce

$$\operatorname{mex}(S) = \min\{\alpha \in On \mid \alpha \notin S\}.$$

Definizione 1.1.12. Definiamo On_2 come la struttura che ha come supporto On e sulla quale mettiamo una somma e un prodotto come segue:

Somma $\alpha +_2 \beta = \operatorname{mex}\{\hat{\alpha} +_2 \beta, \alpha +_2 \hat{\beta} \mid \hat{\alpha} \in \alpha, \hat{\beta} \in \beta\}$

Prodotto $\alpha\beta = \operatorname{mex}\{\hat{\alpha}\beta +_2 \alpha\hat{\beta} +_2 \hat{\alpha}\hat{\beta} \mid \hat{\alpha} \in \alpha, \hat{\beta} \in \beta\}$

In letteratura la struttura On_2 deve il suo nome al fatto che è un campo di caratteristica 2 che ha come supporto la classe On; viene anche chiamato *campo dei nimeri* (viene da "nimbers", una parola composta a partire da "numbers" e "Nim") e di conseguenza i suoi elementi vengono chiamati, appunto, *nimeri*. Le operazioni appena definite vengono chiamate rispettivamente *somma Nim* e *prodotto Nim*.

Nelle dimostrazioni a seguire, quando scriveremo $\hat{\alpha}$ intenderemo un elemento che varia liberamente in α, per cui una scrittura del tipo $\{\hat{\alpha} +_2 \hat{\alpha} +_2 \beta\}$ sarebbe un'abbreviazione di $\{\hat{\alpha} +_2 \hat{\alpha} +_2 \beta \mid \hat{\alpha} \in \alpha\}$. In particolare, ripetizioni dello stesso simbolo $\hat{x}$ nella stessa espressione sono da considerare uguali, non che ogni $\hat{x}$ varia indipendentemente in x. Chiariamo con un esempio: presi $\alpha = 3$, $\beta = 5$ otteniamo, sostituendo nell'espressione precedente, l'insieme $\{0 +_2 0 +_2 5, 1 +_2 1 +_2 5, 2 +_2 2 +_2 5\}$.

Analogamente, quando scriveremo $\bar{\alpha}$ intenderemo un elemento che varia liberamente in On e che è diverso da α.

Andiamo quindi a dimostrare alcune proprietà dell'algebra Nim.

Proposizione 1.1.13. *Se α, β, γ sono nimeri, allora:*

1. $\alpha = \operatorname{mex}(\alpha)$
2. $\alpha +_2 \beta$ *è un nimero.*
3. $\alpha +_2 0 = \alpha$
4. $\alpha +_2 \beta = \beta +_2 \alpha$
5. $\alpha +_2 \beta = \alpha +_2 \gamma \Leftrightarrow \beta = \gamma$
6. $\alpha +_2 \beta = \operatorname{mex}\{\bar{\alpha} +_2 \beta, \alpha +_2 \bar{\beta}\}$
7. $\alpha +_2 (\beta +_2 \gamma) = (\alpha +_2 \beta) +_2 \gamma$
8. $\alpha +_2 \alpha = 0$

Dimostrazione.

1. Ovvio.
2. Analogo al caso della somma tra giochi.
3. Ovvio.
4. Analogo al caso della somma tra giochi.
5. Senza perdita di generalità assumiamo $\beta > \gamma$, da cui segue che $\alpha +_2 \beta \in \{\alpha +_2 \hat{\gamma}, \hat{\alpha} +_2 \gamma \mid \hat{\alpha} \in \alpha, \hat{\gamma} \in \gamma\}$, che a sua volta implica che $\alpha +_2 \beta \neq \alpha +_2 \gamma$.
6. $\{\bar{\alpha} +_2 \beta, \alpha +_2 \bar{\beta}\} \supseteq \{\hat{\alpha} +_2 \beta, \alpha +_2 \hat{\beta}\} \Rightarrow \operatorname{mex}\{\bar{\alpha} +_2 \beta, \alpha +_2 \bar{\beta}\} \geq \alpha +_2 \beta$; ma per il punto 5 abbiamo che $\alpha +_2 \beta \notin \{\bar{\alpha} +_2 \beta, \alpha +_2 \bar{\beta}\}$, da cui la tesi.
7. Innanzitutto notiamo che

$$\begin{gathered}\alpha +_2 (\beta +_2 \gamma) = \operatorname{mex}\{\hat{\alpha} +_2 (\beta +_2 \gamma), \alpha +_2 \widehat{(\beta +_2 \gamma)}\} \leq \\ \operatorname{mex}\{\hat{\alpha} +_2 (\beta +_2 \gamma), \alpha +_2 (\hat{\beta} +_2 \gamma), \alpha +_2 (\beta +_2 \hat{\gamma})\} \leq \\ \operatorname{mex}\{\bar{\alpha} +_2 (\beta +_2 \gamma), \alpha +_2 \overline{(\beta +_2 \gamma)}\} = \alpha +_2 (\beta +_2 \gamma)\end{gathered}$$

dove l'ultima uguaglianza vale per il punto 6 e le maggiorazioni seguono dai rispettivi contenimenti. Quindi abbiamo dimostrato che

$$\alpha +_2 (\beta +_2 \gamma) = \operatorname{mex}\{\hat{\alpha} +_2 (\beta +_2 \gamma), \alpha +_2 (\hat{\beta} +_2 \gamma)\}.$$

Dall'ipotesi induttiva otteniamo che

$$\{\hat{\alpha} +_2 (\beta +_2 \gamma), \alpha +_2 (\hat{\beta} +_2 \gamma), \alpha +_2 (\beta +_2 \hat{\gamma})\} = \{(\hat{\alpha} +_2 \beta) +_2 \gamma, (\alpha +_2 \hat{\beta}) +_2 \gamma, (\alpha +_2 \beta +_2) \hat{\gamma}\}.$$

Con lo stesso ragionamento fatto all'inzio, deduciamo che

$$\operatorname{mex}\{(\hat{\alpha} +_2 \beta) +_2 \gamma, (\alpha +_2 \hat{\beta}) +_2 \gamma, (\alpha +_2 \beta) +_2 \hat{\gamma}\} = (\alpha +_2 \beta) +_2 \gamma$$

cioè la tesi.

8. Dimostriamo per induzione che $\alpha +_2 \beta = 0 \Leftrightarrow \alpha = \beta$. Osservando che

$$\alpha +_2 \beta \neq 0 \Leftrightarrow 0 \in \{\hat{\alpha} +_2 \beta, \alpha +_2 \hat{\beta}\} \Leftrightarrow (\hat{\alpha} = \beta) \vee (\alpha = \hat{\beta})$$

dove l'ultima equivalenza segue dall'ipotesi induttiva, possiamo quindi concludere con

$$(\hat{\alpha} = \beta) \vee (\alpha = \hat{\beta}) \Leftrightarrow (\alpha < \beta) \vee (\alpha > \beta) \Leftrightarrow \alpha \neq \beta.$$

□

Proposizione 1.1.14. *Se α, β, γ sono nimeri, allora:*

1. $\alpha\beta$ *è un nimero.*

2. $\alpha\beta = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0 \vee \beta = 0$

3. $\alpha 1 = \alpha$

4. $\alpha\beta = \beta\alpha$

5. $\alpha\beta = \mathrm{mex}\{\bar{\alpha}\beta +_2 \alpha\bar{\beta} +_2 \bar{\alpha}\bar{\beta}\}$

6. $\alpha(\beta +_2 \gamma) = \alpha\beta +_2 \alpha\gamma$

7. $\alpha(\beta\gamma) = (\alpha\beta)\gamma$

8. *Se* $\alpha \neq 0$ *e* $\alpha\beta = \alpha\gamma$ *allora* $\beta = \gamma$

9. $\alpha \neq 0 \Rightarrow \exists \beta \quad \alpha\beta = 1$

Dimostrazione.

1. Analogo al caso della somma tra giochi.

2. Chiaramente $\alpha = 0 \vee \beta = 0 \Rightarrow \alpha\beta = \varnothing = 0$. Viceversa, supponiamo che $\alpha, \beta \neq 0$, allora $0 \in \alpha, 0 \in \beta$, quindi prendendo $\hat{\alpha} = 0$ e $\hat{\beta} = 0$ abbiamo che $0 \in \{\hat{\alpha}\beta +_2 \alpha\hat{\beta} +_2 \hat{\alpha}\hat{\beta}\}$, da cui $\alpha\beta \neq 0$.

3. $\alpha 1 = \mathrm{mex}\{\hat{\alpha}1 +_2 \alpha 0 +_2 \hat{\alpha}0\} = \mathrm{mex}\{\hat{\alpha}1\}$, ma per ipotesi induttiva $\mathrm{mex}\{\hat{\alpha}1\} = \mathrm{mex}\{\hat{\alpha}\} = \alpha$.

4. Per defınzione abbiamo che $\alpha\beta = \{\hat{\alpha}\beta +_2 \alpha\hat{\beta} +_2 \hat{\alpha}\hat{\beta}\}$.
   Ma per ipotesi induttiva abbiamo anche

   $$\{\hat{\alpha}\beta +_2 \alpha\hat{\beta} +_2 \hat{\alpha}\hat{\beta}\} = \{\beta\hat{\alpha} +_2 \hat{\beta}\alpha +_2 \hat{\beta}\hat{\alpha}\},$$

   che (per la commutatività della somma) è uguale a

   $$\{\hat{\beta}\alpha +_2 \beta\hat{\alpha} +_2 \hat{\beta}\hat{\alpha}\} = \beta\alpha$$

   da cui la tesi.

5. Chiaramente $\operatorname{mex}\{\bar{\alpha}\beta +_2 \alpha\bar{\beta} +_2 \bar{\alpha}\bar{\beta}\} \geq \alpha\beta$. Supponiamo per assurdo che valga la maggiorazione stretta, allora $\exists \tilde{\alpha}, \tilde{\beta}\ \ (\tilde{\alpha} \neq \alpha) \wedge (\tilde{\beta} \neq \beta)$ tali che $\alpha\beta = \tilde{\alpha}\beta +_2 \alpha\tilde{\beta} +_2 \tilde{\alpha}\tilde{\beta}$.

   Dalla definizione di prodotto segue che:

   $$(\alpha > \tilde{\alpha}) \wedge (\beta > \tilde{\beta}) \text{ è un assurdo contro la definizione di } \alpha\beta$$
   $$(\tilde{\alpha} > \alpha) \wedge (\beta > \tilde{\beta}) \text{ è un assurdo contro la definizione di } \tilde{\alpha}\beta$$
   $$(\alpha > \tilde{\alpha}) \wedge (\tilde{\beta} > \beta) \text{ è un assurdo contro la definizione di } \alpha\tilde{\beta}$$
   $$(\tilde{\alpha} > \alpha) \wedge (\tilde{\beta} > \beta) \text{ è un assurdo contro la definizione di } \tilde{\alpha}\tilde{\beta}$$

   da cui l'assurdo $(\alpha = \tilde{\alpha}) \vee (\beta = \tilde{\beta})$.

6. Innanzitutto notiamo che

   $$\alpha(\beta +_2 \gamma) = \operatorname{mex}\{\hat{\alpha}(\beta\gamma) +_2 \alpha(\widehat{\beta +_2 \gamma}) +_2 \hat{\alpha}(\widehat{\beta +_2 \gamma})\}$$
   $$\leq \operatorname{mex}\{\hat{\alpha}(\beta +_2 \gamma) +_2 \alpha(\hat{\beta} +_2 \gamma) +_2 \hat{\alpha}(\hat{\beta} +_2 \gamma), \hat{\alpha}(\beta +_2 \gamma) +_2 \alpha(\beta +_2 \hat{\gamma}) +_2 \hat{\alpha}(\beta +_2 \hat{\gamma})\}$$
   $$\leq \operatorname{mex}\{\bar{\alpha}(\beta +_2 \gamma) +_2 \alpha(\bar{\beta} +_2 \gamma) +_2 \alpha(\bar{\beta} +_2 \gamma), \bar{\alpha}(\beta +_2 \gamma) +_2 \alpha(\beta +_2 \bar{\gamma}) +_2 \bar{\alpha}(\beta +_2 \bar{\gamma})\}$$
   $$\leq \operatorname{mex}\{\bar{\alpha}(\beta\gamma) +_2 \alpha\overline{(\beta +_2 \gamma)} +_2 \bar{\alpha}\overline{(\beta +_2 \gamma)}\} = \alpha(\beta +_2 \gamma)$$

   dove l'ultima uguaglianza vale per il punto 5 e le maggiorazioni seguono dai rispettivi contenimenti. Quindi abbiamo dimostrato che

   $$\alpha(\beta +_2 \gamma) = \operatorname{mex}\{\hat{\alpha}(\beta +_2 \gamma) +_2 \alpha(\hat{\beta} +_2 \gamma) +_2 \hat{\alpha}(\hat{\beta} +_2 \gamma), \hat{\alpha}(\beta +_2 \gamma) +_2 \alpha(\beta +_2 \hat{\gamma}) +_2 \hat{\alpha}(\beta +_2 \hat{\gamma})\}.$$

   Dall'ipotesi induttiva e dalla Proposizione 1.1.13 punto 8 otteniamo che

   $$\operatorname{mex}\{\hat{\alpha}(\beta +_2 \gamma) +_2 \alpha(\hat{\beta} +_2 \gamma) +_2 \hat{\alpha}(\hat{\beta} +_2 \gamma), \hat{\alpha}(\beta +_2 \gamma) +_2 \alpha(\beta +_2 \hat{\gamma}) +_2 \hat{\alpha}(\beta +_2 \hat{\gamma})\} =$$
   $$\operatorname{mex}\{\hat{\alpha}\beta +_2 \hat{\alpha}\gamma +_2 \alpha\hat{\beta} +_2 \alpha\gamma +_2 \hat{\alpha}\hat{\beta} +_2 \hat{\alpha}\gamma, \hat{\alpha}\beta +_2 \hat{\alpha}\gamma +_2 \alpha\beta +_2 \alpha\hat{\gamma} +_2 \hat{\alpha}\beta +_2 \hat{\alpha}\hat{\gamma}\} =$$
   $$\operatorname{mex}\{\hat{\alpha}\beta +_2 \alpha\hat{\beta} +_2 \alpha\gamma +_2 \hat{\alpha}\hat{\beta}, \hat{\alpha}\gamma +_2 \alpha\beta +_2 \alpha\hat{\gamma} +_2 \hat{\alpha}\hat{\gamma}\}.$$

   Raccogliendo ed usando la Proposizione 1.1.13 punto 6 concludiamo:

   $$\operatorname{mex}\{\hat{\alpha}\beta +_2 \alpha\hat{\beta} +_2 \alpha\gamma +_2 \hat{\alpha}\hat{\beta}, \hat{\alpha}\gamma +_2 \alpha\beta +_2 \alpha\hat{\gamma} +_2 \hat{\alpha}\hat{\gamma}\} =$$
   $$\operatorname{mex}\{\overline{\alpha\beta} +_2 \alpha\gamma, \alpha\beta +_2 \overline{\alpha\gamma}\} = \alpha\beta +_2 \alpha\gamma.$$

7. Innanzitutto notiamo che

   $$(\alpha\beta)\gamma = \operatorname{mex}\{\widehat{(\alpha\beta)}\gamma +_2 (\alpha\beta)\hat{\gamma} +_2 \widehat{(\alpha\beta)}\hat{\gamma}\}$$
   $$\leq \operatorname{mex}\{(\hat{\alpha}\beta +_2 \alpha\hat{\beta} +_2 \hat{\alpha}\hat{\beta})\gamma +_2 (\alpha\beta)\hat{\gamma} +_2 (\hat{\alpha}\beta +_2 \alpha\hat{\beta} +_2 \hat{\alpha}\hat{\beta})\hat{\gamma}\}$$
   $$\leq \operatorname{mex}\{\overline{(\alpha\beta)}\gamma +_2 (\alpha\beta)\bar{\gamma} +_2 \overline{(\alpha\beta)}\bar{\gamma}\} = (\alpha\beta)\gamma$$

dove l'ultima uguaglianza vale per il punto 5 e le maggiorazioni seguono dai rispettivi contenimenti.

Dall'ipotesi induttiva, dal punto 6 e dalla commutatività della somma otteniamo che

$$\begin{aligned}(\alpha\beta)\gamma &= \operatorname{mex}\{(\hat{\alpha}\beta +_2 \alpha\hat{\beta} +_2 \hat{\alpha}\hat{\beta})\gamma +_2 (\alpha\beta)\hat{\gamma} +_2 (\hat{\alpha}\beta +_2 \alpha\hat{\beta} +_2 \hat{\alpha}\hat{\beta})\hat{\gamma}\}\\
&= \operatorname{mex}\{(\hat{\alpha}\beta)\gamma +_2 (\alpha\hat{\beta})\gamma +_2 (\hat{\alpha}\hat{\beta})\gamma +_2 (\alpha\beta)\hat{\gamma} +_2 (\hat{\alpha}\beta)\hat{\gamma} +_2 (\alpha\hat{\beta})\hat{\gamma} +_2 (\hat{\alpha}\hat{\beta})\hat{\gamma}\}\\
&= \operatorname{mex}\{\hat{\alpha}(\beta\gamma) +_2 \alpha(\hat{\beta}\gamma) +_2 \hat{\alpha}(\hat{\beta}\gamma) +_2 \alpha(\beta\hat{\gamma}) +_2 \hat{\alpha}(\beta\hat{\gamma}) +_2 \alpha(\hat{\beta}\hat{\gamma}) +_2 \hat{\alpha}(\hat{\beta}\hat{\gamma})\}\\
&= \operatorname{mex}\{\alpha(\hat{\beta}\gamma) +_2 \alpha(\beta\hat{\gamma}) +_2 \alpha(\hat{\beta}\hat{\gamma}) +_2 \hat{\alpha}(\beta\gamma) +_2 \hat{\alpha}(\hat{\beta}\gamma) +_2 \hat{\alpha}(\beta\hat{\gamma}) +_2 \hat{\alpha}(\hat{\beta}\hat{\gamma})\}\\
&= \operatorname{mex}\{\alpha(\hat{\beta}\gamma +_2 \beta\hat{\gamma} +_2 \hat{\beta}\hat{\gamma}) +_2 \hat{\alpha}(\beta\gamma) +_2 \hat{\alpha}(\hat{\beta}\gamma +_2 \beta\hat{\gamma} +_2 \hat{\beta}\hat{\gamma})\}\end{aligned}$$

Con lo stesso ragionamento fatto all'inizio (sfruttando la commutatività del prodotto) concludiamo con

$$\begin{aligned}&\operatorname{mex}\{\alpha(\hat{\beta}\gamma +_2 \beta\hat{\gamma} +_2 \hat{\beta}\hat{\gamma}) +_2 \hat{\alpha}(\beta\gamma) +_2 \hat{\alpha}(\hat{\beta}\gamma +_2 \beta\hat{\gamma} +_2 \hat{\beta}\hat{\gamma})\}\\
&= \operatorname{mex}\{\alpha\widehat{(\beta\gamma)} +_2 \hat{\alpha}(\beta\gamma) +_2 \hat{\alpha}\widehat{(\beta\gamma)}\} = \alpha(\beta\gamma)\end{aligned}$$

8. Utilizzando la proprietà distributiva, vediamo che

$$\alpha\beta = \alpha\gamma \Rightarrow \alpha\beta +_2 \alpha\gamma = 0 \Rightarrow \alpha(\beta +_2 \gamma) = 0$$

Ma per ipotesi abbiamo che $\alpha \neq 0$, quindi $\beta +_2 \gamma = 0$, cioè la tesi.

9. Assegnato $\alpha \neq 0$, cerchiamo un β che soddisfi

$$\beta = \operatorname{mex}\left\{0, \frac{1 +_2 (\alpha +_2 \hat{\alpha})\hat{\beta}}{\hat{\alpha}}\right\}$$

Assumendo (induttivamente) che siano già stati trovati tutti gli $\frac{1}{\hat{\alpha}}$, con $\hat{\alpha} < \alpha$, prendiamo $\beta = \operatorname{mex} B$, con B definito come segue:

$$\begin{cases} B_0 = \{0\} \\ B_{n+1} = \left\{\dfrac{1 +_2 (\alpha +_2 \hat{\alpha})b_n}{\hat{\alpha}} \mid b_n \in B_n\right\} \\ B = \displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n \end{cases}$$

Verifichiamo adesso che un tale β è effettivamente l'inverso di α. Per il punto 2 abbiamo che $\alpha\beta \neq 0$. Per concludere dimostriamo che $1 \notin \{\hat{\alpha}\beta +_2 \alpha\hat{\beta} +_2 \hat{\alpha}\hat{\beta}\}$.

Innanzitutto, supponiamo $\hat{\alpha} = 0$. Allora ci basta verificare che $1 \notin \{\alpha\hat{\beta}\}$, cioè $0 \notin \{1 +_2 \alpha\hat{\beta}\}$. Per induzione su n:

$$1 +_2 \alpha b_{n+1} = 1 +_2 \alpha\left(\frac{1 +_2 (\alpha +_2 \hat{\alpha})b_n}{\hat{\alpha}}\right) = \frac{(\alpha +_2 \hat{\alpha})(1 +_2 \alpha b_n)}{\hat{\alpha}}$$

Osservando che $\alpha +_2 \hat{\alpha} \neq 0$ e che $1 +_2 \alpha b_n \neq 0$ per ipotesi induttiva, si ottiene $1 +_2 \alpha b_{n+1} \neq 0$, cioè $\alpha b_{n +_2 1} \neq 1$.

Supponendo quindi $\hat{\alpha} \neq 0$, vediamo che:

$$\{\hat{\alpha}\beta +_2 \alpha\hat{\beta} +_2 \hat{\alpha}\hat{\beta}\} = \left\{ 1 +_2 \hat{\alpha} \left(\beta +_2 \frac{1 +_2 (\alpha +_2 \hat{\alpha})\hat{\beta}}{\hat{\alpha}} \right) \right\} = \{1 +_2 \hat{\alpha}(\beta +_2 \hat{\beta}_*)\}$$

dove $\hat{\beta}_*$ varia tra gli elementi di β.

Inoltre, osserviamo che:

$$1 \in \{1 +_2 \hat{\alpha}(\beta +_2 \hat{\beta}_*)\} \Leftrightarrow 0 \in \{\hat{\alpha}(\beta +_2 \hat{\beta}_*)\} \Leftrightarrow (\hat{\alpha} = 0) \vee (\beta +_2 \hat{\beta}_* = 0)$$

Ma $\hat{\alpha} \neq 0$ per ipotesi e $\beta +_2 \hat{\beta}_* \neq 0$ per la Proposizione 1.1.13 punto 8 e punto 5, da cui la tesi. Inoltre è chiaro che l'inverso sia unico.

□

Riassumendo, On_2 è un campo di caratteristica due; inoltre è anche algebricamente chiuso e il suo sottocampo ω^{ω^ω} è isomorfo alla chiusura algebrica di $\mathbb{F}_2$ (per una dimostrazione si veda [7, pag. 56]).

Lo scopo dei seguenti risultati è di stabilire un collegamento fra la somma di ordinali e la somma Nim, per riuscire così ad ottenere una algoritmo di calcolo più efficiente rispetto a quello che avremmo se utilizzassimo soltanto la definizione. Da adesso in poi, per evitare ambiguità, useremo il simbolo $+_2$ per la somma Nim e $+$ per la somma fra ordinali, mentre il prodotto (denotato da $\cdot$) e l'esponenziazione sono le usuali operazioni fra ordinali.

Per iniziare, andiamo ad analizzare la struttura additiva dei nimeri. Un ordinale è un insieme di ordinali più piccoli, i quali possono essere sommati tramite la somma Nim: concentreremo la nostra attenzione sugli ordinali per i quali la relativa restrizione della somma Nim risulta in una struttura di gruppo.

Lemma 1.1.15. *Se $\delta \in On_2$ è un gruppo additivo per la somma Nim, $\alpha, \beta \in On_2$ e $\beta < \delta$, allora $\delta \cdot \alpha + \beta = \delta \cdot \alpha +_2 \beta$.*

Dimostrazione. Per induzione sulla quantità $\delta \cdot \alpha + \beta$. Per definizione abbiamo

$$\delta \cdot \alpha +_2 \beta = \text{mex}\{\widehat{\delta \cdot \alpha} +_2 \beta, \delta \cdot \alpha +_2 \hat{\beta}\}.$$

Consideriamo quindi i termini della forma $\delta \cdot \alpha +_2 \hat{\beta}$; dal momento che tali termini verificano $\delta > \beta > \hat{\beta}$, possiamo applicare l'ipotesi induttiva per ottenere:

$$\{\delta \cdot \alpha +_2 \hat{\beta}\} = \{\delta \cdot \alpha + \hat{\beta}\} = \{\gamma \mid \delta \cdot \alpha + \beta > \gamma \geq \delta\alpha\}$$

Consideriamo adesso i termini della forma $\widehat{\delta \cdot \alpha} +_2 \beta$; innanzitutto tutti e soli i termini della forma $\widehat{\delta \cdot \alpha}$ sono esprimibili nella forma $\delta \cdot \hat{\alpha} + \hat{\delta}$. Utilizzando l'ipotesi induttiva si ha che:

$$\{(\delta \cdot \hat{\alpha} + \hat{\delta}) +_2 \beta\} = \{\delta \cdot \hat{\alpha} +_2 \hat{\delta} +_2 \beta\} = \{\delta \cdot \hat{\alpha} +_2 \hat{\delta}_*\}$$

dove i $\hat{\delta}_*$ variano su tutto δ, dato che in un gruppo la funzione $x \to x + a$ è biettiva. Ne consegue che

$$\{(\delta \cdot \hat{\alpha} + \hat{\delta}) +_2 \beta\} = \{\delta \cdot \hat{\alpha} +_2 \hat{\delta}_*\} = \{\delta \cdot \hat{\alpha} +_2 \hat{\delta}\} = \{\delta \cdot \hat{\alpha} + \hat{\delta}\} = \{\gamma \mid \delta \cdot \alpha > \gamma \geq 0\}$$

da cui la tesi. □

Teorema 1.1.16. *Se $\delta \in On_2$, allora δ è un gruppo* $\Leftrightarrow \exists \gamma \in On_2 \;\; 2^\gamma = \delta$.

Dimostrazione.

$\Leftarrow$) La proprietà associativa, l'esistenza dell'elemento neutro e dell'inverso sono già state dimostrate nella Proposizione 1.1.13, quindi l'unica cosa che rimane da dimostrare è che la somma Nim è chiusa.

Presi due elementi $\alpha, \beta \in 2^\gamma$, per la forma canonica di Cantor in base 2 (Corollario 1.3.8) abbiamo che

$$\alpha +_2 \beta = (2^{\alpha_n} + \cdots + 2^{\alpha_1}) +_2 (2^{\beta_m} + \cdots + 2^{\beta_1}),$$

con $\gamma > \alpha_n > \cdots > \alpha_1, \gamma > \beta_m > \cdots > \beta_1$.

Applicando il teorema di divisione e l'ipotesi induttiva osserviamo che

$$(2^{\alpha_n} + \cdots + 2^{\alpha_2} + 2^{\alpha_1}) = 2^{\alpha_2} \cdot (2^{\tilde{\alpha}_n} + \cdots + 1) + 2^{\alpha_1}.$$

Supponendo per ipotesi induttiva[1] che α_2 è un gruppo, utilizziamo nella seconda uguaglianza il Lemma 1.1.15 per ottenere che:

$$\begin{aligned} 2^{\alpha_n} + \cdots + 2^{\alpha_2} + 2^{\alpha_1} &= 2^{\alpha_2} \cdot (2^{\tilde{\alpha}_n} + \cdots + 1) + 2^{\alpha_1} = \\ 2^{\alpha_2} \cdot (2^{\tilde{\alpha}_n} + \cdots + 1) +_2 2^{\alpha_1} &= (2^{\alpha_n} + \cdots + 2^{\alpha_2}) +_2 2^{\alpha_1} = \\ &= \cdots = 2^{\alpha_n} +_2 \cdots +_2 2^{\alpha_1} \end{aligned} \quad (1.1)$$

Possiamo ripetere lo stesso procedimento anche con β. A questo punto notiamo che la somma $\alpha +_2 \beta$ si pùo esprimere nel seguente modo:

$$\begin{aligned} \alpha +_2 \beta &= (2^{\alpha_n} + \cdots + 2^{\alpha_1}) +_2 (2^{\beta_m} + \cdots + 2^{\beta_1}) = \\ &(2^{\alpha_n} +_2 \cdots +_2 2^{\alpha_1}) +_2 (2^{\beta_m} +_2 \cdots +_2 2^{\beta_1}) = \\ &2^{\gamma_p} +_2 \cdots +_2 2^{\gamma_1} = 2^{\gamma_p} + \cdots + 2^{\gamma_1} \end{aligned} \quad (1.2)$$

[1] L'induzione è un'induzione transfinita su γ; nel nostro caso possiamo applicare l'ipotesi induttiva nelle uguaglianze 1.1 perché $\gamma > \alpha_n > \cdots > \alpha_1$.

con $\gamma > \gamma_p > \cdots > \gamma_1$, da cui $2^\gamma > 2^{\gamma_p} + \cdots + 2^{\gamma_1} = \alpha \mathbin{+_2} \beta$ cioè $\alpha \mathbin{+_2} \beta \in 2^\gamma$. Da notare che nella terza uguaglianza sono state operate cancellazioni dovute al fatto che $x + x = 0$, mentre nell'ultima uguaglianza abbiamo ragionato invertendo le uguaglianze 1.1.

$\Rightarrow$) Se $\delta = 2^{\delta_n} + \cdots + 2^{\delta_1}$ non è una potenza di 2 allora $n \geq 2$, ne segue (utilizzando la 1.1) che $2^{\delta_n} \mathbin{+_2} \cdots \mathbin{+_2} 2^{\delta_1}$ è una somma di elementi tutti in δ la cui somma non appartiene a δ (perché nessun ordinale soddisfa $\delta \in \delta$).

□

Isolando dalla dimostrazione del Teorema 1.1.16 l'affermazione 1.1 otteniamo che la somma standard e la somma Nim forniscono lo stesso risultato se calcolate sulle forme canoniche di Cantor in base 2 (Corollario 1.3.8).

Corollario 1.1.17 (Algoritmo per la somma Nim)**.**

$$2^{\gamma_n} + \cdots + 2^{\gamma_1} = 2^{\gamma_n} \mathbin{+_2} \cdots \mathbin{+_2} 2^{\gamma_1}$$

Questo risultato ci consente, congiuntamente con il punto 8 della Proposizione 1.1.13, di poter calcolare facilmente la somma Nim di due ordinali in funzione delle relative forme canoniche come visto con le uguaglianze 1.2 nella dimostrazione del Teorema 1.1.16.

Esempio 1.1.18. Nel caso di numeri naturali, il precedente corollario ci dice che la somma Nim si comporta esattamente come lo *XOR bitwise*, ovverosia la somma bit per bit senza riporto. Facciamo un esempio di calcolo:

$$13 \mathbin{+_2} 7 = (8+4+1) \mathbin{+_2} (4+2+1) = 8 \mathbin{+_2} 4 \mathbin{+_2} 1 \mathbin{+_2} 4 \mathbin{+_2} 2 \mathbin{+_2} 1 = 8 \mathbin{+_2} 2 = (8+2) = 10.$$

Per una trattazione più approfondita della struttra di On_2 come campo si veda [7, 17]. Grazie ai risultati precedenti siamo riusciti a dare un quadro generale della struttura additiva. La struttura moltiplicativa è molto più complessa e per un'analisi approfondita si veda [16].

1.1.4 Il teorema di Sprague-Grundy

Quello che faremo adesso è stabilire un collegamento tra la somma di giochi e la somma Nim, in modo da poter sfuttare tutte le informazioni che abbiamo su On_2 nell'analisi dei giochi. È chiaro che $G, H \in \mathscr{P} \Rightarrow G \oplus H \in \mathscr{P}$, ed anche che $G \in \mathscr{N},\ H \in \mathscr{P} \Rightarrow G \oplus H \in \mathscr{N}$. Il caso $G, H \in \mathscr{N}$ pone invece qualche difficoltà in più: infatti già nel gioco del Nim si osserva che $N_1 + N_1 \in \mathscr{P}$, mentre $N_1 + N_2 \in \mathscr{N}$. Il teorema di Sprague-Grundy risolve questo problema, consentendo di stabilire se un dato gioco $G = G_1 \oplus \cdots \oplus G_n$ sta o non sta in $\mathscr{P}$ a partire da opportune informazioni su $G_1, \cdots, G_n$. La risposta risiede nella funzione $\mathscr{G}$, definita come segue:

Definizione 1.1.19. $\mathscr{G}$ è la funzione classe definita per ricorsione, tale che

$$\mathscr{G}(X) = \operatorname{mex}\{\mathscr{G}(x) \mid x \in X\}.$$

Osservazione 1.1.20. Se α è un ordinale, $\mathscr{G}(\alpha) = \alpha$. Ne segue che, per ogni insieme X, $\mathscr{G}(\mathscr{G}(X)) = X$.

Lemma 1.1.21. *Se X, Y sono due giochi, allora:*

$$\mathscr{G}(X \oplus Y) = \mathscr{G}(X) +_2 \mathscr{G}(Y)$$

Dimostrazione. Per induzione. Innanzitutto notiamo che:

$$\begin{aligned} \mathscr{G}(X) +_2 \mathscr{G}(Y) &= \operatorname{mex}\{\widehat{\mathscr{G}(X)} +_2 \mathscr{G}(Y), \mathscr{G}(X) +_2 \widehat{\mathscr{G}(Y)}\} \\ &\leq \operatorname{mex}\{\mathscr{G}(x) +_2 \mathscr{G}(Y), \mathscr{G}(X) +_2 \mathscr{G}(y)\} \\ &\leq \operatorname{mex}\{\overline{\mathscr{G}(X)} +_2 \mathscr{G}(Y), \mathscr{G}(X) +_2 \overline{\mathscr{G}(Y)}\} = \mathscr{G}(X) +_2 \mathscr{G}(Y) \end{aligned}$$

dove l'ultima uguaglianza vale per la Proposizione 1.1.13 punto 6, mentre le maggiorazioni seguono dai rispettivi contenimenti. A questo punto concludiamo con

$$\begin{aligned} \mathscr{G}(X \oplus Y) &= \operatorname{mex}\{\mathscr{G}(x \oplus Y), \mathscr{G}(X \oplus y)\} \\ &= \operatorname{mex}\{\mathscr{G}(x) +_2 \mathscr{G}(Y), \mathscr{G}(X) +_2 \mathscr{G}(y)\} = \mathscr{G}(X) +_2 \mathscr{G}(Y) \end{aligned}$$

dove la seconda uguaglianza è dovuta all'ipotesi induttiva. □

Teorema 1.1.22.

$$\mathscr{G}(X) = 0 \Leftrightarrow X \in \mathscr{P}$$

Dimostrazione.

$$\mathscr{G}(X) \neq 0 \Leftrightarrow 0 \in \{\mathscr{G}(x) \mid x \in X\} \Leftrightarrow \exists x \in X \quad x \in \mathscr{P} \Leftrightarrow X \in \mathscr{N} \Leftrightarrow X \notin \mathscr{P}$$

dove la seconda equivalenza è dovuta all'ipotesi induttiva e l'ultima al Teorema 1.1.5. □

Corollario 1.1.23 (Sprague-Grundy). *$X \oplus Y \in \mathscr{P} \Leftrightarrow \mathscr{G}(X) = \mathscr{G}(Y)$*

Da un punto di vista algebrico possiamo vedere $(On_2, +_2)$ come un quoziente di $(\mathbb{V}, \oplus)$ in cui due giochi G, H appartengono alla stessa classe se e solo se $\forall X \in \mathbb{V} \quad X \oplus G \in \mathscr{P} \Leftrightarrow X \oplus H \in \mathscr{P}$; inoltre, rispetto a questa relazione di equivalenza $\sim$, gli ordinali formano una classe di rappresentanti dato che, per il Corollario 1.1.23, ogni gioco H soddisfa la relazione $\mathscr{G}(H) \sim H$. I risultati fin'ora ottenuti ci consentono quindi di rimpiazzare liberamente somme di giochi con somme di giochi equivalenti senza cambiare classe di equivalenza; appare dunque chiaro come la formulazione originale del teorema di Sprague-Grundy (ogni partita a un gioco simmetrico G è equivalente a una partita al Nim, per un opportuno N_α) sia equivalente a quella fornita in 1.1.23: basta infatti prendere $\alpha = \mathscr{G}(G)$ ed abbiamo che la partita al Nim N_α soddisfa $N_\alpha \sim G$.

Da un punto di vista algoritmico il Corollario 1.1.23 ha delle conseguenze importanti. Assumiamo che $H = G_1 \oplus \ldots \oplus G_n$: tutta la teoria che abbiamo sviluppato fino a questo punto ci dice che per sapere se una data posizione H è vincente basta calcolare $\mathscr{G}(H)$; ma il fatto che $\mathscr{G}$ si spezza sulle somme di giochi consente di andare oltre: per sapere se H è vincente basta calcolare $\mathscr{G}(G_1) +_2 \ldots +_2 \mathscr{G}(G_n)$, che in generale è molto più veloce da calcolare che non $\mathscr{G}(H)$.

Esempio 1.1.24 (Soluzione del Nim)**.** Ecco una applicazione pratica di tutto il lavoro fatto: la soluzione del gioco del Nim (definito nell'Esempio 1.1.10). Per quanto visto fin'ora il gioco $N_{n_1} \oplus \cdots \oplus N_{n_k}$ è una posizione vincente se e solo se $\mathscr{G}(N_{n_1} \oplus \ldots \oplus N_{n_k}) = n_1 +_2 \ldots +_2 n_k \neq 0$.

Tutte e sole le mosse vincenti sono quelle che abbassano un certo n_i a un $\hat{n}_i$ in modo tale che $n_1 +_2 \ldots +_2 \hat{n}_i +_2 \ldots +_2 n_k = 0$. Per descriverle ancora più esplicitamente, ragioniamo come segue: se ad esempio $n_1 +_2 \ldots +_2 n_k = t \neq 0$, prendiamo $W = \{\bar{\imath} \mid t +_2 n_{\bar{\imath}} < n_{\bar{\imath}}\}$. Allora $W \neq \varnothing$ (perché la posizione è vincente)[2] e le mosse vincenti sono tutte quelle che abbassano un $n_{\bar{\imath}}$ al rispettivo $t +_2 n_{\bar{\imath}}$.

Storicamente, per primo è stato risolto il Nim (originariamente risolto più di cent'anni fa in [5], sebbene con meno consapevolezza della teoria generale); in seguito il risultato ottenuto è stato esteso a tutti giochi simmetrici tramite il teorema di Sprague-Grundy (dimostrato indipendentemente dai due autori, vedi [21, 22] e [11]). Vediamo adesso un'altra applicazione:

Esempio 1.1.25 (Analisi di Dawson's Kayles)**.** Nel gioco di *Dawson's Kayles* una mossa consiste nel buttare giù (esattamente) due birilli adiacenti in una fila di birilli. Chiamiamo $\mathcal{D}_n$ la posizione che consiste in una fila di birilli di lunghezza n. Allora appare chiaro come la definizione formale del gioco con n birilli sia la seguente: $\mathcal{D}_n = \{\mathcal{D}_m \oplus \mathcal{D}_{n-m-2}\}$, con $n - 2 \geq m \geq 0$.

Usando il Corollario 1.1.23 possiamo calcolare facilmente $\mathscr{G}(\mathcal{D}_n)$ e i risultati sono mostrati in Tabella 1.1. Ogni riga rappresenta un blocco di 34 nimeri consecutivi: la prima riga mostra da $\mathscr{G}(\mathcal{D}_0)$ fino a $\mathscr{G}(\mathcal{D}_{33})$; la seconda da $\mathscr{G}(\mathcal{D}_{34})$ fino a $\mathscr{G}(\mathcal{D}_{67})$, e così via...

1.2 I giochi ottali

Nonostante sia possibile in teoria scrivere un programma che calcoli i nimeri di un qualsiasi gioco, di fatto si scopre che spesso il tempo necessario affinché

[2] Fatto non banale da dimostrare senza usare la teoria presentata fin'ora.

	0										1										2										3			
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3
0+	0	0	1	1	2	0	3	1	1	0	3	3	2	2	4	0	5	2	2	3	3	0	1	1	3	0	2	1	1	0	4	5	2	7
34+	4	0	1	1	2	0	3	1	1	0	3	3	2	2	4	4	5	5	2	3	3	0	1	1	3	0	2	1	1	0	4	5	3	7
68+	4	8	1	1	2	0	3	1	1	0	3	3	2	2	4	4	5	5	9	3	3	0	1	1	3	0	2	1	1	0	4	5	3	7
102+	4	8	1	1	2	0	3	1	1	0	3	3	2	2	4	4	5	5	9	3	3	0	1	1	3	0	2	1	1	0	4	5	3	7
136+	4	8	1	1	2	0	3	1	1	0	3	3	2	2	4	4	5	5	9	3	3	0	1	1	3	0	2	1	1	0	4	5	3	7
170+	4	8	1	1	2	0	3	1	1	0	3	3	2	2	4	4	5	5	9	3	3	0	1	1	3	0	2	1	1	0	4	5	3	7

Tabella 1.1: Nimeri di Dawson's Kayles.

il calcolo termini è troppo lungo. Contemporaneamente, sarebbe desiderabile avere una descrizione completa di un dato gioco che si vuole analizzare, come potrebbe essere una formula, e non solo la capacità di calcolare numericamente i nimeri. Il teorema di Guy-Smith (dimostrato originariamente in [13], poi esteso in [18]) tenta di risolvere questi problemi, per una classe particolare di giochi simmetrici: i cosiddetti *giochi ottali*.

1.2.1 Prime definizioni

Definizione 1.2.1 (Codice ottale)**.** Un *codice ottale* è una sequenza di cifre $0.d_1d_2d_3\dots$ dove $8 > d_i \geq 0$ per ogni i.

Definizione 1.2.2 (Generatori ottali)**.** Dato un codice ottale $0.d_1d_2d_3\dots$, consideriamo la rappresentazione binaria delle sue cifre d_k:

$$d_k = \delta_{k,0} + 2\delta_{k,1} + 4\delta_{k,2} \text{ dove } \delta_{k,i} \in \{0, 1\}.$$

Utilizzando i coefficienti $\delta_{k,i}$, definiamo ricorsivamente i *generatori ottali* G_n associati al codice $0.d_1d_2d_3\dots$ Niente altro appartiene a G_n se non quello che segue da queste regole:

- Se $\delta_{k,0} = 1$ allora $\varnothing \in G_k$.
- Se $\delta_{k,1} = 1$ e $n > k$, allora $G_{n-k} \in G_n$.
- Se $\delta_{k,2} = 1$ e $n - 2 > m > 0$, allora $(G_{n-k-m} \oplus G_m) \in G_n$.

Definizione 1.2.3 (Gioco ottale)**.** Un gioco ottale H relativo al codice $0.d_1d_2d_3\dots$ è l'insieme dei giochi generati tramite somma a partire dai generatori ottali associati del codice $0.d_1d_2d_3\dots$.

Esempio 1.2.4. Il gioco del Nim con generatori $n \in \mathbb{N}$ è rappresentato dal codice ottale $0.333\dots$. Il fatto che $\delta_{k,0}$ e $\delta_{k,1}$ valgono sempre uno dice che si può muovere da un N_n a un qualsiasi N_k con $n > k \geq 0$, che è precisamente la definizione di generatori del Nim nel caso di indici naturali (vedi l'Esempio 1.1.7).

Esempio 1.2.5. Il gioco Dawson's Kayles è rappresentato dal codice ottale 0.07. Il punto fondamentale è che $\delta_{2,2} \neq 0$ e che quindi si pùo muovere da $\mathcal{D}_n$ in $\mathcal{D}_m \oplus \mathcal{D}_{n-m-2}$ con $n-2 > m > 0$. Le mosse in cui $n-2 = m > 0$ oppure in cui $n-2 = m = 0$ sono consentite invece rispettivamente da $\delta_{2,1}$ e $\delta_{2,0}$.

1.2.2 Il teorema di periodicità di Guy-Smith

Il seguente teorema è uno strumento che si è rivelato molto efficace nell'analisi dei giochi ottali. Il suo enunciato afferma che, dato un gioco ottale con generatori G_n, se la successione $\mathscr{G}(G_n)$ rimane periodica abbastanza a lungo allora tale successione è effettivamente periodica.

Teorema 1.2.6 (Teorema di periodicità di Guy-Smith)**.** *Sia H un gioco ottale con una codifica d_i in cui solo un numero finito di cifre sono diverse da zero, e sia $k = \max\{i \mid d_i \neq 0\}$. Chiamiamo H_n l'n-esimo generatore di H. Se esistono $n_0, p \in \mathbb{N}$ tali che:*

$$\mathscr{G}(H_{n+p}) = \mathscr{G}(H_n) \text{ per ogni } n \text{ tale che } n_0 \leq n < 2n_0 + p + k \tag{1.3}$$

allora

$$\mathscr{G}(H_{n+p}) = \mathscr{G}(H_n) \text{ per ogni } n \geq n_0.$$

Dimostrazione. Innanzitutto osserviamo che ogni elemento di H_n è della forma $H_a \oplus H_b$ con $n - k \leq a + b < n$ (segue dalla codifica di H).
Adesso procediamo per induzione su n e prendiamo $n \geq 2n_0 + p + k$.

Un elemento di H_{n+p} è della forma $H_a \oplus H_b$ con $n + p - k \leq a + b < n$. Dal fatto che $n \geq 2n_0 + p + k$ abbiamo che $a + b \geq n + p - k \geq 2n_0 + 2p$, quindi senza perdità di generalità[3] possiamo supporre che $b \geq n_0 + p$.

Per ipotesi induttiva $\mathscr{G}(H_{b-p}) = \mathscr{G}(H_b)$, da cui

$$\mathscr{G}(H_a \oplus H_b) = \mathscr{G}(H_a) +_2 \mathscr{G}(H_b) = \mathscr{G}(H_a) +_2 \mathscr{G}(H_{b-p}) = \mathscr{G}(H_a \oplus H_{b-p}).$$

Ma gli elementi $H_a \oplus H_{b-p}$ sono tutti e soli gli elementi di H_n, quindi abbiamo dimostrato che

$$\{\mathscr{G}(h_{n+p}) \mid h_{n+p} \in H_{n+p}\} = \{\mathscr{G}(h_n) \mid h_n \in H_n\},$$

cioè, per la definizione di $\mathscr{G}$, che $\mathscr{G}(H_{n+p}) = \mathscr{G}(H_n)$. □

Definizione 1.2.7 (Periodo e preperiodo)**.** Se H è un gioco come nelle ipotesi del Teorema 1.2.6, sia $\bar{p}$ il minimo p per cui esiste n_0 tale che la condizione 1.3 sia verificata, e fissato $\bar{p}$ sia $\bar{n}_0$ il minimo n_0 tale che la condizione 1.3 sia verificata; allora $\bar{p}$ e $\bar{n}_0$ si dicono rispettivamente il *periodo* e il *preperiodo* di H.

[3] Dal momento che $a + b \geq 2(n_0 + p) \Rightarrow (a \geq n_0 + p) \vee (b \geq n_0 + p)$

Esempio 1.2.8. Osservando la Tabella 1.1 si può vedere che il gioco Dawson's Kayles soddisfa la condizione 1.3 (perché $2 \cdot 53 + 34 + 2 = 142 \leq 203$), con preperiodo 53 e periodo 34. Ne consegue che a partire da quella tabella, tramite semplici operazioni aritmetiche, possiamo ricostruire il nimero di qualsiasi posizione di Dawson's Kayles.

I giochi ottali (in *normal play*) sono tutt'ora oggetto di studio, in particolare sono al centro di un importante congettura nella teoria combinatoria dei giochi: ad oggi, nonostante notevoli sforzi di classificazione (come riportato in [8]), non è noto se tutti i giochi ottali con codice finito sono definitivamente periodici [12]. Inoltre, i collegamenti trovati fra il codice di un gioco e il suo periodo (o preperiodo) sono pochi e frammentati [2]. I risultati in *misère play* sono assai più modesti (vedi [3, 7]): nonostante recenti sviluppi della teoria (vedi [19]) molti giochi sono ancora irrisolti, tra cui anche lo stesso Dawson's Kayles.

1.3 Appendice al Capitolo 1

1.3.1 Complementi di teoria degli insiemi

Riportiamo qui alcuni risultati di teoria degli insiemi utili per questa tesi.

Definizione 1.3.1. Una relazione $\prec$ su una classe X si dice *ben fondata* se:

- Ogni sottoinsieme non vuoto di X ha un elemento minimale rispetto a $\prec$.
- Per ogni $x \in X$ si ha che $\{y \mid y \prec x\}$ è un insieme.

La maggior parte delle definizioni e delle dimostrazioni di questa tesi si basano sull'induzione e sulla ricorsione. Oltre ai casi più noti, come l'induzione sugli ordinali oppure sulla gerarchia di Von Neumann con la relazione $\in$, utilizziamo spesso anche l'induzione (e la ricorsione) sulla seguente classe:

Proposizione 1.3.2. *Sia $\succ$ la relazione su $\mathbb{V}^2 = \mathbb{V} \times \mathbb{V}$ così definita:*

$$(X_1, Y_1) \succ (X_2, Y_2) \Leftrightarrow (X_2 \in X_1 \land Y_2 = Y_1) \lor (X_2 = X_1 \land Y_2 \in Y_1)$$

Allora $\succ$ è una relazione ben fondata su $\mathbb{V}^2$.

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che esista una successione Z_n discendente e infinita. Prese π_1, π_2 le proiezioni rispettivamente sulla prima e sulla seconda componente, abbiamo che la successione $\pi_1(Z_n)$ verifica la proprietà $\big(\pi_1(Z_{n+1}) = \pi_1(Z_n)\big) \lor \big(\pi_1(Z_{n+1}) \in \pi_1(Z_n)\big)$; ma nella successione $\pi_1(Z_n)$ ci possono essere soltanto un numero finito di appartenenze (perché X è ben fondato), quindi $\pi_1(Z_n)$ è definitivamente costante. Ragionando analogamente per la successione $\pi_2(Z_n)$, otteniamo che Z_n è definitivamente costante, assurdo contro la definizione di $\succ$. $\square$

Riportiamo per completezza anche gli enunciati dei teoremi di induzione e ricorsione ben fondata, uniti alla conseguente definizione di rango.

Teorema 1.3.3 (Induzione ben fondata)**.** *Sia X una classe e $\prec$ una relazione ben fondata su X. Sia φ un predicato tale che, per ogni $x \in X$, vale:*

$$\forall y \prec x \ \varphi(y) \Rightarrow \varphi(x)$$

allora $\forall x \in X \ \varphi(x)$.

Teorema 1.3.4 (Ricorsione ben fondata)**.** *Sia X una classe , $\prec$ una relazione ben fondata su X e G una funzione da $X \to X$. Allora esiste una e una sola funzione F definita su X tale che:*

$$F(x) = G\big(F \restriction \{y \mid y \prec x\}\big)$$

dove $\restriction$ indica la restrizione di una funzione a un insieme.

Osservazione 1.3.5. Da notare l'assenza del caso degli elementi minimali nelle ipotesi del Teorema 1.3.3, che risulta essere vero "a vuoto": infatti se φ è un predicato qualsiasi, $\neg\exists x \prec \varnothing$ (tale che $\varphi(x)$), quindi $\forall x \prec \varnothing \ \varphi(x)$.

Definizione 1.3.6. Data una classe X con una relazione binaria $\prec$ ben fondata su X, esiste un'unica funzione $\mathscr{R}$ da X in On tale che, per ogni $x \in X$ si ha:

$$\mathscr{R}(x) = \sup\{\mathscr{R}(y) + 1 \mid y \prec x\}$$

In questa tesi faremo inoltre uso di una variante di un risultato classico della teoria degli insiemi: la forma canonica di Cantor. La versione solitamente enunciata afferma che ogni ordinale può essere scritto in maniera unica in base ω; a noi servirà invece scrivere un ordinale in base 2. Riportiamo per completezza entrambi i risultati:

Teorema 1.3.7 (Forma canonica di Cantor)**.** *Ogni ordinale $\alpha > 0$ può essere espresso in maniera unica nella forma*

$$\alpha = \omega^{\beta_1} k_1 + \cdots + \omega^{\beta_n} k_n$$

dove $n \geq 1$, $\alpha \geq \beta_1 > \cdots > \beta_n$, e $k_1, \ldots, k_n$ sono numeri naturali non nulli.

Corollario 1.3.8 (Forma canonica di Cantor in base 2)**.** *Ogni ordinale $\alpha > 0$ può essere espresso in maniera unica nella forma*

$$\alpha = 2^{\gamma_1} + \cdots + 2^{\gamma_n}$$

dove $n \geq 1$, $\alpha \geq \gamma_1 > \cdots > \gamma_n$.

Capitolo 2

Lo strano caso di Astron

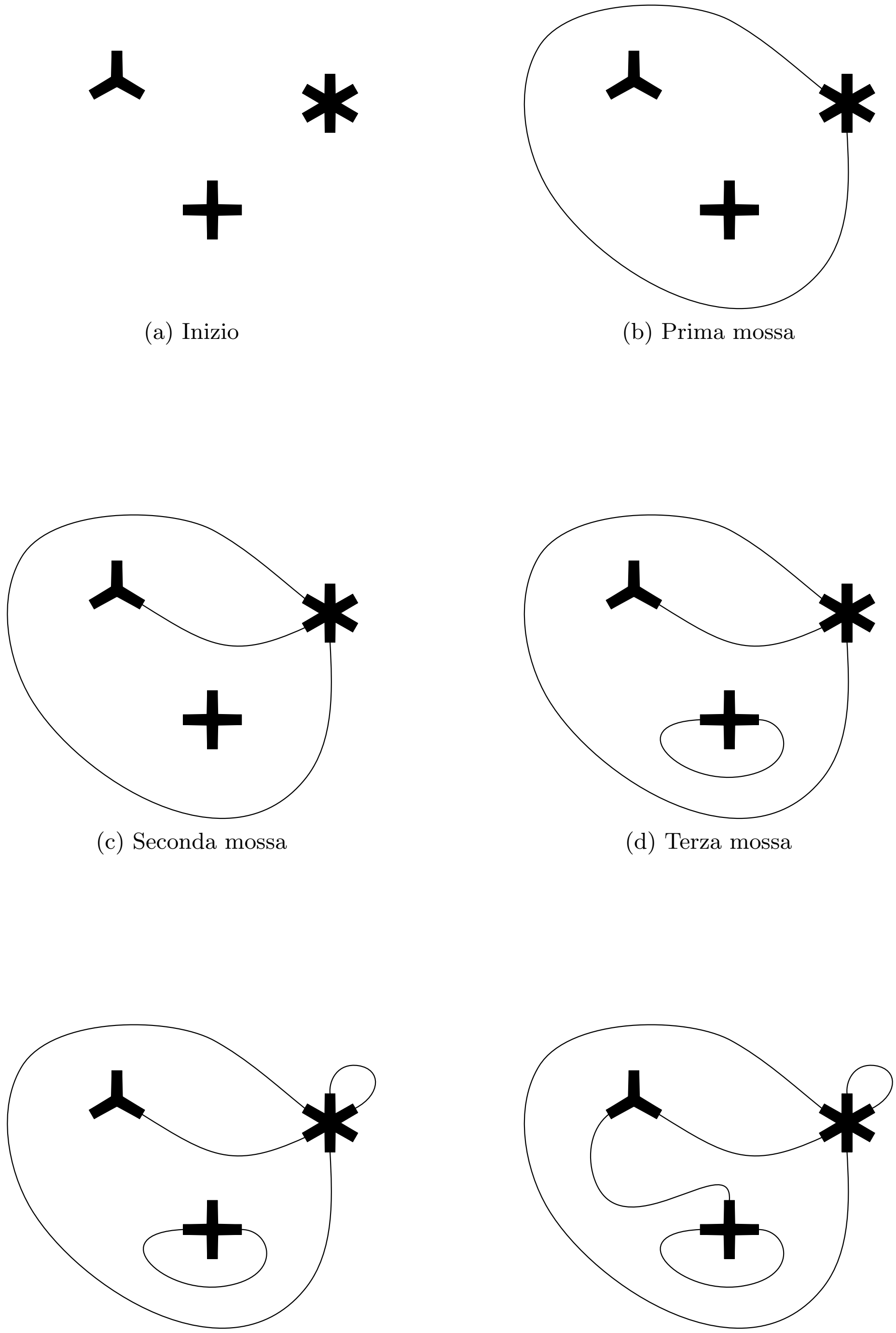
2.1 Astron, visto da fuori

Astron è nato come gioco giocabile con regole semplici e richiede ben poco materiale: bastano un foglio e una penna, o gesso e lavagna. Le regole informali sono le seguenti:

> Inizialmente si disegnano alla lavagna varie stelle, ciascuna con un numero finito di punte, e si decide chi inizia.
>
> A turno, ogni giocatore collega con una linea continua una punta libera[a] di una stella a un'altra punta libera[b], senza passare sopra le figure già disegnate.
>
> Chi non può più muovere ha perso.
>
> [a] Una punta libera è una punta che non è stata precedentemente collegata.
>
> [b] Si possono anche collegare due punte libere della stessa stella.

Un esempio di partita è mostrato in Figura 2.1.

Per poter sfruttare nell'analisi di questo gioco la teoria che abbiamo presentato, abbiamo bisogno innanzitutto di trasformare le regole in qualcosa di matematicamente più trattabile. La scelta più naturale sembra quella di descrivere Astron tramite il linguaggio della topologia; vedremo poi come, a partire dalla descrizione topologica, arriveremo a dare una definzione combinatoria del gioco (che sarà quella poi che verrà presa come riferimento ed usata durante tutto lo studio di Astron).



(a) Inizio

(b) Prima mossa

(c) Seconda mossa

(d) Terza mossa

(e) Quarta mossa

(f) Quinta ed ultima mossa

Figura 2.1: Esempio di partita ad Astron

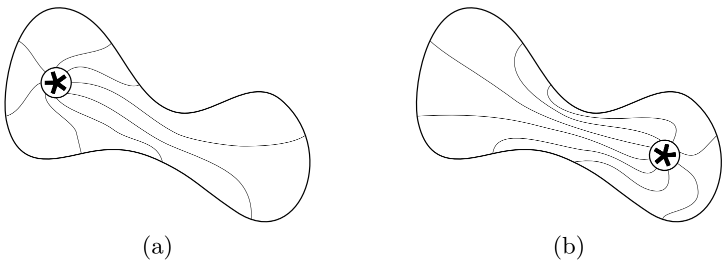
2.1.1 La descrizione topologica

La prima idea che viene in mente per formalizzare Astron, non fosse altro che per la presenza della parola “continua” nelle regole del gioco, è quella di usare nozioni topologiche. In effetti, appare subito chiaro che la struttura del gioco non è sensibile a torsioni, stiramenti o contrazioni: è invariante per omeomorfismi. Il punto di quello che andremo a vedere non sarà però di dare una definizione topologica di Astron (che ricalcherebbe in un qualche modo le definizioni che orbitano intorno al gruppo fondamentale di una superficie), quanto di capire quali configurazioni siano equivalenti e quali distinte, per poi fornire una forma canonica della generica posizione del gioco. Più precisamente andremo a presentare delle trasformazioni tra posizioni, andremo poi a considerare la relazione di equivalenza indotta da tali trasformazioni e infine forniremo dei rappresentanti particolarmente semplici per ogni classe.

Topologicamente parlando niente vieta di considerare Astron su varie superfici, senza limitarsi necessariamente al piano. Seguendo questa idea, notiamo che togliere un numero finito di punti dalla sfera S^2 non modifica le mosse disponibili qualunque sia la configurazione di Astron che si sta già considerando sulla sfera; infatti, prese due punte collegabili da un arco, se togliamo un numero finito di punti le due punte rimangono collegabili dal solito arco a patto di eventuali piccole modifiche locali per “aggirare” i punti rimossi. Alla luce di questa osservazione appare chiaro come sia equivalente giocare ad Astron su una qualsiasi superficie ottenuta togliendo un numero finito di punti dalla sfera; per semplicità fissiamo come superficie di riferimento per Astron la sfera S^2 vista come $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, il piano con un punto all'infinito.

Sfruttiamo questa idea e andiamo nello specifico a considerare il comportamento di Astron sulla sfera.

Spostamento. È possibile spostare una stella senza alterare la configurazione del gioco. Si può vedere come un compatto K contenuto in un aperto U si possa spostare tramite un opportuno omeomorfismo di S^2 che fissa U^c, usa $U \setminus K$ come “cuscinetto” e sposta K. Un esempio è illustrato nella Figura 2.2.



(a) (b)

Figura 2.2: Omeomorfismo che sposta una stella

Collassamento. È possibile collassare un arco semplice, o un arco chiuso senza oggetti al suo interno, senza alterare la configurazione del gioco. Si può vedere come, tramite un'opportuna omotopia, si riesca in generale a contrarre un arco a un punto; anche i lacci sono contraibili, ma la contraibilità dei lacci è legata alla struttura topologica della sfera (perché il gruppo fondamentale della sfera è banale) e sfrutta quindi una particolare proprietà della superficie che abbiamo scelto. Quanto appena detto è illustrato in Figura 2.3 e Figura 2.4.

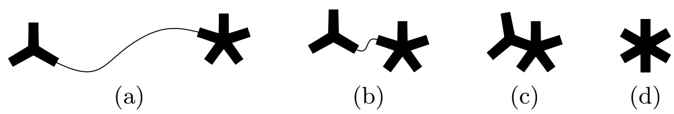


Figura 2.3: Collassamento di un arco

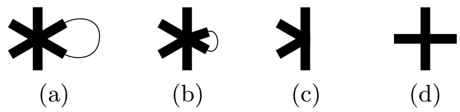


Figura 2.4: Collassamento di un laccio

Inversione. È possibile invertire la parte racchiusa all'interno di un laccio con la sua parte esterna. Questa equivalenza è facilmente enunciabile sul piano, dove sappiamo quale sia la parte esterna ed quale la parte interna di un laccio, ma è più facilmente motivabile sulla sfera: infatti si può vedere immediatamente come un laccio possa allargarsi, superare il punto all'infinto e richiudersi dalla parte opposta (vedi Figura 2.5).

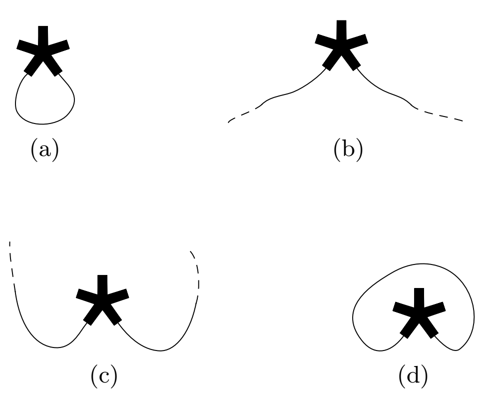


Figura 2.5: Inversione

2.1.2 La definizione combinatoria

Fino a questo punto le manovre eseguite hanno un significato prettamente geometrico. Iniziamo con una osservazione di carattere diverso:

Osservazione 2.1.1 (Decomposizione tramite somma)**.** Ogni posizione in cui un laccio taglia la superficie che fa da supporto in due componenti connesse è equivalente alla somma (di giochi) della configurazione interna con la configurazione esterna. Il motivo sotto questa equivalenza è che un nuovo collegamento tra punte non può “saltare” da una componente all’altra (per continuità), quindi ogni collegamento deve essere completato all’interno della componente in cui giace la punta di partenza. Questa indipendenza tra le varie componenti connesse si traduce a livello combinatorio nel concetto di somma di giochi, come evidenziato nelle motivazioni sottostanti la Definizione 1.1.8.

Possiamo adesso fornire la forma canonica cercata, che farà da base per la definizione combinatoria di Astron.

Teorema 2.1.2. *Ogni configurazione di Astron è equivalente a una somma di configurazioni costituite da stelle senza alcun arco.*

Dimostrazione. Supponiamo di partire da una configurazione con sole stelle senza alcun arco. Consideriamo due tipi di mosse: quelle che collegano due punte di stelle non collegate, dette mosse di congiunzione; quelle che collegano due punte della stessa stella, dette mosse di disgiunzione.

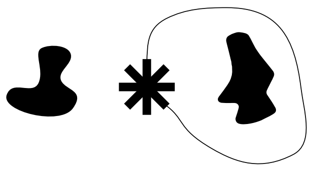
Una mossa di congiunzione collegherebbe due stelle, supponiamo di n ed m punte, le quali una volta collegate sarebbero equivalenti a una stella unica con $n + m - 2$ punte (vedi l’equivalenza di collassamento). Quindi la posizione risultante sarebbe equivalente ad una posizione con sole stelle non collegate.

Per le mosse di disgiunzione la faccenda è più complicata: quello che accade è che una mossa di disgiunzione trasforma una configurazione di stelle disgiunte in una configurazione equivalente a una somma di configurazioni di stelle disgiunte.

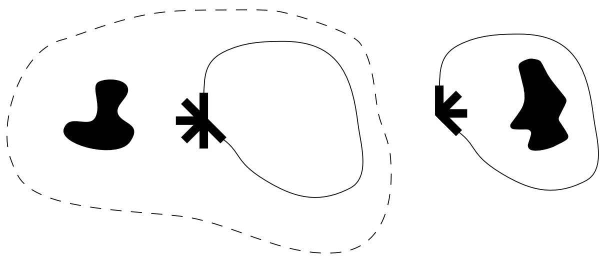
Innanzitutto una mossa di disgiunzione separa lo spazio in due componenti, le quali possono essere spezzate in due configurazioni in virtù dell’Osservazione 2.1.1. È importante notare che è possibile scegliere liberamente quali stelle relegare in una componente e quali nell’altra; questo fatto ed è un punto fondamentale della definizione combinatoria di Astron (Definizione 2.1.3).

Una volta spezzata la configurazione, applicando le equivalenze di inversione e poi di collassamento a ciascun termine della somma ci si riconduce ad una somma di configurazioni composte da stelle senza archi; in questo processo la stella su cui abbiamo eseguito la mossa di disgiunzione è stata “spezzata” ed è finita parte in una componente, parte nell’altra. □

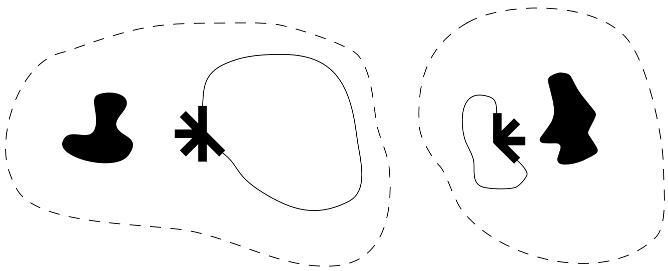
Tutti i passaggi appena enunciati nella dimostrazione del Teorema 2.1.2 sono illustrati nella Figura 2.6.



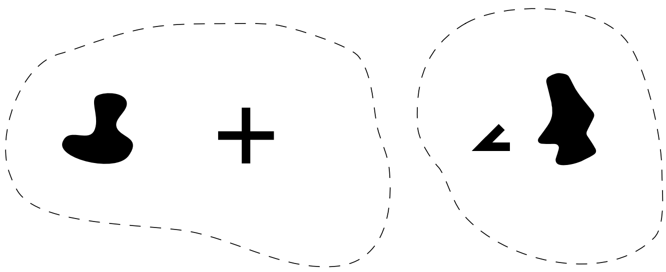
(a) Mossa di disgiunzione



(b) Decomposizione tramite somma



(c) Inversione



(d) Collassamento

Figura 2.6: Equivalenze per mosse di disgiunzione

Chiarito come rappresentare efficacemente le varie posizioni di Astron, vediamo adesso di dare una definizione combinatoria del gioco.

Chiamata $\mathcal{A}_{p_1,\cdots,p_s}$ la posizione composta da s stelle ognuna con p_i punte (senza alcun arco), sappiamo in virtù del Teorema 2.1.2 che tali posizioni costituiscono un insieme di generatori per Astron. Per completare la definizione combinatoria di Astron, non ci resta che esplicitare le relazioni fra i generatori ricalcando le equivalenze presentate nella dimostrazione del Teorema 2.1.2. Ecco la definizione di Astron come gioco combinatorio, che da questo punto in poi verrà presa come riferimento.

Definizione 2.1.3 (Astron)**.** In questa definizione, due giochi $\mathcal{A}_{p_1,\cdots,p_s}$ e $\mathcal{A}_{q_1,\cdots,q_t}$ sono considerati equivalenti se si ottengono l'uno dall'altro rimuovendo o aggiungendo indici nulli, oppure operando una permutazione di indici.

Dati $p_1, \cdots, p_s \in \mathbb{N}$, il generatore di Astron $\mathcal{A}_{p_1,\cdots,p_s}$ è definito come segue:

$$\mathcal{A}_{p_1,\cdots,p_s} = \left\{ \begin{array}{lll} \mathcal{A}_{p_1+p_2-2,\cdots,p_s} & \text{con} & \begin{array}{l} s \geq 2 \\ p_1 + p_2 \geq 2 \end{array} \\ & & \\ \mathcal{A}_{p_1,\cdots,p_{k-1},a_k} \oplus \mathcal{A}_{p_{k+1},\cdots,p_s,b_k} & \text{con} & \begin{array}{l} p_k \geq 2 \\ a_k + b_k = p_k - 2 \end{array} \end{array} \right\}$$

2.2 Astron, visto da dentro

La definizione combinatoria di Astron appena fornita ci consente di analizzare il gioco applicando tutte le tecniche sviluppate in precedenza. A questo scopo si rivelerà particolarmente utile lo studio di alcune posizioni particolari. D'ora in poi chiameremo $\mathcal{A}$ l'insieme generato dai giochi $\mathcal{A}_{p_1,\cdots,p_s}$ con qualsiasi numero di pedici, mentre chiameremo $\mathcal{A}^n$ l'insieme generato dai giochi $\mathcal{A}_{p_1,\cdots,p_s}$ con un numero di indici $s \leq n$.

2.2.1 Una stella

Una scelta possibile è quella di iniziare analizzando $\mathcal{A}^1$. In questo caso particolarissimo le mosse di congiunzione non possono essere eseguite perché non ci sono mai due stelle da congiungere; le mosse di disgiunzione si riducono soltanto a scegliere come spezzare l'unica stella, dato che per il resto non c'è altro da partizionare. Andando ad esplicitare la Definizione 2.1.3 nel caso di un pedice solo, si ritrova la definizione del gioco Dawson's Kayles fornita nell'esempio 1.1.25. Ne segue che $\mathcal{A}^1$ è ottale (di codice 0.07) e che per ogni n risulta $\mathcal{A}_n = \mathcal{D}_n$, gioco di cui abbiamo già fornito un'analisi completa grazie al Teorema 1.2.6.

2.2.2 Due stelle

Risolto $\mathcal{A}^1$, potrebbe venire in mente di vedere cosa succede nel caso di $\mathcal{A}^2$, per poi cercare eventualmente di capire i meccanismi nel caso generale $\mathcal{A}^n$. Chiaramente $\mathcal{A}^1 \subseteq \mathcal{A}^2$, quindi l'analisi precedentemente eseguita risponde già a una parte del problema. Viene inoltre da chiedersi se la soluzione trovata per $\mathcal{A}^1$ sia estendibile ad altri casi, per esempio per risolvere $\mathcal{A}^2$.

Innanzitutto, andiamo a calcolare alcuni nimeri di $\mathcal{A}^2$. L'algoritmo di calcolo adottato è un algoritmo ricorsivo basato sulla funzione $\mathscr{G}$ (vedi Definizione 1.1.19)e sul Corollario 1.1.23, tenendo conto che per calcolare $\mathcal{A}_n$ abbiamo già un dizionario completo fornito dalla Tabella 1.1. Il risultato del calcolo è mostrato in forma grafica nella Figura 2.7.

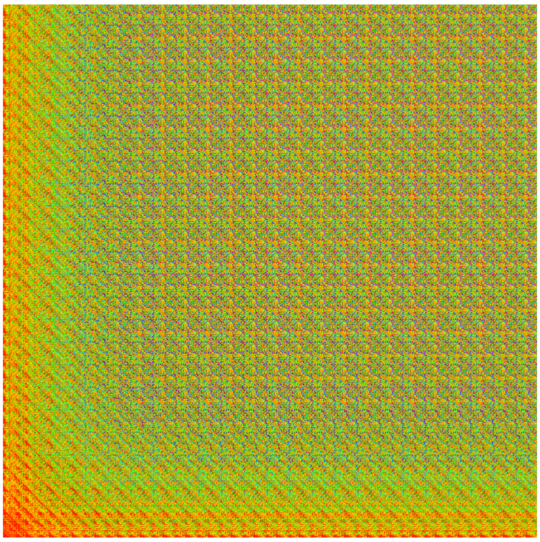


Figura 2.7: Nimeri di $\mathcal{A}_{n,m}$ con $800 \geq n, m \geq 0$. I colori sono ordinati secondo l'arcobaleno e indicano la grandezza approssimativa dei nimeri, dove il rosso vale 0 crescendo fino al violetto che vale circa 50.

Osservando il risultato del calcolo dei nimeri di $\mathcal{A}^2$ e confrontandolo con i nimeri di $\mathcal{A}^1$ (Tabella 1.1), non si nota alcuna relazione algebrica apparente. L'unica cosa che sembra essere comune ai due giochi è la presenza di una periodicità, come si può vedere nell'angolo in alto a destra della Figura 2.7. Tale periodicità è stata dimostrata nel caso di $\mathcal{A}^1$ grazie al Teorema 1.2.6; purtroppo $\mathcal{A}^2$ non è ottale, quindi non possiamo procedere come nel caso precedente.

Con il senno di poi, un cambiamento così drastico tra la struttura di $\mathcal{A}^1$ e $\mathcal{A}^2$ c'era da aspettarselo, visto che in $\mathcal{A}^2$ compaiono delle nuove mosse non presenti in $\mathcal{A}^1$: le mosse di congiunzione. Senza mosse di congiunzione infatti, Astron si ridurrebbe esattamente a Dawson's Kayles e si avrebbe

$\mathcal{A}_{p_1,\cdots,p_s} = \mathcal{D}_{p_1} \oplus \cdots \oplus \mathcal{D}_{p_s}$. Si può dire, in effetti, che la vera analisi di $\mathcal{A}$ inizia dove $\mathcal{A}^1$ finisce.

2.2.3 Periodicità con due stelle

Il fatto che $\mathcal{A}^2$ non sia ottale pone il problema di come procedere nell'analisi, nello specifico dimostrare che è periodico (come suggerito del resto dalla Figura 2.7).

In questa tesi abbiamo sviluppato una nuova versione del teorema di periodicità di Guy-Smith (Teorema 1.2.6) applicabile a una classe di giochi più vasta dei giochi ottali, la quale comprende e generalizza la definizione data per Astron. Presenteremo qui solamente il risultato nel caso di Astron; per la trattazione generale, si veda l'appendice a questo capitolo.

Innanzitutto, dato che in $\mathcal{A}^2$ vi sono generatori a due indici, bisogna chiarire cosa si intende per periodicità.

Definizione 2.2.1. $\mathcal{A}^d$ si dice periodico se esistono $\pi, \tau \in \mathbb{N}$ tali che, per ogni generatore di $\mathcal{A}^d$, si ha:

$$p_i > \pi \Rightarrow \mathscr{G}(\mathcal{A}_{p_1,\cdots,p_i,\cdots,p_s}) = \mathscr{G}(\mathcal{A}_{p_1,\cdots,p_i+\tau,\cdots,p_s})$$

Preso τ più piccolo possibile e preso poi π più piccolo possibile, si dice che τ è il periodo di $\mathcal{A}^d$ e π è il suo preperiodo.

Detto ciò, vediamo perché $\mathcal{A}^2$ è periodico.

Lemma 2.2.2. *Supponiamo che esista n_0 tale che:*

$$\mathscr{G}(\mathcal{A}_{p,q}) = \mathscr{G}(\mathcal{A}_{p+\tau,q}) \text{ per ogni } q \text{ tale che } 52 + \tau < n_0 \leq q < 2n_0 + \tau + 2$$

Allora $\mathcal{A}^2$ è τ-periodico.

Dimostrazione. L'idea è di dimostrare il teorema sui generatori, confrontando le mosse disponibili da un generatore campione e lo stesso generatore con un indice incrementato di τ, cercando di dimostrare che sono equivalenti (cioè che hanno lo stesso nimero).

Congiunzione. Una mossa di congiunzione a partire da $\mathcal{A}_{p+\tau,q}$ fornisce un elemento della forma $\mathcal{A}_{p+q+\tau-2}$. Supponiamo che $p > 54 + \tau$, allora $p + q + \tau - 2 > 52 + \tau$ e quindi entrambe le posizioni sono nella zona periodica di $\mathcal{A}^1$; ne segue allora che posso abbassare $p + q + \tau - 2$ di τ ed ottenere l'equivalenza cercata con le mosse di congiunzione di $\mathcal{A}_{p,q}$.

Disgiunzione. Una mossa di disgiunzione a partire da $\mathcal{A}_{p+\tau,q}$ può essere di tre tipi: annulla un indice, decrementa un indice, oppure spezza un elemento e partiziona la restante sequenza di indici in due sottosequenze (vedi 1.2.1). Decrementare un indice però è analogo a partizionare in maniera banale gli indici e scegliere come seconda componente della somma $\mathcal{A}_0$, questo caso non esplicitamente menzionato è compreso quindi nel caso delle partizioni banali.

Disgiunzione, annullamento di un indice. Supponendo $p > 54$, non è possibile annullare l'indice $p + \tau$ perché $p + \tau > p > 54 > 2$ e 2 è il massimo decremento che si può applicare ad un indice. Ne consegue quindi che l'unica mossa di disgiunzione che annulla un indice annulla q, ottenendo $\mathcal{A}_{p+\tau}$; ma il numero di indici è diminuito e $p + \tau > 52 + \tau$, quindi siamo nella zona di periodicità di $\mathcal{A}^1$, ne segue quindi che la posizione sopra scritta risulta equivalente per periodicità a $\mathcal{A}_p$, che è l'unica mossa di disgiunzione che annulla un indice partendo da $\mathcal{A}_{p,q}$.

Disgiunzione, spezzamento. Supponiamo innanzitutto che valga la stima $54 < n_0 \leq p < 2n_0 + \tau + 2$. La periodicità è verificata fino a $2n_0 + \tau + 2 - 1$, vediamo di verificarla da $2n_0 + \tau + 2$ in poi: per fare ciò confrontiamo le mosse disgiunzione di $\mathcal{A}_{p+\tau,q}$ con quelle di $\mathcal{A}_{p,q}$.

Se l'indice spezzato è $p + \tau$, si pùo ragionare come nel Teorema 1.2.6 osservando che una delle due componenti p_1, p_2 in cui viene spezzato $p + \tau$ deve essere più grande della soglia di periodicità di $\mathcal{A}^1$.

Alla luce di tutto quello che abbiamo dimostrato fin'ora, $\mathcal{A}_{p+\tau,q}$ è equivalente a $\mathcal{A}_{p,q}$ se le relative mosse di disgiunzione che spezzano la q sono equivalenti, cioè se vale la seguente equivalenza fra posizioni generiche:

$$\mathcal{A}_{p+\tau,q_1} \oplus \mathcal{A}_{q_2} \sim \mathcal{A}_{p,q_1} \oplus \mathcal{A}_{q_2}$$

che per cancellazione è equivalente a dire

$$\mathcal{A}_{p+\tau,q_1} \sim \mathcal{A}_{p,q_1}$$

Quella che abbiamo appena enunciato è la base per fare un'induzione sulle posizioni di $\mathcal{A}^2$, su cui la relazione ($\mathcal{A}_{p_1,q_1} > \mathcal{A}_{p_2,q_2} \Leftrightarrow \mathcal{A}_{p_2,q_2}$ è una componente di una opportuna mossa di disgiunzione che spezza q_1 a partire da $\mathcal{A}_{p_1,q_1}$) è una relazione ben fondata. L'idea che sta sotto questo ragionamento è quella di procedere a ritroso fino a che non sia più possibile trovare mosse di disgiunzione con partizione banale senza spezzare $q + \tau$ oppure finire in $\mathcal{A}^1$. Quando si capita in uno di quei due casi, si applica rispettivamente il ragionamento della dimostrazione del Teorema 1.2.6 oppure semplicemente la periodicità per $\mathcal{A}^1$. Conclusa questa induzione, segue anche l'induzione su p.

□

Teorema 2.2.3 (Soluzione di $\mathcal{A}^2$)**.** *$\mathcal{A}^2$ è periodico con periodo 34 e preperiodo 583.*

Dimostrazione. Nel calcolo mostrato in Figura 2.7 l'ultimo valore "irregolare" presente è il 583, dopodiche compare una periodicità di periodo 34. Con un calcolo piuttosto laborioso, si può verificare che tale periodicità si mantiene fino a $2 \cdot 583 + 34 + 2 = 1202$, verificando così le ipotesi del lemma 2.2.2. □

2.3 Appendice al Capitolo 2

2.3.1 Generalizzazione del teorema di periodicità

Come accennato, in questa tesi presentiamo un analogo del teorema di periodicità di Guy-Smith (Teorema 1.2.6) applicabile a una classe di giochi più vasta dei giochi ottali: la classe delle estensioni multiadditive di giochi ottali.

La motivazione originale alla base della definizione di estensione multiadditiva è stata quella di tentare di estendere la definizione di gioco ottale in modo da comprendere anche gli $\mathcal{A}^k$ senza però sacrificare la possibilità di fornire un opportuno teorema di periodicità; la generalizzazione che ne è conseguentemente scaturita consente poi di risolvere altri giochi rimasti irrisolti, presentati in [4] (ad esempio, il gioco *Stars and stripes*).

L'estensione multiadditiva di un gioco ottale è il gioco generato dai *generatori ottali multiadditivi*, che sono giochi indicizzati non da un singolo numero (come nel caso ottale) ma da una sequenza finita di numeri naturali. Tali generatori sono collegati fra loro da relazioni simili a quelle dei generatori dei giochi ottali (vedi Definizione 1.2.1). Le estensioni additive dei giochi ottali hanno due tipi di mosse, analoghe alle mosse di congiunzione e di disgiunzione per Astron, ed hanno un codice per tipo che regola precisamente sotto quali condizioni possano essere eseguite certe mosse.

Il codice ottale regola sotto quali condizioni si possa eliminare un indice, abbassare un indice senza annullarlo, oppure spezzare un indice in due sottoindici e partizionare il resto della sequenza in due sottosequenze, una per ogni sottoindice. È evidente come questa definizione sia un'estensione (nel caso a più indici) della Definizione 1.2.3. Le mosse di questo tipo vengono chiamate, seguendo la notazione di Astron, mosse di disgiunzione.

Il codice multiadditivo regola invece sotto quali condizioni si possano sommare più indici, indicando quanti indici si possano sommare e di quanto vada modificata la somma. Ad esempio, nel caso di Astron si possono sommare due indici e sottrarre 2 alla somma, che come visto in precedenza corrisponde a collegare due stelle. Come nel caso del codice ottale, per sapere quali mosse sono consentite e quali no bisogna guardare la scrittura binaria delle cifre del codice multiadditivo. Le mosse di questo tipo vengono chiamate, seguendo di nuovo la notazione di Astron, mosse di congiunzione.

Un'estensione multiadditiva non è niente di più di quello che abbiamo detto, comunque sia tutto quello che abbiamo presentato è scritto in maniera rigorosa, ma forse poco maneggevole e intelligibile, nella Definizione 2.3.1.

Definizione 2.3.1. A partire da un gioco ottale con codice ottale $0.d_1d_2d_3\ldots$ definiamo la sua estensione multiadditiva con codice multiadditivo $c_0.c_1c_2c_3\ldots$. Consideriamo innanzitutto la rappresentazione binaria di ogni d_k e di ogni c_k:

$$d_k = \delta_{k,0} + 2\delta_{k,1} + 4\delta_{k,2} \text{ dove } \delta_{k,i} \in \{0,1\}$$
$$c_k = 4\gamma_{k,2} + 8\gamma_{k,3} + \cdots + 2^n\gamma_{k,n} \text{ dove } \gamma_{k,i} \in \{0,1\}.$$

Definiamo quindi l'estensione multiadditiva di codice c_n del gioco ottale di codice d_n come l'insieme $\mathcal{H}$ generato tramite somma dai giochi $\mathcal{H}_{p_1,\cdots,p_s}$ definiti nelle formule seguenti.

In questa definizione, due giochi $\mathcal{H}_{p_1,\cdots,p_s}$ e $\mathcal{H}_{q_1,\cdots,q_t}$ sono considerati equivalenti se si ottengono l'uno dall'altro rimuovendo o aggiungendo indici nulli, oppure operando una permutazione di indici.

$$\mathcal{H}_{p_1,\cdots,p_s} = \left\{ \begin{array}{lll} \mathcal{H}_{c,p_{n+1},\cdots,p_s} & \text{se} & \begin{array}{l} \gamma_{k,n} = 1 \\ s \geq n \\ 0 \leq c = -k + \sum_{q=1}^{n} p_q \end{array} \\ \\ \mathcal{H}_{p_2,\cdots,p_s} & \text{se} & \begin{array}{l} \delta_{k,0} = 1 \\ p_1 = k \end{array} \\ \\ \mathcal{H}_{c,p_2,\cdots,p_s} & \text{se} & \begin{array}{l} \delta_{k,1} = 1 \\ p_1 > k \\ c = p_1 - k \end{array} \\ \\ \mathcal{H}_{p_1,\cdots,p_{e-1},a_j} \oplus \mathcal{H}_{b_e,p_{e+1},\cdots,p_s} & \text{se} & \begin{array}{l} \delta_{k,2} = 1 \\ s \geq e \geq 1 \\ p_e \geq 2 \\ a_e + b_e = p_e - k \end{array} \end{array} \right\}$$

Osservazione 2.3.2. Si noti che le mosse esplicitate nella definizione possono essere composte liberamente con permutazioni di indici, ottenendo così una grande varietà di mosse.

Esempio 2.3.3. Il gioco $\mathcal{A}$ è l'estensione multiadditiva di codice 0.04 del gioco ottale 0.07.

Diamo solamente un altro paio di definizioni, volte ad evidenziare gli elementi centrali del teorema di periodicità per le estensioni multiadditive di giochi ottali.

Definizione 2.3.4 (Bulbi)**.** Data $\mathcal{H}$ un'estensione multiadditiva di un gioco ottale si chiama *bulbo* di dimensione d l'insieme $\mathcal{H}^d$ generato tramite somma dai giochi $\mathcal{H}_{p_1,\cdots,p_s}$ con $s \leq d$.

Osservazione 2.3.5. Si noti che tutti i bulbi $\mathcal{H}^d$ sono transitivi (come del resto anche $\mathcal{H}$) e che quindi nell'analisi (ricorsiva) di $\mathcal{H}^d$ non compaiono giochi che non appartengano già ad $\mathcal{H}^d$; vedremo in seguito come questa proprietà sia determinante nell'analisi di $\mathcal{H}$.

Definizione 2.3.6. Un bulbo $\mathcal{H}^d$ di un'estensione multiadditiva di un gioco ottale si dice τ-periodico se esistono $\pi, \tau \in \mathbb{N}$ tali che, per ogni generatore di $\mathcal{H}^d$, si ha:

$$p_i > \pi \Rightarrow \mathcal{G}(\mathcal{H}_{p_1,\cdots,p_i,\cdots,p_s}) = \mathcal{G}(\mathcal{H}_{p_1,\cdots,p_i+\tau,\cdots,p_s})$$

Lo spirito del teorema che segue è analogo a quello del Teorema 1.2.6: fornire una condizione, verificabile pserimentalmente, che possa garantire la periodicità; stavolta non per i giochi ottali, ma per la più vasta classe delle estensioni multiadditive di giochi ottali.

Teorema 2.3.7 (Teorema di periodicità per le estensioni multiadditive)**.** *Data un'estensione multiadditiva di un gioco ottale $\mathcal{H}$ con codice ottale e codice multiadditivo definitivamente nulli, chiamiamo k il massimo fra la posizione dell'ultima cifra non nulla nel codice ottale e nel codice multiadditivo. Supponiamo che $\mathcal{H}^1, \cdots, \mathcal{H}^i, \cdots, \mathcal{H}^s$ siano rispettivamente i-periodici di preperiodo π_i e periodo τ, chiamiamo π il massimo di tali preperiodi; supponiamo inoltre che esista n_0 tale che:*

$$\mathcal{G}(\mathcal{H}_{q,p_1,\cdots,p_s}) = \mathcal{G}(\mathcal{H}_{q+\tau,p_1,\cdots,p_s}) \text{ per ogni } q \text{ tale che } \pi+k+\tau < n_0 \leq q < 2n_0+\tau+k$$

Allora anche $\mathcal{H}^{s+1}$ è τ-periodico.

Dimostrazione. L'idea è di dimostrare il teorema sui generatori, confrontando le mosse disponibili da un gioco campione e lo stesso gioco con un indice incrementato di τ e cercando di dimostrare che sono equivalenti (cioè hanno lo stesso nimero). Si noti che la definizione di estensione multiadditiva di gioco ottale, analogamente alla definizione di $\mathcal{A}$, consente di riordinare liberamente gli indici.

Congiunzione. Una mossa di congiunzione a partire da $\mathcal{H}_{q+\tau,p_1,\cdots,p_s}$ fornisce un elemento che può essere di due tipi: il primo è $\mathcal{H}_{c,q+\tau,p_{i_1},\cdots,p_{i_{s'}}}$ nel caso in cui $q+\tau$ non sia stato sommato, il secondo è del tipo $\mathcal{H}_{c+\tau,p_{i_1},\cdots,p_{i_{s'}}}$ nel caso invece in cui sia stato sommato. Supponiamo che $q > \pi + k + \tau$, allora $c > \pi + \tau$ e quindi entrambe le posizioni sono nella zona periodica di un opportuno bulbo di dimensione inferiore (il numero di indici è diminuito); ne segue allora che posso abbassare q o c di τ ed ottenere l'equivalenza cercata con le mosse di congiunzione di $\mathcal{H}_{q,p_1,\cdots,p_s}$.

Disgiunzione. Una mossa di disgiunzione a partire da $\mathcal{H}_{q+\tau,p_1,\cdots,p_s}$ può essere di tre tipi: annulla un indice, decrementa un indice, oppure spezza un elemento e partiziona la restante sequenza di indici in due sottosequenze (vedi 1.2.1). Decrementare un indice però è analogo a partizionare in maniera banale gli indici e scegliere come seconda componente della somma $\mathcal{H}_0$, questo caso non esplicitamente menzionato è compreso quindi nel caso delle partizioni banali.

Disgiunzione, annullamento di un indice. Supponendo che $q > \pi + k + \tau$, non è possibile annullare l'indice $q+\tau$ perché $q+\tau > q > \pi + k > k$ e k è il massimo decremento che si può applicare ad un indice. Ne consegue quindi che tutte le mosse di disgiunzione che annullano un indice annullano un certo p_i ottenendo $\mathcal{H}_{q+\tau,p_1,\cdots,p_{i-1},p_{i+1},\cdots,p_s}$; ma il numero di indici è diminuito e $q > \pi+k+\tau > k$, quindi siamo nella zona di periodicità di un bulbo di dimensione inferiore, ne segue quindi che la posizione sopra scritta risulta equivalente per periodicità a $\mathcal{H}_{q,p_1,\cdots,p_{i-1},p_{i+1},\cdots,p_s}$, che è una generica mossa di disgiunzione che annulla un indice partendo da $\mathcal{H}_{q,p_1,\cdots,p_s}$.

Disgiunzione, partizione non banale degli indici. Supponiamo innanzitutto che valga la stima $\pi + k + \tau < n_0 \leq q < 2n_0 + \tau + k$. La periodicità è verificata fino a $2n_0 + \tau + k - 1$, vediamo di verificarla da $2n_0 + \tau + k$ in poi. Per fare ciò confrontiamo le mosse disgiunzione di $\mathcal{H}_{q+\tau,p_1,\cdots,p_s}$ con quelle di $\mathcal{H}_{q,p_1,\cdots,p_s}$.

Se la mossa di disgiunzione partiziona gli indici in maniera non banale, entrambe le componenti della somma di giochi risultante appartengono ad un bulbo di dimensione inferiore; nel caso in cui sia stato spezzato un indice tra $p_1, \cdots, p_s$ abbiamo una posizione del tipo

$$\mathcal{H}_{q+\tau,p_{i_1},\cdots,p_{i_{s'}}} \oplus \mathcal{H}_{p_{j_1},\cdots,p_{j_{s''}}}$$

che risulta equivalente a

$$\mathcal{H}_{q,p_{i_1},\cdots,p_{i_{s'}}} \oplus \mathcal{H}_{p_{j_1},\cdots,p_{j_{s''}}}$$

dato che $q > \pi + k + \tau$. Nel caso invece in cui sia stato spezzato $q + \tau$ si può concludere ragionando come nella dimostrazione del Teorema 1.2.6, che la partizione degli indici sia banale o meno: infatti uno degli indici q_1, q_2 in cui viene spezzato $q + \tau$ sarà superiore alla soglia di periodicità, e vi si potrà applicare l'ipotesi induttiva di periodicità.

Se la mossa di disgiunzione spezza un indice tra $p_1, \cdots, p_s$ e partiziona i restanti indici in maniera non banale (cioè una delle due parti è vuota), il caso è un po' più complicato. Alla luce di tutto quello che abbiamo dimostrato fin'ora, $\mathcal{H}_{q+\tau,p_1,\cdots,p_s}$ è equivalente a $\mathcal{H}_{q+\tau,p_1,\cdots,p_s}$ se le relative mosse di disgiunzione che spezzano gli indici non incrementati di τ e partizionano banalmente gli altri indici sono uguali, cioè se vale la seguente uguaglianza fra posizioni generiche:

$$\mathcal{H}_{q+\tau,p_{i_1},\cdots,p_{i_{s'}}} \oplus \mathcal{H}_{p_{s''}} \sim \mathcal{H}_{q,p_{i_1},\cdots,p_{i_{s'}}} \oplus \mathcal{H}_{p_{s''}}$$

che per cancellazione è equivalente a dire

$$\mathcal{H}_{q+\tau,p_{i_1},\cdots,p_{i_{s'}}} \sim \mathcal{H}_{q,p_{i_1},\cdots,p_{i_{s'}}}.$$

Quella che abbiamo appena enunciato è la base per fare un'induzione sulle posizioni con $s+1$ indici, su cui la relazione ($\mathcal{F} \succ \mathcal{G} \Leftrightarrow \mathcal{G}$ è una componente di una opportuna mossa di disgiunzione con partizione banale a partire da $\mathcal{F}$) è una relazione ben fondata su $\mathcal{H}$. L'idea che sta sotto questo ragionamento è quella di procedere a ritroso fino a che non è più possibile trovare mosse di disgiunzione con partizione banale senza spezzare $q + \tau$ oppure calare di dimensione. Quando si capita in uno di quei due casi, si applica rispettivamente il ragionamento della dimostrazione del Teorema 1.2.6 oppure semplicemente la periodicità per bulbi di dimensione inferiore.

Conclusa questa induzione, segue anche l'induzione su q.

□

Bibliografia

[1] Louis Victor Allis. *Searching for solutions in games and artificial intelligence*. PhD thesis, 1994.

[2] Elwyn Berlekamp, John Horton Conway, and Richard K. Guy. *Winning Ways for Your Mathematical Plays, volume 1*. A K Peters, Ltd., second edition, 2001.

[3] Elwyn Berlekamp, John Horton Conway, and Richard K. Guy. *Winning Ways for Your Mathematical Plays, volume 2*. A K Peters, Ltd., second edition, 2003.

[4] Elwyn Berlekamp, John Horton Conway, and Richard K. Guy. *Winning Ways for Your Mathematical Plays, volume 3*. A K Peters, Ltd., second edition, 2003.

[5] C.L. Bouton. Nim, a game with a complete mathematical theory. *The Annals of Mathematics*, 3(1/4):35–39, 1901.

[6] Grant Cairns and Nhan Bao Ho. Impartial games as acyclic digraphs. pages 1–26, 2009.

[7] John Horton Conway. *On Numbers and Games*. Academic press Inc., London, 1979.

[8] Achim Flammenkamp. Sprague-Grundy values of octal games. `http://wwwhomes.uni-bielefeld.de/achim/octal.html`, 2006.

[9] David Gale. The game of Hex and the Brouwer fixed-point theorem. *The American Mathematical Monthly*, 86(10):818–827, 1979.

[10] Martin Gardner. The Game of Hex. *The Scientific American Book of Mathematical Puzzles and Diversions*, pages 73–83, 1959.

[11] P.M. Grundy. Mathematics and games. *Eureka*, 2(6), 1939.

[12] Richard K. Guy and Richard J. Nowakowski. Unsolved problems in combinatorial games. 2008.

[13] Richard K. Guy and C. A. B. Smith. The G-values of various games. In *Proc. Cambridge Philos. Soc*, pages 514–526. Cambridge Univ Press, 1956.

[14] Julien Lemoine and Simon Viennot. Computer analysis of Sprouts with nimbers. *Arxiv preprint arXiv:1008.2320*, pages 1–17, 2010.

[15] Julien Lemoine and Simon Viennot. Nimbers are inevitable. *Arxiv preprint arXiv:1011.5841*, pages 1–12, 2010.

[16] Hendrik Willem Lenstra. Nim multiplication. *Séminaire de Théorie des Nombres*, 1977.

[17] Hendrik Willem Lenstra. On the algebraic closure of two. *Indagationes Mathematicae (Proceedings)*, 80(5):389–396, 1977.

[18] Thane Plambeck. Taming the wild in impartial combinatorial games. *INTEGERS: Electronic Journal of Combinatorial Number Theory*, 5(1):1–36, 2005.

[19] Thane Plambeck and Aaron Siegel. Misère quotients for impartial games. *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, pages 1–33, 2008.

[20] Dierk Schleicher and Michael Stoll. An introduction to Conway's games and numbers. *preprint*, pages 1–30, 2005.

[21] R. Sprague. Über mathematische kampfspiele. *Tôhoku Math. J*, 41:438–444, 1935.

[22] R. Sprague. Über zwei abarten von Nim. *Tôhoku Math. J*, 43:351–359, 1937.

[23] H.J. Van den Herik, J.W.H.M. Uiterwijk, and J. Van Rijswijck. Games solved: Now and in the future. *Artificial Intelligence*, 134(1-2):277–311, 2002.

Ringraziamenti

Innanzitutto, se sono riuscito a completare questa tesi lo devo a più di una persona.

Lo devo ad Alessandro Berarducci, per avermi accettato senza fare troppe domande, per avermi dato fiducia e per avermi seguito quando ne avevo bisogno, per avermi proposto la tesi più entusiasmante che potessi immaginare.

Lo devo a Federica Spoto, per una serie di motivi meravigliosi che non possono essere contenuti nel margine troppo stretto di questa pagina.

Lo devo ad Andrea Cardaci, per aver fatto da zio a questa tesi e per essermi stato vicino nelle difficoltà che ho incontrato strada facendo.

Lo devo a Marcello Mamino, per avermi messo sulla buona strada nei primi passi di questo viaggio: chi ben comincia è a metà dell'opera.

Inoltre devo questa tesi a tutti quelli che hanno mostrato un genuino interesse in ciò che stavo facendo, perché ogni volta che ho parlato con ognuno di loro ho ricevuto quella spinta in più che mi serviva per andare più avanti, più a fondo. Parlando con loro ho capito molto: perché la strada che scelsi è ancora giusta, perché la curiosità è preziosa, perché un uomo dovrebbe continuare a porsi domande come faceva da bambino.

Tra queste persone ringrazio in particolare: Alessio Muscillo, Andrea Rovai, Antonio e Stefano Aiello, Felice Iandoli, Francesca Cecchi, Giovanni Gaiffi, Hjalmar Basile, Lorenzo Gentili, Maurizio Monge, Paolo Manca, Valentina Esposito.

Infine devo questa tesi a tutti quelli che mi hanno aiutato a percorrere tutta la strada che mi sono lasciato alle spalle, facendomi giungere dove sono giunto oggi.

Tra queste persone ringrazio in particolar modo i miei genitori Ennio e Lina, senza i quali non sarei quello che sono; ringrazio Picci, per tutta la compagnia che mi ha fatto finché è rimasta al mio fianco; ringrazio il Bronco, Mario, Ugo e Tommaso per avermi regalato innumerevoli serate spensierate anche nei periodi più bui. Così facendo potrei ringraziarne molti altri ancora, esaurendo tutto lo spazio senza comunque riuscire a ringraziarli tutti.

Se stai leggendo questa pagina probabilmente fai già parte dei ringraziamenti della mia vita, altrimenti credo che ne farai presto parte anche tu.

In piena soddisfazione,
LORENZO *Pisa, 30 settembre 2011*