



Università degli Studi di Pisa

Facoltà di Ingegneria

CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA AEROSPAZIALE

Tesi di Laurea Specialistica

*SVILUPPO DI UN PROPAGATORE ORBITALE PER STUDI DI
COLLISIONE E TEMPO DI VITA IN ORBITA PER IL LANCIATORE VEGA.*

Candidata:

Silvia Sanvido

Relatore:

Prof. Mariano Andrenucci

ELV Tutors:

Ing. François Battie

Ing. Tommaso Fossati

ANNO ACCADEMICO 2010/2011

INDICE

1.INTRODUZIONE.

- 1.1. Una collaborazione tra Università degli studi di Pisa ed ELV. 1
- 1.2. “*Space debris mitigation*”: l’impegno attuale per le generazioni future. 2
- 1.3. Obiettivi e applicabilità. 5

2.“SPACE DEBRIS REGULATIONS”.

- 2.1. Panoramica sul problema della proliferazione dei “detriti spaziali”. 6
- 2.2. Definizioni e normative vigenti . 9
- 2.3. Impatto su VEGA. 13

3.VEGA LV.

- 3.1. Il progetto VEGA. 15
- 3.2. Il lanciatore Vega. 17
 - 3.2.1. Configurazione del lanciatore VEGA 18
 - 3.2.2. Il primo stadio: P80 FW. 20
 - 3.2.3. Il secondo stadio : Z23. 20
 - 3.2.4. Il terzo stadio: Z9. 21
 - 3.2.5. Il quarto stadio : AVUM. 21
 - 3.2.6. P/L adapter. 23
- 3.3. Missione LARES, volo di qualifica per VEGA. 25
- 3.4. Missioni Future. 28

4.DINAMICA ORBITALE.

4.1.	Sistemi di riferimento.	30
4.1.1	Il sistema di riferimento geocentrico equatoriale IJK(inerziale).	30
4.1.2	Sistema di coordinate Latitudine-Longitudine.	32
4.1.3	Sistema di riferimento perifocale.	34
4.1.4	Sistema di riferimento RTN.	34
4.2.	Il problema Kepleriano dei due corpi.	35
4.3.	Parametri orbitali.	40
4.3.1.	Parametri orbitali classici per la definizione dell'orientazione dell'orbita.	42
4.3.2.	Parametri orbitali classici per la definizione della forma dell'orbita.	43
4.3.3.	Definizione della posizione del corpo sull'orbita al variare del tempo	43
4.3.4.	La dipendenza dei parametri orbitali classici dal tempo.	
4.3.5.	Calcolo degli elementi orbitali sulla base di r e v .	43
4.4	Moto del satellite in presenza di effetti perturbativi.	45
4.4.1	Perturbazioni considerate.	46
4.4.2	Asimmetrie del campo gravitazionale Terrestre.	47
4.4.3	Resistenza aerodinamica.	57
4.4.4	Luni-solar effect.	61
4.4.5	Pressione solare.	63

5.INTEGRATORE.

5.1	Scelta del metodo integrativo.	66
5.2	Il metodo numerico Runge-Kutta.	66

5.3	Realizzazione del RK4 e Scelta del codice.	68
5.3.1	Problema differenziale : il problema dei due corpi kepleriano.	69
5.3.2	Cross-check RK4 Matlab – RK4 Fortran: validazione dati.	71
5.3.3	Cross-check RK4 Matlab – RK4 Fortran: scelta del codice.	73
5.3.4	Analisi di sensibilità dei tempi di calcolo e della precisione di calcolo al variare del passo di integrazione.	74
5.4	Realizzazione del RK7 a passo fisso.	78
5.5	Realizzazione del RK7 a passo variabile: RK7/8.	80
5.5.1	Il metodo Runge-Kutta a passo variabile.	81
5.5.2	Controllo dell'iterazione nel calcolo del passo h.	83
5.5.3	Intervallo di valori per il passo di integrazione.	84
5.5.4	Fattore moltiplicativo g per il passo di integrazione.	84
5.5.5	Cross-check tra RK7 ed RK7/8.	85
5.6	L'integratore nella sua forma definitiva.	90
5.6.1	Input integratore.	90
5.6.2	Schema dell'integratore.	91
5.6.3	Conclusioni sull'integratore.	92

6.P.O.L.P.O.

6.1	“Polpo: schema logico	95
6.2	“Read&Write”.	98
6.3	Problema differenziale	99
6.4	Dati nel riferimento geocentrico.	99
6.5	Distanza.	100
6.6	Asimmetrie del campo gravitazionale terrestre.	101
6.7	Resistenza atmosferica.	104
6.8	Luni-Solar effect.	107
6.9	Radiazione solare.	108
6.10	La spinta costante.	110

6.11	Accelerazione perturbativa totale.	111
6.12	Check.	112
6.13	Parametri orbitali.	112
6.14	Dati in input.	113
6.15	Dati di output	115

7.RISULTATI

7.1.	De-orbiting: condizioni iniziali.	120
7.2.	I cross-check per il POLPO	121
7.3.	De-orbiting & in orbit collision analysis: simulazione realistica.	129
7.3.1.	Condizioni per la simulazione.	129
7.3.2.	De-orbiting : AVUM.	131
7.3.3.	Disturbi dell'ambiente spaziale : impatto su LARES.	136
7.3.4.	L'analisi di collisione in orbita.	139
7.4.	Potenzialità del POLPO da un punto di vista della ricerca.	144

8.CONCLUSIONI E SVILUPPI FUTURI.

8.1	Conclusioni.	151
8.1.1	De-orbiting Analysis per AVUM.	151
8.1.2	<i>In orbit collision analysis.</i>	153
8.2	Sviluppi futuri.	153

APPENDICI.

A		155
---	--	-----

BIBLIOGRAFIA		167
---------------------	--	-----

ACRONIMI

ASI	Agenzia Spaziale Italiana
AU	Astronomic Unit
AVUM	Attitude Vernier Upper Module
CNES	Centre National d'Etudes Spatial
DAS	Debris Analysis Software
ELA	Ensemble Lancement Ariane
ELV	European Launch Vehicle
ESA	European Space Agency
GEO	Geocentric Orbit
IADC	Inter-Agency space Debris Coordination Committee
LARES	Laser Relativity Satellite
LEO	Low-Earth Orbit
LV	Launch Vehicle
LOS	Loi sur les Opérations Spatiales
MMH	MonoMethyl Hydrazine
NASA	National Aeronautics and Space Administration
NTO	Nitrogen TetrOxyde
PL or P/L	Payload(s)
RACS	Roll and Attitude Control System
STELA	Semi-analytic Tool for End of Life Analysis
VEGA	Vettore Europeo di Generazione Avanzata
VERTA	Vega Research and Technology Accompaniment
VESPA VEGA	Secondary Payload Adapter
ZLV	Zone de Lancement VEGA

CAPITOLO 1

INTRODUZIONE.

1.1. Una collaborazione tra Università degli studi di Pisa ed ELV.

Questa tesi è il risultato di una collaborazione tra l'università degli studi di Pisa e ELV s.p.a.

ELV (*European Launch Vehicle*) è un'azienda leader nella progettazione nel settore spaziale, e nasce da AVIO ed ASI (Agenzia Spaziale Italiana). ELV è stata selezionata da ESA (*European Space Agency*) per il ruolo di *prime contractor* dello sviluppo di un lanciatore europeo, chiamato VEGA. ELV è responsabile di ogni fase della progettazione di VEGA, dalla definizione delle specifiche tecniche all'integrazione del lanciatore, dal

lanciatore, dal coordinamento delle attività dei *subcontractors* che partecipano al programma alla produzione per rispettare la cadenza di voli annui dettata dal mercato.

VEGA è un programma dell' *European Space Agency* (ESA) orientato allo sviluppo di un lanciatore per satelliti di piccole e medie dimensioni. Il progetto è parte integrante della strategia adottata da ESA per offrire all'Europa l'accesso indipendente allo spazio, accoppiato al grado di flessibilità e convenienza necessari per soddisfare le esigenze dei clienti istituzionali e privati. In particolare, VEGA è stato progettato per posizionare piccoli satelliti come quelli usati da università, centri di ricerca e imprese private a fini scientifici in orbite basse, a costi contenuti

Il suo sviluppo è stato affidato ad ELV.

Durante questa collaborazione ho avuto la possibilità di vivere in prima persona le dinamiche e le problematiche con le quali ci si deve confrontare nella realtà quotidiana all'interno di un'ambiziosa azienda quale ELV.

All'interno dell'azienda sono stata coinvolta in numerose attività e il presente lavoro è frutto di una di queste; il programma POLPO (*"Propagatore Orbitale di Lungo Periodo Ottimizzato"*) per il decadimento orbitale e lo studio delle collisioni in orbita, oggetto della presente tesi, andrà ad integrarsi agli strumenti, già sviluppati in ELV, richiesti dal cliente ai fini della progettazione, che vengono utilizzati per lo studio delle fasi che compongono la missione spaziale del volo di qualifica e dei successivi voli commerciali per il lanciatore VEGA.

1.2. "Space debris mitigation": l'impegno attuale per le generazioni future.

Lo spazio.

Ultima frontiera per la scoperta, custode di misteri che da sempre hanno affascinato l'uomo; fonte d'ispirazione di menti illustri da che se ne abbia memoria fin nel contemporaneo; porta in se le risposte ad alcune tra le più grandi domande che l'umanità tutt'oggi si pone.

E' questo fascino per l'ignoto che porta all'irrinunciabile ricerca di risposte; un'esigenza che allo stesso tempo ha rappresentato la forza motrice per la concretizzazione di uno degli obiettivi più ambizioni dell'umanità : l'esplorazione dello spazio.

Un'esplorazione che, dal suo esordio, mai si è arrestata, evolvendosi nella continua ricerca di nuovi obiettivi che inevitabilmente sfociano in ulteriori domande.

Ma come spesso è successo nel corso della grande storia, l'avanzamento nell'innovazione può portare con se delle impreviste problematiche, rendendo necessario "*correggere il tiro*" per poter andare avanti.

Il problema della proliferazione dei detriti spaziali è una problematica di successiva mandata rispetto agli inizi dell'esplorazione spaziale, e per tale ragione non se ne documenta uno studio di prevenzione se non nello sviluppo delle missioni nella storia recente. In conseguenza di ciò, ad oggi si registra un numero di detriti spaziali artificiali che supera quello dei detriti naturali, essenzialmente meteore e/o comete, a tal punto che la *International Space Station* (ISS) si è trovata costretta, più volte, ad effettuare delle manovre di emergenza onde evitare collisioni con questi detriti artificiali.



Fig.1.2.1. Rappresentazione artistica di una possibile collisione tra ISS e detriti naturali.

Dai tempi in cui il problema della proliferazione dei detriti spaziali non era nemmeno oggetto da considerare nell'analisi della missione ad oggi, si documenta una vera e propria rivoluzione di pensiero nell'ambito del rispetto dell'ambiente spaziale.

Ad oggi, l'impegno delle agenzie spaziali di tutto il mondo verso questa problematica si esprime attraverso normative stringenti che governano l'immissione in orbita di satelliti e che prevedono l'obbligo di rientro per i moduli o elementi che potrebbero costituire o generare detriti spaziali.

Le normative vigenti in ambito di prevenzione della proliferazione dei detriti spaziali, nonché il contesto entro il quale le si applica, saranno l'oggetto del prossimo capitolo; per ora si vuole solamente fornire indicazioni sulle restrizioni che giustificano l'analisi svolta nella presente tesi. A tal riguardo, si ritiene necessario esprimere che le attuali normative internazionali prevedono la possibilità di rilasciare in orbita, per missioni a singolo payload, un unico modulo aggiuntivo oltre al satellite da immettere nell'orbita target; tale modulo aggiuntivo dovrà necessariamente rientrare in atmosfera entro 25 anni dal suo rilascio. Il volo di qualifica del lanciatore VEGA, in quanto missione a singolo P/L, prevede, in accordo con le normativa appena citate, il rilascio in orbita dell'Upper Stage AVUM, oltre al payload LARES.

Per quanto concerne lo studio delle collisioni in orbita tra l'Upper Stage AVUM ed il suo P/L di qualifica, LARES, non esistono delle vere e proprie normative che ne regolamentino le dinamiche, ma appare evidente che tale eventualità può portare alla completa perdita della missione per quanto riguarda le operazioni successive alla separazione del P/L principale, oltre che alla generazione di ulteriori detriti. Lo studio di tale eventualità, pertanto, oltre a giustificarsi da se, è evidentemente una necessità di prim'ordine sia per la salvaguardia dell'ambiente spaziale che per gli interessi economici di tutte le parti coinvolte nello sviluppo e realizzazione della missione spaziale LARES.



Fig.1.2.2 Rappresentazione artistica di una possibile collisione in orbita tra due satelliti.

1.3. Obiettivi e applicabilità.

Nel contesto delle attività di design della missione *VEGA LV*, questa analisi mira allo studio delle possibili collisioni in orbita tra i corpi rilasciati alla fine della missione di qualifica del lanciatore. Verrà inoltre effettuata l'analisi a lungo termine della traiettoria dell'*Upper Stage AVUM*, in modo da confermarne l'effettivo rientro in orbita terrestre in meno di 25 anni.

Dal punto di vista della ricerca, il programma di simulazione delle traiettorie sviluppato, denominato POLPO (*“Propagatore Orbitale di Lungo Periodo Ottimizzato”*), permette l'analisi della missione considerando separatamente ognuno dei disturbi dell'ambiente spaziale introdotti. In questo modo sarà possibile effettuare uno studio teorico per capire quali dei disturbi introdotti siano effettivamente influenti sulla traiettoria e quali invece possono essere trascurati.

Il programma POLPO è stato sviluppato in codice di programmazione Fortran; utilizza un'integrazione numerica realizzata tramite un integratore del tipo Runge-Kutta del 7/8 ordine a passo variabile. I tempi di calcolo per una simulazione di circa 9 anni, effettuata con un computer di prestazioni domestiche, sono 5 giorni.

CAPITOLO 2

“SPACE DEBRIS REGULATIONS”.



2.1. Panoramica sul problema della proliferazione dei “detriti spaziali”.

La collisione con detriti in orbita determina un'elevata probabilità di perdita della missione in quanto le velocità in orbita bassa sono molto elevate e di conseguenza risulta alta la quantità di moto anche delle particelle più piccole; considerato ciò, l'urto con questi detriti può portare alla distruzione del modulo spaziale. Per tale ragione, e per il crescente interesse per il rispetto e la tutela dell'ambiente spaziale, il problema della proliferazione dei detriti spaziali ha assunto un ruolo importante sia nelle fasi di design delle missioni spaziali, sia nel contesto internazionale delle normative che regolano l'immissione di velivoli nello spazio.

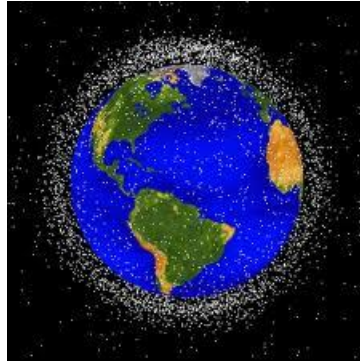


Fig.2.1.1. “Space Debris”

In questa prospettiva incentrata sul rispetto ambientale, si pone l’attenzione su tutti quegli aspetti che possono in qualche modo mitigare il problema della proliferazione dei detriti; nascono così i primi accorgimenti mirati alla “prevenzione” del problema già in fase di progetto. Infatti, ad oggi, il progetto delle missioni comprende delle fasi dedicate alla completa espulsione del propellente residuo a fine missione (fase denominata “passivazione”), per evitare che un eventuale collisione in orbita determini esplosione e generazione di ulteriori detriti. Sono, inoltre, previsti meccanismi per l’arresto di tutte le parti interne in movimento, come ruote d’inerzia, e meccanismi per il riavvolgimento di eventuali componenti a filo (*Tethers*), solitamente molto lunghi e quindi rischiosi dal punto di vista di potenziale impatto con altri satelliti. Le linee guida generali per la mitigazione dello space debris prevedono, di fatti, di non lasciare energia residua di qualsiasi natura a bordo di uno spacecraft.

Fortunatamente la prevenzione della proliferazione dei detriti spaziali è ormai parte integrante dello sviluppo delle missioni spaziali.

A tal riguardo, per i satelliti che terminano la loro vita operativa, nel rispetto della tutela dell’ambiente spaziale, sono possibili le seguenti opzioni:

1. Decadimento orbitale: è possibile solo per satelliti in orbita bassa, per i quali l’azione della forza aerodinamica, esercitata dall’atmosfera, è abbastanza forte da determinare la perdita di quota del satellite, fino a portarlo all’impatto con il suolo.
2. Immissione in orbite cimitero: per satelliti in orbita alta, per i quali l’azione della forza aerodinamica non è abbastanza rilevante da determinarne il rientro in atmosfera i tempi utili, l’opzione di immettere il satellite in orbita di fuga dalla Terra o prevenire il

rientro propulso in atmosfera risulta troppo costosa. Come possibile soluzione, si può immettere il satellite in orbite non utilizzate e che non presentano rischi di collisione con altri spacecraft, dette “orbite cimitero”.

3. Recupero dei satelliti: come ultima possibilità si può pensare di recuperare il satellite alla fine della sua vita operativa; tale opzione ovviamente risulta molto dispendiosa e quindi realizzabile solo nel caso in cui si ritenga necessario studiare il satellite dopo la fine della missione.



Fig.2.1.2. Rientro in atmosfera della navetta ATV-Jules Verne.

2.2. Definizioni e normative vigenti .

“DR-02 (spacecraft) - Spacecraft shall be designed such that objects that must be released as part of the nominal mission are retained and do not become detached from the spacecraft. In cases where this is not possible for technical or operational reasons the following requirements apply [...]:

b) mission-related objects and space debris so generated shall not remain in the LEO protected region for more than 25 years after their release; [...]”

Questa è una normativa estratta dalle direttive ESA per la mitigazione della generazione dei detriti spaziali.

Smossa anche dalle direttive ONU contenute nel “*Trattato sui principi che governano le attività degli Stati nell’esplorazione e nell’uso dello spazio esterno*”([25],[30]), che

identificano il Paese esecutore del lancio come responsabile degli eventuali danni derivanti dal lancio stesso (inclusa la produzione di detriti), nell'ultima decade l'attenzione della comunità scientifica si è focalizzata sulla prevenzione del problema della proliferazione dei detriti spaziali; a conseguenza di ciò nasce, nel 1993, l'*Inter-Agency Space Debris Coordination Committee* (IADC), che promuove lo scambio di informazioni e l'attuazione di misure cautelative comuni tra le agenzie spaziali di tutto il mondo.

I membri fondatori dell'IADC sono:

- ESA agenzia spaziale europea;
- NASA agenzia spaziale statunitense;
- JAXA agenzia di sviluppo spaziale giapponese;
- RSA agenzia spaziale russa;

E, successivamente, le agenzie spaziali di Cina (1995), Francia, Inghilterra, India (1996), Germania (1997), Italia (1998) e Ucraina (2000).

Attualmente è previsto un continuo monitoraggio dei satelliti e detriti spaziali da parte delle agenzie appartenenti all'IADS. I dati raccolti, prevalentemente ad opera della NASA (Lindon B. Johnson Space Center a Houston-Texas) e del Dipartimento della Difesa (DoD), sono contenuti nello "U.S. Satellite Catalog".

La figura 1.2 riporta l'andamento degli oggetti catalogati, dagli anni sessanta ad oggi; ogni curva si riferisce ad un diversa categoria di oggetti monitorati.

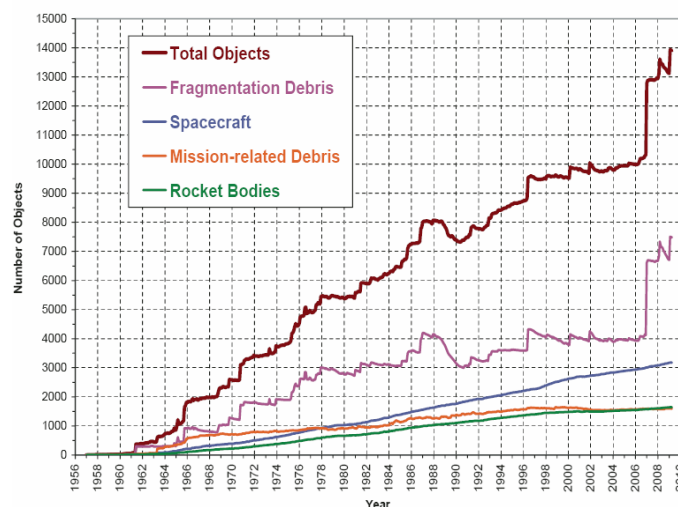


Fig 2.2.1 Dati sul monitoraggio dei detriti spaziali.

Come ulteriore riprova dell'impegno Europeo verso il problema della proliferazione dei detriti spaziali, nei giorni 19-21 marzo 2001 si è svolta la "Third European Conference on Space Debris", presso "European Space Operation Center" (ESOC) a Darmstadt in Germania, dove 250 scienziati da tutto il mondo si sono riuniti per fare il punto della situazione e illustrare gli sforzi intrapresi dalle singole agenzie spaziali nell'ambito delle politiche nazionali sulla non proliferazione dei detriti spaziali.

Ma cos'è un "detrito spaziale"? Una possibile definizione, proposta dalla sottocommissione Tecnica e Scientifica della Commissione per l'utilizzo pacifico dell'ambiente spaziale delle Nazioni Unite (*"Scientific and Technical Subcommittee of the United Nations Committee on the Peaceful uses of Outer Space"*[14]), è:

"Detriti spaziali sono tutti quegli oggetti artificiali, incluse le loro parti e frammenti, dei quali è possibile o meno risalire ai proprietari, in orbita attorno alla Terra ovvero in fase di rientro nella parte più esterna dell'atmosfera, i quali non sono controllati e per i quali non c'è nessuna possibilità che possano riassumere le proprie funzioni o assumere funzionalità di nessun genere"

Le possibili cause che portano alla generazione di un detrito spaziale sono contenute nelle seguenti voci:

- Satelliti non più operativi, ovvero non controllati dalla Terra;
- ultimi stadi di lanciatori;
- Oggetti rilasciati in conseguenza di operazioni e manovre orbitali: a tale sezione appartengono sia frammenti di propellente solido espulso dai motori in funzione, sia componenti di protezione o di fissaggio del payload, rilasciati durante le missioni, masse yo-yo per il de-spin dei satelliti etc. Non bisogna poi trascurare eventuali oggetti persi o abbandonati dagli astronauti durante le missioni all'esterno delle navicelle.
- Frammenti di vernice o di rivestimento dei satelliti e/o protezioni termiche dei motori, distaccatisi per qualunque motivo.
- Frammenti conseguenti ad esplosioni siano esse accidentali, siano esse pilotate per esperimenti scientifici e soprattutto militari
- Frammenti prodotti da collisioni di altri detriti preesistenti.

In seguito all'applicazione delle normative internazionali, le scelte progettuali devono considerare le voci sopracitate di interesse e mirare a prevenirne le conseguenze.

Le linee guida IADC utilizzano il concetto di “*zone protette*”; queste zone comprendono orbite basse (LEO) fino a 2.000 km di altitudine e una banda di quote che si estende da 200 km al di sotto fino a 200 km al di sopra della quota geostazionaria di 35.678 km, con un intervallo di latitudine di più o meno 15°. Queste “*zone protette*” sono rappresentate in Fig. 2.2.2.

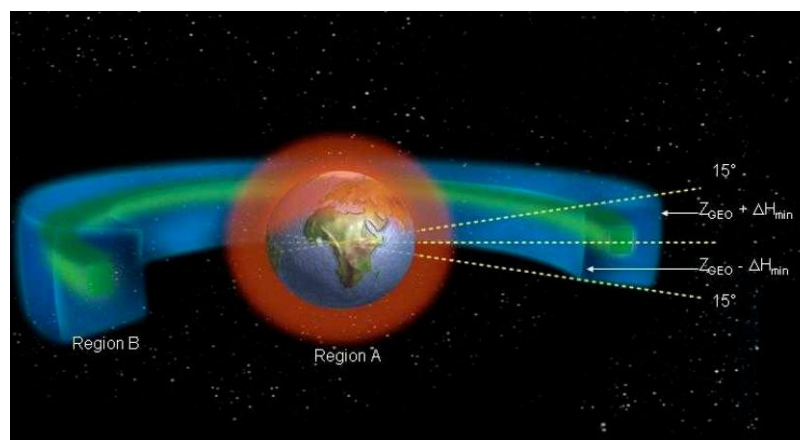


Fig 2.2.2 “*Zone protette*”.

Di seguito vengono riportate alcune delle normative ESA riguardanti la mitigazione dei detriti spaziali, applicabili alla missione LARES [25].

Prevention measures

- DR (*Design Regulations*)-01 (lanciatori):
 - a) Per lanci a singolo P/L sarà ammesso al massimo il lancio di un solo elemento addizionale del veicolo (ad esempio un “*insertion stage*”) da inserire in orbita.
 - b) Per lanci con multipli P/Ls sarà ammesso al massimo il lancio di due elementi addizionali del veicolo (ad esempio un “*insertion stage*” ed un adattatore per P/Ls) da inserire in orbita.

- DR (*Design Regulations*)-02 (spacecraft):
 - a) I veicoli spaziali devono essere progettati in modo tale che gli oggetti che dovranno essere rilasciati come parte della missione nominale non si stacchino dalla navicella. Nel caso in cui ciò non sia possibile per motivi tecnici o operativi, si applicano i seguenti requisiti[...]
 - b) gli oggetti rilasciati durante la missione o i detriti spaziali così generati non dovranno restare nella zona protetta LEO per più di 25 anni dopo il loro rilascio [...].

Space System End-of Life Measures

- DR (*Design Regulations*)-09:

Un sistema spaziale deve essere progettato in modo da poter essere definitivamente passivato al termine della sua fase di smaltimento, in conformità ai requisiti OR-04 e OR-05.

End-Of-Life Measures

- OR(*Operative Regulations*)-01

Sistemi spaziali che operano nella zona protetta LEO dovranno essere smaltiti tramite rientro in atmosfera terrestre entro 25 dalla fine della vita operativa [...]
- OR(*Operative Regulations*)-04

Gli stadi dei lanciatori dovranno soddisfare una delle seguenti condizioni:

 - a) Dovranno eseguire un rientro diretto come parte della sequenza di lancio.
 - b) Dovranno essere posti in un orbita LEO per il rientro in atmosfera entro i 25 anni.
 - c) Dovranno essere definitivamente rimossi dalle zone protette GEO e LEO, e dalle orbite interferenti con regioni di orbite operative[...]
- OR(*Operative Regulations*)-05(Passivazione)

La passivazione del sistema spaziale dovrà essere completata entro due mesi dalla fine della fase operativa. Questo include gli stadi del lanciatore che rimangono in orbita.

- OR(*Operative Regulations*)-06 (Re-entry)

Per i sistemi spaziali che vengono smaltiti tramite rientro, il *Prime Contractor* dovrà eseguire un'analisi per determinare le caratteristiche dei frammenti superstiti all'impatto al suolo, valutando il rischio totale per la popolazione in caso di rientro incontrollato[22].

- OR(*Operative Regulations*)-07 (Re-entry)

Nel caso in cui il rischio totale stimato risulti superiore a 10^{-4} , il rientro incontrollato non è permesso. Invece, il rientro controllato deve essere eseguito in modo tale da garantire che la zona di impatto al suolo si trovi sulla superficie dell'oceano[...]

A queste si aggiungono le recenti normative Francesi LOS(*Loi sur les Opérations Spatiales*)[27], alle quali il lanciatore VEGA dovrà sottostare in quanto vettore immesso nello spazio dal sito di lancio della base spaziale europea “*Centre Spatial Guyanaise*”, situata a Kourou, nella Guyana Francese.

Per quanto riguarda il futuro, la tendenza delle politiche internazionali verte a normative ancor più stringenti in materia di mitigazione dei detriti spaziali, con un chiaro impatto sulle agenzie che offrono l'accesso allo spazio.

2.3.Impatto su VEGA.

In qualità di prime contractor del lanciatore VEGA, ELV è tenuta a rispettare tutte le normative descritte nel precedente paragrafo. In particolare la tipologia di missioni realizzabili da VEGA LV rientra nell'OR-01 e prevede pertanto il rientro indiretto in meno di 25 anni dell' *Upper stage* AVUM.

CAPITOLO 3

VEGA LV.



3.1. Il progetto VEGA.

Il programma VEGA (Vettore Europeo di Generazione Avanzata) ha lo scopo di realizzare un lanciatore specifico per la messa in orbita di satelliti di piccole dimensioni, tipicamente usati per l'osservazione terrestre e per scopi di ricerca, sfruttando il *know-how* acquisito per lanciatori della famiglia Ariane e, al tempo stesso, apportando innovazione tecnologica.

Il progetto Vega nasce come concetto italiano, quando nel 1988 BPD Difesa e Spazio propose all'ASI (*Agenzia Spaziale Italiana*) la realizzazione di un lanciatore, dotato di un nuovo motore Zefiro realizzato sulla base dell'esperienza sviluppata durante la realizzazione dei lanciatori Ariane, in vista del congedo del *US SCOUT launcher*.

Dopo circa dieci anni di attività di definizione e consolidamento, l'ASI (*Agenzia Spaziale Italiana*) e l'industria italiana proposero VEGA come progetto europeo, basandosi sul *know-how* derivante dallo sviluppo e produzione di *Ariane4 solid strap-on boosters (PAP)* e *Ariane5 solid strap-on boosters (EAP)*.

All'aprile 1998 risale l'approvazione che autorizza le attività di pre-sviluppo del progetto VEGA da parte del Consiglio ESA.

Il 27-28 novembre 2000 il progetto viene approvato dall'*ESA' Ariane Programme Board*, ma l'inizio ufficiale del progetto risale al successivo 15 dicembre 2000, quando sette paesi Europei sottoscrivono la Dichiarazione.

L'obiettivo dell'ESA è la realizzazione di un lanciatore per l'immissione in orbite LEO/SSO di piccoli satelliti a costi ridotti, che consenta all'Europa un accesso indipendente allo spazio.

Infatti, Ariane5, da cui VEGA eredita parte del suo sviluppo tecnologico, è un lanciatore per satelliti di grandi dimensioni, alto circa 50 metri, il cui peso si aggira intorno alle 700 tonnellate e la realizzazione di lanci per la messa in orbita di satelliti di piccole o medie dimensioni da parte di questo vettore risulta svantaggiosa dal punto di vista logistico ed ancor più dal punto di vista economico. Da questa considerazione nasce la decisione del Consiglio ESA di realizzare VEGA, lanciatore per satelliti di piccole dimensioni.

La recente introduzione di satelliti di piccole dimensioni nel panorama mondiale deriva in parte dalle nuove politiche adottate per i programmi spaziali, ma è principalmente una

conseguenza dell'innovazione tecnologica satellitare, che pone molta attenzione alla realizzazione di strutture di massa contenuta, per gli evidenti vantaggi economici che tale riduzione comporta nel settore spaziale.

Questi satelliti di nuova generazione possono essere classificati in tre categorie:

- Micro satelliti : fino ai 300 kg;
- Mini satelliti : da 300 a 1000 kg;
- Piccoli satelliti: da 1000 a 2000 kg.

Quando anche VEGA sarà operativo, l'Europa disporrà di una trilogia di vettori in grado realizzare la messa in orbita di tutte le categorie di satelliti, a costi contenuti.



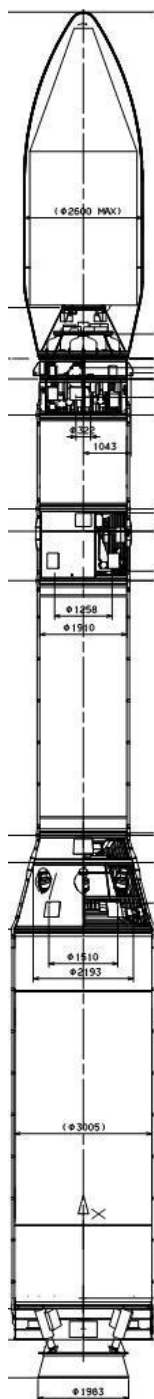
<u>LAUNCHER</u>	<u>VEGA</u>	<u>SOYUZ</u>	<u>ARIANE-5 GENERIC</u>	<u>ARIANE -5 ECA</u>
ORBIT	LEO/SSO	GTO	GTO	GTO
P/L mass, [kg]	1500(700 Km)	3000	6600	10000

Tab.3.1. Performance standard dei lanciatori europei, CSG [9].

Per il suo lancio, *VEGA* utilizzerà strutture parzialmente già utilizzate per i lanci dell'Ariane. I lanci avverranno dal Centre Spatial Guyanaise, la base spaziale europea a Kourou, nella Guyana Francese, dal sito di lancio prima denominato *ELA1 (Ensemble Lancement Ariane)*, utilizzato per i lanci dei primi vettori Ariane, ribattezzato *ZLV (Zone Lancement VEGA)* in occasione del suo ripristino e utilizzo per *VEGA*.

Una volta che il lanciatore *VEGA* sarà qualificato ed entrerà regolarmente in esercizio, il mercato dei payloads prevederà una cadenza fino a 4-6 lanci all'anno.

3.2. Il lanciatore Vega.



VEGA è un lanciatore di circa 30 metri di altezza e 137 tonnellate di peso. Le sue potenzialità permettono l'immissione in orbita polare bassa, ovvero in orbita inclinata di 90° rispetto all'equatore ad una quota di 700km, di un carico utile di 1500kg (cfr [5],[6],[7]). Tuttavia, è prevista una certa flessibilità rispetto ai valori nominali di progetto; VEGA può, infatti, realizzare l'immissione in orbite di inclinazioni minori, a parità di quota, per un carico utile maggiore rispetto al valore di riferimento; sono possibili anche immissioni in orbite con quote maggiori di 700 km, ma il carico utile dovrà essere necessariamente inferiore al caso di riferimento.

In definitiva, VEGA può trasportare un carico utile compreso tra i 300 e i 2500 kg, in orbite la cui quota è compresa tra i 300 e i 1500 Km[4].

Di seguito si riporta la "performance map" che riassume le potenzialità di lancio del lanciatore VEGA.

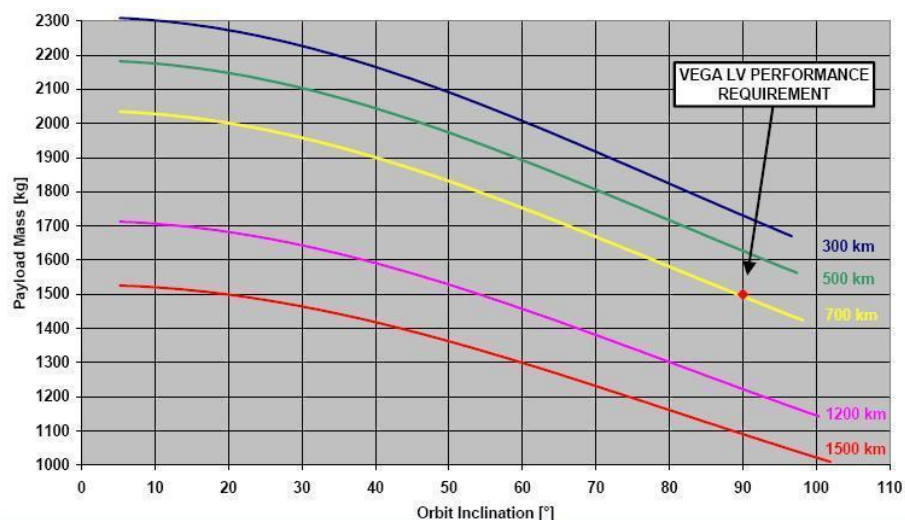


Fig.3.2.1. VEGA performance map.

3.2.1. Configurazione del lanciatore VEGA.

VEGA è un *single-body Launcher* che si compone di tre stadi a propulsione solida, P-80, Z23 (“Zefiro 23”) e Z9 (“Zefiro 9”), e di uno stadio addizionale a propulsione liquida, AVUM, che ha il compito di controllare assetto e traiettoria del lanciatore nella sua fase orbitale, nonché immettere e rilasciare il payload nella sua orbita target.

La tecnologia in fibra di carbonio utilizzata per lo sviluppo degli involucri dei motori degli stadi a propulsione solida è una derivazione del motore di 16 tonnellate *Zefiro-16*, sviluppato da Avio Group per conto dell’Agenzia Spaziale Italiana (ASI), diventando a tutti gli effetti la dimostrazione dell’eccellente qualità raggiunta nello sviluppo di tecnologie propulsive, dalle quali è poi derivata una famiglia di motori ad elevate prestazioni e rapporto strutturale contenuto (inteso come rapporto tra masse strutturali e massa totale del motore), in grado di soddisfare tutti i requisiti richiesti dal sistema lanciatore.

Ogni motore a propulsione solida è composto da :

- Involucro in composito, fibra di carbonio, con isolamento termico.
- Propellente solido HTPB.
- Ugello basato su giunto flessibile per permettere la massima deflessione.
- Un sistema di controllo della spinta guidato da due attuatori di tipo elettrico che comandano l’ugello mobile per la regolazione del beccheggio e imbardata durante il volo di ogni stadio.

In Fig.3.2.1.1 è rappresentata la configurazione del lanciatore VEGA.

Di seguito si riporta una breve descrizione di ogni stadio che compone il lanciatore VEGA.

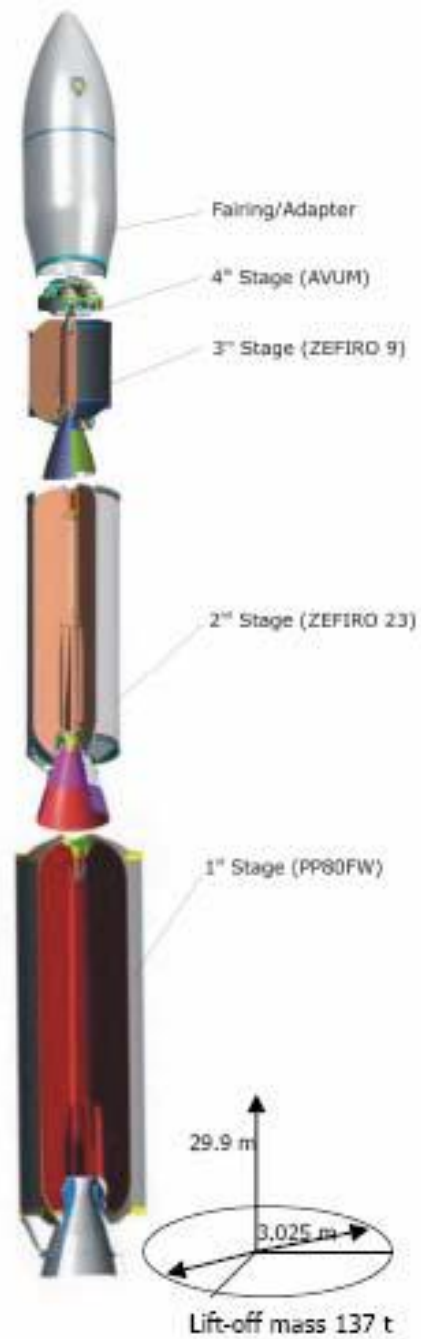


Fig.3.2.1.1. Configurazione del Vega LV

3.2.2. Il primo stadio: P80 FW.

Questo primo stadio è il risultato di uno specifico programma di sviluppo e la sua tecnologia innovativa verrà utilizzata anche per le future missioni di Ariane-5.

Ad oggi rappresenta il motore a propulsione solida con involucro monolitico in composito più grande mai realizzato.

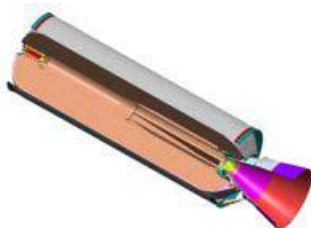
Il primo stadio P80 FW è alto 10.5 metri e contiene circa 88 tonnellate di propellente. Al momento del decollo, il P80 FW fornirà a Vega una spinta di 230 tonnellate che durerà per 106.7 secondi.



<i>Dati Principali</i>	<i>P-80</i>
Altezza	10.5 m
Diametro	3 m
Massa Propellente	88 ton
Spinta	2274 kN
Rapporto di Espansione	16
Tempo di Combustione	106.5 s

Fig.3.2.2.1. Il primo stadio P80-FW

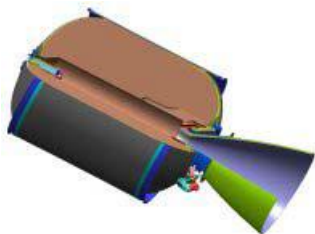
3.2.3. Il secondo stadio : Z23.



<i>Dati principali</i>	<i>Zefiro 23</i>
Altezza	7.5 m
Diametro	1.9 m
Massa di Propellente	23.9 ton
Spinta	936.5 kN
Rapporto di espansione	25
Tempo di combustione	72.2 sec

Fig.3.2.3.1. Il secondo stadio Zefiro 23.

3.2.4. Il terzo stadio: Z9.



<i>Dati principali</i>	<i>Zefiro 9</i>
Altezza	3.85 m
Diametro	1.9 m
Massa di Propellente	10.1 ton
Spinta	225 kN
Rapporto di espansione	56
Tempo di combustione	110 sec

Fig.3.2.4.1. Il terzo stadio Zefiro 9.

3.2.5. Il quarto stadio : AVUM.

Il quarto ed ultimo stadio del lanciatore Vega (Attitude and Vernier Upper Module) è composto dal motore a liquido bi-propellente immagazzinabile (UDMH/NTO), dal sistema propulsivo per il controllo d'assetto (RACS) e dal modulo AVUM di avionica. Il main engine ha la possibilità di effettuare ri-accensioni mentre il sistema di controllo a monopropellente (idrazina), pressurizzato con azoto gassoso, consta di due clusters ognuno con tre thrusters.



<i>Dati principali</i>	<i>AVUM</i>
Altezza	1.74 m
Diametro	1.9 m
Massa di Propellente	550 kg
Spinta	2450 N
Rapporto di espansione	25
Tempo di combustione	71.6 sec

Fig.3.2.5.1. Il quarto stadio AVUM.

AVUM è responsabile per le seguenti operazioni:

- Controllo del rollio del lanciatore durante il volo del secondo, terzo e quarto stadio;
- Controllo di assetto durante la fase di volo non propulsa (coasting);
- Correzione dell'errore sulla velocità assiale introdotto dai motori a solido;
- Circularizzazione dell'orbita
- Puntamento del satellite;
- Manovre di rilascio del carico utile;
- Collision Avoidance e deorbiting al termine della missione.

In particolare, il controllo di assetto e rollio è svolto dall'unità RACS, un sistema principalmente composto di due gruppi propulsivi di tipo monopropellente ad idrazina, ciascuno dei due gruppi propulsivi è composto da tre propulsori (due per il controllo del rollio ed uno per il controllo del beccheggio).

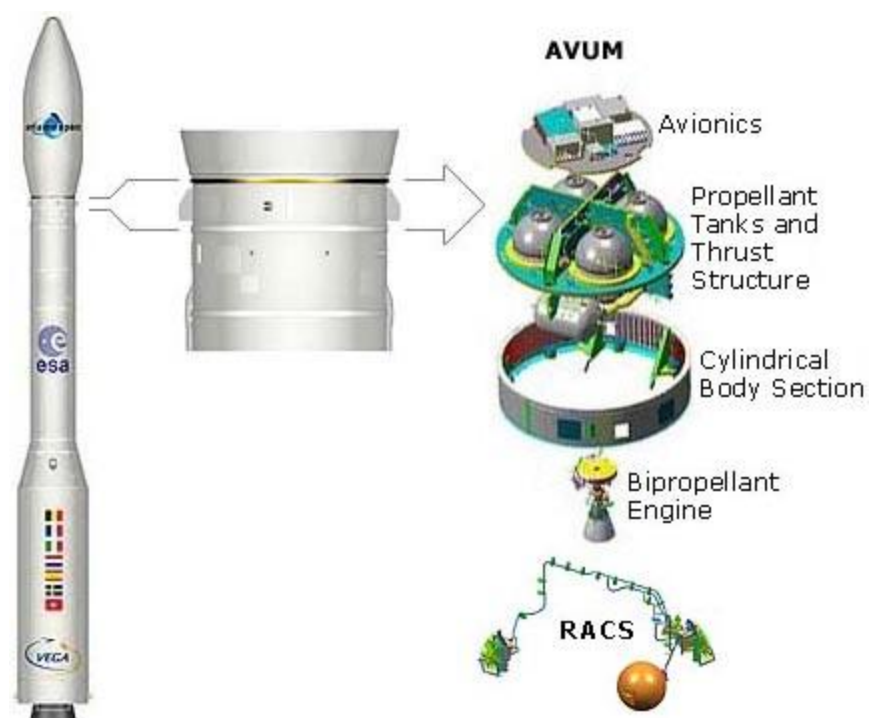


Fig.3.2.5.2 AVUM.

L'avionica sita sul quarto stadio è responsabile delle seguenti funzioni:

- Guida, navigazione e controllo;
- Controllo globale della missione;
- Telemetria;
- Localizzazione ed eventuale neutralizzazione;
- Distribuzione della potenza.

3.2.6. P/L adapter.

- VEGA 937.

Il VEGA 937 è un adapter per singolo carico utile posizionato sul lanciatore VEGA, nella parte superiore dell'AVUM.

Il VG-937 è composto principalmente da una struttura conica, un sottosistema di separazione e di espulsione e un sottosistema elettrico comprensivo della strumentazione. Il diametro del payload adapter spazia da 2 metri a circa 95 centimetri, che rappresenta un'interfaccia standard verso i payloads. La sua altezza è di circa 1,5 metri [10].

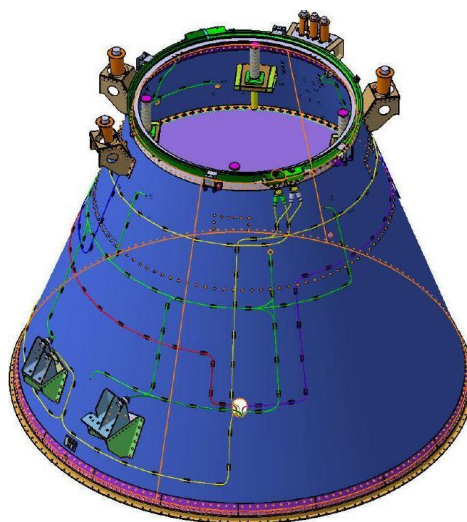


Fig.3.2.6.1. VG-937, adattatore per P/L.

Il dispositivo VG-937 dispone di quattro molle per il rilascio rapido. VG-937 verrà utilizzato per il volo di qualifica del lanciatore VEGA.

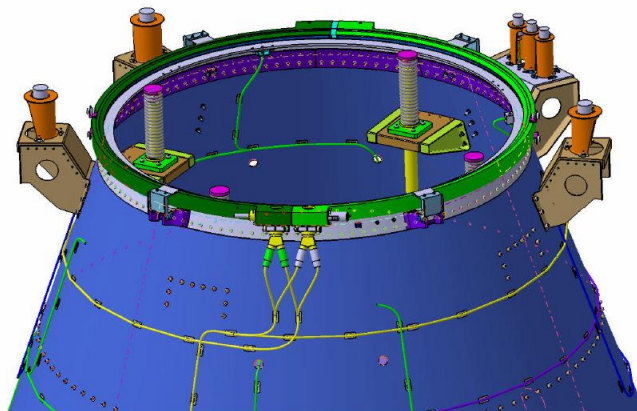


Fig.3.2.6.2. VG-937,dettaglio del sistema di rilascio per il P/L.

- VESPA.

VEGA è in grado effettuare anche missioni multiPL; per tali missioni è in fase di sviluppo il *multipayload adapter* VESPA[11]. Il satellite principale è posizionato nella parte superiore dell'adapter, che viene espulsa dopo il rilascio del satellite stesso, per permettere il rilascio dei payloads secondari.

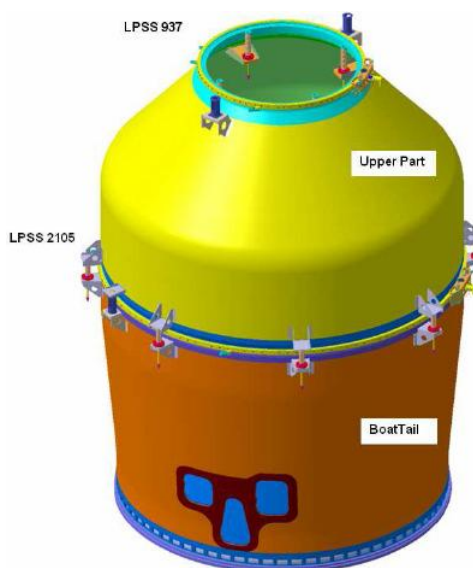


Fig.3.2.6.3. VESPA, adattatore per P/Ls per missioni multipayloads.

Il sottosistema di separazione ha lo scopo di garantire la continuità meccanica tra le operazioni di rilascio del primo P/L, dell'involucro superiore del VESPA e dei payloads secondari.

Un sistema di molle fornisce la spinta necessaria all'involucro superiore del VESPA per allontanarsi.

La massa principale P/L principale può variare tra i 300 ed i 1000 kg, mentre ognuno dei payloads secondari può arrivare a pesare fino a 200 kg, per un peso secondario totale massimo di 600 kg.

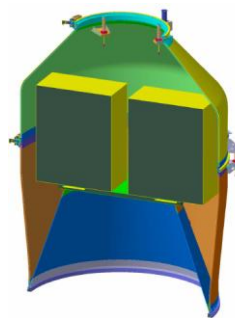


Fig.3.2.6.4. Vista in sezione del VESPA con due P/Ls secondari.

3.3. Missione LARES, volo di qualifica per VEGA.

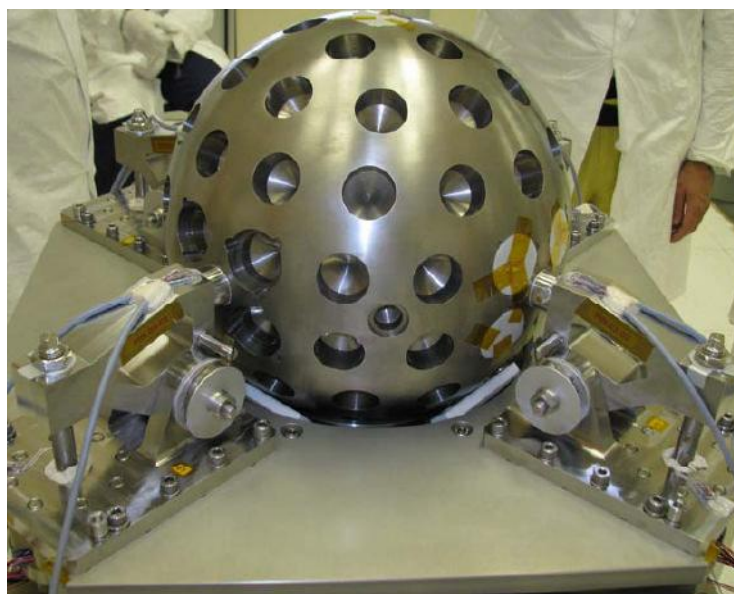


Fig.3.3.1. LARES, P/L per il volo di qualifica di VEGA.

La figura Fig.3.3.1. rappresenta il modello del satellite LARES (LAser Relativity Satellite) che sarà immesso in orbita durante il volo di qualifica del lanciatore VEGA [12].

Il satellite LARES, completamente passivo, è una sfera in tungsteno che ospita retro riflettori grazie ai quali sarà possibile conoscerne la posizione da terra con elevatissima precisione.

Il principale obiettivo scientifico della missione LARES riguarda l'accurata misurazione dell'effetto "Lense-Thirring". L'effetto *Lense-Thirring* è descritto nella teoria della Relatività Generale formulata da Albert Einstein e tratta la distorsione dello spazio-tempo causata dalla rotazione di un corpo dotato di massa. Questo fenomeno finora è stato misurato con una precisione del 10% attraverso la valutazione della variazione dell'orbita dei satelliti italo-americani LAGEOS e LAGEOS 2, misurata per mezzo del laser ranging. Con i dati ottenuti dalla messa in orbita del satellite LARES sarà possibile ottenere un'accuratezza dell'ordine dell'1% nella misura dell'effetto *Lense-Thirring*.

Oltre al suo obiettivo primario, LARES effettuerà anche importanti misurazioni di Geodinamica e Geodesia Spaziale, per la definizione del Sistema di Riferimento Terrestre Internazionale (ITRF) [13].

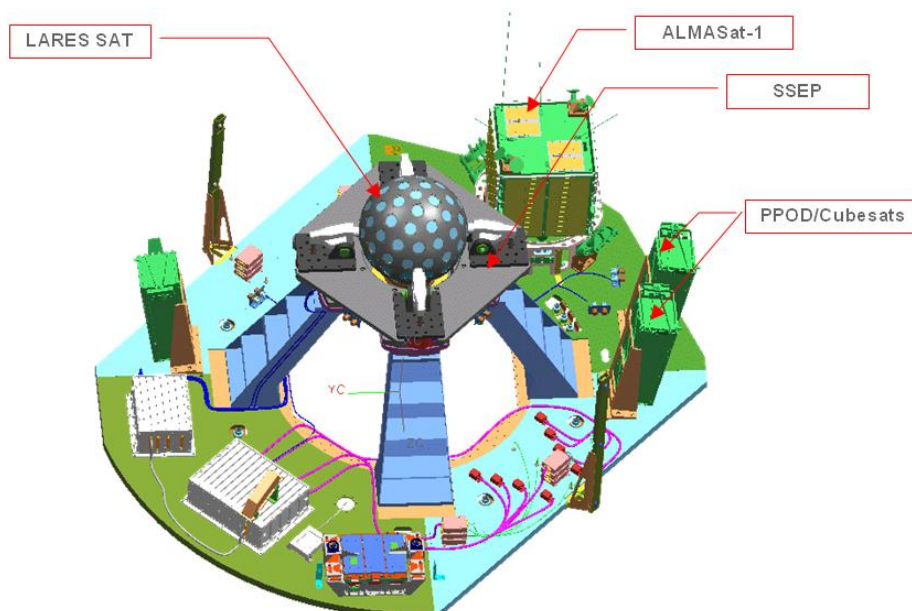


Fig.3.3.2 Adattatore LARES con co-passeggeri.

La Fig. 3.3.2. mostra il satellite LARES e l'adattatore per i suoi co-passeggeri; la missione LARES, infatti, prevede il rilascio di 10 microsattelliti, 9 CUBASATs e ALMASAT, oltre al P/L primario.

I CUBASATs sono micro satelliti sviluppati con finalità formative da diverse Università Europee tra cui "La Sapienza" di Roma, mentre ALMASAT-1 è un micro satellite sviluppato dall'università di Bologna per validare tecnologie di propulsione spaziale.

L'adapter per micro satelliti si interfaccia con l'adapter LARES, VG-937 precedentemente descritto.

In questa missione, LARES verrà rilasciato circa 1 ora dopo l'accensione del P80. Successivamente AVUM avvierà una procedura chiamata CCAM (Collision and Contamination Avoidance Manoeuvre), eseguita dal RACS. Lo scopo di questa manovra è permettere l'allontanamento relativo tra P/L e AVUM stesso, applicando un delta di velocità all'AVUM rispetto al P/L, e la rotazione del modulo AVUM per raggiungere l'assetto necessario per la successiva fase di spinta, per poter accendere il motore principale rispettando i requisiti di contaminazione dettati dal P/L rilasciato.

Dopo circa dieci minuti dal rilascio del P/L, AVUM riaccenderà, quindi, il motore per l'ultima volta, effettuando una manovra della durata di qualche minuto, che ne varierà i parametri orbitali; nello specifico, questa manovra diminuirà la quota di perigeo dell'orbita di AVUM, permettendone il rientro in atmosfera entro i 25 anni.

Alla fine della fase di passivazione, circa 77 minuti dopo l'accensione del P80, la missione si conclude.

Per quanto riguarda gli scopi prefissi nella presente tesi, le analisi della potenziale collisione in orbita tra P/L ed AVUM e del decadimento orbitale entro 25 anni per AVUM, effettuate tramite l'utilizzo del programma POLPO, tengono conto di tutte le manovre sopra citate.

L'inizio di tali analisi coincide con l'istante immediatamente successivo allo spegnimento del motore principale, ovvero in coincidenza dell'inizio della fase di passivazione.

Quota di perigeo [km]	Quota di apogeo [km]	Inclinazione [°]	Argomento del perigeo [°]	RAAN [°]	Anomalia vera [°]
1450	1450	71	free	free	free

Tab.3.3.1. Parametri orbitali del satellite LARES.

3.4. Missioni Future.

Nell'ambito del contratto VERTA siglato con l'ESA, i primi 5 voli del VEGA sono a scopo scientifico e, in maniera del tutto indicativa, seguiranno il seguente schedule.

Missione	QF	Verta 1	Verta 2	Verta 3	Verta 4	Verta 5	
P/L	LARES	/	AEOLUS	SWARM	LISA PF	PROBA 3	IXV
P/L mass [kg]	400	/	1400	3x500 ca.	1900	1900	1800
Perigee/apogee [km]	1450	/	380x398	490	200x1600	200x1100	50x500
Inclinazione	71°	/	SSO	87.5°	6.3°	5.2°	5.2°

Tab.3.4.1. Missioni future del lanciatore VEGA.

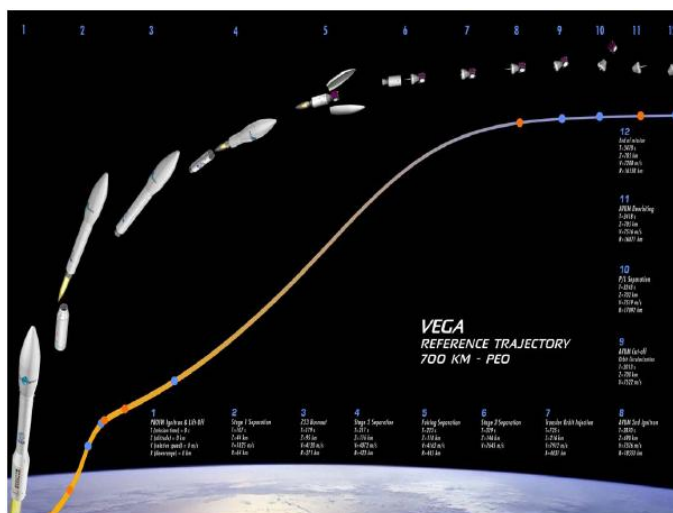


Fig.3.4.1. Traiettoria di riferimento per volo nominale del lanciatore VEGA.

CAPITOLO 4

DINAMICA ORBITALE.

Sia la propagazione orbitale che lo studio del rischio della collisione in orbita sono argomenti affrontare con l'utilizzo delle leggi della dinamica orbitale.

Il presente capitolo si prefigge lo scopo di fornire al lettore una conoscenza di base delle leggi della dinamica orbitale, in modo da poter comprendere appieno i modelli fisici utilizzati per la descrizione dell'ambiente spaziale, a completamento del percorso logico seguito per la realizzazione del programma POLPO.

La discussione dettagliata della dinamica orbitale è un argomento molto complesso, ampiamente sviluppato nei libri di testo consultati per la realizzazione del programma POLPO([16], [19], [20], [21]).

4.1. Sistemi di riferimento.

Le equazioni della dinamica orbitale comprendono grandezze vettoriali, che devono essere necessariamente riferite ad un sistema di riferimento.

4.1.1 Il sistema di riferimento geocentrico equatoriale IJK(inerziale).

Il sistema di riferimento Geocentrico-Equatoriale ha origine nel centro della Terra. Il piano fondamentale è quello Equatoriale, l'asse X (versore **I**) punta verso il *primo punto d'ariete* Υ (asse Vernale), l'asse Z (versore **K**) è diretto nella direzione del polo Nord terrestre e l'asse Y (versore **J**) è tale da formare una terna levogira. In questo sistema di riferimento la Terra è assunta perfettamente sferica.

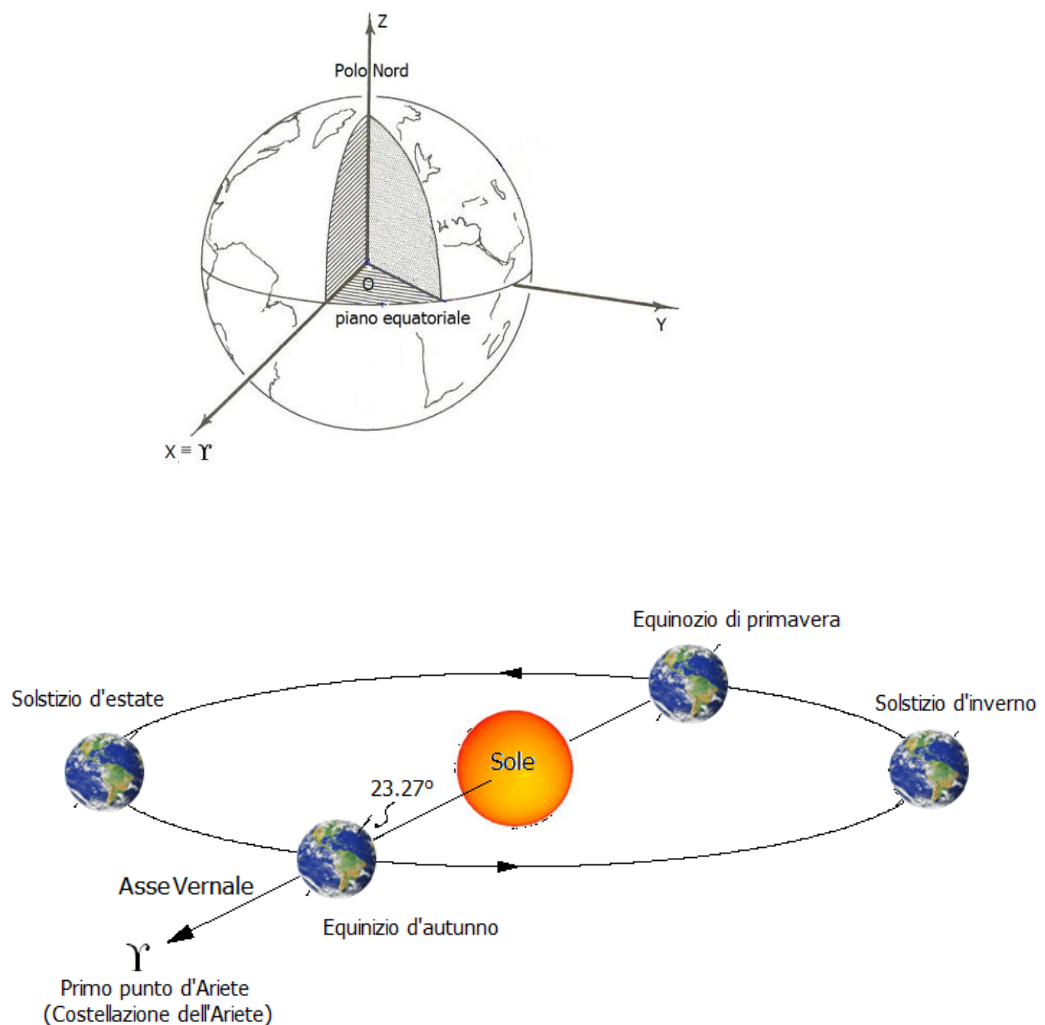


Fig.4.1.1.1. Sistema di riferimento Geocentrico-Equatoriale.

Il sistema di riferimento geocentrico equatoriale è un sistema di riferimento pseudo-inerziale, ovvero non puramente inerziale; infatti, ricordando il primo principio della dinamica:

“Si definisce inerziale un sistema di riferimento che si trova in quiete ovvero in moto rettilineo uniforme e con orientamento invariante rispetto alle stelle fisse”

e la prima legge di Keplero:

“L’orbita di ciascun pianeta è un’ellisse ed il Sole occupa un fuoco”

risulta evidente come un sistema di riferimento solidale alla Terra non si possa definire inerziale, dato che quest’ultima non si muove di moto rettilineo uniforme rispetto alle stelle fisse. La descrizione di un problema in un sistema di riferimento non inerziale deve essere formulato tenendo conto anche delle forze apparenti, ovvero la forza centrifuga e di Coriolis. Tuttavia, per molti problemi fisici, trascurare le forze apparenti comporta degli errori trascurabili, e per tale ragione, di qui in avanti, il sistema di riferimento Geocentrico-Equatoriale verrà assunto inerziale.

Coordinate.

Nel sistema di riferimento Geocentrico-Equatoriale la posizione di un corpo può essere definita in due diversi modi:

- Coordinate X, Y e Z.
- Ascensione retta α , declinazione δ , distanza del corpo dall’origine r

Entrambi indicati nella figura seguente:

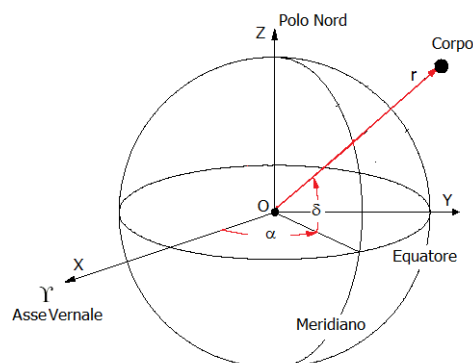


Fig.4.1.1.2. Coordinate nel sistema di riferimento Geocentrico-Equatoriale.

L'ascensione retta α è l'angolo misurato verso Est nel piano equatoriale, compreso fra l'asse X ed il piano normale all'equatore che contiene l'oggetto (meridiano).

La declinazione δ è l'angolo compreso tra il piano equatoriale e l'oggetto, misurato nel piano meridiano contenente l'oggetto.

La corrispondenza tra le due coordinate è definita dalle seguenti relazioni:

$$\begin{cases} x = r \cos(\delta) \cos(\alpha) \\ y = r \cos(\delta) \sin(\alpha) \\ z = r \sin(\delta) \end{cases}$$

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \alpha = \arctan \frac{y}{x} \\ \delta = \arctan \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{cases}$$

4.1.2 Sistema di coordinate Latitudine-Longitudine.

Il sistema di coordinate Latitudine-Longitudine è un sistema di riferimento che ruota con la Terra.

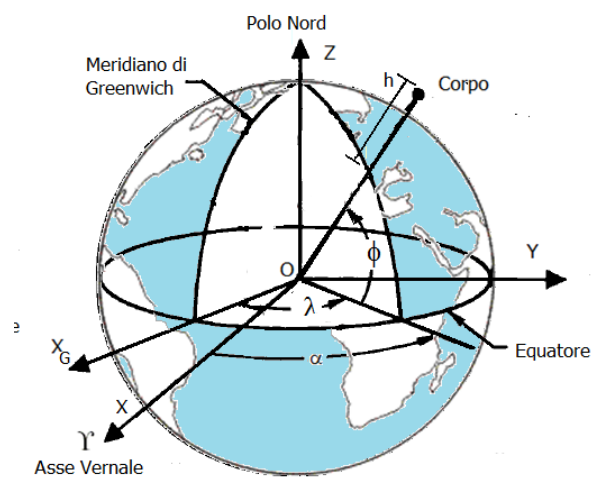


Fig.4.1.2.1. Sistema di riferimento Latitudine-Longitudine.

Il centro del sistema di riferimento Latitudine Longitudine è situato al centro della Terra, e le coordinate del corpo vengono fornite attraverso:

- h Distanza del corpo dal centro del sistema di riferimento, misurata nel piano meridiano contenente il corpo.
- λ *Longitudine*: distanza angolare tra il meridiano di riferimento di Greenwich ed il meridiano locale contenente il corpo; si misura in gradi da 0° a $+180^\circ$ procedendo verso ovest e da 0° a -180° verso est.
- ϕ *Latitudine*: angolo compreso tra il piano equatoriale e la normale alla superficie terrestre passante per il corpo considerato; si misura in gradi da 0° a $+90^\circ$ verso il Polo Nord e da 0° a -90° verso il Polo Sud.

Il sistema di riferimento Latitudine-Longitudine è comunemente usato perché in esso la Terra è considerata come ellissoide.

Se questo sistema di riferimento utilizzasse un modello di Terra sferico, i due angoli δ (declinazione) e ϕ (latitudine) coinciderebbero; a causa dell'ellitticità del modello, è necessario, invece, fare una distinzione tra δ (declinazione), latitudine geodetica ϕ e latitudine geocentrica ϕ' ; quest'ultima è definita come angolo fra piano equatoriale ed il segmento che unisce il centro dell'ellissoide con la proiezione dell'oggetto sulla superficie terrestre.

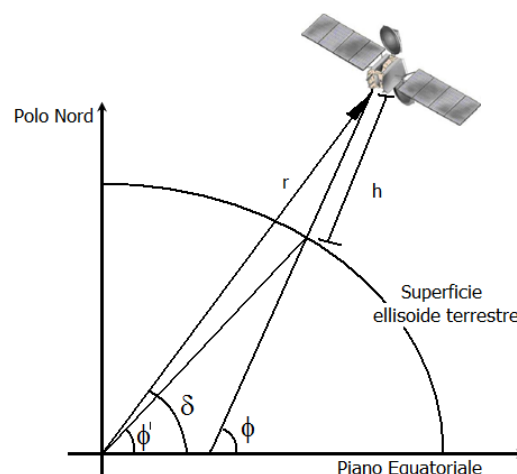


Fig.4.1.2.2. δ (declinazione), latitudine geodetica ϕ e latitudine geocentrica ϕ' .

Con il termine “latitudine” ci si riferisce generalmente alla latitudine geodetica.

4.1.3 Sistema di riferimento perifocale.

Il sistema di riferimento perifocale, detto anche sistema PQW, è uno dei sistemi di riferimento più utilizzati per la descrizione del moto del satellite. Il piano fondamentale è il piano orbitale, il centro del sistema di riferimento coincide con il centro del corpo primario, l'asse X (versore \mathbf{P}) punta verso il perigeo dell'orbita (vedi §4.3), l'asse Z (versore \mathbf{W}) è perpendicolare al piano orbitale e concorde con il vettore costante della quantità di moto \mathbf{h} , (vedi §4.2), infine, l'asse Y (versore \mathbf{Q}) appartiene al piano orbitale ed è orientato in modo da formare una terna levogira.

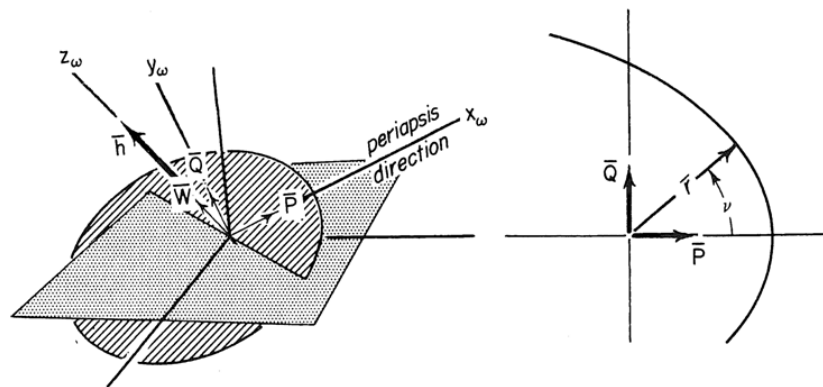


Fig.4.1.3.1. Sistema di riferimento perifocale.

Come verrà discusso nel paragrafo a seguire, l'orientazione del piano orbitale rispetto alla terna di riferimento Geocentrica-Equatoriale è invariante nel tempo, in assenza di perturbazioni del moto; alla luce di ciò, la terna di riferimento Perifocale può essere assunta inerziale, sotto le medesime ipotesi che ci consentono di considerare inerziale il sistema di riferimento Geocentrico-Equatoriale.

4.1.4 Sistema di riferimento RTN.

Il sistema di riferimento RTN è una terna la cui origine, istante per istante, coincide con il baricentro del corpo orbitante. L'asse X (versore \mathbf{R}) è diretto come il vettore posizione del corpo orbitante rispetto al sistema IJK, orientato verso l'esterno rispetto al corpo attrattore; l'asse Y (versore \mathbf{T}) giace nel piano del moto orbitale ed è concorde

con il vettore velocità \mathbf{v} . L'asse Z (versore \mathbf{N}), infine, è perpendicolare al piano orbitale e concorde con il vettore quantità di moto \mathbf{h} (vedi §4.2).

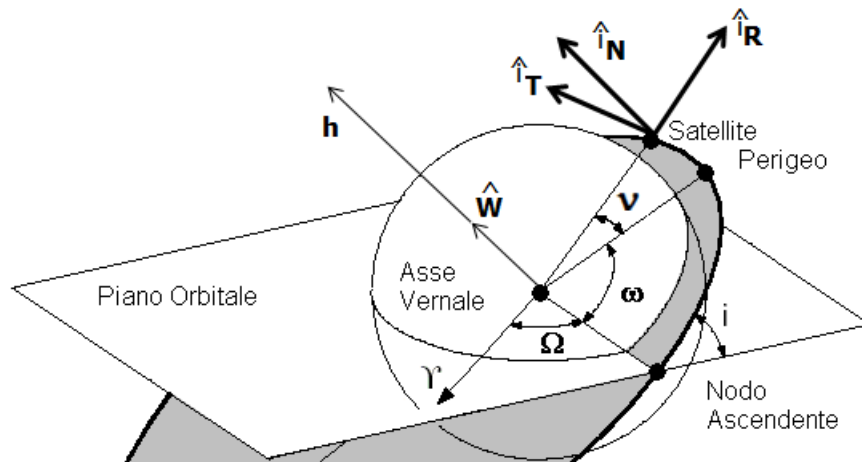


Fig.4.1.4.1. Sistema di riferimento RTN.

4.2. Il problema Kepleriano dei due corpi.

Il problema dei due corpi Kepleriano descrive il moto di un corpo secondario (ad esempio un satellite) attorno ad un corpo primario (pianeta), considerando come unica forza agente, l'attrazione esercitata dal corpo primario sul corpo secondario, assunta come forza centrale.

I due corpi, primario e secondario, sono assunti come punti materiali perfettamente sferici. L'equazione del moto per il corpo secondario, in un sistema di riferimento inerziale con origine il centro del corpo primario, risulta:

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{G(M+m)}{r^3} \mathbf{r} \quad (4.1)$$

Dove

$G = 6.6726 \times 10^{-11} \text{ m}^3/\text{s}^2\text{kg}$

M

m

\mathbf{r}

costante gravitazionale universale

massa del corpo primario

massa del corpo secondario

vettore posizione del corpo secondario nel riferimento inerziale centrato nel corpo primario

Generalmente :

$$M + m \approx M$$

E l'equazione (4.1) diventa:

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\mu}{r^3} \mathbf{r} \quad (4.2)$$

Dove

$$\mu = GM$$

Rappresenta il parametro gravitazionale del corpo primario; per la Terra :

$$\mu_{\oplus} = 3.986 \cdot 10^{14} m^3/s^2$$

Tramite semplici passaggi matematici([16], [19], [20], [21]), è facile dimostrare che il moto Kepleriano sia un moto piano, nel quale il piano orbitale mantiene la sua orientazione costante nel tempo; Dalle stesse considerazioni si dimostra anche l'esistenza di due costanti del moto, invarianti lungo la traiettoria:

Energia meccanica specifica:

$$\varepsilon \triangleq \frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{r}$$

Dove

$\frac{v^2}{2}$	energia cinetica per unità di massa
$-\frac{\mu}{r}$	energia potenziale

Quantità di moto:

$$\mathbf{h} \triangleq \mathbf{r} \times \mathbf{v}$$

Il sistema differenziale la cui risoluzione permette di ottenere la posizione e la velocità del corpo secondario, al trascorrere del tempo, è quindi dato dall'equazione (4.2), alla quale viene affiancata l'equazione che definisce la velocità del corpo secondario come derivata prima del vettore posizione:

$$\begin{cases} \ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\mu}{r^3} \mathbf{r} \\ \mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} \end{cases} \quad (4.3)$$

Il sistema differenziale (4.3) rappresenta un set di sei equazioni scalari, tre per le componenti del vettore accelerazione e tre per le componenti del vettore velocità, e può essere risolto in forma chiusa se sono noti i vettori di posizione e velocità iniziale.

E' possibile dimostrare che la soluzione dell'equazione dei due corpi del problema Kepleriano, che definisce la traiettoria del corpo secondario attorno al corpo primario è della forma:

$$r = \frac{h^2/\mu}{1 + \frac{B}{\mu} \cos \nu} = \frac{p}{1 + e \cos \nu} \quad (4.4)$$

Dove:

B vettore di Lenz (costante)

$e \triangleq B/\mu$ vettore eccentricità (costante, parallelo a **B**)

p semilato retto

ν anomalia vera, rappresenta l'angolo tra il vettore **B** ed il vettore **r**.

Dalla definizione dell'anomalia vera ν , si ha che per $\nu = 0$ il vettore **B** (e quindi **e**) è parallelo al vettore **r**, se ne deduce che il vettore costante **B** è diretto lungo la congiungente Fuoco Primario-Perigeo.

La (4.4) è l'equazione della traiettoria in forma polare e rappresenta l'equazione di una conica con il corpo primario posto in corrispondenza di uno dei due fuochi (*fuoco primario* F). In particolare, il valore di e definisce completamente il tipo di conica:

eccentricità	Tipo di conica
$e = 0$	circonferenza
$0 < e < 1$	ellisse
$e = 1$	parabola
$e > 1$	iperbole

Tab4.2.1. Definizione del tipo di conica in funzione del valore dell'eccentricità.

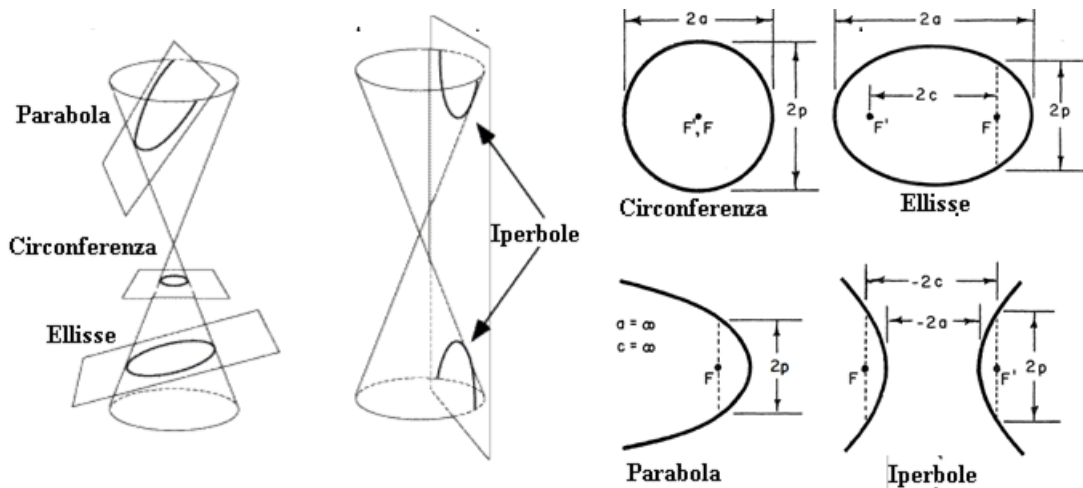


Fig.4.2.1. Tipo di conica al variare dell'eccentricità.

Dalla Fig.4.2.1. risulta chiaro il significato geometrico del semilato retto p ; per ciascuna conica, inoltre, è possibile definire il semiasse maggiore a e la distanza tra i due fuochi c .

Dalla (4.4) si evidenzia il carattere periodico della posizione assunta dal corpo al variare dell'anomalia vera v ; è infatti possibile definire, per orbite chiuse, il *periodo orbitale*, durante il quale il valore di v compie un angolo giro.

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{\mu}}$$

Per tutte le coniche, eccetto la parabola, valgono le relazioni:

$$e = \frac{c}{a}$$

$$p = a(1 - e^2)$$

Da cui si deduce che p è positivo sia per l'ellisse che per l'iperbole.

Se la traiettoria è un'ellisse, è utile introdurre i concetti di *apoapside* e *periapside*, rispettivamente il punto più lontano ed il punto più vicino dell'orbita al fuoco primario. Nel caso in cui il corpo attrattore sia la Terra, tali punti prendono il nome di *apogeo* e *perigeo*.

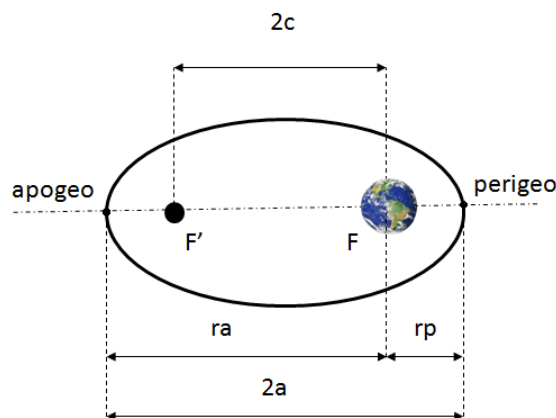


Fig.4.2.2. Apogeo e perigeo di un'orbita ellittica.

Per quanto riguarda i raggi di apogeo r_a e perigeo r_p , valgono le seguenti relazioni:

$$r_p = a(1 - e)$$

$$r_a = a(1 + e)$$

$$r_a + r_p = 2a$$

$$r_a - r_p = 2c$$

Si noti che per la completa definizione della forma dell'orbita sono sufficienti i valori di a ed e , entrambi costanti.

4.3. Parametri orbitali.

Per quanto esposto finora, per descrivere il moto del satellite in orbita attorno al corpo primario occorre conoscere la posizione e la velocità istantanea di tale corpo, rispetto al sistema di riferimento con origine nel centro del corpo primario; in tutto si tratta di sei valori scalari che definiscono completamente lo stato del corpo secondario nel sistema di riferimento inerziale.

Generalizzando, per la descrizione del moto di un corpo orbitante attorno ad un corpo attrattore, rispetto ad una sistema di riferimento cartesiano tridimensionale, occorrono sei quantità scalari che definiscano l'orientazione dell'orbita, la sua forma e la posizione del corpo sull'orbita stessa; questi sei valori scalari possono essere le componenti di posizione e velocità del corpo, o un insieme di sei valori equivalente.

Di seguito si introducono i sei *parametri orbitali classici*, uno specifico insieme di sei valori scalari, tramite i quali si usa definire il moto di un satellite in orbita attorno ad un pianeta.

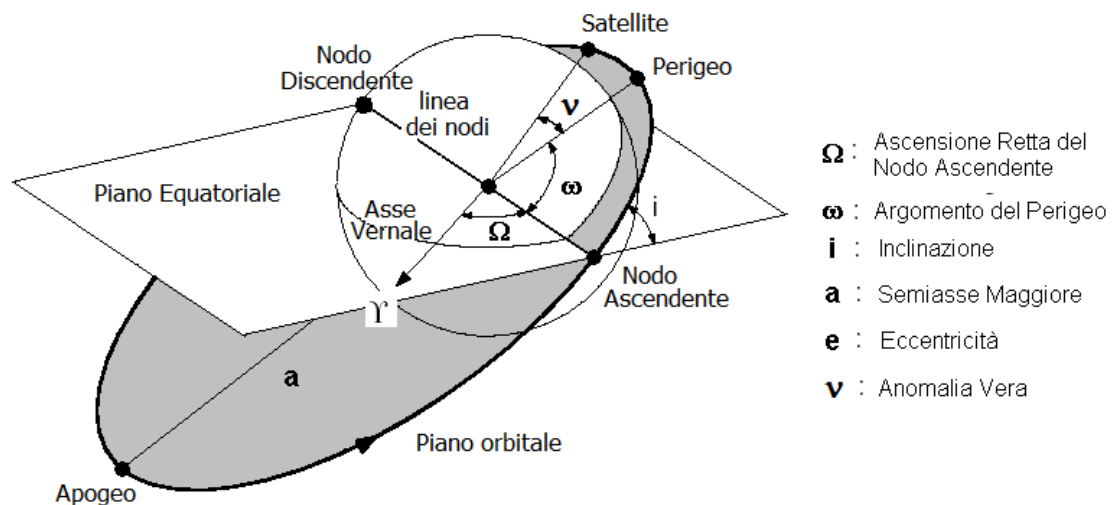


Fig.4.3.1. Parametri orbitali.

Gli elementi a , e e v sono già stati introdotti nei paragrafi precedenti; per quanto riguarda gli altri parametri, si definiscono:

- *inclinazione* (i): angolo compreso tra il piano equatoriale (piano fondamentale del sistema di riferimento) ed il piano orbitale; è compreso tra 0 e π .

In base al valore di inclinazione, le orbite vengono così definite:

Inclinazione	orbita
$i \in (0, \pi)$	Equatoriale
$i \in (0, \pi/2)$	Posigrada
$i = \pi/2$	Polare
$i \in (\pi/2, \pi)$	Retrograda

Tab4.2.2. Definizione del tipo di orbita in funzione del valore di inclinazione.

Il valore dell'inclinazione può essere, inoltre definito come l'angolo compreso tra la direzione del versore \mathbf{W} del sistema di riferimento perifocale (parallelo ad \mathbf{h}) ed il versore dell'asse Z del sistema di riferimento Geocentrico-Equatoriale.

Per orbite non equatoriali, l'intersezione tra il piano orbitale ed il piano equatoriale prende il nome di "linea dei nodi"; l'intersezione della linea dei nodi con l'orbita è costituita da un punto, o nodo, per il caso di orbite aperte, e da due punti nel caso orbite chiuse, così definiti:

Nodo ascendente: se il satellite attraversa il nodo passando dal semispazio a $Z < 0$ verso il semispazio $Z > 0$

Nodo discendente: se il satellite attraversa il nodo passando dal semispazio a $Z > 0$ verso il semispazio $Z < 0$

Il versore della linea dei nodi, orientato nel verso che va dal fuoco principale al nodo ascendente, è così definito:

$$\hat{\mathbf{n}} = \frac{\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{h}}{\|\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{h}\|}$$

- *Ascensione retta del nodo ascendente (RAAN) Ω* : è definito come l'angolo compreso tra il versore \mathbf{I} del sistema di riferimento Geocentrico-Equatoriale ed il versore della linea dei nodi, ed è quindi misurato sul piano equatoriale, in verso antiorario attorno alla direzione di \mathbf{K} ; il suo valore è compreso tra $[0, 2\pi]$.

- *Argomento del perigeo ω* : definito come l'angolo tra il versore della linea dei nodi e il vettore eccentricità e (diretto secondo la congiungente tra fuoco principale e perigeo), ed è quindi misurato sul piano orbitale, in verso antiorario attorno alla direzione di h . Il valore di ω è compreso tra $[0, 2\pi]$.

4.3.1. Parametri orbitali classici per la definizione dell'orientazione dell'orbita.

Ricordiamo che, fissata una terna di riferimento, l'orientamento di una seconda terna è completamente definito da tre direzioni coordinate, ovvero da nove valori scalari che rappresentano i coseni direttori; di questi nove coseni direttori, però, solo sei risultano indipendenti tra loro, in quanto le tre direzioni coordinate non sono del tutto indipendenti, ma mutuamente ortogonali tra loro. In definitiva l'orientamento della seconda terna, rispetto alla terna di riferimento, sarà completamente definita dalla conoscenza di tre relazioni di ortogonalità e tre relazioni di modulo.

Per la definizione dei parametri orbitali classici ci si è serviti della terna di riferimento Geocentrico-Equatoriale, e del sistema di riferimento Perifocale; poiché le direzioni dei versori del sistema Perifocale sono riferite a grandezze del moto definite anche nel sistema di riferimento Geocentrico-Equatoriale, quali il vettore quantità di moto h , il vettore eccentricità e , e la direzione ad essi ortogonale, per la completa definizione della terna perifocale, e quindi del piano orbitale, occorrono altri tre valori scalari.

Dalle definizioni fornite, è possibile individuare facilmente quali dei sei parametri orbitali classici definiscono l'orientamento del piano orbitale, in quanto definiti da relazioni che coinvolgono i versori dei due sistemi di riferimento; questi parametri orbitali sono:

- Inclinazione i
- RAAN Ω
- Argomento del perigeo ω

4.3.2. Parametri orbitali classici per la definizione della forma dell'orbita.

Una volta individuati quali dei parametri orbitali definiscono l'orientamento del piano orbitale, i restanti parametri orbitali definiscono la forma dell'orbita e la posizione del corpo sull'orbita stessa. Come già discusso nel paragrafo §4.2, la forma dell'orbita è completamente definita dai due parametri orbitali classici:

- eccentricità e
- semiasse maggiore a (o il semilato retto p).

In alternativa a questi due parametri orbitali, la forma dell'orbita può essere definita anche tramite i valori di quote di perigeo (h_p) e di apogeo (h_a), ottenute dai rispettivi raggi ai quali si sottrae il valore del raggio del corpo primario, o tramite i valori di raggio di perigeo r_p e raggio di apogeo r_a .

4.3.3. Definizione della posizione del corpo sull'orbita al variare del tempo

L'ultimo dei parametri orbitali classici, l'anomalia vera ν , indica l'angolo tra il periapside e il vettore posizione del satellite al trascorrere del tempo.

4.3.4. La dipendenza dei parametri orbitali classici dal tempo.

Come discusso nei paragrafi precedenti, per il moto kepleriano imperturbato, l'orientamento e la forma dell'orbita sono delle invarianti del moto. Ne consegue che, ad eccezione dell'anomalia vera ν che dipende esplicitamente dal tempo, tutti i parametri orbitali classici sono costanti nel tempo.

4.3.5. Calcolo degli elementi orbitali sulla base di r e ν .

Nel presente paragrafo vengono riportate le relazioni dalle quali è possibile ricavare i sei parametri orbitali classici, noti che siano i valori di posizione e velocità del corpo orbitante ad un certo istante del moto, ovvero il passaggio:

$$\{r, v\} \rightarrow \{a, e, i, \Omega, \omega, \nu\}$$

Le seguenti relazioni sono, inoltre, inserite all'interno del codice del programma POLPO, per il calcolo dei parametri orbitali classici a partire dai dati di posizione e velocità ottenuti dall'integratore (§6.1).

La procedura è riassunta di seguito:

1. Dalla definizione dell'energia meccanica specifica, si ottiene la relazione per calcolare il semiasse maggiore.

$$\varepsilon = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}{2} - \frac{\mu}{\sqrt{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}}} = -\frac{\mu}{2a} \rightarrow a = \frac{\mu}{\frac{2\mu}{\sqrt{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}}} - \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}$$

2. Il vettore eccentricità è ottenuto in funzione del vettore quantità di moto.

$$\mathbf{e} = \sqrt{1 + \frac{2\varepsilon(\mathbf{h} \cdot \mathbf{h})}{\mu^2}} = \sqrt{1 + \frac{2\varepsilon(\mathbf{r} \times \mathbf{v})(\mathbf{r} \times \mathbf{v})}{\mu^2}} =$$

3. Il valore dell'inclinazione si ricava dalla definizione stessa:

$$\cos i = \frac{\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{h}}{h} \rightarrow i = \arccos\left(\frac{\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{h}}{h}\right)$$

4. La RAAN Ω è ottenuta, anch'essa a partire dalla sua definizione:

$$\cos \Omega = \hat{\mathbf{i}} \cdot \hat{\mathbf{n}} \rightarrow \Omega = \begin{cases} \arccos(\hat{\mathbf{i}} \cdot \hat{\mathbf{n}}) & \text{se } \hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{j}} > 0 \\ 2\pi - \arccos(\hat{\mathbf{i}} \cdot \hat{\mathbf{n}}) & \text{se } \hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{j}} < 0 \end{cases}$$

5. L'argomento del perigeo ω è ottenuto in funzione del versore eccentricità e del versore della linea dei nodi:

$$\cos \omega = \hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{e}} \rightarrow \omega = \begin{cases} \arccos(\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{e}}) & \text{se } \hat{\mathbf{k}} > 0 \\ 2\pi - \arccos(\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{e}}) & \text{se } \hat{\mathbf{k}} < 0 \end{cases}$$

Dove

$$\hat{\mathbf{e}} \triangleq \frac{\mathbf{e}}{e}$$

Nel caso in cui l'orbita del satellite sia circolare, non è possibile definire un perigeo, in quanto tutti i punti dell'orbita sono equidistanti dal corpo attrattore, in questo caso, al posto dell'argomento del perigeo si utilizza il parametro u , detto “*argomento della latitudine*”, così definito.

$$\cos u = \hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{r}} \rightarrow u = \begin{cases} \arccos(\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{r}}) & \text{se } \hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{k}} > 0 \\ 2\pi - \arccos(\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{r}}) & \text{se } \hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{k}} < 0 \end{cases}$$

6. Infine, ricordando la definizione di anomalia vera v , definita come angolo compreso tra la direzione del vettore eccentricità (che individua il perigeo dell'orbita) e la direzione del versore posizione, si ottiene:

$$\cos v = \hat{\mathbf{e}} \cdot \hat{\mathbf{r}} \rightarrow v = \begin{cases} \arccos(\hat{\mathbf{e}} \cdot \hat{\mathbf{r}}) & \text{se } \mathbf{r} \cdot \mathbf{v} > 0 \\ 2\pi - \arccos(\hat{\mathbf{e}} \cdot \hat{\mathbf{r}}) & \text{se } \mathbf{r} \cdot \mathbf{v} < 0 \end{cases}$$

Con

$$\hat{\mathbf{r}} \triangleq \frac{\mathbf{r}}{r}$$

4.4 Moto del satellite in presenza di effetti perturbativi.

Nei paragrafi precedenti si è discusso il problema kepleriano dei due corpi, nel quale il corpo secondario risente esclusivamente della forza dovuta all'attrazione gravitazionale dell'unico corpo primario attorno a cui orbita, assunto perfettamente sferico e con distribuzione di massa uniforme.

Ovviamente, le ipotesi sulle quali ci si basa per la definizione del problema dei due corpi Kepleriano, rendono il modello stesso adatto al più per uno studio di prima approssimazione del moto dei satelliti attorno alla Terra.

Nella realtà, infatti, il satellite è soggetto ad un insieme di forze, anche di natura non gravitazionale, che non possono essere trascurate.

Ma cosa intendiamo per perturbazioni? Per definizione, sono quei disturbi che provocano le piccole deviazioni che allontanano il corpo orbitante dalla traiettoria descritta dal problema dei due corpi Kepleriano, per sua stessa definizione imperturbato.

L'utilizzo del termine "perturbazione" è legittimato dagli ordini di grandezza delle accelerazioni *devianti* che affliggono il moto del satellite; queste, infatti, risultano di almeno un ordine di grandezza inferiore rispetto all'accelerazione derivante dall'attrazione gravitazionale del corpo primario.

Esistono diversi approcci matematici per lo studio del problema perturbato, tra questi, quello che verrà citato è il metodo *Cowell*; in questo metodo le perturbazioni compaiono come termine esplicito nell'equazione del moto perturbato e la soluzione del problema si ottiene tramite l'integrazione diretta dell'equazione del moto stessa.

L'equazione che descrive il moto del satellite in presenza di effetti perturbativi, secondo in metodo Cowell, è:

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\mu}{r^3} \mathbf{r} + \sum_{i=1}^n \mathbf{a}_{pi} \quad (4.5)$$

Dove \mathbf{a}_{pi} rappresenta il vettore dell'*i*-esima accelerazione perturbativa.

L'equazione (4.5), a differenza dell'equazione (4.2) che descrive il moto kepleriano puro, non ammette una soluzione in forma chiusa, ma richiede un metodo per l'integrazione approssimata.

4.4.1 Perturbazioni considerate.

Le perturbazioni considerate nello sviluppo del programma POLPO, comprendono i principali disturbi che interessano il moto di un corpo orbitante, e sono riassunte nella tabella a seguire:

Gravitazionali	<ul style="list-style-type: none"> • <i>Luni-Solar effect</i> (attrazione terzo corpo) • Asimmetrie del campo gravitazionale Terrestre.
Non gravitazionali	<ul style="list-style-type: none"> • Resistenza atmosferica • Pressione di radiazione solare

Tab.4.4.1.1 Perturbazioni considerate dal programma POLPO.

L'effetto del disturbo sul generico parametro può essere di *corto periodo*, ovvero non apprezzabile nell'arco di un periodo orbitale del corpo orbitante, o di *lungo periodo*, ovvero con effetti secolari apprezzabili in termini di variazioni su larga scala temporale.

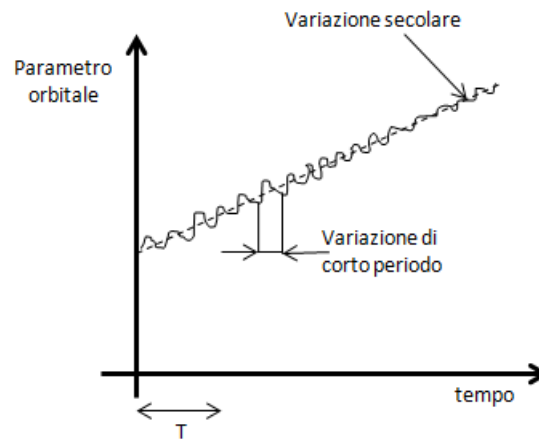


Fig.4.4.1.1 Variazione di corto e lungo periodo dei parametri orbitali.

Di seguito verrà fornita una breve descrizione delle perturbazioni introdotte nel programma POLPO. Anche in questo caso, come già affermato nell'introduzione del problema Kepleriano, gli argomenti trattati sono molto vasti e complessi; per una trattazione più adeguata degli stessi, si rimanda il lettore alla consultazione dei libri di testo appositi POLPO([16], [19], [20], [21]).

La trattazione seguente si riferisce, nello specifico, agli effetti perturbativi che agiscono su un corpo orbitante attorno alla Terra.

4.4.2 Asimmetrie del campo gravitazionale Terrestre.

Come già più volte affermato, il problema dei due corpi Kepleriano prevede un modello del corpo attrattore, in questo caso la Terra, perfettamente sferico, con una distribuzione omogenea della densità. In realtà, il pianeta Terra non è né sferico né presenta una distribuzione omogenea della massa; bensì, presenta le seguenti caratteristiche, riscontrate tramite osservazioni satellitari:

- Oblateness = $1/298.2$
- Eccentricità all'equatore = 1.14×10^{-5}

Lo schiacciamento ai poli (*oblateness*) viene definito come differenza fra raggio equatoriale e raggio polare, rapportato al raggio equatoriale. L'eccentricità dell'equatore viene definita come rapporto fra la semi distanza focale ed il semiasse maggiore. In particolare si hanno i seguenti valori caratteristici:

- Differenza tra raggio polare ed equatoriale di circa 21,384 km
- Differenza tra semiasse maggiore e minore all'equatore di circa 145 m

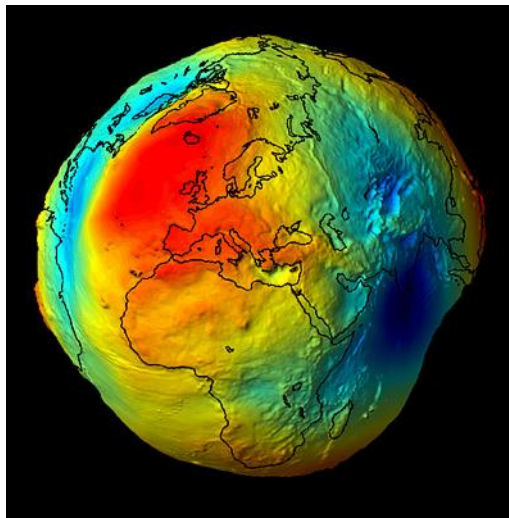


Fig.4.4.2.1 Geoide: superficie perpendicolare, in ogni punto, alla forza di gravità terrestre.

Questa evidente discrepanza, visibile in **Fig.4.4.2.1**, tra il modello gravitazionale Terrestre del problema Kepleriano e le effettive caratteristiche del pianeta Terra è all'origine dell'azione perturbativa legata alle asimmetrie del campo gravitazionale Terrestre.

Risulta, quindi evidente la necessità di definire un modello di campo gravitazionale terrestre più realistico.

L'accelerazione agente sul corpo orbitante dovuta all'attrazione gravitazionale del corpo primario si ottiene, essendo quest'ultimo un campo conservativo, solenoidale ed irrotazionale, calcolando il gradiente del potenziale gravitazionale.

Per tener conto delle effettive condizioni del campo gravitazionale terrestre, dunque, si definisce modello un semi-analitico del potenziale terrestre, che tenga conto dell'asfericità della Terra, dell'ellitticità all'equatore e delle altre differenze tra il campo gravitazionale reale e il modello di campo gravitazionale sferico.

Tale potenziale è ottenuto a partire dal potenziale del campo gravitazionale di un corpo perfettamente sferico al quale viene sommata una serie di armoniche sferiche che soddisfa l'equazione di Laplace nello spazio vuoto.

In definitiva, l'espressione per il potenziale del campo gravitazionale terrestre che non presenta alcuna simmetria sferica, è espresso dalla relazione seguente [19]:

$$U(r, \lambda, \delta) = \frac{\mu_{\oplus}}{r} \left[1 - \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left(\frac{R_{\oplus}}{r} \right)^n [C_{nm} \cos(m\lambda) + S_{nm} \sin(m\lambda)] P_{nm}(\sin \delta) \right] \quad (4.6)$$

Con:

μ_{\oplus}	parametro gravitazionale terrestre
r	distanza radiale del corpo dal centro di massa del corpo attrattore
R_{\oplus}	raggio Equatoriale terrestre
n	grado dell'armonica
m	ordine dell'armonica
λ	longitudine del corpo
δ	declinazione del corpo
C_{nm} e S_{nm}	coefficienti sperimentali dello sviluppo per le armoniche sferiche
P_{nm}	funzioni associate di Legendre

Dove :

$$P_{nm}(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d(1-x^2)^{\frac{m}{2}}}{dx} \frac{d^{(n+m)}(x^2-1)^n}{dx^{(n+m)}}$$

Rappresentano le funzioni associate di Legendre.

Talvolta, per esigenze numeriche, le espressioni delle funzioni associate di Legendre e dei coefficienti C_{nm} e S_{nm} , vengono opportunamente normalizzate nel modo seguente:

$$\begin{aligned}\bar{C}_{nm} &= \sqrt{\frac{(n+m)!}{(2n+1)k(n-1)!}} C_{nm} \\ \bar{S}_{nm} &= \sqrt{\frac{(n+m)!}{(2n+1)k(n-1)!}} S_{nm} \\ \bar{P}_{nm} &= \sqrt{\frac{(2n+1)k(n-1)!}{(n+m)!}} P_{nm}\end{aligned}$$

Con

$$k = \begin{cases} 1 & \text{se } m = 0 \\ 2 & \text{se } m \neq 0 \end{cases}$$

I valori dei coefficienti normalizzati \bar{C}_{nm} ed \bar{S}_{nm} sono contenuti in tabelle in funzione del grado n e dell'ordine m .

Dal confronto tra il potenziale descritto dalla (4.6) ed il potenziale associato al modello di Terra perfettamente sferica :

$$U = \frac{\mu_{\oplus}}{r}$$

Si deduce l'espressione del potenziale "perturbativo", che definisce gli effetti legati alle differenze tra i due modelli:

$$V(r, \lambda, \delta) = \frac{\mu_{\oplus}}{r} \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left(\frac{R_{\oplus}}{r}\right)^n [C_{nm} \cos(m\lambda) + S_{nm} \sin(m\lambda)] P_{nm}(\sin \delta) \quad (4.7)$$

Il campo gravitazionale descritto dal potenziale della (4.7) si divide in zone a potenziale positivo e zone a potenziale negativo, a seconda dei valori assunti da n ed m . Le linee di separazione tra le zone potenziale positivo e le zone a potenziale negativo, corrispondono alle linee lungo le quali si annullano i valori dei P_{nm} .

A seconda dei valori assunti da n ed m , si utilizza la seguente nomenclatura per i coefficienti sperimentali C_{nm} e S_{nm} :

- Armoniche zonali $m = 0$ la dipendenza del potenziale dalla longitudine sparisce, ed il campo risulta simmetrico attorno all'asse polare. Per ogni valore di n esistono n cerchi di latitudine dove il valore dei P_{nm} si annullano, conseguentemente il campo si divide in $n+1$ zone, a potenziali alternativamente positivi e negativi.
- Armoniche settoriali $m = n$ I valori dei P_{nm} si annullano per $2n$ valori della longitudine, il campo è suddiviso, quindi, da $2n$ linee a longitudine costante, che definiscono $2n$ "spicchi" con valori alterni della funzione P_{nm} .
- Armoniche tesserali $m \neq n$ le zone a segni alterni per la funzione P_{nm} sono disposte con una configurazione a "tessere" quadrate.

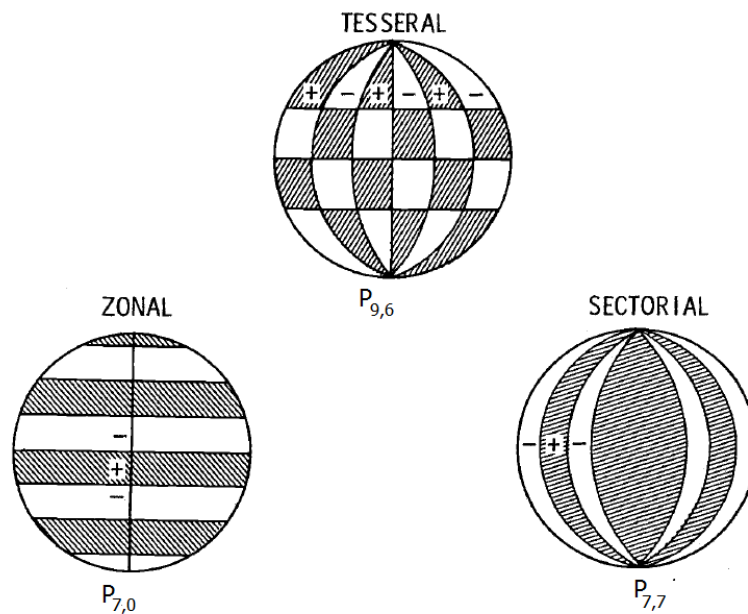


Fig.4.4.2.2 Funzione P_{nm} . al variare di n ed m .

Per armoniche zonali, in particolare, si definisce :

$$C_{n,0} = C_n = -J_n$$

La tabella di seguito riporta i valori delle armoniche zonali J_n fino ad $n = 7$; si noti come l'armonica J_2 risulti circa 400 volte più grande dell'armonica successiva, J_3 .

J_2	1.0826×10^{-3}
J_3	-2.5327×10^{-6}
J_4	-1.6196×10^{-6}
J_5	-2.2730×10^{-7}
J_6	5.4868×10^{-7}
J_7	-3.5236×10^{-7}

Tab.4.4.2.1. Valori delle prime armoniche zonali terrestri.

Calcolando il gradiente della (4.7) è possibile ottenere l'espressione delle componenti dell'accelerazione perturbativa dovute alle asimmetrie del campo gravitazionale terrestre:

$$\mathbf{a}_p = \nabla V$$

Introduciamo la terna $\hat{\mathbf{i}}_r, \hat{\mathbf{i}}_\lambda, \hat{\mathbf{i}}_\delta$:

La terna è sistema di riferimento di coordinate sferiche, la cui origine coincide, istante per istante, con il baricentro del corpo orbitante.

Il versore $\hat{\mathbf{i}}_r$ è diretto ed orientato come il vettore posizione del corpo orbitante nel sistema di riferimento con origine nel corpo attrattore. Il versore $\hat{\mathbf{i}}_\delta$, appartiene al piano del meridiano locale contenente il corpo secondario, è ortogonale a $\hat{\mathbf{i}}_r$ e diretto in modo tale che risulti $\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{i}}_\delta \geq 0$. Infine, il versore $\hat{\mathbf{i}}_\lambda$ è perpendicolare al piano del meridiano locale e orientato in modo da formare una terna levogira.

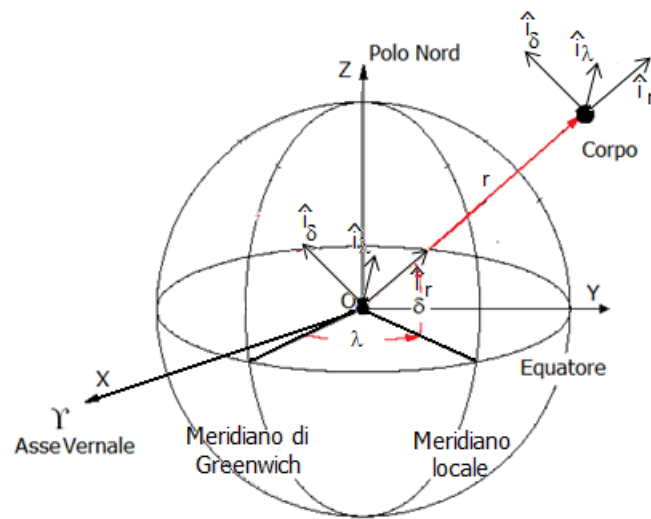


Fig.4.4.2.3 Terna $\hat{i}_r, \hat{i}_\lambda, \hat{i}_\delta$

Rispetto alla terna appena introdotta, il gradiente in coordinate sferiche: è così definito:

$$\Delta = \begin{cases} \hat{I}r) \frac{\partial}{\partial r} \\ \hat{I}\lambda) \frac{1}{r \cdot \cos(\delta)} \cdot \frac{\partial}{\partial \lambda} \\ \hat{I}\delta) \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial \delta} \end{cases}$$

In forma esplicita:

Direzione radiale \hat{i}_r :

$$a_r = \frac{\mu}{r^2} V - \frac{\mu}{r} \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=0}^n (-n R_{Terra}^n r^{-(n+1)}) (C_{nm} \cos(m\lambda) + S_{nm} \sin(m\lambda)) P_{nm}(\sin \delta)$$

Direzione longitudine crescente \hat{i}_λ :

$$a_\lambda = \frac{\mu}{r^2} \frac{m}{\cos \delta} \left[\sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left(\frac{R_{Terra}}{r} \right)^n (S_{nm} \cos(m\lambda) - C_{nm} \sin(m\lambda)) P_{nm}(\sin \delta) \right]$$

Direzione declinazione crescente \hat{l}_δ :

$$a_\delta = \left[\left(\frac{1}{2^n n!} \frac{d(1-x^2)^{\frac{m}{2}}}{dx} \frac{d^{(n+m)}(1-x^2)^n}{dx^{(n+m)}} + \frac{(1-x^2)^{\frac{m}{2}}}{2^n n!} \frac{d^{(n+m+1)}(x^2-1)^n}{dx^{(n+m+1)}} \right) \cos \delta \right] \cdot \frac{\mu}{r} \left[\sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left(\frac{R_{Terra}}{r} \right)^n (C_{nm} \cos(m\lambda) + S_{nm} \sin(m\lambda)) \right]$$

Effetti legati allo schiacciamento dei poli terrestri: l'armonica zonale J_2

Dai valori riportati in **Tab.4.4.2.1**, appare evidente come l'effetto dell'armonica zonale J_2 sia il preponderante rispetto alle altre armoniche zonali.

L'armonica J_2 è associata all'effetto dello schiacciamento dei poli terrestri, come mostrato nella figura seguente:

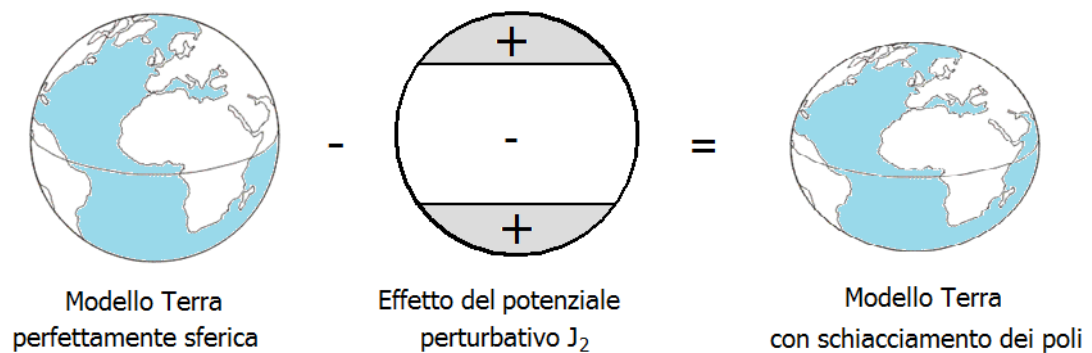


Fig.4.4.2.3 Effetto del potenziale perturbativo J_2 .

La formula esplicita del potenziale perturbativo dovuto all'armonica zonale J_2 è la seguente:

$$V_{J_2} = -\frac{\mu_\oplus}{r} J_2 \left(\frac{R_\oplus}{r} \right)^2 \cdot \left(\frac{3}{2} \sin^2(\delta) - \frac{1}{2} \right)$$

Da cui si ottiene l'accelerazione perturbativa, nel sistema di riferimento RTN:

$$\mathbf{a}_{pJ_2} = -\frac{\mu_{\oplus}}{r^4} \cdot J_2 \cdot 3R_{\oplus}^2 \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \sin^2(i) \sin^2(u) \right) \\ \sin^2(i) \sin(u) \cos(u) \cdot \\ \cos(i) \sin(i) \sin(u) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{i}}_R \\ \hat{\mathbf{i}}_T \\ \hat{\mathbf{i}}_N \end{bmatrix}$$

Come si nota dall'espressione sopra, l'accelerazione perturbativa J_2 agisce su tutti e tre le direzioni del sistema di riferimento RTN; se ne deduce che tale perturbazione influenza tutti i parametri orbitali.

Nello specifico, per effetto dello schiacciamento dei poli terrestri, tutti i parametri orbitali subiranno delle oscillazioni di *corto periodo*, ma solo la RAAN Ω e l'argomento del perigeo subiranno variazione secolare ω .

Le formule seguenti forniscono una stima della variazione media della RAAN e dell'argomento del perigeo, per effetto dell'armonica zonale J_2 :

$$\bar{\dot{\Omega}} = -\frac{3}{2} \cdot J_2 \cdot \bar{n} \cdot \left(\frac{R}{p} \right)^2 \cos(i) \quad (4.8)$$

$$\bar{\dot{\omega}} = \frac{3}{2} \cdot J_2 \cdot \bar{n} \cdot \left(\frac{R}{p} \right)^2 \left(2 - \frac{5}{2} \sin^2(i) \right) \quad (4.9)$$

Con

$$\bar{n} \cong n = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}$$

Velocità angolare media, in prima approssimazione coincidente con il *moto medio* n .

Il segno negativo a secondo membro della (4.8) indica che, per orbite posigrade, l'effetto dell'armonica J_2 determina una diminuzione della RAAN, ovvero una rotazione oraria della linea dei nodi (precessione della linea dei nodi).

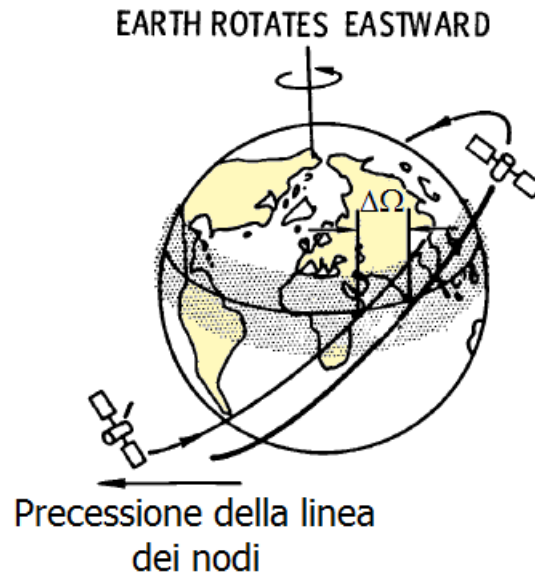


Fig.4.4.2.4 Precessione della linea dei nodi per effetto del potenziale perturbativo J_2 .

Per quanto riguarda la variazione dell'argomento del perigeo, la (4.9) si annulla per due valori di inclinazione i ($i_1 = 63.43^\circ$, $i_2 = 116.57^\circ$), che identificano, quindi, le due inclinazioni orbitali critiche in corrispondenza delle quali l'effetto dello schiacciamento dei poli terrestri non determina nessuna variazione secolare dell'argomento del perigeo. In definitiva, le variazioni dei parametri orbitali classici per effetto dell'armonica zonale J_2 sono riassunte dalle seguenti relazioni[16]:

$$\Omega = \Omega_0 - \frac{3}{2} \cdot J_2 \cdot \bar{n} \cdot \left(\frac{R}{p}\right)^2 \cos(i)(t - t_0)$$

$$\omega = \omega_0 + \frac{3}{2} \cdot J_2 \cdot \bar{n} \cdot \left(\frac{R}{p}\right)^2 \left(2 - \frac{5}{2} \sin^2(i)\right) (t - t_0)$$

$$\bar{a} = a_0$$

$$\bar{e} = e_0$$

$$\bar{i} = i_0$$

4.4.3 Resistenza aerodinamica.

La resistenza atmosferica è una perturbazione particolarmente significativa per orbite basse .Il calcolo preciso delle forze che si generano dall'interazione del corpo orbitante al contatto con l'atmosfera circostante è affetto da diverse incertezze legate a :

- Forma ed orientamento relativo del satellite rispetto all'atmosfera che lo circonda
- Difficile stima delle caratteristiche dell'atmosfera alle quote di interesse per i voli spaziali, in quanto variabili per effetto dell'attività solare e geomagnetica.
- Condizione di aria rarefatta in alta atmosfera; l'aria, ad alte quote, non può essere approssimata come mezzo continuo.
- Possibile ionizzazione dell'atmosfera; può portare ad una complessa interazione tra le superfici esposte e l'atmosfera circostante.

La forza agente sul satellite per effetto della resistenza atmosferica è opposta alla velocità relativa del satellite, e modifica la forma dell'orbita. Per definire l'effetto di tale perturbazione sul moto del satellite, generalmente, si suddivide la risultante della forza atmosferica in due direzioni: la direzione del versore velocità relativa satellite – atmosfera e la direzione ad essa relativa.

$$F_{ATM} = F_{ATM\parallel} \cdot \hat{v}_{a\parallel} + F_{ATM\perp} \cdot \hat{v}_{a\perp} = -D \cdot \hat{v}_{a\parallel} + L \cdot \hat{v}_{a\perp}$$

Dove la lettera D sta ad indicare la parola “*Drag*”(Resistenza) e la lettera “L” sta per “*Lift*”(portanza).

La resistenza atmosferica, dunque, è per sua stessa definizione opposta alla direzione della velocità relativa satellite-atmosfera. Per quanto riguarda la portanza, questa assume valori del tutto trascurabili per i satelliti, i quali sono solitamente assimilabili a corpi tozzi, ovvero privi di caratteristiche aerodinamiche che promuovano lo sviluppo di forze di portanza.Purtroppo, una precisa espressione della velocità relativa satellite-atmosfera è di difficile definizione, in quanto dipende dalla dinamica dell'atmosfera in alta quota. Una possibile scelta è quella di considerare l'atmosfera terrestre solidale al pianeta Terra, e quindi rotante con velocità angolare pari alla velocità angolare terrestre ($\omega_{\oplus} = 0.7292 \times 10^{-4}$ rad/sec).

Sotto questa ipotesi, la velocità relativa satellite-atmosfera, può esprimersi tramite la relazione :

$$\mathbf{v}_a = \mathbf{v} - \boldsymbol{\omega}_{\oplus} \times \mathbf{r}$$

Dove \mathbf{r} e \mathbf{v} sono i vettori posizione e velocità del satellite sulla sua orbita attorno alla Terra, mentre $\boldsymbol{\omega}_{\oplus} = \omega_{\oplus} \hat{\mathbf{k}}$.

A partire da tale ipotesi, una semplice formulazione dell'accelerazione perturbativa dovuta alla resistenza atmosferica è la seguente:

$$\mathbf{a}_{drag} = -\frac{D \cdot \hat{\mathbf{v}}_{a||}}{m} = -\frac{1}{2} \cdot \rho \cdot \frac{A}{m} \cdot C_D \cdot v_a \cdot \hat{\mathbf{r}}_a \quad (4.10)$$

$$v_A = |\dot{\mathbf{r}}_A|$$

$$\dot{\mathbf{r}}_A = \begin{cases} \dot{x} + \omega_{\oplus} y \\ \dot{y} - \omega_{\oplus} x \\ \dot{z} \end{cases}$$

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = \begin{cases} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{cases}$$

$$\mathbf{r} = \begin{cases} x \\ y \\ z \end{cases}$$

Dove:

ρ	densità atmosferica alla quota di volo
m	massa del satellite
C_D	coefficiente di resistenza aerodinamica; dipende dalla superficie A.
A	sezione del satellite perpendicolare alla direzione del moto
\mathbf{r}	vettore posizione nel sistema di riferimento inerziale IJK
\mathbf{v}	vettore velocità nel sistema di riferimento inerziale IJK

Il coefficiente di resistenza aerodinamica dipende dalla forma e dall'orientazione del satellite rispetto alla direzione della velocità relativa satellite-atmosfera; in generale, per satelliti in orbita al di sopra dei 200km di quota, il coefficiente di resistenza vale circa 2.2 per satelliti sferici e circa 3 per satelliti cilindrici, ed assume un valore intermedio per le altre possibili forme.

Come appare evidente dall'espressione (4.10), l'accelerazione dovuta alla resistenza atmosferica dipende esplicitamente dalla densità; conseguentemente la scelta del modello atmosferico da utilizzare è particolarmente importante per ottenere una buona stima degli effetti dell'atmosfera sul moto del satellite. A tal riguardo, esistono molti modelli di atmosfera, periodicamente aggiornati, forniti da enti specializzati nello studio dell'*environment* spaziale.

Per quanto riguarda l'impatto dell'azione aerodinamica sui parametri orbitali, bisogna tener presente che la forza di attrito aerodinamico è una forza dissipatrice e conseguentemente la sua azione sul satellite diminuisce l'energia meccanica specifica del satellite stesso.

L'energia meccanica specifica, che nel moto kepleriano puro rappresenta una costante del moto, è direttamente associata ai valori di semiasse maggiore tramite la relazione :

$$\varepsilon = -\frac{\mu}{2a}$$

In definitiva, la diminuzione dell'energia meccanica per effetto della resistenza atmosferica, si ritraduce in una diminuzione del semiasse maggiore e dell'eccentricità dell'orbita; come già discusso in precedenza, il semiasse maggiore e l'eccentricità rappresentano i parametri orbitali classici che caratterizzano la forma dell'orbita, conseguentemente possiamo affermare che l'azione della resistenza atmosferica, modifica l'orbita del satellite.

Nello specifico, sia il semiasse maggiore che l'eccentricità tendono a diminuire, determinando una circolarizzazione dell'orbita e una perdita di quota operativa del satellite.

Quando l'eccentricità è ormai prossima allo zero, la progressiva diminuzione del semiasse maggiore, determina un moto a spirale del satellite, che si protrae finché la crescente densità atmosferica porta alla frammentazione dello spacecraft stesso, sotto l'effetto dei carichi termici e meccanici.

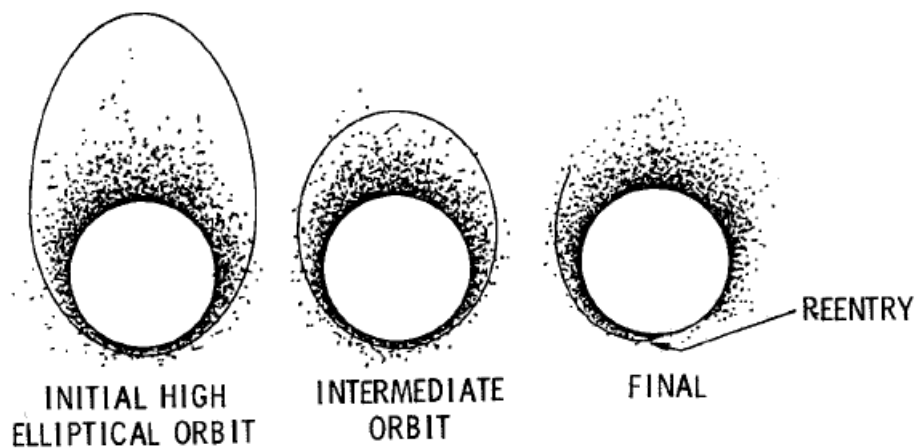


Fig.4.4.3.1 Effetto della resistenza atmosferica sulla forma dell'orbita

Le relazioni seguenti forniscono la variazione secolare del semiasse maggiore a e dell'eccentricità e , dovute all'azione della resistenza atmosferica[16]:

$$\Delta a = -\frac{A C_D a^2}{m} \cdot \int_0^{2\pi} \rho \cdot \frac{(1 + e \cos E)^{3/2}}{(1 - e \cos E)^{1/2}} dE \quad (4.11)$$

$$\Delta e = -\frac{A C_D a}{m} \cdot (1 - e^2) \cdot \int_0^{2\pi} \rho \cdot \frac{(1 + e \cos E)^{1/2}}{(1 - e \cos E)^{1/2}} \cos E dE \quad (4.12)$$

Dove :

$$E = 2 \arctan \left(\sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \tan \left(\frac{\nu}{2} \right) \right)$$

Rappresenta l'"anomalia eccentrica" dell'orbita.

Le (4.11) e (4.12) si risolvono numericamente, una volta scelto il modello di densità.

Per orbite ellittiche, si dimostra facilmente, che[16]:

$$\left. \frac{r_a}{r_p} \right|_{t_0} > \left. \frac{r_a}{r_p} \right|_{t_1}$$

Ovvero, il rapporto tra raggio di apogeo e raggio di perigeo diminuisce col passare del tempo. Questo si identifica con una maggiore diminuzione del raggio di apogeo rispetto al raggio di perigeo; in definitiva, durante la circolarizzazione dell'orbita, la maggior parte della diminuzione del semiasse maggiore è legata alla diminuzione del raggio di apogeo. Questo fenomeno sarà ben riscontrabile nei risultati ottenuti dalle analisi svolte nella presente tesi (Capitolo 7).

4.4.4 Luni-solar effect.

Una delle ipotesi alla base della formulazione del problema dei due corpi kepleriano consiste nel considerare il corpo secondario sottoposto all'azione gravitazionale del solo corpo primario, trascurando l'attrazione gravitazionale di qualsiasi altro corpo dell'ambiente spaziale. Questa approssimazione diventa molto pesante per satelliti che operano in orbite alte, ma non può essere trascurata nemmeno per satelliti che propagano per lunghi periodi in orbite basse.

Per un realistico studio del moto dei satelliti attorno alla Terra, è necessario tener presente anche l'effetto dell'attrazione esercitata dalla Luna e dal Sole.

L'accelerazione gravitazionale a cui è sottoposto il satellite orbitante attorno alla Terra, per effetto della presenza del terzo corpo Sole e Luna è espressa dalle seguenti relazioni:

$$\mathbf{a}_{p\odot} = -\mu_{\odot} \left(\frac{\mathbf{r}_{\odot S}}{r_{\odot S}^3} - \frac{\mathbf{r}_{\odot \oplus}}{r_{\odot \oplus}^3} \right) \quad \text{accelerazione perturbativa dovuta al Sole}$$

$$\mathbf{a}_{p\text{L}} = -\mu_{\text{L}} \left(\frac{\mathbf{r}_{\text{L}S}}{r_{\text{L}S}^3} - \frac{\mathbf{r}_{\text{L}\oplus}}{r_{\text{L}\oplus}^3} \right) \quad \text{accelerazione perturbativa dovuta alla Luna}$$

Dove la simbologia è definita in **Fig.4.4.4.1**.

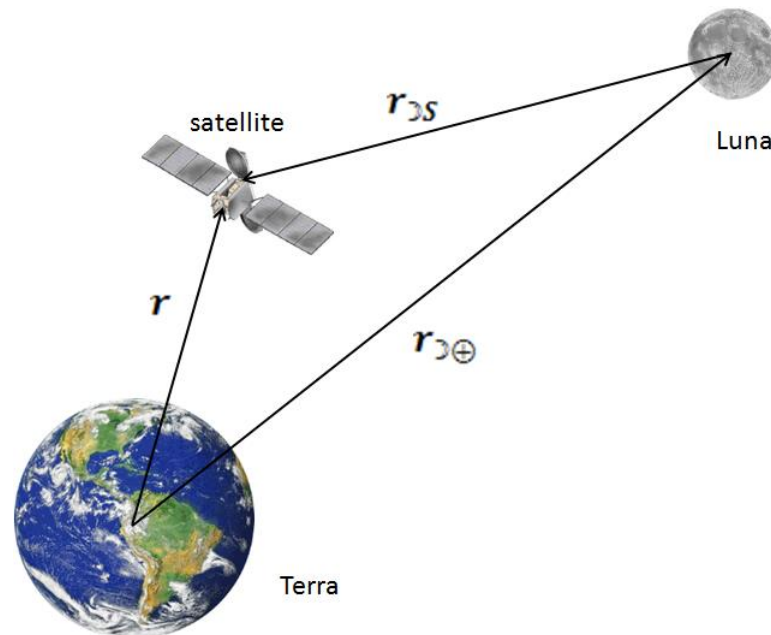


Fig.4.4.4.1 Definizione dei vettori posizione per lo studio dell'attrazione gravitazionale del "terzo corpo" Luna sul satellite(modello non in scala)

Per quanto riguarda l'impatto sui parametri orbitali, la forza di attrazione gravitazionale esercitata dal terzo corpo è comunque una forza conservativa (il terzo corpo è considerato perfettamente sferico), e conseguentemente non avremo dissipazione dell'energia meccanica specifica, né variazioni nella forma dell'orbita (ovvero non avremo variazione dei parametri orbitali di semiasse maggiore ed eccentricità dell'orbita del satellite).

Le maggiori variazioni secolari coinvolgono la RAAN e l'argomento del perigeo, e sono così stimate[23]:

$$\bar{\Omega}_{moon} = -0.00338 \frac{\cos(i)}{n} \quad \bar{\Omega}_{sun} = -0.00154 \frac{\cos(i)}{n}$$

$$\bar{\omega}_{moon} = 0.00169 \frac{4 - 5\sin^2(i)}{n} \quad \bar{\omega}_{sun} = 0.00077 \frac{4 - 5\sin^2(i)}{n}$$

4.4.5 Pressione solare.

La pressione solare è un disturbo legato alla forza esercitata sulla superficie esterna del satellite da parte di radiazioni elettromagnetiche che vi incidono.

Fisicamente, un'onda (o radiazione elettromagnetica) è costituita da campi magnetici ed elettrici che oscillano perpendicolarmente l'uno rispetto all'altro ed entrambi rispetto alla direzione di propagazione dell'onda.

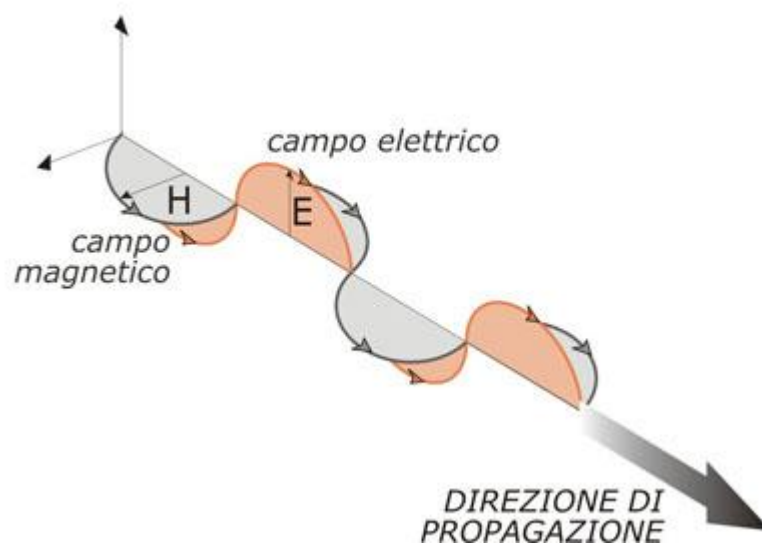


Fig.4.4.5.1 Propagazione di un'onda elettromagnetica

Le radiazioni elettromagnetiche si propagano alla velocità della luce

($c \triangleq 299792458$ m/s), esercitando una pressione sulla superficie investita, pari a :

$$P = \frac{\Phi_E}{c} \quad (4.13)$$

Dove Φ_E rappresenta il flusso di energia (ovvero l'energia per unità di area e di tempo). La (4.13) si applica a qualsiasi forma di radiazione elettromagnetica. Volendo restringere il campo di osservazione alle fonti di radiazioni a cui è soggetto un corpo orbitante attorno al pianeta Terra, la più importante è sicuramente la radiazione solare diretta.

Considerando il Sole come sorgente di radiazione, la pressione di radiazione solare P si può esprimere in funzione di r (distanza Terra-Sole) e del valore della pressione solare P_{\oplus} , misurata ad una distanza $r_{\oplus} = 1\text{AU}$ (distanza media Terra-Sole, $1\text{AU}=149597870.691\text{ km}$):

$$P_{\oplus} \triangleq 4.5632 \times 10^{-6} \text{ Pa}$$

Tramite la seguente relazione :

$$P = P_{\oplus} \left(\frac{r_{\oplus}}{r} \right)^2$$

Poiché l'orbita eliocentrica della Terra non è perfettamente circolare, il valore della pressione solare varia, durante un anno terrestre con un'escursione di circa il 6% rispetto al valore medio di P_{\oplus} .

Oltre alla stima del valore di pressione di radiazione solare, lo studio dell'effetto della radiazione solare sui corpi orbitanti richiede il calcolo della parte di superficie del corpo effettivamente esposta alla radiazione solare; tale calcolo è integralmente riportato in Appendice A.

Va comunque detto che il modello di pressione di radiazione solare esposto è molto semplicistico, modelli più realistici per la stima della radiazione solare diretta utilizzano dati tabulati che contengono previsioni sull'attività solare e sulla ricorrenza delle fasi di maggiore attività solare.

Tuttavia, limitandoci agli scopi perseguiti nella presente tesi, si ritiene il modello esposto soddisfacente, sulla base di un'analisi preliminare svolta sull'influenza della perturbazione dovuta alla radiazione diretta del Sole sulla fase propagazione di AVUM [15].

CAPITOLO 5

INTEGRATORE.

Il metodo numerico utilizzato per il calcolo integrale è Runge-Kutta del settimo ordine a passo variabile(RK7/8); l'integratore, come tutto il programma *P.O.L.P.O.*, è stato realizzato in codice Fortran.

Prima della realizzazione dell'integratore nella sua forma definitiva, il lavoro si è articolato in diverse fasi che hanno portato alla scelta sia del metodo integrativo che del codice di scrittura del programma completo. Tali scelte, infatti, risultano contestuali alla realizzazione della parte fondamentale del programma, ovvero l'integratore, in quanto è quest'ultimo a definire in parte maggioritaria l'entità dei tempi di calcolo e le precisioni raggiunte durante la simulazione.

La necessità di articolare il lavoro in più fasi è dettata, inoltre, dalla scelta di un approccio *ex-novo* per la realizzazione di tutte le parti del programma *P.O.L.P.O.*; questo tipo di approccio, che non utilizza alcuna parte di programmi già esistenti, necessita di diversi confronti con dati attendibili, atti a convalidarne l'effettiva attendibilità.

A conclusione di ogni fase, quindi, si è effettuato un *cross-check* tra una serie di dati considerati "attendibili" e lo stesso tipo di dati ottenuti dall'integratore realizzato durante la fase di lavoro appena conclusa.

L'insieme delle scelte affrontate durante la realizzazione dell'integratore, nonché i dati sui quali ci si è basati per effettuarle è riportato nei seguenti paragrafi, seguendo lo stesso ordine logico con il quale ci si è trovati a doverle affrontare.

5.1 Scelta del metodo integrativo.

Essendo le equazioni del moto della meccanica celeste, qui trattate, descritte da equazioni differenziali ordinarie (*“Ordinary Differential Equation”*, ODE), la ricerca del metodo integrativo è verta ai soli metodi numerici specifici per l'approssimazione della soluzione di questo tipo di equazioni; i metodi Runge-Kutta rappresentano un'importante famiglia di metodi numerici appartenenti a tale categoria.

I metodi Runge-Kutta (RK) si configurano come metodi iterativi discreti a singolo step (*“one-step”*) per ODE; essi forniscono l'approssimazione della soluzione di un'equazione differenziale (o più precisamente di un problema ai valori iniziali, i.e. *“Cauchy problem”*) in un insieme discreto di punti in cui si considera il problema.

Le motivazioni che hanno spinto specificatamente alla scelta di questa famiglia di metodi numerici sono da ricercare nei testi che racchiudono approfondite valutazioni sull'applicabilità dei metodi RK ai problemi di meccanica celeste oggetto della presente tesi,[1]-[2]-[3].

5.2 Il metodo numerico Runge-Kutta.

Il generico problema differenziale da risolvere tramite l'utilizzo dei metodi RK è espresso nella seguente forma:

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \quad t \in [t_0, t_f]$$

Il metodo RK prevede la preliminare suddivisione dell'intervallo temporale di integrazione in *step* (Δt o h , dove h viene definito *“passo di integrazione”*), ovvero la definizione di un insieme di punti t_i dove $i = 0, \dots, n$.

L'insieme dei punti t_i così definito rappresenta l'insieme discreto dei punti in corrispondenza dei quali viene calcolata la soluzione approssimata. Per il metodo RK classico gli *step* vengono definiti tutti uguali, in base alla seguente relazione:

$$h = \frac{t_f - t_0}{n}$$

In questo caso il metodo viene detto “*a passo fisso*”.

Gli n *step* possono anche non essere tutti uguali, ma variare in ragione di un opportuno algoritmo, in tal caso il metodo viene detto “*a passo variabile*”.

Per ognuno dei punti t_i dell'insieme discreto:

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot \sum_{j=1}^s b_j \cdot k_j$$

Dove :

$$k_1 = f(t_i, y_i)$$

$$k_2 = f(t_i + c_2 \cdot h, y_i + a_{21} \cdot k_1 \cdot h)$$

$$k_3 = f(t_i + c_3 \cdot h, y_i + a_{31} \cdot k_1 \cdot h + a_{32} \cdot k_2 \cdot h)$$

...

$$k_s = f(t_i + c_s \cdot h, y_i + h \cdot \sum_{j=1}^{s-1} a_{s,j} \cdot k_j)$$

Con a_{ij} , b_i e c_i costanti del metodo e y_{i+1} approssimazione RK della soluzione per l'istante t_{i+1} .

In definitiva, partendo dalla soluzione all'istante i -esimo, si costruiscono le k_i , ovvero le s valutazioni intermedie della $f(t, y(t))$ tra l'istante t_i e t_{i+1} . Una volta calcolate le k_i , la soluzione all'istante successivo si ottiene dalla soluzione attuale alla quale vengono sommate le valutazioni intermedie, opportunamente pesate dai coefficienti b_i e moltiplicate per il passo d'integrazione h .

In generale, quindi, il metodo RK sarà caratterizzato dai tre parametri : a_{ij} con $i, j = 1, 2, \dots, s$, b_i con $i = 1, 2, \dots, s$ e c_i con $i = 2, \dots, s$; dove s è il numero di valutazioni della funzione per ogni *step*, caratteristico dell'ordine di RK utilizzato.

I parametri sono generalmente rappresentati nel seguente schema mnemonico (*Butcher tableau*):

0					
c_2	a_{21}				
c_3	a_{31}	a_{32}			
\vdots	\vdots		\ddots		
c_s	a_{s1}	a_{s2}	\dots	a_{s-1}	
	b_1	b_2	\dots	b_{s-1}	b_s

Tab. 5.2.1 *Butcher tableau* per metodi RK a passo variabile.

Il calcolo dettagliato dei valori numerici dei parametri, nonché le tabelle dei parametri stessi per i vari ordini di RK sono riportati in [1].

Il numero di valutazioni della funzione s , nonché i valori dei parametri a , b e c , variano con l'ordine del RK il quale a sua volta è indicativo dell'entità dell'errore tra la soluzione approssimata e quella esatta: per RK di ordine m , l'errore per *step* sarà dell'ordine $(0)h^{m+1}$. In generale, quindi, maggiore sarà il numero delle valutazioni intermedie della funzione (ovvero maggiore s e ordine di RK), minore sarà l'errore di approssimazione della soluzione.

Ad esempio, per RK del settimo ordine (RK7) sono necessarie 10 valutazioni della funzione ($s = 10$) e l'errore per *step* sarà dell'ordine $(0)h^8$.

Notiamo, infine, che la funzione y_i può essere sia una funzione scalare che vettoriale; in questo secondo caso, definita m la dimensione del vettore y_i , k_{ij} sono elementi di una matrice rettangolare con $i = 1, 2, \dots, s$ e $j = 1, 2, \dots, m$.

5.3 Realizzazione del RK4 e Scelta del codice.

Per la realizzazione dell'integratore, nonché del programma P.O.L.P.O nella sua forma integrale, si sono presi preliminarmente in considerazione due dei più diffusi e importanti codici di programmazione in uso nel settore: Matlab e Fortran.

Al fine di stabilire quale dei due codici rappresentasse la scelta più vantaggiosa, il lavoro, nella sua prima fase, si è focalizzato sulla comparazione dei tempi calcolo necessari per entrambi i codici per simulare lo stesso problema differenziale utilizzando il metodo integrativo RK4 a passo fisso.

Per effettuare ciò si è realizzato *ex-novo* un integratore RK4 a passo fisso in codice Fortran, allo scopo di confrontarne le potenzialità con il corrispondente integratore ODE4 presente nella libreria delle funzioni Matlab. In questa prima fase non si dispone di dati oggettivamente “attendibili” per il confronto e la validazione dei dati, ma si procede in termini di coerenza dei dati ottenuti dall’integrazione con entrambi i codici; l’effettiva validità dei risultati è stata inoltre verificata tramite analisi dei dati ottenuti in termini di riscontro di “dati attesi”, ovvero la costanza di alcune invarianti del moto, caratteristiche del problema differenziale preso in esame.

E’ in questa fase, inoltre, che i risultati ottenuti vengono analizzati allo scopo di fornire indicazioni su quale dei due codici sia caratterizzato da tempi di calcolo minori per il tipo di problema differenziale affrontato.

5.3.1 Problema differenziale : il problema dei due corpi kepleriano.

Il problema differenziale analizzato durante questo confronto è il classico e ben noto problema dei due corpi Kepleriano, definito nel modo seguente :

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{y}(t)'' = \vec{a}(t) = -\frac{\mu}{\|\vec{r}(t)\|^3} \cdot \vec{r}(t) \\ \vec{y}(t)' = \vec{v}(t) \\ \vec{y}(t) = \vec{r}(t) \\ C.I. \\ \vec{v}(t_0) = \vec{v}_0 \\ \vec{r}(t_0) = \vec{r}_0 \end{array} \right.$$

Dove :

$$\mu = 398600 \cdot E+09 \quad \text{Parametro gravitazionale terrestre}$$

Con a , v e r rispettivamente accelerazione, velocità e posizione del corpo secondario, che orbita attorno al corpo primario, in un sistema di riferimento inerziale con origine nel baricentro del corpo primario stesso.

Il corpo primario, in questo caso, è rappresentato dalla Terra.

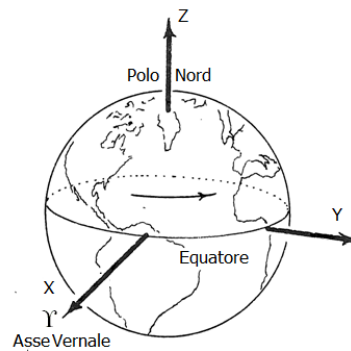


Fig. 5.3.1. Sistema di riferimento Geocentrico-Equaoriale (inerziale).

Poiché lo studio di collisione in orbita è uno degli obiettivi della presente tesi, i corpi considerati orbitanti attorno al corpo primario in questa trattazione saranno due: *Upper stage AVUM* e il suo *payload* di qualifica.

Conseguentemente, in questa trattazione, y è una funzione vettoriale di sei componenti, in quanto l'integrazione delle equazioni del moto dei due corpi orbitanti attorno alla Terra avviene in contemporanea; le prime tre componenti di y si riferiscono all'accelerazione del primo dei due corpi orbitanti attorno alla Terra (*AVUM*), e le altre tre componenti si riferiscono all'accelerazione del secondo corpo orbitante attorno alla Terra (*Payload*).

La scelta di definire un'unica funzione y , le cui componenti contengano i dati di entrambi i corpi orbitanti, da cui consegue la loro simultanea trattazione da un punto di vista risolutivo delle equazioni in gioco, è da ricercare in un evidente guadagno logistico derivante dalla possibilità di inizializzare contemporaneamente, per ogni *step*, tutte le variabili necessarie ai due problemi differenziali, ma è anche una scelta necessaria in vista dell'introduzione del passo adattativo; infatti, bisogna comunque garantire che la posizione dei due corpi orbitanti attorno alla Terra sia calcolata al medesimo istante altrimenti lo studio di eventuali collisioni in orbita, basato sul monitoraggio della reciproca distanza dei due corpi al trascorrere del tempo, richiederebbe un algoritmo di interpolazione dei dati, con ovvi svantaggi in termini di tempi di calcolo.

Di seguito viene indicata la designazione delle componenti della funzione y e delle sue derivate prima e seconda, in termini di posizione, velocità e accelerazione dei due corpi, così come utilizzata all'interno del codice; i numeri compresi tra le parentesi indicano la componente del vettore a cui ci si riferisce.

$$\begin{array}{ccc}
 \textit{posizioni} & \textit{velocità} & \textit{accelerazioni} \\
 \left\{ \begin{array}{l} \textit{corpo1} \\ y(1) = r1(1) \\ y(2) = r1(2) \\ y(3) = r1(3) \\ \textit{corpo2} \\ y(4) = r2(1) \\ y(5) = r2(2) \\ y(6) = r2(3) \end{array} \right. & \left\{ \begin{array}{l} \textit{corpo1} \\ y'(1) = v1(1) \\ y'(2) = v1(2) \\ y'(3) = v1(3) \\ \textit{corpo2} \\ y'(4) = v2(1) \\ y'(5) = v2(2) \\ y'(6) = v2(3) \end{array} \right. & \left\{ \begin{array}{l} \textit{corpo1} \\ y''(1) = a1(1) \\ y''(2) = a1(2) \\ y''(3) = a1(3) \\ \textit{corpo2} \\ y''(4) = a2(1) \\ y''(5) = a2(2) \\ y''(6) = a2(3) \end{array} \right.
 \end{array}$$

I dati di posizione e velocità iniziali utilizzati per le simulazioni, in quanto realistici, non verranno qui riportati nel rispetto del regolamento di tutela dei dati sensibili in vigore nell'azienda ELV.

Le simulazioni svolte in questa fase di realizzazione dell'integratore si riferiscono tutte ad un periodo di propagazione attorno alla Terra di 14 ore.

L'unico parametro variabile nelle simulazioni è il passo di integrazione h .

5.3.2 Cross-check RK4 Matlab – RK4 Fortran: validazione dati.

I risultati ottenuti dalle simulazioni di entrambi i codici di programmazione, a confronto, seppur non coincidenti, evidenziano un riscontro positivo. La differenza riscontrata tra i valori è plausibilmente attribuita ad inevitabili errori di troncamento introdotti durante il calcolo, dovuti ai limiti intrinseci nel calcolo numerico stesso. I due codici, infatti, eseguono un diverso numero di calcoli per ciclo, in quanto contengono un diverso numero di istruzioni; conseguentemente, gli errori di troncamento introdotti risultano sensibilmente differenti.

Le tabelle di seguito riassumono i massimi valori di errore riscontrati dal cross-check sui dati di posizione e velocità dell' *Upper stage AVUM* e il suo *payload* per il volo di qualifica; i dati si riferiscono ad una simulazione con passo fisso pari ad un millesimo di secondo.

AVUM						
Differenze nei dati calcolati con metodi integrativi RK4 in codice Fortran e codice Matlab						
	POSIZIONE [m]			VELOCITA' [m/s]		
	X	Y	Z	V _x	V _y	V _z
ordine di grandezza dei valori iniziali	1.00E+06			1.00E+03		
differenza massima	3.67E-02	5.78E-02	4.26E-02	5.20E-04	5.34E-04	5.22E-04

Tab. 5.3.2.1. Confronto tra metodi integrativi RK4 in codice Fortran e codice Matlab per *AVUM*.

PAYLOAD						
Differenze nei dati calcolati con metodi integrativi RK4 in codice Fortran e codice Matlab						
	POSIZIONE [m]			VELOCITA' [m/s]		
	X	Y	Z	V _x	V _y	V _z
ordine di grandezza dei valori iniziali	1.00E+06			1.00E+03		
differenza massima	2.85E-02	3.73E-02	6.13E-02	5.12E-04	5.22E-04	5.27E-04

Tab. 5.3.2.2. Confronto tra metodi integrativi RK4 in codice Fortran e codice Matlab per *payload*.

Come si può notare dalle tabelle sopra riportate, la differenza tra i due codici è maggiore sui dati relativi alla posizione. Questo risultato è da attribuire al fatto che il calcolo della posizione richiede un'integrazione in più per ogni *step* rispetto al calcolo delle velocità, determinando un errore di troncamento maggiore.

Alla luce dei risultati ottenuti dal riscontro, si ritiene garantita la validità dei dati ottenuti; come ulteriore conferma di ciò, il paragrafo seguente riporta i dati che attestano l'effettiva costanza di alcuni dei parametri invarianti del moto.

5.3.3 Cross-check RK4 Matlab – RK4 Fortran: scelta del codice.

Dalle simulazioni svolte si è evidenziata una notevole differenza tra i tempi di calcolo necessari ai due codici di programmazione per risolvere lo stesso problema differenziale; nello specifico, i tempi di calcolo registrati dalle simulazioni dell'integratore in codice Fortran risultano essere nettamente inferiori rispetto ai tempi di calcolo dell'integratore in codice Matlab.

Nella tabella seguente, a titolo di esempio, è riportato il confronto tra i tempi di calcolo per una simulazione pari a 10 ore di volo.

Passo	Tempi di calcolo	
	Fortran	Matlab
1.00E-02	10 sec	10 minuti

Tab. 5.3.3.1. Confronto dei tempi di calcolo tra codice Fortran e codice Matlab.

Come ulteriore criterio di scelta del codice di programmazione, si è effettuato un confronto tra le precisioni dei dati ottenuti da una medesima simulazione effettuata con entrambi i codici, basato sulla costanza di alcuni dei parametri orbitali, invarianti del moto kepleriano (esclusa l'anomalia vera).

Di seguito si riportano le differenze tra i valori di inizio e fine simulazione per un tempo di propagazione pari a 14 ore, sia per *AVUM* che per il suo *PAYLOAD*, relativi ai parametri orbitali per una simulazione con passo di integrazione h pari ad un millesimo di secondo. Si ricordi che, essendo il problema trattato un moto kepleriano puro, per sua stessa definizione non affetto da disturbi per l'orbita dei due corpi in moto attorno alla Terra, tali parametri orbitali devono rimanere costanti, ad eccezione dell'anomalia vera, qui di seguito non riportata.

	AVUM				
	ERRORE PARAMETRO ORBITALE				
PASSO 1,00E-03	semiasse [m]	inclinazione[deg]	eccentricità	ascensione retta[deg]	argomento perigeo[deg]
Matlab	-2.02E-03	-5.05E-11	1.53E-11	2.52E-12	1.27E-09
Fortran	-2.40E-06	4.12E-12	-1.17E-13	-2.33E-12	-9.52E-13
ordine di grandezza del valore iniziale	1.00E+09	1.00E+01	1.00E-02	1.00E+01	1.00E+02

Tab. 5.3.3.2. Errori sui parametri orbitali per *AVUM*.

		PAYLOAD			
		ERRORE PARAMETRO ORBITALE			
PASSO 1,00E-03	semiasse [m]	Inclinazione [deg]	eccentricità	ascensione retta[deg]	argomento perigeo[deg]
Matlab	-2.98E-03	1.12E-11	-4.78E-13	-8.93E-12	5.99E-09
Fortran	2.99E-06	2.77E-12	4.33E-13	7.08E-12	-3.49E-08
ordine di grandezza del valore iniziale	1.00E+09	1.00E+01	1.00E-02	1.00E+01	1.00E+02

Tab. 5.3.3.3. Errori sui parametri orbitali per *payload*.

Ciò che si deduce dai dati riportati nelle precedenti tabelle è che a parità di condizioni iniziali in termini di posizione e velocità, i dati ottenuti dal metodo di integrazione RK4 in codice Fortran risultano tendenzialmente più precisi.

Si evidenzia, inoltre, che l'errore maggiore è associato al calcolo del semiasse maggiore; questo dipende, probabilmente, dall'errore accumulato ad ogni passaggio per i punti dell'apogeo, dove la traiettoria ha una curvatura maggiore e richiederebbe *step* minori, e del perigeo in corrispondenza del quale, oltre alla curvatura maggiore si ha anche la massima velocità orbitale.

Dai dati registrati in questa fase, il vantaggio nella scelta del codice Fortran come codice di programmazione è risultata evidente, sia dal punto di vista della precisione dei dati ottenuti, sia dal punto di vista dei tempi di calcolo necessari per la conclusione della simulazione.

5.3.4 Analisi di sensibilità dei tempi di calcolo e della precisione di calcolo al variare del passo di integrazione.

Sin dalle prime fasi della realizzazione dell'integratore è apparso evidente l'importanza ricoperta dalla scelta ottimale del passo di integrazione allo scopo di ridurre i tempi di calcolo, tenendo sempre ben presente l'impatto di tale scelta sulla precisione dei dati ottenuti.

Una volta scelto il codice di programmazione, si è ritenuto opportuno effettuare uno studio, seppur sommario, della sensibilità del tempo di calcolo e dei dati ottenuti al variare del passo di integrazione h . Lo studio qui riportato ha lo scopo di fornire dei risultati di prima stima, utilizzando un metodo d'integrazione semplice, in modo da

poter effettuare un confronto con i dati di successiva analisi che verranno ottenuti con un metodo d'integrazione più raffinato.

Le simulazioni da cui sono tratti i seguenti dati si riferiscono a simulazioni con integratore RK4 a passo fisso in codice Fortran, il problema differenziale affrontato è lo stesso esposto nel paragrafo 4.3.1. Il periodo di propagazione simulato è pari a 14 ore e l'unico parametro variabile nelle simulazioni è il passo d'integrazione h .

In particolare, sono state svolte simulazioni con i seguenti passi:

- Passo_1 = 0.001 sec
- Passo_2 = 0.01 sec
- Passo_3 = 0.1 sec
- Passo_4 = 1 sec

La tabella sottostante riepiloga i tempi di calcolo registrati per ognuna delle simulazioni effettuate:

PASSO	TEMPO DI CALCOLO [sec]
1,00E+00	0.01
1,00E-01	1
1,00E-02	11
1,00E-03	107

Tab. 5.3.4.1. Tempi di calcolo per differenti passi di integrazione.

Sulla base di tali dati si è tracciato il seguente grafico:

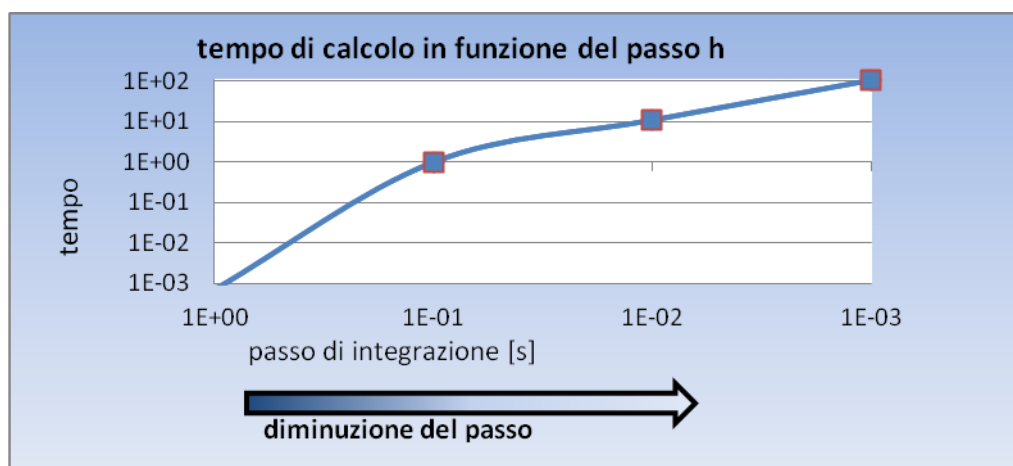


Fig. 5.3.4.1. Tempi di calcolo al variare del passo di integrazione.

Come atteso, all'aumentare del passo d'integrazione i tempi di calcolo aumentano sensibilmente, in ragione del fatto che aumentano anche gli *step* totali. Tuttavia, il grafico bi logaritmico non evidenzia una legge precisa di evoluzione del tempo di calcolo in funzione del passo di integrazione.

Dai dati ottenuti dalle simulazioni sono stati ricavati inoltre la sensibilità dell'errore commesso nel calcolo dei parametri orbitali, sia per *AVUM* che per il *payload*, al variare del passo di integrazione; i risultati ottenuti sono raccolti nelle tabelle e nei grafici che seguono:

AVUM					
ERRORE PARAMETRO ORBITALE					
PASSO	semiasse [m]	inclinazione[deg]	eccentricità	ascensione retta[deg]	argomento perigeo[deg]
1,00E+00	2.52E-07	3.13E-13	2.41E-14	-4.39E-14	2.29E-10
1,00E-01	-1.19E-07	3.98E-13	-1.20E-13	-5.83E-13	2.39E-13
1,00E-02	-1.84E-06	-1.78E-12	-3.04E-14	1.77E-12	-4.70E-11
1,00E-03	-2.40E-06	4.12E-12	-1.17E-13	-2.33E-12	-9.52E-13
ordine di grandezza del valore iniziale	1.00E+09	1.00E+01	1.00E-02	1.00E+01	1.00E+02

Tab. 5.3.4.2. Errore sui parametri orbitali per diversi passi di integrazione per *AVUM*.

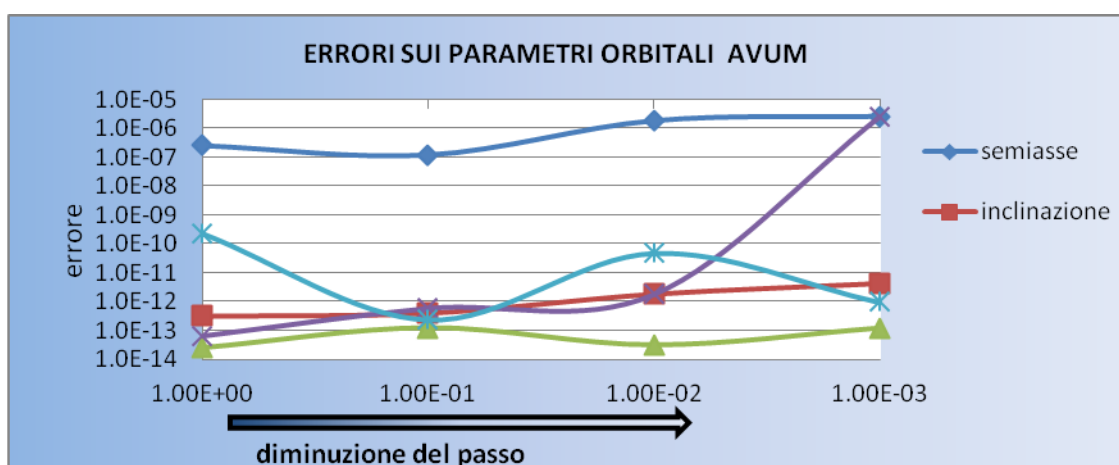


Fig. 5.3.4.2. Errore sui parametri orbitali al variare del passo di integrazione per *AVUM*.

LARES					
ERRORE PARAMETRO ORBITALE					
PASSO	semiasse [m]	Inclinazione [deg]	eccentricità	ascensione retta[deg]	argomento perigeo[deg]
1,00E+00	-2.37E-07	-1.54E-13	-1.54E-14	-5.90E-13	-7.51E-10
1,00E-01	2.49E-07	-8.53E-14	-4.43E-14	1.98E-12	7.49E-10
1,00E-02	-4.11E-07	-2.54E-12	2.05E-13	3.95E-12	4.93E-09
1,00E-03	2.99E-06	2.77E-12	4.33E-13	7.08E-12	-3.49E-08
ordine di grandezza del valore iniziale	1.00E+09	1.00E+01	1.00E-02	1.00E+01	1.00E+02

Tab. 5.3.4.3. Errore sui parametri orbitali per diversi passi di integrazione per *payload*.

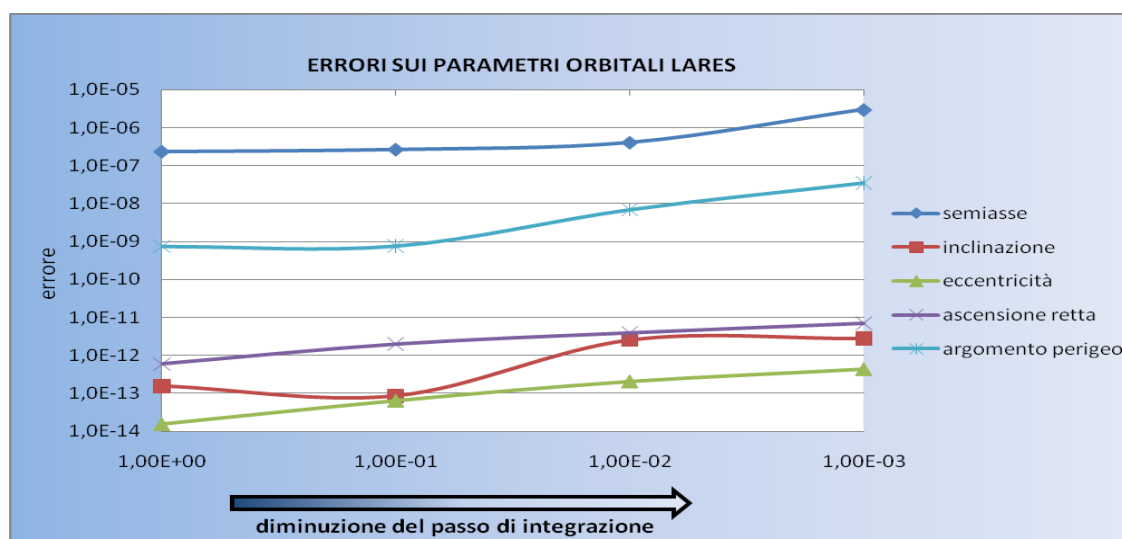


Fig. 5.3.4.3. Errore sui parametri orbitali al variare del passo di integrazione per *payload*.

Dai grafici riportati si evidenzia una tendenza da parte dell'errore ad aumentare col diminuire del passo di integrazione, anche se non risulta possibile definire con precisione una legge di variazione che descriva l'esatta evoluzione dell'errore al variare del passo d'integrazione.

Tuttavia, si ritiene che l'andamento crescente dell'errore al diminuire del passo di integrazione sia conseguenza dell'aumento dell'errore di troncamento dovuto al

maggior numero di *step*, nell'arco dell'intera simulazione, rispetto ai casi con passo di integrazione più grandi.

Rimane certo, comunque, che un passo di integrazione troppo grande sia da escludere, in quanto la precisione dei calcoli potrebbe risultare insoddisfacente, specie nei tratti in orbita in corrispondenza del perigeo, dove la velocità orbitale è maggiore.

5.4 Realizzazione del RK7 a passo fisso.

Sulla falsa riga dell'integratore RK4 in codice Fortran realizzato nella precedente fase, si è proceduto alla realizzazione dell'integratore RK7 a passo fisso in codice Fortran; i vantaggi nell'introdurre un RK di ordine superiore al quarto sono evidenti alla luce della correlazione diretta tra ordine di RK utilizzato ed ordine di grandezza dell'errore commesso nell'approssimare la soluzione.

La scelta del settimo ordine deriva sia dalle considerazioni riportate da testi specifici sullo studio dell'applicabilità dei metodi RK [1][2], sia da un compromesso tra precisione ricercata nel calcolo della soluzione approssimata e tempi di calcolo ragionevolmente contenuti; infatti, seppur risulti evidente il vantaggio, in termini di precisione, derivante dall'aumento dell'ordine del RK in base alla definizione stessa del metodo (§5.2), è anche vero che il numero di valutazioni necessarie per il calcolo della soluzione è un parametro caratteristico del metodo RK che aumenta all'aumentare dell'ordine stesso e che si desidera minimizzare per contenere i tempi di calcolo.

Sulla base di tali considerazioni, la scelta del settimo ordine è sembrata la più adatta a soddisfare il compromesso tra precisione e tempi di calcolo desiderato.

Per ritenere validi i dati calcolati dall'integratore RK7 a passo fisso realizzato in questa fase, sono stati effettuati numerosi confronti con i dati ottenuti dall'integratore RK4 a passo fisso in codice Fortran precedentemente validato. I dati di confronto si riferiscono a simulazioni dello stesso problema differenziale dei due corpi (kepleriano) studiato per il confronto tra gli integratori RK4 in codice Fortran ed in codice Matlab. Anche per queste simulazioni, il tempo totale di propagazione attorno alla Terra esaminato per entrambi i corpi studiati è di 14 ore, e l'unico parametro variabile nelle simulazioni è il passo di integrazione h .

Di seguito si riportano i valori delle massime differenze ottenute dal confronto tra i dati raccolti dalle integrazioni con RK4 e RK7 a passo fisso in codice Fortran, per *AVUM* ed il suo *payload*, relativi a posizione e velocità per una simulazione con passo di integrazione h pari ad un millesimo di secondo.

AVUM Differenze nei dati calcolati con metodi integrativi RK4 ed RK7 a "passo fisso" in codice Fortran						
	POSIZIONE [m]			VELOCITA' [m/s]		
	X	Y	Z	V _x	V _y	V _z
ordine di grandezza dei valori iniziali	1.00E+06			1.00E+03		
differenza massima	-8.25E-06	1.29E-06	-1.07E-06	8.65E-09	-1.64E-09	-7.97E-09

Tab. 5.4.1. Confronto integratore RK4 ed RK7 a "passo fisso" in codice Fortran per *AVUM*.

PAYLOAD Differenze nei dati calcolati con metodi integrativi RK4 ed RK7 a "passo fisso" in codice Fortran						
	POSIZIONE [m]			VELOCITA' [m/s]		
	X	Y	Z	V _x	V _y	V _z
ordine di grandezza dei valori iniziali	1.00E+06			1.00E+03		
differenza massima	4.01E-06	5.08E-06	6.60E-06	3.11E-09	4.82E-09	5.17E-09

Tab. 5.4.2. Confronto integratore RK4 ed RK7 a "passo fisso" in codice Fortran per *payload*.

Considerata la similitudine tra le istruzioni che compongono i due integratori confrontati, nonché l'utilizzo dello stesso codice di programmazione per entrambi gli RK, il confronto evidenzia un riscontro quasi totale dei dati. Le esigue differenze riscontrate sono totalmente da attribuire a problemi correlati a differenti, ed inevitabili, errori di troncamento introdotti dal codice stesso nell'uso di due metodi di integrazione differenti, mentre, per quanto riguarda il guadagno di precisione derivante dall'aumento dell'ordine di RK, esso non può essere ben apprezzato in problemi di così semplice formulazione come il

problema dei due corpi, soprattutto per simulazioni di così breve durata. Risulta tuttavia ben documentato nei testi consultati e citati nella bibliografia del presente testo,[1]-[2]-[3]. Tali dimostrazioni esulano dal contesto di questo paragrafo, che mira principalmente a mostrare il metodo di progressivo cross-check, utilizzato allo scopo di garantire l'affidabilità del RK7 implementato, tramite riscontro con dati precedentemente validati.

Alla luce del raffronto sopra riportato, i dati ottenuti dall'integratore RK7 a passo fisso in codice Fortran, nonché l'integratore RK7 stesso, sono stati considerati attendibili.

5.5 Realizzazione del RK7 a passo variabile: RK7/8.

Nonostante gli ottimi risultati garantiti dall'utilizzo dell'integratore RK7 passo fisso precedentemente realizzato, la consapevolezza della natura dello scopo per il quale il programma *P.O.L.P.O* viene realizzato, ovvero simulazioni per analisi di "*orbital lifetime*" per tempi dell'ordine delle decine di anni, la ricerca di un integratore che minimizzi i tempi di calcolo per la simulazione assume un ruolo che va oltre la semplice richiesta di prestazioni più elevate, diventando necessariamente una priorità.

In ragione di ciò, si vuole porre l'attenzione sul fatto che perché l'efficacia dei metodi RK sia garantita, è necessario che l'errore nel calcolo della soluzione sia il minore possibile; poiché il massimo passo di integrazione ammissibile h è fortemente dipendente dalla grandezza di questo errore, appare evidente come l'introduzione di un algoritmo per il controllo dell'errore massimo introdotto, e quindi per il controllo del passo massimo ammissibile, apra le porte alla possibilità di diminuire sensibilmente i tempi di calcolo.

Partendo da queste considerazioni, adottare un integratore RK7 a passo variabile in codice Fortran, anziché il medesimo ordine di integratore a passo fisso, risulta essere una scelta quasi obbligata.

Nei paragrafi a seguire saranno ampiamente discussi sia l'algoritmo scelto per rendere il passo adattabile sia i risultati ottenuti dal confronto tra l'integratore RK7 a passo fisso e l'integratore RK7 a passo variabile.

5.5.1 Il metodo Runge-Kutta a passo variabile.

Il metodo d'integrazione Runge-Kutta nasce come metodo d'integrazione a passo fisso, ma esiste la possibilità di rendere il passo variabile (adattativo), applicando uno degli “*Adaptive Runge-Kutta methods*”, [1].

Questa famiglia di algoritmi per l'adattabilità del passo di integrazione è, come suggerisce il nome stesso, specifica per i metodi RK, e si presentano in diverse forme a seconda del dato, o della variazione del dato, che si vuole considerare come parametro fondamentale dell'algoritmo.

Tra tutti gli “*Adaptive Runge-Kutta methods*” disponibili, si è scelto, e qui riportato, un algoritmo di adattamento del passo di integrazione che si basa sul valore dell'errore dato dalla differenza delle soluzioni del problema differenziale calcolate da due ordini consecutivi di RK.

Per l'utilizzo di questo specifico algoritmo, la *Butcher tableau* assume la seguente forma:

$$\begin{array}{c|cccccc}
 0 & & & & & & \\
 c_2 & a_{21} & & & & & \\
 c_3 & a_{31} & a_{32} & & & & \\
 \vdots & \vdots & & \ddots & & & \\
 c_s & a_{s1} & a_{s2} & \dots & a_{s-1} & & \\
 \hline
 & b_1 & b_2 & \dots & b_{s-1} & b_s & \\
 & b_1^* & b_2^* & \dots & b_{s-1}^* & b_s^* &
 \end{array}$$

Tab. 5.5.1.1. *Butcher tableau* per RK “a passo variabile”.

Come risulta evidente dal confronto con la *Butcher tableau* tipica del metodo a passo fisso, qui compare una riga in più di termini b_i^* .

Il ragionamento alla base di questo algoritmo è molto semplice: una volta scelto l'ordine m di RK da utilizzare, la *Butcher tableau* a cui si farà riferimento sarà quella relativa al RK di ordine $m+1$, a differenza del fatto che in essa dovranno comparire sia i coefficienti dell'ordine m (b_i) che i coefficienti dell'ordine $m+1$ (b_i^*);

una volta costruita la tabella, vengono calcolate entrambe le soluzioni di RK di ordine m e di ordine $m+1$; da cui deriva la denominazione del metodo con doppio numero RK $m/m+1$:

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot \sum_{j=1}^s b_j \cdot k_j$$

$$y_{i+1}^* = y_i + h \cdot \sum_{j=1}^{s^*} b_j^* \cdot k_j$$

Dove i termini con * si riferiscono alla soluzione di ordine $m+1$.

Note le due soluzioni, se ne calcola la differenza:

$$e_{i+1} = y_{i+1} - y_{i+1}^* = h \cdot \sum_{j=1}^s b_j \cdot k_j - h \cdot \sum_{j=1}^{s^*} b_j^* \cdot k_j = h \cdot \sum_{j=1}^{s^*} (b_j - b_j^*) \cdot k_j$$

La condizione limite su cui si basa l'algoritmo stesso di adattabilità del passo è posta proprio su e_{i+1} .

Nel caso in cui il valore di e_{i+1} calcolato risulti maggiore del valore massimo imposto e_{max} , il passo di integrazione viene moltiplicato per un fattore r proporzionale all'errore e_{i+1} stesso, in accordo con la seguente formula:

$$r = \left(\frac{e_{i+1}}{2 \cdot e_{max}} \right)^{(1/OR)} \quad h^{\wedge} = h \cdot r$$

Dove OR indica l'ordine dell'integratore RK e h^{\wedge} è il nuovo passo corretto dal fattore r . L'espressione proposta per r è ottenuta sulla base di considerazioni di analisi numerica avanzata sulla convergenza dei metodi RK; ed è discussa in [31].

Il valore massimo ammissibile di e_{max} , per l'integratore descritto nella presente tesi è lasciato come dato di input impostabile dall'utente; la scelta di tale opzione è dettata da due diverse ragioni: la prima deriva da una scelta di coerenza con l'impronta marcatamente versatile con la quale è stato realizzato l'intero integratore, che permette, tra le tante opzioni, anche la scelta dell'ordine del metodo RK stesso, a patto di inserire la corretta *Butcher tableau* ed un valore di e_{max} che permetta la convergenza del metodo, la seconda ragione mira a scopi di ricerca, e consiste nella possibilità di effettuare uno studio di sensibilità del passo di integrazione h al variare del parametro e_{max} a parità di ordine di RK utilizzato. Per integratore RK7/8 qui in esame, un valore attendibile di e_{max} è stimato dell'ordine di $1.00E-13$. La Fig 4.5.2.1., riportata nella pagine seguente, rappresenta il diagramma che riassume l'algoritmo di adattabilità trattato.

Nonostante l'introduzione del passo variabile determini un sensibile aumento delle performance dell'integratore, si è ritenuta vantaggiosa l'introduzione di ulteriori modifiche per caratterizzare alcuni aspetti dell'integratore.

Nei paragrafi a seguire, sono descritte le modifiche introdotte, nonché le motivazioni che ne giustificano la necessità.

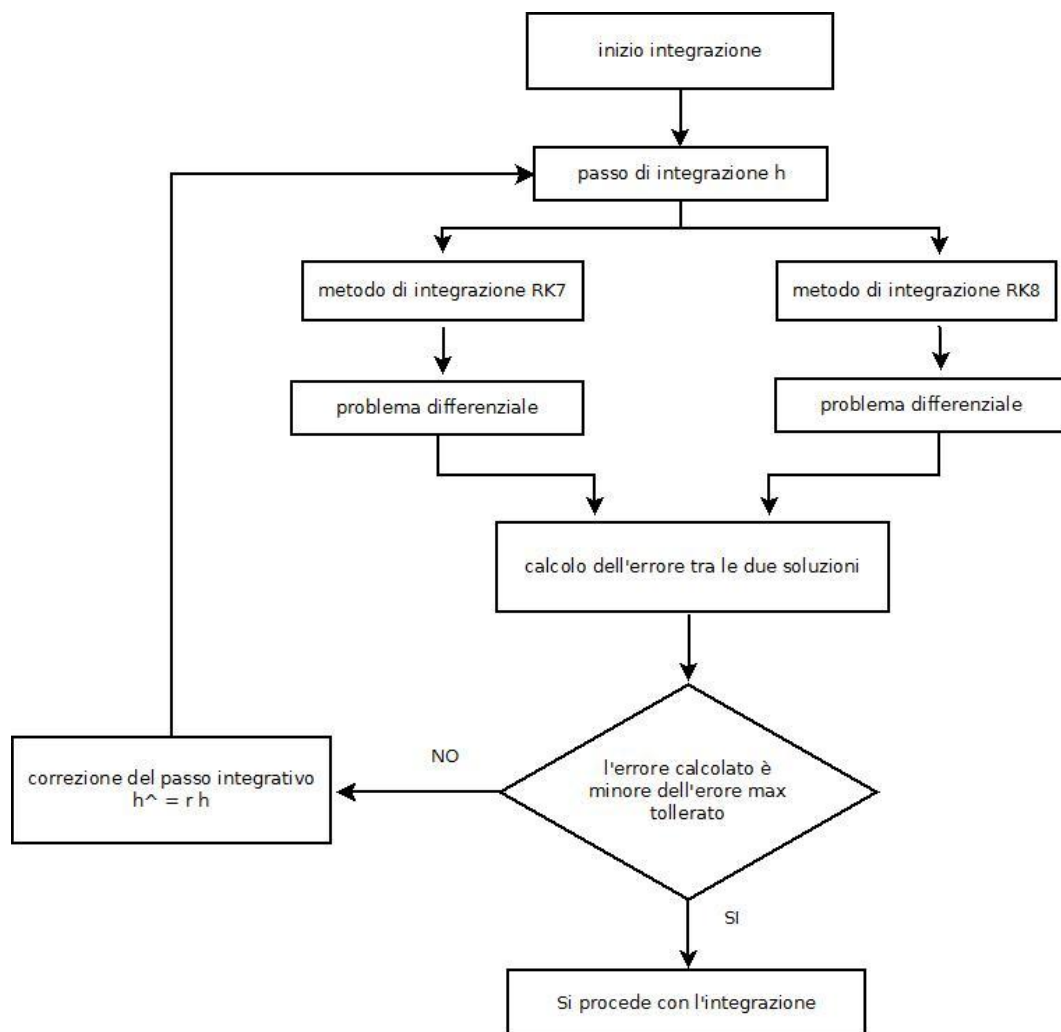


Fig. 5.5.1.1. Schema dell'algoritmo " *Adaptive Runge-Kutta methods*".

5.5.2 Controllo dell'iterazione nel calcolo del passo h.

Come esposto in precedenza, nel caso in cui l'errore e_{i+1} risulti maggiore del valore massimo imposto e_{max} , il passo di integrazione viene corretto, le soluzioni del problema differenziale dei due ordini di RK vengono ricalcolate, si stima l'errore e si verifica se il

nuovo passo corretto è adatto o meno per procedere con l'integrazione; nel qual caso anche questo valore del passo di integrazione risultasse inadeguato, l'iter ricomincerebbe daccapo con un passo di integrazione ulteriormente corretto.

Può essere necessario e conveniente da un punto di vista dei tempi di calcolo, limitare il numero di iterazioni necessario per il calcolo dell'opportuno passo di integrazione.

Per tale ragione si è scelto di lasciare come dato di input un valore di iterazioni massimo a discrezione dell'utilizzatore del programma; nel qual caso il numero di iterazioni massime venga raggiunto, il calcolo integrale procederà con il valore di passo di integrazione calcolato durante l'ultima iterazione.

5.5.3 Intervallo di valori per il passo di integrazione.

A discrezione di chi utilizza il programma, tra gli input destinati all'integratore, è presente la possibilità di definire il valore massimo ed il valore minimo che il passo di integrazione può assumere.

Nel qual caso venga superato il valore massimo, o il passo risulti più piccolo del valore minimo in seguito alla moltiplicazione con il fattore correttivo, il calcolo integrale procederà con un passo di integrazione rispettivamente pari al valore massimo imposto o al valore minimo imposto.

5.5.4 Fattore moltiplicativo g per il passo di integrazione.

Come ultima opzione per l'integratore, è a discrezione dell'utente la possibilità di definire un fattore moltiplicativo per il passo di integrazione: ogni qual volta il passo di integrazione è ritenuto idoneo per procedere al calcolo integrale senza correzioni, ovvero ogni qual volta il numero di iterazioni necessario per procedere con l'integrazione risulti pari a zero, il passo di integrazione per lo *step* successivo è ottenuto dal passo di integrazione dello *step* attuale moltiplicato per il fattore moltiplicativo G . L'introduzione di questo fattore moltiplicativo velocizza notevolmente i tempi di calcolo e riequilibra la ricerca del passo di integrazione ideale, in quanto l'algoritmo esposto nel paragrafo 5.5.1. per l'adattabilità del passo ha come unico risultato la riduzione del passo di integrazione, poiché il fattore correttivo r è, per sua stessa definizione, un numero inferiore all'unità.

5.5.5 Cross-check tra RK7 ed RK7/8

Il confronto tra l'integratore RK7 a passo fisso e l'integratore RK7/8 a passo variabile è stato realizzato tramite sovrapposizione di grafici, in quanto non è stato possibile ottenere dati di confronti per i due integratori in corrispondenza dei medesimi tempi e interpolazioni avrebbero introdotto errori tali da rendere il confronto inaffidabile; ci si è basati quindi sul confronto degli andamenti complessivi dei dati di posizione e velocità riportati in grafici.

La simulazione di confronto si riferisce alla trattazione del problema di Keplero esposto nei paragrafi precedenti (§5.3.1), per un periodo di propagazione orbitale pari a 14 ore; il passo di integrazione per il metodo integrativo RK7 a passo fisso è pari ad un millesimo di secondo, mentre per il metodo integrativo RK7/8 l'intervallo di valori per il passo di integrazione varia da 1 a 10 secondi.

Di seguito si riportano i grafici di confronto sopracitati, relativi a componenti di posizione e velocità per *AVUM* e il suo *payload*, nonché il confronto tra la distanza reciproca tra i due corpi durante la propagazione, calcolata con i due differenti metodi integrativi RK7 ed RK7/8; i grafici riportati rappresentano un dettaglio dell'andamento del parametro a cui si riferiscono, allo scopo di evidenziare la perfetta coerenza dei risultati ottenuti.

Data l'importanza di quest'ultimo confronto ai fini della realizzazione finale dell'integratore, si riportano tutti i grafici prodotti, in quanto ritenuti tutti di notevole interesse ai fini della validazione del metodo integrativo RK7/8 .

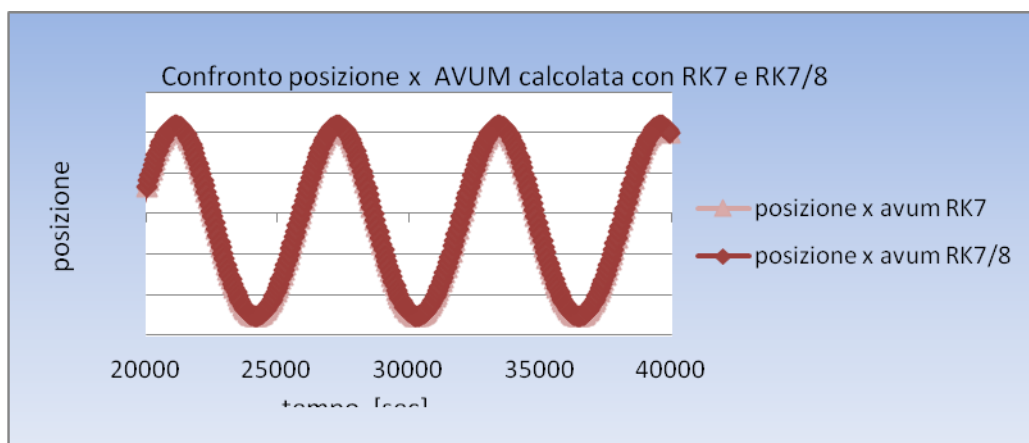


Fig. 5.5.5.1. Confronto tra RK7 e RK7/8 :componente x della posizione per *AVUM*.

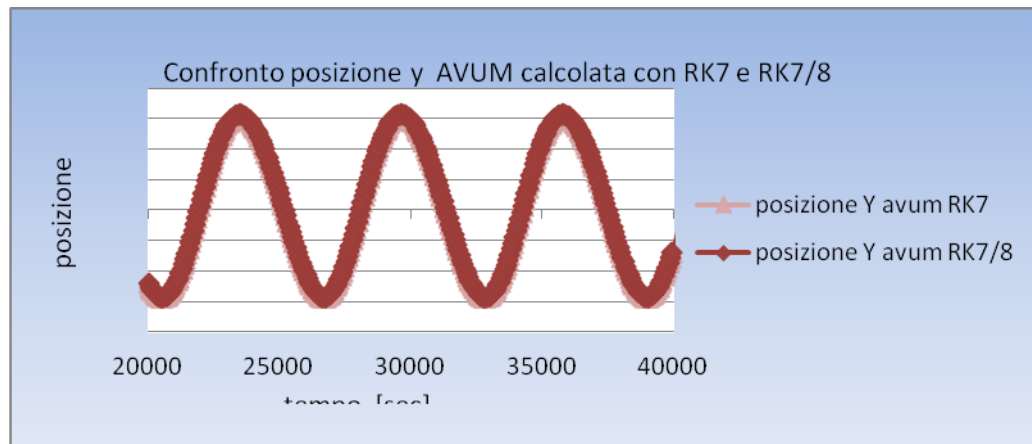


Fig. 5.5.5.2. Confronto tra RK7 e RK7/8 :componente y della posizione per AVUM.

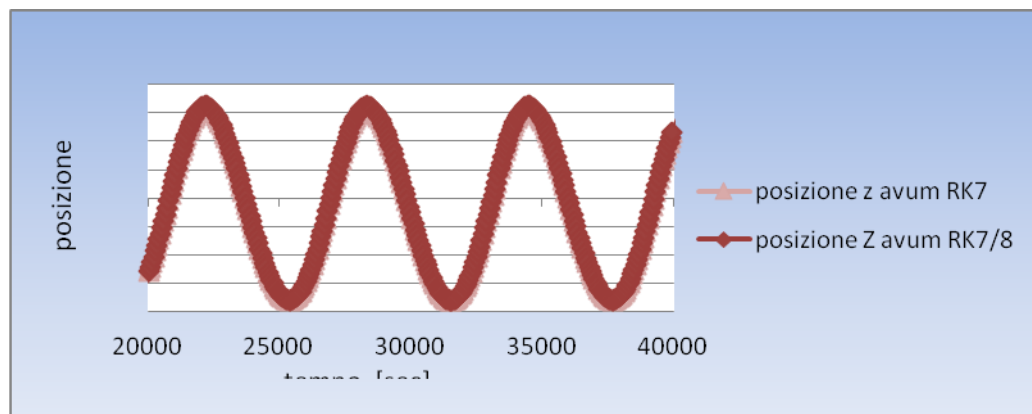


Fig. 5.5.5.3. Confronto tra RK7 e RK7/8 :componente z della posizione per AVUM.

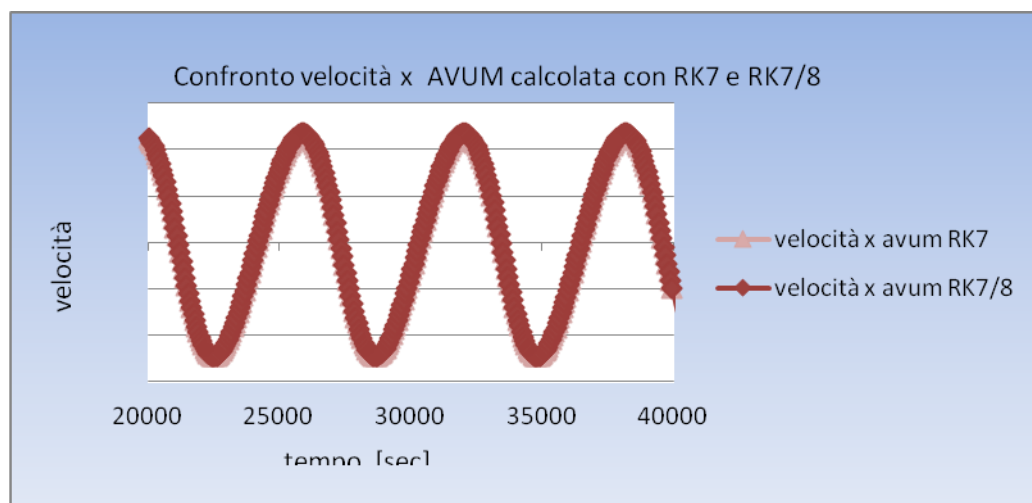


Fig. 5.5.5.4. Confronto tra RK7 e RK7/8 :componente x della velocità per AVUM.

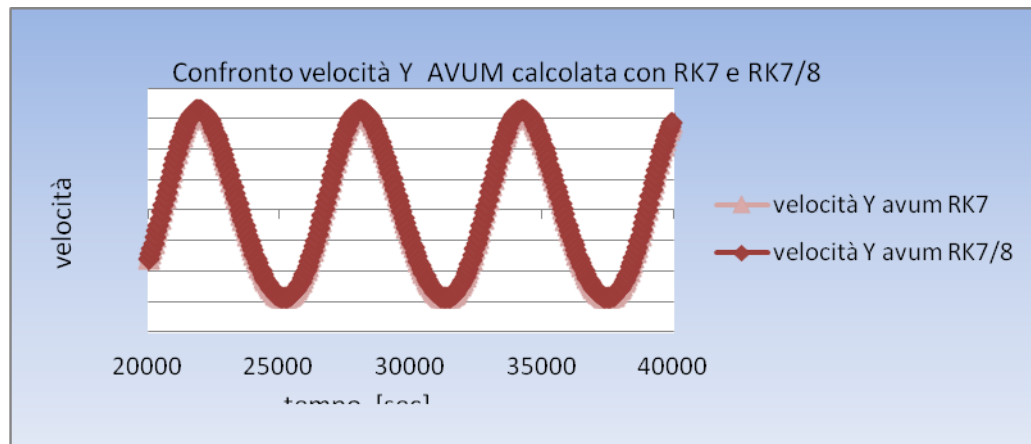


Fig. 5.5.5.5. Confronto tra RK7 e RK7/8 :componente y della velocità per AVUM.

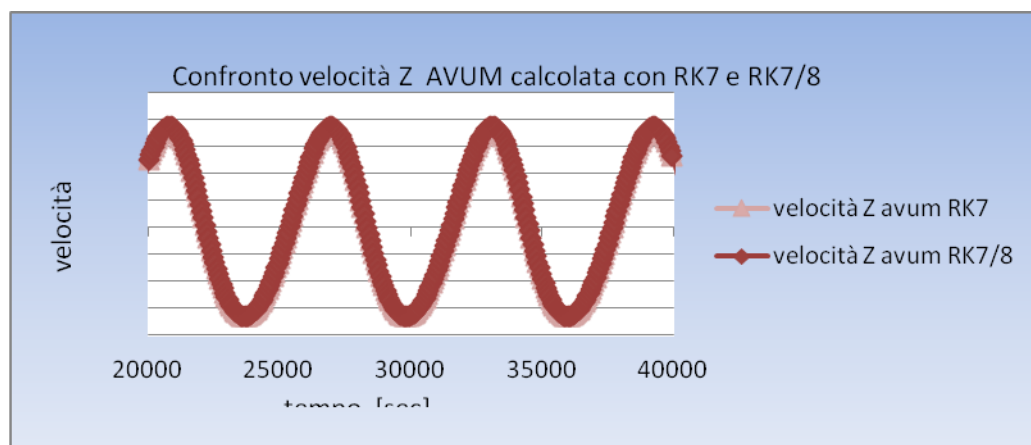


Fig. 5.5.5.6. Confronto tra RK7 e RK7/8 :componente z della velocità per AVUM.

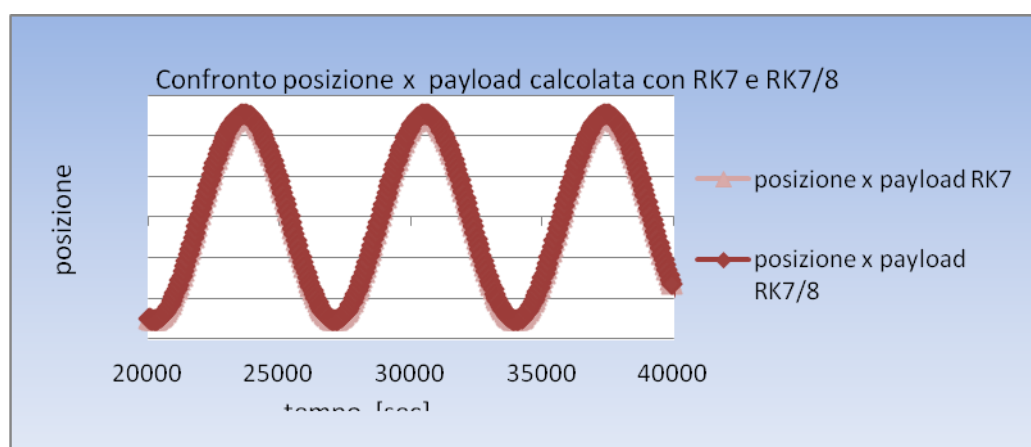


Fig. 5.5.5.7. Confronto tra RK7 e RK7/8 :componente x della posizione per *payload*.

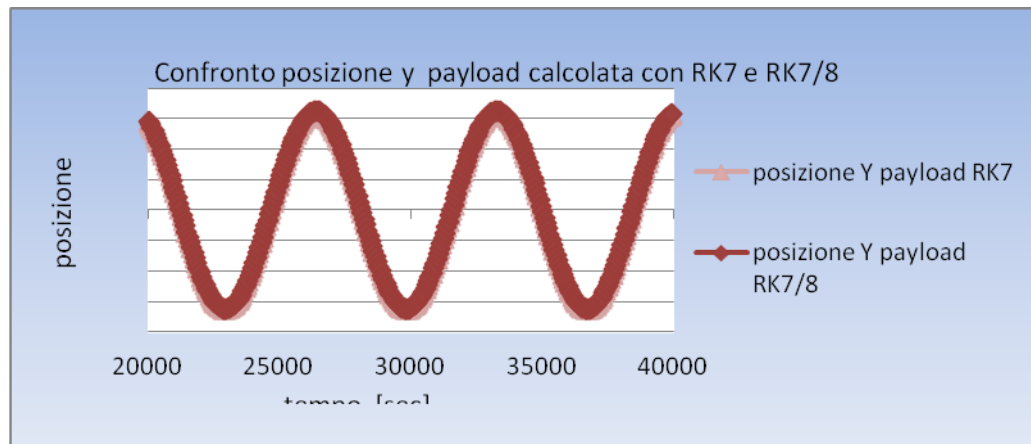


Fig. 5.5.5.8. Confronto tra RK7 e RK7/8 :componente y della posizione per *payload*.

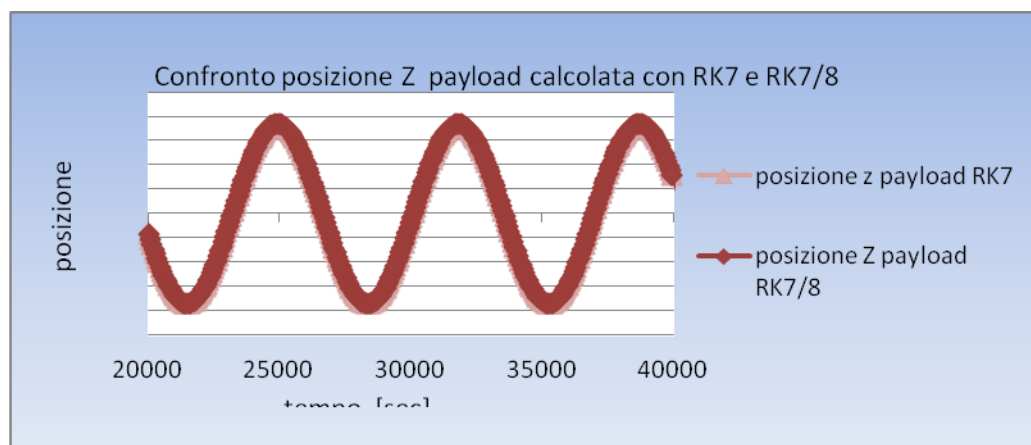


Fig. 5.5.5.9. Confronto tra RK7 e RK7/8 :componente z della posizione per *payload*.

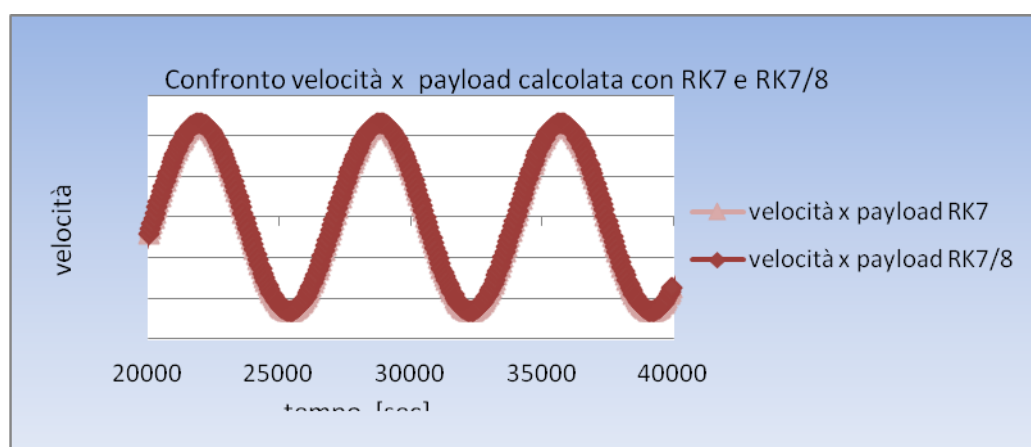


Fig. 5.5.5.10. Confronto tra RK7 e RK7/8 :componente x della velocità per *payload*.

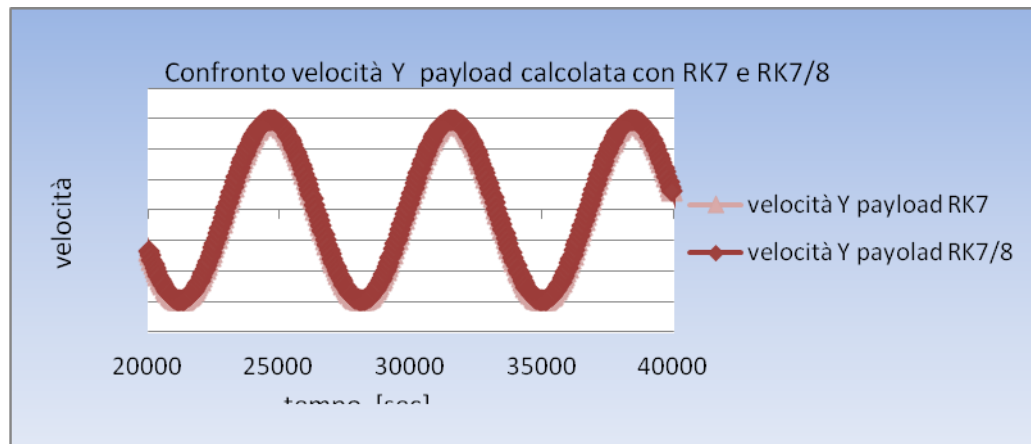


Fig. 5.5.5.11. Confronto tra RK7 e RK7/8 :componente y della velocità per *payload*.

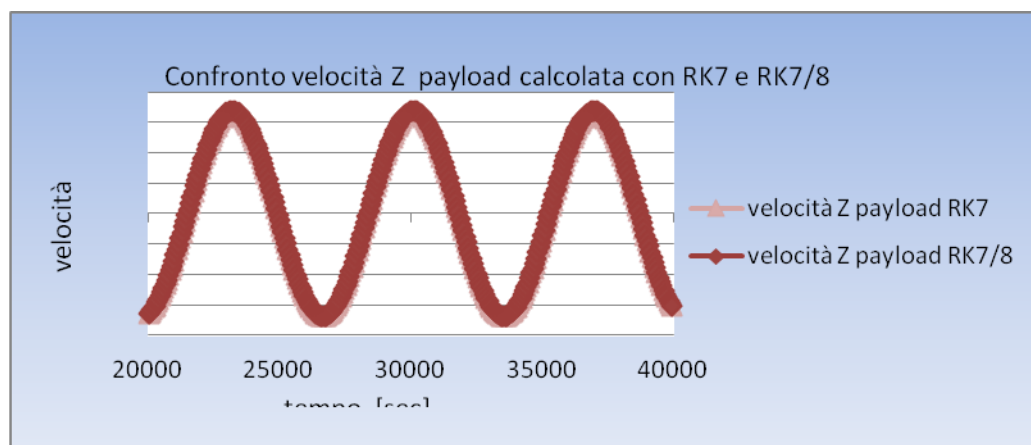


Fig. 5.5.5.12. Confronto tra RK7 e RK7/8 :componente z della velocità per *payload*.

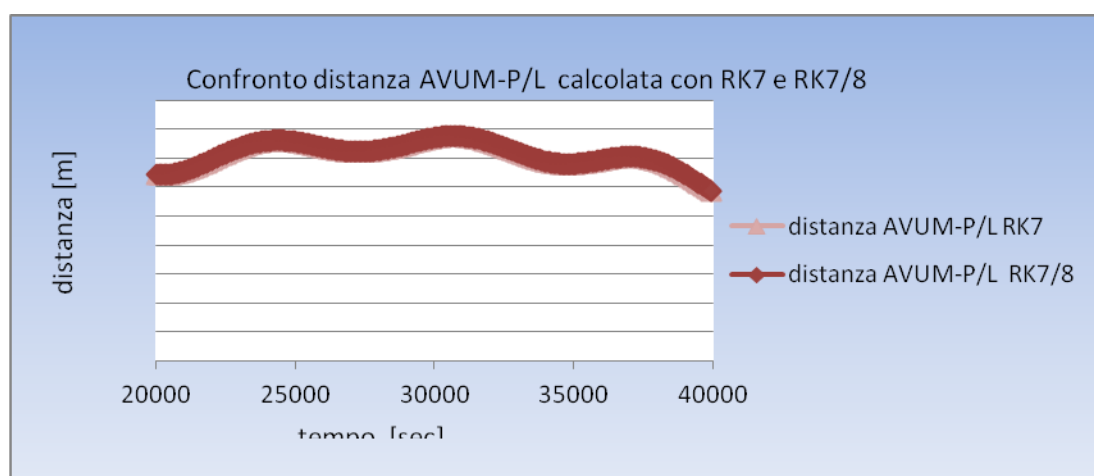


Fig. 5.5.5.13. Confronto tra RK7 e RK7/8 :distanza AVUM- *payload*.

I valori sull'asse delle ordinate sono stati omessi per ragioni di riservatezza dei dati sensibili interni all'azienda ELV.

Per la simulazione in esame, i tempi di calcolo richiesti da RK7/8 si riducono a pochi secondi, mentre l'integratore RK7 a passo fisso ha richiesto tempi di calcolo dell'ordine del centinaio di secondi.

Come si nota dai grafici riportati, la validità dei dati ottenuti dal metodo integrativo RK7/8 risulta evidentemente conprovata; la qualità dell'integratore realizzato, tenendo presente il netto guadagno in termini di tempi di calcolo rispetto al metodo RK7, è più che soddisfacente per gli scopi prefissi per lo studio "*orbital lifetime*" e collisione in orbita dell' *upper stage AVUM* e del suo *payload* per il volo di qualifica.

Con quest'ultimo cross-check si conclude la realizzazione dell'integratore, con piena assoluzione di tutti i requisiti richiesti.

5.6 L'integratore nella sua forma definitiva.

In quest'ultimo paragrafo vengono riassunte tutte le caratteristiche, precedentemente descritte in dettaglio, dell'integratore utilizzato all'interno del programma *P.O.L.P.O.*

5.6.1 Input integratore.

La tabella sotto riportata riassume i dati di ingresso nell'integratore, ovvero l'insieme di parametri che possono essere imposti dall'utente per caratterizzare il calcolo integrale.

L'interfaccia del programma, per quanto riguarda l'inserimento di questi parametri di input, è rappresentata da un semplice file di testo, esterno al codice di programmazione Fortan.

La scelta dell'ordine *OR* del metodo RK, nonché il numero di equazioni integrabili contemporaneamente (dimensione del vettore *y*) che definisce il numero di corpi orbitanti studiati, sono anch'essi parametri impostabili; tuttavia, si è scelto di renderne possibile l'assegnazione solo tramite istruzioni interne al codice del programma stesso, in quanto ritenuti parametri di secondo interesse in vista del fatto che entrambi sono stati scelti sulla base di esigenze e considerazioni ben precise, che non si ritiene utile mettere in discussione ai fini della presente tesi.

INPUT INTEGRATORE	
e_{max}	errore massimo tollerato tra le due soluzioni di RK di ordine consecutivo calcolate
h_{min}	valore minimo per il passo di integrazione
h_{max}	valore massimo per il passo di integrazione
$iter_{max}$	numero di volte massimo che il passo di integrazione può essere corretto per ogni step

Tab. 5.6.1.1. Dati di input per l'integratore.

5.6.2 Schema dell'integratore.

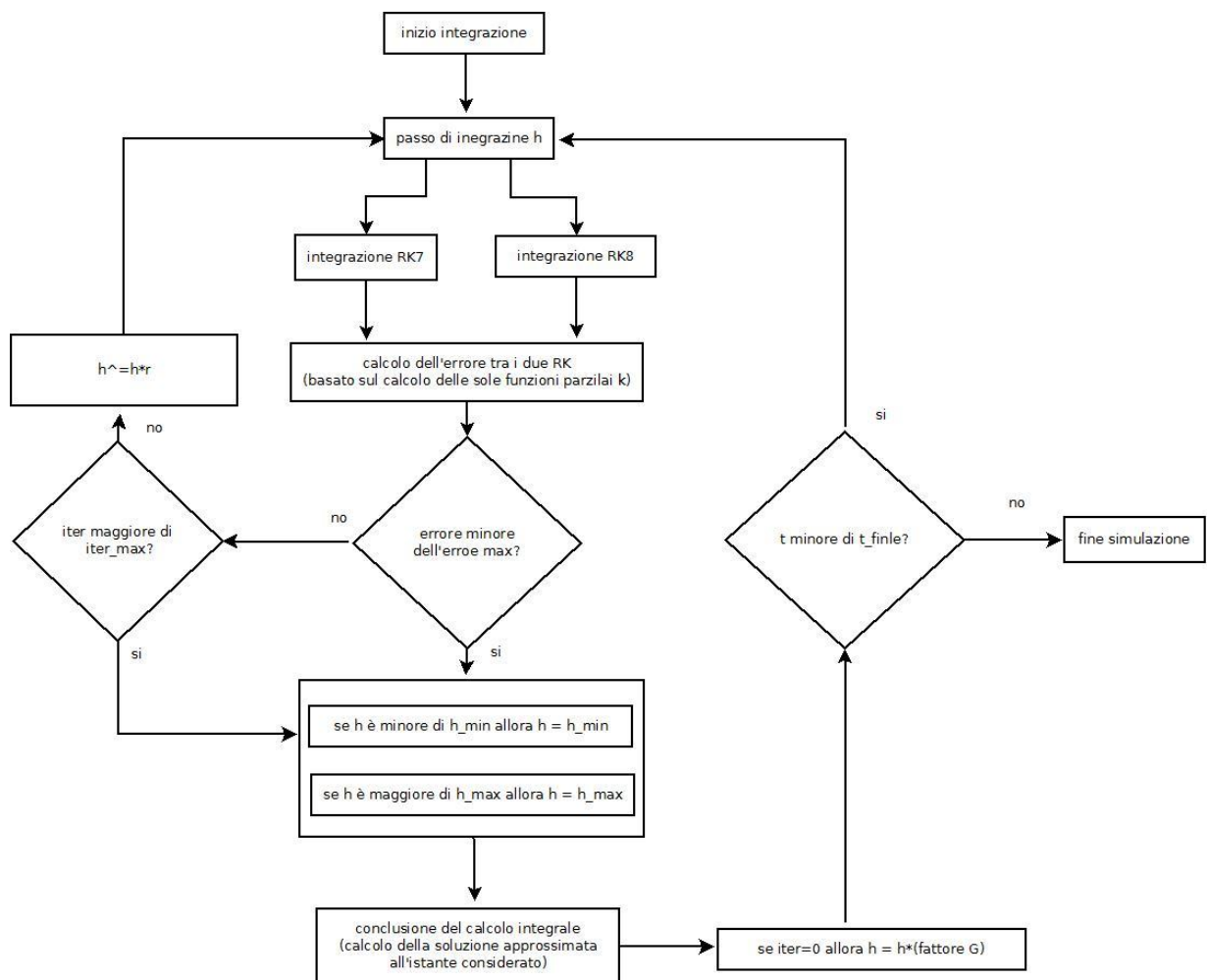


Fig. 5.6.1.1. Schema completo dell'integratore.

5.6.3 Conclusioni sull'integratore.

In definitiva, l'integratore RK7/8 realizzato è caratterizzato da ottimi tempi e precisioni di calcolo, in grado di soddisfare tutte le esigenze poste dalla trattazione dei problemi di propagazione orbitale.

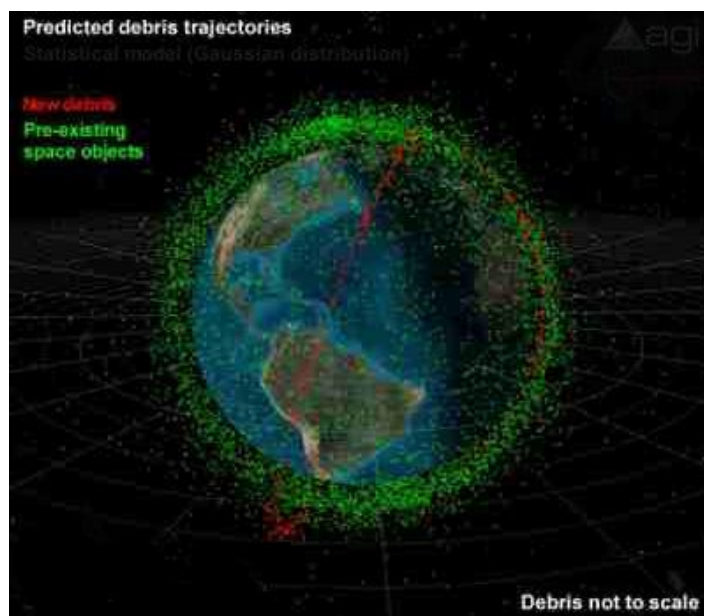
I vantaggi dell'utilizzo questo metodo integrativo rispetto al metodo più classico RK7 sono molteplici ed evidenti.

Nel caso, ad esempio, di passo iniziale per RK7/8 compreso tra 1 (h_{\min}) e 10 (h_{\max}) secondi, realizzando una simulazione del problema di Keplero analoga a quella utilizzata per i cross-check, il tempo di calcolo si riduce ad un secondo, e la precisione sulla costanza dei parametri orbitali è confrontabile con i risultati ottenuti dalla simulazione dello stesso problema con RK7 a passo fisso con passo di un centesimo di secondo, per il quale il tempo di calcolo necessario per completare la simulazione era di circa dieci secondi.

Il problema del moto imperturbato di Keplero, tuttavia, è di per se molto semplice, anche dal punto di vista integrativo; i veri vantaggi, sia in termini di tempi di calcolo che in termini di precisione, apportati dall'introduzione del metodo RK7/8 saranno, perciò, maggiormente rilevanti per problemi più complessi, come ad esempio il moto orbitale perturbato.

CAPITOLO 6

P.O.L.P.O.



Il POLPO (“*Propagatore Orbitale di Lungo Periodo Ottimizzato*”) è un programma per la simulazione della fase di *de-orbiting* per l’*upper stage* AVUM del lanciatore Vega; a partire dai dati delle posizioni e velocità iniziali, il POLPO è in grado di calcolare posizioni e velocità al trascorrere del tempo di due corpi orbitanti intorno alla Terra contemporaneamente, permettendo, quindi, anche lo studio delle possibili collisioni in orbita tra AVUM e P/L.

Per quanto riguarda i fenomeni fisici considerati per la simulazione, il POLPO tiene conto delle seguenti perturbazioni:

- Asimmetrie del campo gravitazionale terrestre;
- Resistenza atmosferica;
- “*Luni-solar effect*” (terzo corpo)
- Radiazione solare.

La teoria che esprime le leggi fisiche che regolano questi fenomeni è già stata ampiamente discussa nei capitoli precedenti.

Per quanto riguarda l’approccio al problema differenziale da risolvere per la determinazione della posizione e velocità del corpo in moto nell’orbita perturbata, il metodo risolutivo è del genere “Cowell”; che prevede l’integrazione diretta delle equazioni del moto comprensive degli effetti perturbativi, in un sistema di riferimento cartesiano inerziale, con origine coincidente con il baricentro del corpo attrattore.

L’equazione differenziale da integrare sarà, quindi:

$$\ddot{\mathbf{r}} + \frac{\mu}{r^3} \mathbf{r} = \mathbf{a}_p$$

Dove il termine \mathbf{a}_p rappresenta la sommatoria di tutte le accelerazioni perturbative che agiscono sul corpo.

Per tale ragione, gli effetti perturbativi considerati dal programma POLPO sono espressi all’interno del codice sotto forma di accelerazioni perturbative, successivamente sommate in un modulo a parte.

All’interno del codice del programma, ognuna delle accelerazioni perturbative considerate, è calcolata in un modulo apposito, indipendente dai moduli per il calcolo delle altre perturbazioni; in questo modo, tramite uno dei file di input, è possibile scegliere quale delle perturbazioni considerare, e quali invece escludere, attraverso un comando di input del genere on/off.

L’insieme dei files di input, e quindi delle scelte effettuabili dall’utente del programma, verrà discusso a conclusione del capitolo.

Nel presente capitolo, inoltre, verranno discussi i vari moduli che compongono il programma *POLPO*, fatta eccezione per l’integratore già ampiamente discusso nel capitolo precedente.

6.1 Polpo: schema logico.

In questo paragrafo si vuole fornire una panoramica sullo schema logico di funzionamento del programma. L'analisi del dettaglio dei singoli moduli che compongono il programma verrà svolta nei paragrafi a seguire.

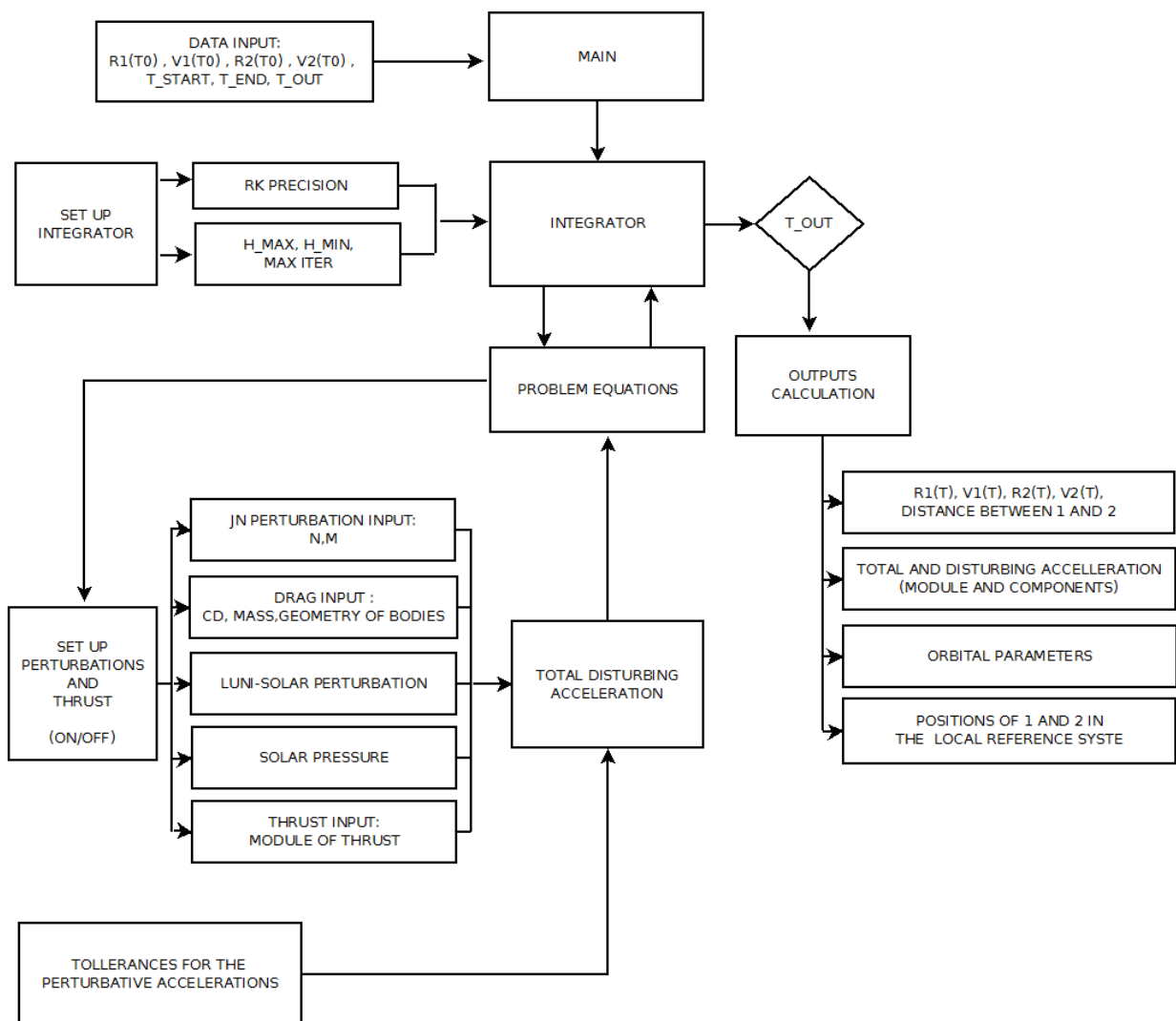


Fig 6.1.1 Il programma POLPO: schema logico.

Lo schema logico del programma si compone dei seguenti steps:

1. Main.

Rappresenta il modulo di avvio, all'interno del quale sono contenute le istruzioni per:

- Leggere i files di input e assegnare i dati iniziali
- Avviare il modulo di check per il controllo della coerenza dei dati immessi
- Avviare il modulo per il calcolo dei dati che non è necessario ricalcolare per tutto il resto della simulazione (Date Giuliane di riferimento, coefficienti attrito, ecc..)
- Avviare il modulo integrativo
- Concludere la simulazione.

2. Integratore.

Rappresenta la parte centrale del programma POLPO; una volta che l'integratore viene avviato dal main, si procede all'inizializzazione di tutte le costanti del metodo RK e dei parametri per l'integrazione assegnabili dall'utente.

Il primo step di integrazione si avvia con i dati iniziali, ma una volta che si è entrati nel loop di integrazione le condizioni iniziali per integrazione vengono aggiornate ad ogni step con i dati ottenuti dall'integrazione allo step precedente.

Ogni step di integrazione si conclude con l'aggiornamento del tempo di simulazione, fino ad arrivare al tempo finale, in corrispondenza del quale l'integrazione si arresta e il programma si riporta nel main per concludere la simulazione.

3. Problema differenziale

All'interno del modulo integrativo sono contenute le istruzioni per l'avvio del modulo contenente le equazioni differenziali che caratterizzano il problema studiato, ovvero il problema del moto di un corpo perturbato orbitante attorno alla Terra; tali istruzioni si trovano all'interno del loop integrativo e dunque vengono ripetute ad ogni step. Le condizioni iniziali del problema differenziale, però, vengono aggiornate di volta in volta con i valori ottenuti dall'integrazione allo step precedente.

4. Accelerazioni perturbative.

All'interno del modulo che contiene le equazioni del problema differenziale, si trovano le istruzioni per l'avvio del modulo delle accelerazioni perturbative. Questo modulo, a sua volta, contiene le istruzioni per l'avvio del calcolo di ogni singola accelerazione perturbativa. In base ai dati inizializzati nel *main* verranno avviati i calcoli solamente per le perturbazioni che l'utente ha scelto di voler considerare. Sempre in questo modulo, si avvia il calcolo dell'accelerazione introdotta dalla presenza di una spinta costante.

Una volta che le accelerazioni perturbative e/o dovute alla presenza della spinta costante sono state calcolate, questo modulo provvede alla sommatoria dei vari contributi. La risultante delle accelerazioni qui calcolate viene, quindi, richiamata nel modulo contenente le equazioni differenziali, dove viene sommata al contributo accelerativo dovuto alla sola attrazione gravitazionale.

5. Scrittura dei dati.

Una volta entrati nel loop integrativo, il calcolo integrale procede per ogni intervallo temporale definito dal passo di integrazione, ma i files di output non vengono compilati per ogni step; questo perché il passo di integrazione è di parecchi ordini di grandezza inferiore rispetto al tempo totale di simulazione (dell'ordine della decina di anni), quindi la compilazione per ogni step produrrebbe files di output di dimensioni non gestibili.

Esiste, quindi, un *t_out*, o tempo di stampa, impostabile dall'utente, che rappresenta il tempo di campionatura per i dati di output.

Ogni qual volta l'integrazione viene svolta per istanti multipli del tempo di stampa, il programma POLPO legge le istruzioni, all'interno del modulo integrativo, per l'avvio del modulo di scrittura dei dati ed i files di output vengono nuovamente compilati.

6. Moduli per l'elaborazione dei dati.

Questi moduli vengono tutti avviati all'interno del modulo per la scrittura dei dati, e contengono le istruzioni per calcolare tutti i dati di interesse derivanti dagli output dell'integratore, costituiti dai valori di posizioni, velocità ed accelerazioni dei due corpi.

6.2 “Read&Write”.

Il primo modulo del programma è quello di inizializzazione dei dati; all’avvio della simulazione il modulo read&write “legge” tutti i files di input ed assegna i valori alle rispettive variabili interne al codice. All’interno di questo modulo viene, inoltre, richiamato il modulo “check”, discusso nei prossimi paragrafi, per il controllo della coerenza dei dati inseriti dall’utente.

Sempre all’interno del modulo read&write, vengono inizializzati i files di output; in particolare, ne viene “scritta” l’intestazione, comune a tutti i files di output dello stesso corpo, che contiene tutti i dati della simulazione avviata:

- Nome del corpo a cui si riferisce il file di output
- Data di inizio e fine simulazione
- Tempo totale della simulazione in secondi
- Tempo di stampa per i dati
- Perturbazioni considerate (compresi i valori di n ed m)
- Presenza di spinta costante

Inoltre, per ogni files di output, l’intestazione viene completata con il nome delle variabili che vi saranno contenute, ordinate per colonne.

Ogni qualvolta il tempo di simulazione coincide con un multiplo del tempo di stampa, il modulo “read&write” compila una nuova riga in ognuno dei files di output, fatta eccezione per l’ultimo istante di simulazione, i cui dati vengono comunque trascritti nei files di output a prescindere o meno che coincida con un multiplo del tempo di stampa.

Alla fine della simulazione, viene nuovamente “scritta” parte dell’intestazione iniziale, contenente i nomi delle variabili, alla fine del documento, per agevolarne la lettura.

La fine della simulazione può avvenire sia perché si è raggiunto il tempo finale, sia perché AVUM ha raggiunto il suolo; in quest’ultimo caso prima dei dati relativi all’istante di fine simulazione (ovvero i dati di impatto al suolo), verrà trascritta la dicitura “impatto al suolo AVUM”, seguita dalla data del previsto l’impatto.

6.3 Problema differenziale

Questo modulo contiene, semplicemente, le equazioni del problema differenziale da integrare.

$$\dot{\mathbf{v}} = - \frac{\mu}{r^3} \mathbf{r} + \mathbf{a}_p$$

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$$

L'unica variante rispetto alla trattazione classica del problema, consiste nella dimensione dei vettori utilizzati; tali vettori contengono le componenti di posizione, velocità ed accelerazione di entrambi i corpi orbitanti studiati, quindi le componenti non avranno dimensione tre, ma bensì dimensione pari a sei.

6.4 Dati nel riferimento geocentrico.

Il programma comprende diverse subroutine per il calcolo di tutti i dati di interesse nel riferimento geocentrico solidale alla Terra, ottenuti a partire dalla posizione e velocità nel sistema di riferimento inerziale.

In questo modulo vengono calcolati, sia per AVUM che per il P/L, i seguenti dati:

- Longitudine
- Declinazione
- Latitudine geocentrica
- Latitudine geodetica
- Quota
- Altezza geodetica
- Ascensione retta

Questi dati, oltre a fornire informazioni sulla posizione nel sistema di riferimento geocentrico solidale con la Terra, sono necessari per il calcolo di alcuni dei disturbi a cui sono soggetti corpi che propagano nello spazio, e per tale ragione sono i primi dati che vengono calcolati.

6.5 Distanza.

Il calcolo della distanza tra i due corpi in fase di propagazione è uno degli scopi principali della presente tesi, e viene effettuato a partire dai dati sulla posizione dei due corpi, nel sistema di riferimento inerziale, calcolati per il medesimo istante.

Il calcolo della distanza AVUM ÷ P/L viene ripetuto per ogni step di integrazione.

Lo studio della collisione in orbita non si può, infatti, limitare solo ai primi istanti di propagazione, dopo il rilascio del P/L, quando i corpi si trovano a distanza ridotta, ma deve essere necessariamente svolto per tutto il periodo di propagazione dei due corpi orbitanti, in quanto AVUM ed il P/L vengono immessi in orbite differenti e non si può dire a priori se, nell'arco dell'intera propagazione dell'AVUM, si troveranno di nuovo a distanza ravvicinata. Analisi dei primi tre mesi di propagazione orbitale di AVUM, precedenti a quella svolta nella presente tesi mostrano, infatti, l'esistenza di un periodo sinodico dopo il quale i due corpi tendono a tornare alla distanza iniziale, salvo l'effetto delle perturbazioni[17]

Nel file di input che contiene le posizioni iniziali dei due corpi studiati, vi è anche la possibilità di inserire il valore minimo accettabile di distanza tra i due corpi, al di sotto del quale si ritiene il volo di propagazione non sicuro; il valore di distanza minima deve tener conto sia delle dimensioni effettive dei corpi coinvolti, assunti puntiformi nella trattazione del problema all'interno del programma POLPO, sia delle possibili incertezze di calcolo sulla posizione del satellite, in modo da garantire un margine d'errore per lo studio della collisione in orbita.

Se il valore minimo della distanza viene raggiunto, il programma POLPO si interrompe segnalando il problema.

6.6 Asimmetrie del campo gravitazionale terrestre.

Per il calcolo dell'accelerazione perturbativa dovuta alle asimmetrie del campo gravitazionale terrestre, si è scelto di immettere nel codice direttamente le componenti del gradiente del potenziale perturbativo, ovvero le componenti dell'accelerazione perturbativa stessa, in funzione degli ordini n ed m , che definiscono il tipo e l'ordine delle armoniche considerate.

In questo modo si evita di svolgere il calcolo numerico delle derivate della funzione potenziale, che porta all'inevitabile introduzione di errori di troncamento, soprattutto per un altro ordine delle armoniche.

In base alla scelta degli indici n ed m , avremo:

- Armoniche zonali $m = 0$
- Armoniche settoriali $m = n$
- Armoniche tesserali $m \neq n$

In questo modo il numero delle armoniche, sia che si tratti di zonali, settoriali o tesserali, viene lasciato come input esterno e può essere, quindi, scelto dell'utente.

In quest'ottica, i valori di m ed n , sono da considerarsi come "parametri" assegnabili all'inizio della simulazione.

La possibilità di inserire i due parametri m e n , rappresenta una delle più importanti innovazioni che caratterizzano il programma POLPO; infatti, oltre a consentire la scelta della precisione del modello di campo gravitazionale da utilizzare per rappresentare il campo gravitazionale terrestre, che ovviamente aumenta all'aumentare del grado delle armoniche considerate, permette anche lo studio quantitativo dell'influenza del grado dell'armonica stessa sul moto di propagazione del corpo studiato.

Questo studio è di interesse sia dal punto di vista puramente teorico, sia dal punto di vista pratico, data la stretta correlazione tra grado di armonica considerato e tempi di calcolo necessari per la simulazione. Il calcolo del potenziale perturbativo dovuto alle asimmetrie del campo gravitazionale terrestre, infatti, comprende la sommatoria di calcoli fattoriali e derivazioni polinomiali, nelle quali sia il grado del polinomio, che l'ordine di derivazione dipendono dai valori dei parametri n e m e/o dalla loro somma.

Da tale considerazione, si intuisce l'importanza di trovare un compromesso tra precisione del modello di campo gravitazionale, massimizzato per alti valori dei parametri m e n , e tempi di calcolo ragionevoli, minimizzati per bassi valori dei parametri m e n . Proprio in quest'ottica, nel prossimo capitolo sono riportati i risultati di un preliminare studio di confronto tra gli effetti delle accelerazioni dovute alle prime sei armoniche settoriali. Ricordiamo l'espressione del potenziale perturbativo per corpo che non presenta simmetrie assiali (già introdotto nel paragrafo §4.4.3.):

$$V = \frac{\mu}{r} \left[\sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left(\frac{R_{Terra}}{r} \right)^n (C_{nm} \cos(m\lambda) + S_{nm} \sin(m\lambda)) P_{nm}(\sin \delta) \right]$$

con

$$P_{nm} = \frac{1}{2^n n!} \frac{d(1-x^2)^{m/2}}{dx} \frac{d^{(n+m)}(x^2-1)^n}{dx^{(n+m)}}$$

Dove la declinazione δ e la longitudine λ sono calcolate nel modulo dedicato al calcolo dei dati nel sistema di riferimento geocentrico.

L'accelerazione legata all'asimmetria del campo gravitazionale terrestre si ottiene calcolando il gradiente del potenziale:

$$\mathbf{a}_p = \nabla V$$

In coordinate sferiche:

$$\Delta = \begin{cases} r) \frac{\partial}{\partial r} \\ \lambda) \frac{1}{r \cdot \cos(\delta)} \cdot \frac{\partial}{\partial \lambda} \\ \delta) \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial \delta} \end{cases}$$

Le espressioni delle componenti perturbative dovute alle asimmetrie del campo gravitazionale terrestre risultano, dunque:

Direzione radiale:

$$a_r = \frac{\mu}{r^2} V - \frac{\mu}{r} \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=0}^n (-n R_{Terra}^n r^{-(n+1)}) (C_{nm} \cos(m\lambda) + S_{nm} \sin(m\lambda)) P_{nm}(\sin \delta)$$

Direzione longitudine crescente:

$$a_\lambda = \frac{\mu}{r^2} \frac{m}{\cos \delta} \left[\sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left(\frac{R_{Terra}}{r} \right)^n (S_{nm} \cos(m\lambda) - C_{nm} \sin(m\lambda)) P_{nm}(\sin \delta) \right]$$

Direzione declinazione crescente:

$$a_\delta = \left[\left(\frac{1}{2^n n!} \frac{d(1-x^2)^{\frac{m}{2}}}{dx} \frac{d^{(n+m)}(1-x^2)^n}{dx^{(n+m)}} + \frac{(1-x^2)^{\frac{m}{2}}}{2^n n!} \frac{d^{(n+m+1)}(x^2-1)^n}{dx^{(n+m+1)}} \right) \cos \delta \right] \cdot \frac{\mu}{r} \left[\sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left(\frac{R_{Terra}}{r} \right)^n (C_{nm} \cos(m\lambda) + S_{nm} \sin(m\lambda)) \right]$$

Tramite la matrice di rotazione riportata in Appendice A, si ricavano, quindi, le componenti delle accelerazioni perturbative nelle direzioni IJK.

I coefficienti C_{nm} e S_{nm} sono ottenuti a partire dai corrispondenti valori di \bar{C}_{nm} e \bar{S}_{nm} , contenuti in apposite tabelle, tramite le seguenti relazioni:

$$C_{nm} = \frac{\bar{C}_{nm}}{\sqrt{\frac{(n+m)!}{(2n+1)k(n-1)!}}}$$

$$S_{nm} = \frac{\bar{S}_{nm}}{\sqrt{\frac{(n+m)!}{(2n+1)k(n-1)!}}}$$

Con

$$k = \begin{cases} 1 & \text{se } m = 0 \\ 2 & \text{se } m \neq 0 \end{cases}$$

Il programma POLPO dispone di un file di input contenente i valori di \bar{C}_{nm} e \bar{S}_{nm} fino a $m = n = 50$.

Le componenti dell'accelerazione perturbativa ottenute dalle formule qui sopra, vengono poi riportate nel sistema di riferimento inerziale, tramite una matrice di rotazione.

Per quanto riguarda le potenzialità del programma, il limite maggiore sul massimo valore da attribuire ai parametri m ed n nasce da problemi di *underflow/overflow*, intrinseci nel programma nonché legati alla memoria assegnata dal sistema operativo utilizzato, derivanti dalla presenza di calcoli che comprendono i fattoriali di n ed m .

Al di fuori di tale limite, si potrebbero calcolare le componenti dell'accelerazione perturbativa che tengono conto di tutte le armoniche fino ad $n = m = 50$; materialmente, invece, per valori di $(m+n)$ intorno al 25, si verifica il problema dell'*overflow*. Il valore limite per $(m+n)$ può essere all'incirca raddoppiato se si sceglie di calcolare il fattoriale come funzione di numeri reali (n ed m) anziché interi. Tuttavia è ampiamente dimostrato [15] che per la fase di propagazione dell'*Upper Stage* AVUM, l'effetto delle armoniche al di sopra di $n = m = 6$ è trascurabile, non si ritiene quindi necessario estendere il calcolo delle componenti dell'accelerazione perturbativa ad armoniche al di sopra dei valori $n = m = 6$.

6.7 Resistenza atmosferica.

La seconda accelerazione perturbativa considerata è la resistenza atmosferica.

Per calcolarne le componenti si è utilizzata la formula:

$$\ddot{\mathbf{r}} = \frac{1}{2} C_D \frac{A}{m} \rho V_A \mathbf{r}_A$$

dove

$$V_A = |\dot{\mathbf{r}}_A|$$

$$\dot{\mathbf{r}}_A = \begin{pmatrix} \dot{x} + \theta \dot{y} \\ \dot{y} - \theta \dot{x} \\ \dot{z} \end{pmatrix}$$

rappresenta la velocità nel sistema di riferimento geocentrico, dove θ la velocità angolare della Terra, mentre:

$$\dot{\mathbf{r}} = \begin{cases} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{cases}$$

rappresenta la velocità nel sistema di riferimento inerziale.

1. Calcolo della densità.

Ciò che caratterizza principalmente il calcolo delle componenti dell'accelerazione legate a questa perturbazione del moto è essenzialmente il modello dell'atmosfera utilizzato.

I dati sulla densità atmosferica sono forniti al programma POLPO sotto forma di semplici files di testo in input, esterni al codice di programmazione, in quanto messi a disposizione da enti preposti allo studio dell'*environment*.

Per modellare l'atmosfera all'interno del programma POLPO, si è suddivisa l'atmosfera terrestre in tre fasce:

- Da 0 a 120 km.

Rappresenta la parte più densa dell'atmosfera; per questo intervallo di quote si dispone del modello di densità CIRA86, il quale contiene i valori della densità al variare della quota e della latitudine, per ogni mese dell'anno.

Per il calcolo del valore di densità di una qualsiasi quota all'interno di questo intervallo, quindi, si parte dal valore del tempo simulato trascorso dall'inizio della simulazione, in modo da poter determinare a quale mese dell'anno si riferisce l'istante della simulazione considerato.

Una volta definito il mese, si individua la tabella delle densità in funzione della quota e della latitudine da cui bisogna estrarre i dati. Utilizzando i dati di quota e latitudine attuali dello spacecraft, precedentemente calcolati dal modulo del programma per il calcolo dei dati nel sistema di riferimento geocentrico, si procede, quindi, con un interpolazione lineare bidimensionale tra i dati disponibili nella tabella, in modo da risalire al valore di densità corrispondente alla latitudine e quota di volo del corpo considerato.

- Da 120 a 1000 km.

Per questo intervallo di quote, si utilizza il modello MSIS-86, costituito da un'unica tabella della densità al variare della quota; per ottenere il valore di densità alla quota di volo viene semplicemente eseguita un' interpolazione lineare tra i valori delle densità agli estremi dell'intervallo di quote a cui appartiene la quota di volo del corpo orbitante.

- Al di sopra dei 1000 km.

Alta atmosfera; il programma POLPO prevede un comando on/off che permette di scegliere se considerare densità in alta atmosfera o meno. Nel qual caso si scelga di considerarla, la densità di alta atmosfera sarà un valore costante coincidente con il valore di densità alla quota di 1000 km del modello di atmosfera MSIS-86 utilizzato per il range di quote 120÷1000 km.

I valori delle quote in cui è stata suddivisa l'atmosfera terrestre non sono valori definiti all'interno del codice, ma sono definiti dal modello stesso. Il programma ne assimila i valori una volta che i dati sulla densità vengono inseriti, tramite il file di input specifico per la perturbazione dovuta all'atmosfera terrestre; in questo modo è possibile cambiare il modello di atmosfera, o semplicemente aggiornarlo, senza che si verifichino errori all'interno del codice.

2. Coefficiente di resistenza.

Il coefficiente di resistenza C_D , per entrambi i corpi studiati nella simulazione, può essere calcolato all'interno del programma sulla base delle caratteristiche geometriche e di orientamento del corpo orbitante. I valori sulla geometria del corpo, nonché l'angolo di incidenza del flusso, sono dati da inserire nel file di input specifico per il calcolo della perturbazione dovuta alla resistenza atmosferica.

L'orientamento del corpo ("*assetto*"), rispetto alla direzione del moto, è anch'esso un dato da inserire nel file di input; sono possibili i seguenti assetti :

- Frontale
- Laterale
- Posteriore
- Medio (media pesata dei primi tre assetti)
- Imposto (il valore del C_D viene assegnato dall'utente)

Gli altri dati necessari per il calcolo delle componenti dell'accelerazione perturbativa dovuta alla resistenza atmosferica, ovvero la massa del corpo m e la superficie di riferimento A , sono dati da inserire nel file di input.

6.8 Luni-Solar effect.

Il programma di simulazione POLPO tiene conto delle accelerazioni perturbative sui corpi orbitanti attorno alla Terra, legati alla attrazione sia del Sole che della Luna.

Tali effetti perturbativi vengono stimati con la classica formula:

$$\mathbf{a}_{p\ominus} = -\mu_{\ominus} \left(\frac{\mathbf{r}_{\ominus S}}{r_{\ominus S}^3} - \frac{\mathbf{r}_{\ominus \oplus}}{r_{\ominus \oplus}^3} \right) \quad \text{accelerazione perturbativa dovuta alla Luna}$$

$$\mathbf{a}_{p\oplus} = -\mu_{\oplus} \left(\frac{\mathbf{r}_{\oplus S}}{r_{\oplus S}^3} - \frac{\mathbf{r}_{\oplus \ominus}}{r_{\oplus \ominus}^3} \right) \quad \text{accelerazione perturbativa dovuta al Sole}$$

Per il calcolo di queste accelerazioni perturbative, essenzialmente, si procede con il calcolo della posizione della Luna e del sole a partire dalla data Juliana corrispondente al tempo simulato, come esposto in Appendice A.

Nel programma POLPO, i dati sui parametri gravitazionali di Terra, Sole e Luna sono forniti dall'utente in un file di input apposito contenente i dati del corpo attrattore primario e dei due corpi attrattori secondari.

6.9 Radiazione solare.

L'ultima delle accelerazioni perturbative considerate dal POLPO è la radiazione solare diretta.

Per il calcolo di questa perturbazione si è scelto di utilizzare un modello di ombra conico per le condizioni di eclissi del satellite [16]. Questo modello prevede una fase di penombra intermedia tra la condizione di satellite completamente illuminato e satellite in ombra.

Per determinare l'entità della pressione solare sul corpo orbitante bisogna, quindi, capire se, e in quale misura, il corpo è esposto al Sole; per capirlo si calcola preliminarmente la posizione del Sole al tempo considerato, come esposto nel paragrafo precedente, e a partire da questa si determina la condizione del satellite, ovvero se il satellite risulta illuminato, in ombra od in penombra.

I calcoli necessari per la determinazione della condizione del satellite, dalla quale è possibile stimare la porzione di superficie investita dalla radiazione solare diretta, sono riportati integralmente in appendice A.

L'accelerazione dovuta alla pressione solare risulterà quindi:

$$\mathbf{a}_{p_sun} = \frac{PA_{ill}}{m} \left[(\rho_a + \rho_d) \hat{\mathbf{s}} + \left(2\rho_s \frac{2}{3} \rho_d \right) \hat{\mathbf{n}} \right]$$

Dove:

A_{ill} Parte di superficie del satellite illuminata.
 ρ frazioni di ripartizione dei fotoni (a = assorbito, d = riflesso in modo diffuso, s = riflesso in modo speculare)

$\hat{\mathbf{s}}$ versore che indica la direzione del fascio di fotoni incidente; all'interno del programma POLPO, questa direzione è assunta coincidente con la direzione della congiungente corpo-Sole.

$\hat{\mathbf{n}}$ versore normale alla parte in ombra della superficie A; all'interno del codice del programma POLPO, tale direzione è assunta coincidente con la congiungente Terra-corpo orbitante.

e dove P viene valutata:

$$P = P_{\oplus} \left(\frac{r_{\oplus}}{r} \right)^2$$

Con

P pressione di radiazione solare esercitata su un corpo a distanza r dal Sole

$P_{\oplus} = 4.5632 \times 10^{-6}$ Pa Pressione solare media ad una distanza pari a 1 AU (distanza media Terra-Sole).

$r_{\oplus} = 1$ AU

r distanza del corpo investito dalla radiazione solare dal Sole.

In letteratura esistono modelli più accurati per la stima della pressione solare, tuttavia per quanto riguarda l'applicabilità del programma POLPO, che si riferisce alla simulazione della fase di *de-orbiting* di corpi in orbite basse, l'effetto dell'accelerazione perturbativa dovuta alla radiazione solare è da considerare trascurabile [15].

Per tale ragione, non si ritiene avere valore aggiunto l'introduzione all'interno del programma POLPO di un modello con grado di complessità maggiore di quello qui esposto per la stima della radiazione solare.

6.10 La spinta costante.

Il programma POLPO è dotato di un modulo per la simulazione di spinta continua.

Il valore della spinta costante in [N] è un dato da inserire nel file di input specifico, e viene applicata secondo legge tangenziale, coincidente quindi in ogni istante con la direzione della velocità nel sistema di riferimento geocentrico.

Dalla definizione di impulso specifico, otteniamo il rateo di variazione della massa di propellente :

$$I_{sp} = \frac{F}{\dot{m}g_0} \quad \rightarrow \quad \dot{m} = \frac{F}{I_{sp}g_0}$$

Dove :

I_{sp} Impulso specifico [s] (caratteristico del tipo di propellente utilizzato)

g_0 Accelerazione di gravità terrestre al livello del mare [m/s^2]

F intensità spinta (costante) [N]

Sotto l'ipotesi di diminuzione costante della massa durante lo step temporale di integrazione, si risale alla massa totale del corpo orbitante :

$$m = m - \dot{m}\Delta t$$

Dove .

m massa del corpo + massa del propellente rimasto

Δt intervallo temporale di integrazione

L'accelerazione dovuta alla spinta continua viene calcolata come rapporto tra spinta fornita e massa:

$$\mathbf{a}_F = \frac{\mathbf{F}}{m}$$

6.11 Accelerazione perturbativa totale.

Una volta che le perturbazioni vengono calcolate, per ottenere la perturbazione totale non basta sommare componente per componente; purtroppo, infatti, seppur da un punto di vista teorico la somma non cambia se si cambia l'ordine degli addendi, da un punto di vista numerico bisogna tener conto dei limiti intrinseci dei programmi di calcolo. I codici di programmazione come il Fortran presentano un problema di "sensibilità", nel senso che quando si effettua la somma di due quantità coerenti ma di ordine di grandezza differenti si tende a perdere il valore della grandezza minore, ed in definitiva il codice considera solo la quantità maggiore; il termine di ordine di grandezza più piccolo, insomma, viene automaticamente trascurato.

Alla luce di tale problematica, essendo le accelerazioni perturbative di diversi ordini di grandezza differenti le une con le altre e ancor più a confronto con la forza di attrazione gravitazionale, la somma diretta determinerebbe inevitabilmente la perdita di alcuni dei contributi perturbativi.

Per ovviare al problema, il programma POLPO utilizza un particolare algoritmo che riconosce, tra tutti i valori da sommare, il valore minore ed inizia la sommatoria a partire da tale ordine di grandezza, estendendo pian piano la somma anche agli ordini di grandezza maggiori, fino ad arrivare all'ordine massimo presente.

Tuttavia, per l'approccio versatile che caratterizza il programma POLPO, si è scelto di lasciare un margine di discrezionalità all'utente anche all'interno di questo algoritmo, permettendo la scelta dell'esponente minimo e massimo considerabili. In tali termini, si lascia all'utente la facoltà di scegliere il limite di grandezza minimo (massimo), al disotto del quale (al di sopra del quale) l'effetto perturbativo viene considerato trascurabile.

6.12 Check.

Si è già accennato al fatto che alcuni calcoli fattoriali possono portare al verificarsi di problemi di *underflow/overflow*, e va inoltre specificato che, seppur la versatilità del programma POLPO ne valorizzi nettamente l'applicabilità, molte delle scelte di programmazione rendono il programma stesso esposto ad errori imprevisti; in altre parole, il lasciare all'utente una maggiore discrezionalità sulle performance del programma implica, di contro, la possibilità di incorrere in errori di coerenza dei dati di input.

E' utile ai fine delle analisi lasciare gradi di libertà all'utilizzatore, ma allo stesso tempo è necessario garantire la coerenza dei dati tramite controlli effettuati internamente dal simulatore prima di avviare il processo di integrazione. Da questa considerazione nasce la scelta di introdurre un modulo di controllo all'interno del codice, che "testa" le parti più sensibili del programma al variare dei parametri assegnati dall'utente, per garantire che i valori introdotti non portino ad un errata funzionalità del programma stesso.

A tal riguardo il controllo maggiore si effettua sui calcoli fattoriali che interessano i parametri n ed m : se la somma dei due parametri è tale da portare ad *underflow/overflow* la simulazione non viene nemmeno avviata e l'interfaccia del programma segnala il problema riscontrato, il limite massimo ammissibile per il funzionamento del programma e la richiesta di inserimento dei nuovi valori per i due parametri.

Analogamente, se si decide di variare uno o più modelli di atmosfera per il calcolo della resistenza atmosferica, bisogna fare attenzione al fatto che non vi siano sovrapposizioni o salti nei nuovi dati sulle densità introdotti, coprendo quindi tutto il range di quote per cui la densità è definita; nel caso in cui si presentino delle discontinuità nei dati dei modelli utilizzati per le varie fasce di quote, il programma non avvia la simulazione, segnalando l'incoerenza.

6.13 Parametri orbitali.

Tutti i moduli descritti finora trattano parti del programma che calcolano, se attivi, i dati ad ogni step d'integrazione; per quanto riguarda il calcolo dei parametri orbitali, invece, il calcolo viene effettuato solo per i tempi di simulazione multipli del tempo di stampa, imposto dall'utente.

Il calcolo dei parametri orbitali istantanei si basa sulle formule della meccanica orbitale classica, già ampiamente discusse nel capitolo 4, a partire dai dati di posizione e velocità del corpo all'istante considerato.

6.14 Dati in input.

Come precedentemente ribadito più volte, il programma consente all'utente la discrezionalità su numerosi parametri del problema orbitale; di seguito sono indicati i files di input del programma POLPO.

Tali files si presentano come semplici file di testo con estensione “.txt”, nei quali i parametri a scelta dell'utente possono essere facilmente inseriti, data l'intuitività dell'interfaccia che caratterizza questo tipo di files.

I files di input si dividono in due categorie: quelli che forniscono dati utili al calcolo delle perturbazioni (ad esempio i dati di modelli, validi per ogni simulazione), e quelli che contengono i dati da inserire a discrezione dell'utente per la simulazione in corso.

Files di input contenenti dati di utilizzo per i calcoli:

- “C&S” contiene i coefficienti \hat{C}_{nm} e \hat{S}_{nm} da utilizzare per il calcolo del potenziale perturbativo dovuto alle asimmetrie del campo gravitazionale terrestre.
- “atm_0_120” contenente i dati di densità al variare della quota, della latitudine e del mese, per il range di quote 0-120 km.
- “atm_120_1000” contenente i dati sulla densità al variare della quota per il range di quote 120-1000 km.
- “input pianeti” contenente i dati sui parametri gravitazionali della Terra, Sole e della Luna. Contiene inoltre i dati di velocità di rotazione, raggio equatoriale ed eccentricità della Terra.

Files di input per l'inserimento dei parametri a discrezione dell'utente:

File di input	Parametri a scelta dell'utente
"cost_Integ" (dati per l'integratore)	<ul style="list-style-type: none"> • Errore max • H_max • H_min • Iter_max • G_factor
"Input_r&v" (dati su posizioni, velocità, tempi e distanza)	<ul style="list-style-type: none"> • Posizione e velocità iniziali per AVUM e P/L. • Tempo di inizio simulazione. • Data di inizio simulazione. • Tempo (in sec) della durata della simulazione • Tempo di stampa per i dati. • Distanza minima ammissibile tra AVUM e P/L.
"Input Jnm" (dati per il calcolo del potenziale gravitazionale terrestre)	<ul style="list-style-type: none"> • Parametri n ed m
"Input_drag" (dati per il calcolo dell'assistenza atmosferica)	<ul style="list-style-type: none"> • Densità in alta atmosfera (on/off) • Assetto corpo 1 e 2 (se imposto, immettere il valore del C_D) • Dati geometrici dei due corpi • Massa dei due corpi • Angolo di incidenza tra corpo e flusso d'aria (ininfluente se il l'assetto è imposto)
"input p_solare" (dati per il calcolo della perturbazione dovuta alla radiazione solare)	<ul style="list-style-type: none"> • Pressione solare • Coefficienti di ripartizione dei fotoni (assorbiti, riflessi specularmente, riflessi diffusamente)
"spinta_cost" (dati per la spinta costante)	<ul style="list-style-type: none"> • Modulo della spinta [N] • I_{sp}

<p>“input precisione” (dati per la somma delle accelerazioni perturbative)</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Esponente minimo • Esponente max
<p>“perturbazioni”</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Comandi on/off (1/0) per ognuna delle perturbazioni considerate • Comando on/off (1/0) per considerare la spinta costante

Tab.6.14.1. Input del programma POLPO.

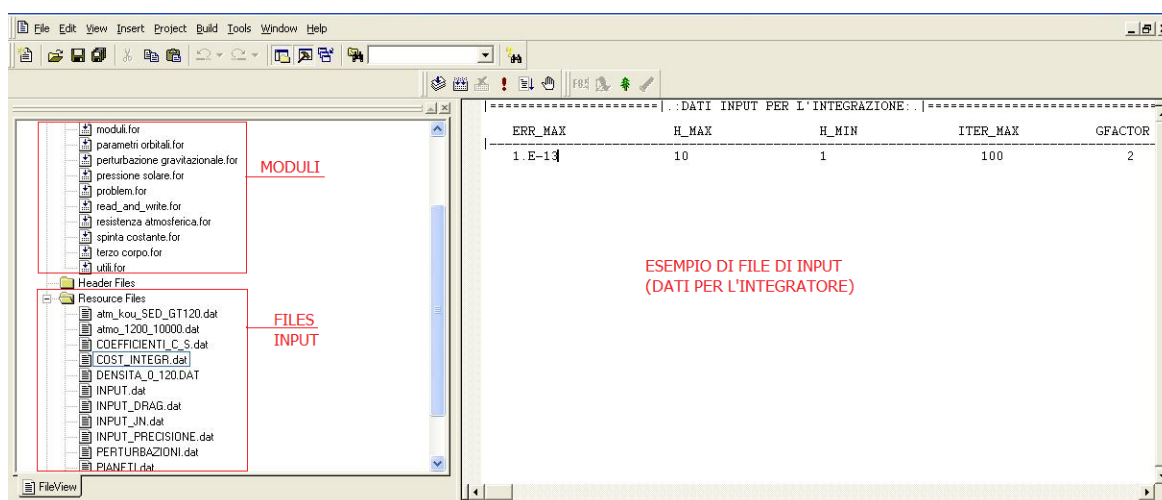


Fig.6.14.1. Esempio di interfaccia per l’inserimento dei dati di input.

6.15 Dati di output

Ogni qualvolta il tempo di simulazione coincide con un multiplo del “tempo di stampa t_{out} ”, il programma POLPO compila una nuova riga dei files di output; anche in questo caso, come per i files di input, si tratta di semplici files di testo.

Di seguito si riporta la tabella dei files di output del programma, con i rispettivi dati; ognuno dei files citati viene compilato sia per AVUM che per il suo P/L.

La ridondanza di alcuni dei valori in diversi files è da intendere come scelta cosciente dettata dalla volontà di rendere ogni files di output coerente e completo nella descrizione del fenomeno di cui riporta i valori.

Nome file	Dati contenuti.
“acc”	<ul style="list-style-type: none"> • Tempo • Componenti e modulo dell’accelerazione totale (comprensiva degli effetti perturbativi) , nel sistema di riferimento inerziale. • Componenti e modulo dell’accelerazione perturbativa totale, nel sistema di riferimento inerziale.
“Drag”	<ul style="list-style-type: none"> • Tempo • Mese • Altezza geodetica • latitudine geodetica • densità • C_D • Superficie di riferimento utilizzata • massa • componenti e modulo dell’accelerazione dovuta alla resistenza atmosferica, nel sistema di riferimento inerziale.
“geo”	<ul style="list-style-type: none"> • tempo • longitudine • latitudine geocentrica • latitudine geodetica • quota • altezza geodetica • ascensione • ascensione greenwich
“parametri orbitali”	<ul style="list-style-type: none"> • Tempo • semiasse_maggiore • Ha

	<ul style="list-style-type: none"> • Hp • inclinazione • eccentricita' • RAAN • argomento del perigeo • anomalia vera
“Perturbazioni”	<ul style="list-style-type: none"> • Tempo • Componenti e modulo di ciascuna delle singole accelerazioni perturbative, nel sistema di riferimento inerziale. • Componenti e modulo della spinta costante, nel sistema di riferimento inerziale. • Componenti e modulo dell’accelerazione perturbativa totale, nel sistema di riferimento inerziale.
“Pressione solare”	<ul style="list-style-type: none"> • Tempo • visibilità • funzione_ombra • pressione_solare • componenti e modulo dell’accelerazione di radiazione solare, nel sistema di riferimento inerziale.
“r&v”	<ul style="list-style-type: none"> • componenti di posizione e velocità , nel sistema di riferimento inerziale. • Distanza tra i due corpi considerati
“spinta costante”	<ul style="list-style-type: none"> • Tempo • Massa • Portata • Passo di integrazione • Componenti e modulo della spinta nel sistema di riferimento locale. • Componenti e modulo dell’accelerazione dovuta alla spinta costante, nel sistema di riferimento inerziale

"Terzo corpo"	<ul style="list-style-type: none">• Componenti e modulo dell'accelerazione perturbativa dovuta alla Luna , nel sistema di riferimento inerziale.• Componenti e modulo dell'accelerazione perturbativa dovuta alla presenza del Sole, nel sistema di riferimento inerziale.• Componenti e modulo della somma delle accelerazioni dovute alla presenza della Luna e del Sole (Luni-Solar effect) , nel sistema di riferimento inerziale.
---------------	--

Tab.6.15.1. Output del programma POLPO.

CAPITOLO 7

RISULTATI.

Nel capitolo seguente vengono riportati i risultati ottenuti dalle simulazioni svolte per lo studio della fase di *De-orbiting* dell'Upper Stage AVUM e della collisione in orbita tra AVUM ed il suo P/L per il volo di qualifica, LARES.

L'obiettivo ricercato a conclusione dello studio della fase di De-orbiting si riassume nella verifica dell'effettivo rientro indiretto di AVUM entro i 25 anni dall'inizio della fase di De-orbiting stessa, come imposto dalle normative internazionali che regolano il decadimento orbitale.

L'obiettivo ricercato a conclusione dell'analisi sulla collisione in orbita tra l'Upper Stage AVUM ed il suo P/L per volo di qualifica, LARES, si riassume nel controllo della mutua distanza tra i due corpi, dall'inizio della fase di De-orbiting fino all'impatto al suolo di AVUM, che non dovrà mai risultare inferiore al valore minimo di distanza imposto.

Prima di discutere i risultati della simulazione finale per l'analisi degli obiettivi oggetto della Tesi, si riportano i risultati dei diversi cross-check svolti per la validazione dei dati ottenuti dal programma POLPO.

A conclusione del capitolo vengono inoltre riportati i risultati di alcuni studi preliminari sull'effetto dei singoli disturbi, all'unico scopo dimostrativo delle potenzialità di utilizzo del programma POLPO. .

7.1. De-orbiting: condizioni iniziali.

Preliminarmente all'analisi delle simulazioni svolte, è necessario definire le condizioni iniziali alle quali ci si riferisce per lo studio del decadimento orbitale dell'AVUM.

L'inizio dell'analisi della fase di De-orbiting, ovvero l'istante assunto come iniziale per le simulazioni svolte, coincide con l'istante di *cut-off* del *De-orbiting boost* di AVUM; velocità e posizioni iniziali per i due corpi, quindi, si riferiscono tutte a tale istante, e sono dati ottenuti dall'analisi delle fasi di missione antecedenti alla fase di De-orbiting.

Il seguente schema rappresenta la sequenza temporale precedente e successiva all'inizio della fase di De-orbiting :

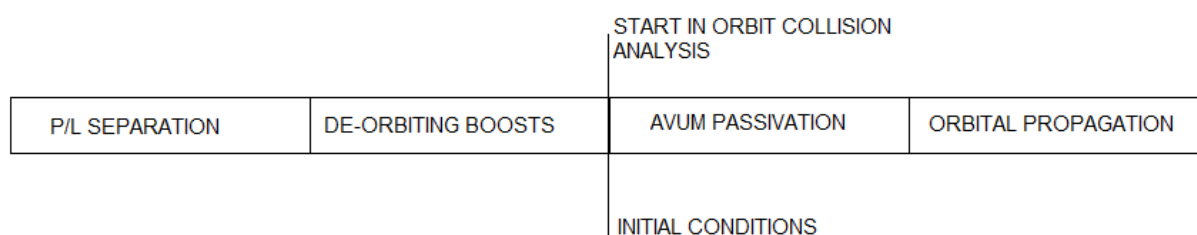


Fig.7.1.1 Sequenza temporale di inizio propagazione

Dopo circa dieci minuti dopo il rilascio del P/L, AVUM riaccende per l'ultima volta il motore effettuando una manovra ("*De-orbiting boost*") che modifica i parametri orbitali, diminuendo la quota di perigeo, in modo da permettere il rientro indiretto dell'Upper Stage entro i 25 anni.

Alla conclusione di questa fase, ovvero allo spegnimento del motore, inizia ufficialmente la fase di De-orbiting dell'AVUM.

Per quanto riguarda la fase di passivazione, durante la quale il propellente residuo viene espulso dall'upper stage, il contributo in termini di incremento di velocità è da ritenersi trascurabile, sulla base di un'approfondita analisi esposta in [17]; per tale ragione il

programma POLPO non tiene volutamente conto dell'esiguo effetto "propulsivo" associato alla passivazione.

7.2. I cross-check per il POLPO

Come già esposto nel capitolo 4, la realizzazione dell'integratore per il programma POLPO si è divisa in diverse fasi, alla conclusione di ciascuna delle quali si è provveduto ad effettuare un cross-check con altri programmi in uso all'interno dell'azienda ELV.

Analogamente, una volta realizzato il programma POLPO nella sua forma definitiva, si è effettuata una lunga fase di verifica, durante la quale sono state realizzate e confrontate numerose simulazioni.

Di seguito si riportano i risultati delle simulazioni di confronto svolte.

- POLPO VS DECAY.

Il DECAY è un programma di simulazione, di proprietà ELV, per la propagazione orbitale di un singolo corpo, con integrazione a passo fisso, che tiene conto delle perturbazioni dell'ambiente spaziale dovute all'effetto dell'armonica zonale J_2 e della resistenza atmosferica; per realizzare il cross-check con il DECAY, quindi, si sono utilizzati i seguenti valori per i parametri iniziali del programma POLPO:

Disturbi considerati per il confronto DECAY-POLPO	
Armoniche zonali	Resistenza atmosferica
$n = 2, m = 0$	$C_D = 2.2$ (imposto)

Tab.7.2.1 Disturbi considerati per il confronto DECAY-POLPO

Nonostante la peculiarità dell'integrazione a passo variabile che caratterizza il programma POLPO, per il cross-check dei dati con il programma DECAY si è scelto di realizzare sia delle simulazioni a passo fisso, impostando valori coincidenti di h_{min} ed h_{max} , sia delle simulazioni con passo variabile, per avere i dati agli stessi tempi e permettere un confronto più accurato, trattandosi di uno dei primi *cross-check*.

Sono numerose le simulazioni di confronto a passo fisso svolte per diversi valori del passo di integrazione, tutte con esito positivo. Tuttavia, nell'impossibilità di riportare tutti i confronti realizzati, si ritiene di maggior interesse soffermarsi sui dati ottenuti dai cross-check tra DECAY e POLPO con integrazione a passo variabile, questo perché i confronti tra DECAY e POLPO a passo fisso, seppur indubbiamente utili per la conferma della validità dei dati ottenuti, si limitano, appunto, ad un semplice ruolo di convalida dei dati, e non permettono di apprezzare i vantaggi introdotti dall'utilizzo di un passo di integrazione variabile.

Di seguito vengono riportati i grafici dei parametri orbitali dell'AVUM, ottenuti dal confronto dei dati di simulazioni della fase di *De-orbiting* effettuate sia con DECAY che con il programma POLPO con passo di integrazione variabile, a parità di condizioni iniziali.

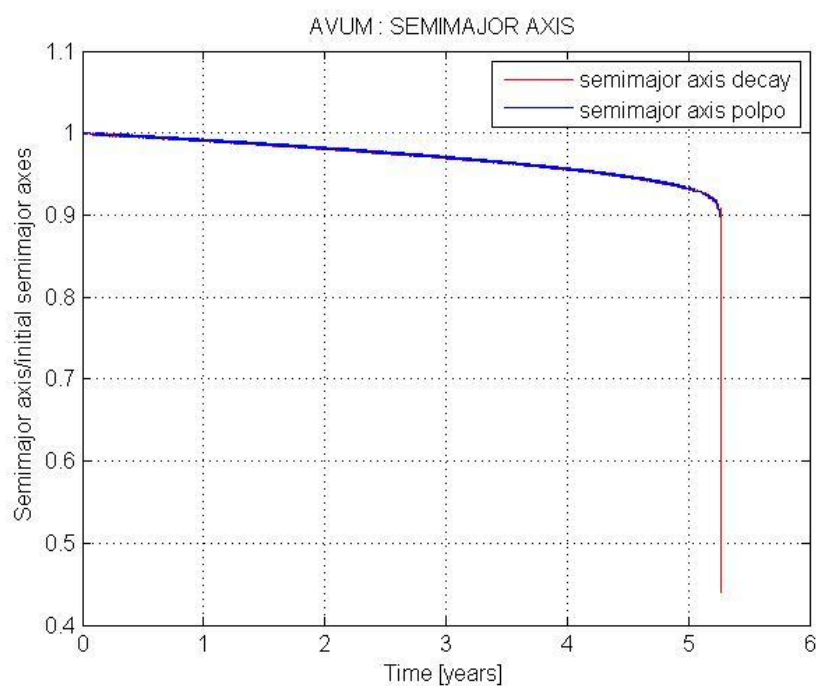
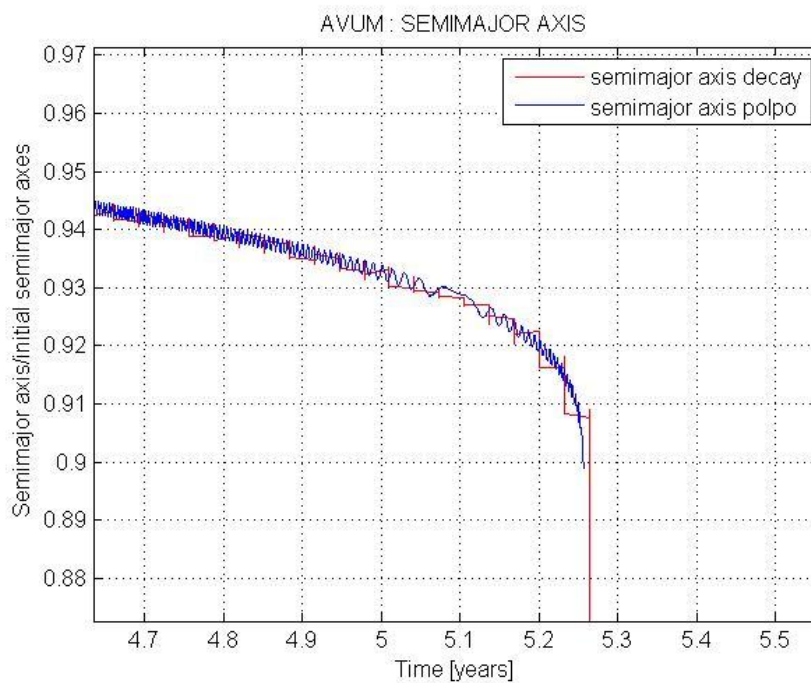
I parametri per l'integrazione utilizzati per la simulazione con il programma POLPO sono riassunti nella seguente tabella:

Dati integratore per il confronto POLPO-DECAY				
H_min	H_max	Iter_max	Err_max	G_factor
1 [sec]	10 [sec]	10	1E-12	2

Tab.7.2.2 Dati integratore per il confronto DECAY-POLPO

Il valore della massa dell'AVUM utilizzata per questa simulazione non è quello effettivo, per tale ragione il tempo per il quale avviene l'impatto al suolo è da ritenersi privo di significato ai fini dell'analisi di rientro.

Tutti i diagrammi sono adimensionalizzati rispetto ai valori iniziali, per ragioni di riservatezza dei dati trattati, ad eccezione del grafico per le quote di apogeo e perigeo nel quale, tuttavia, non vengono riportati i valori dell'asse delle ordinate; si ritiene, infatti, molto più significativo riportare l'andamento delle due quote nello stesso grafico per evidenziare come la quota di apogeo diminuisca in modo significativamente maggiore rispetto alla quota di perigeo.

Semiassa maggiore**Fig.7.2.1** Semiassa maggiore AVUM, confronto DECAY-POLPO.**Fig.7.2.2** Dettaglio del semiassa maggiore dell'AVUM.

Eccentricità

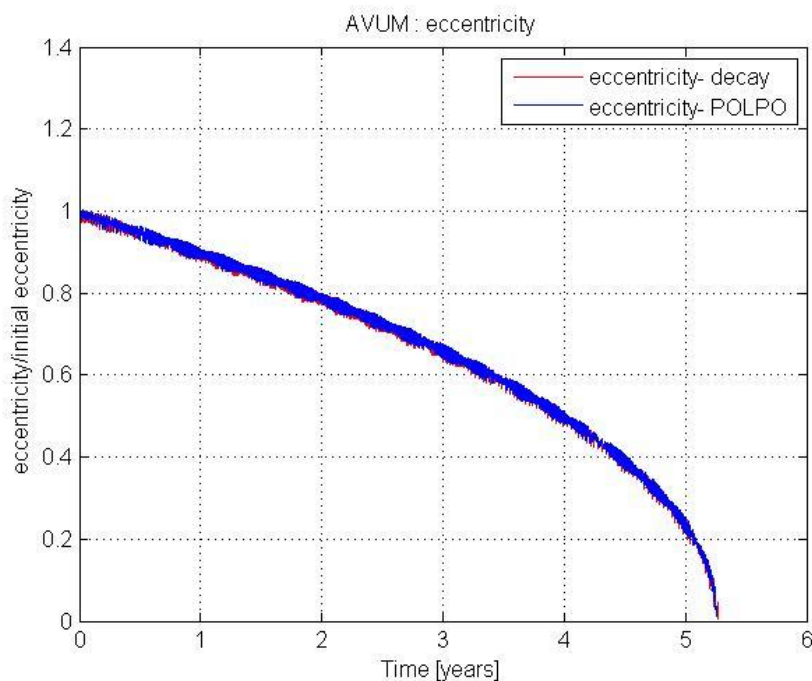


Fig.7.2.3 Eccentricità AVUM, confronto DECAY-POLPO.

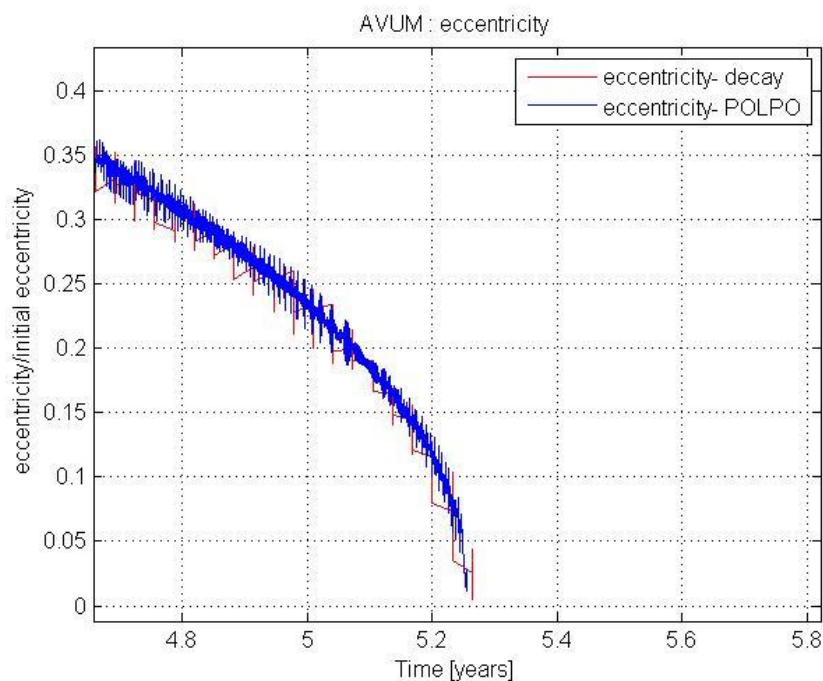


Fig.7.2.4 Dettaglio eccentricità AVUM.

Come ci si aspetta, i grafici del semiasse maggiore e dell'eccentricità evidenziano gli effetti tipici dovuti alla resistenza atmosferica, ovvero la progressiva circolarizzazione dell'orbita e diminuzione del semiasse maggiore.

L'effetto della resistenza atmosferica, per orbite ellittiche ($0 < e < 1$), determina una diminuzione nel tempo del rapporto tra raggio di apogeo e raggio di perigeo; questo significa che durante la circolarizzazione dell'orbita, il raggio di apogeo diminuirà in maniera maggiore rispetto al raggio di perigeo, e conseguentemente la diminuzione della semiasse maggiore è essenzialmente dovuta alla diminuzione del raggio di apogeo. Questo fenomeno risulta chiaramente dai grafici delle quote di apogeo e perigeo di seguito.

QUOTE DI APOGEO E PERIGEO:

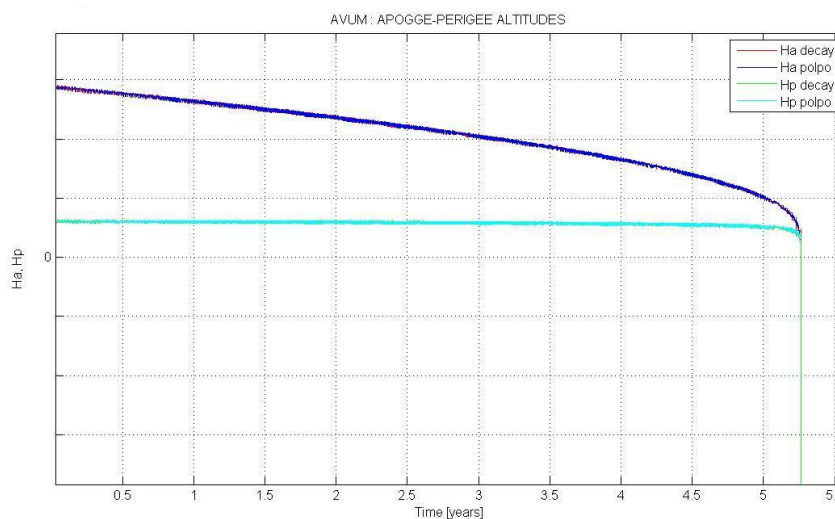


Fig.7.2.5 Quote di apogeo e perigeo di AVUM.

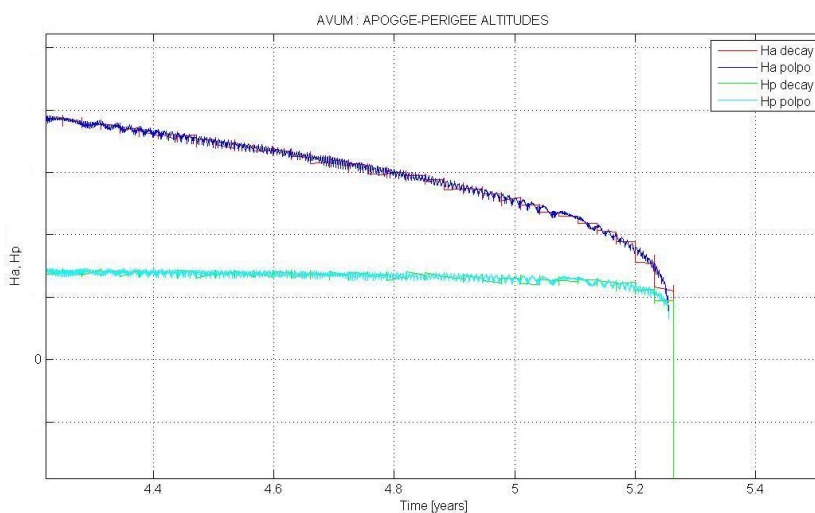
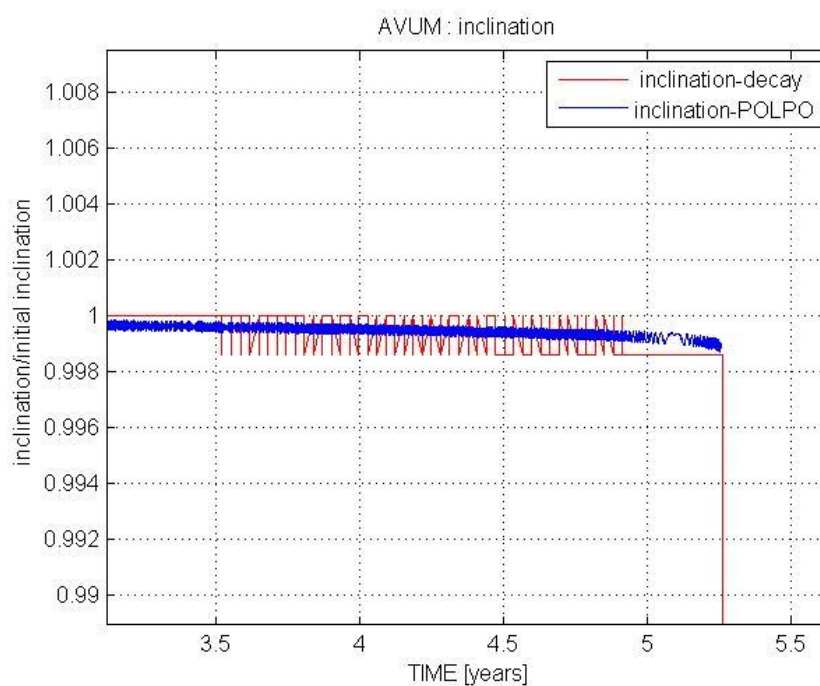
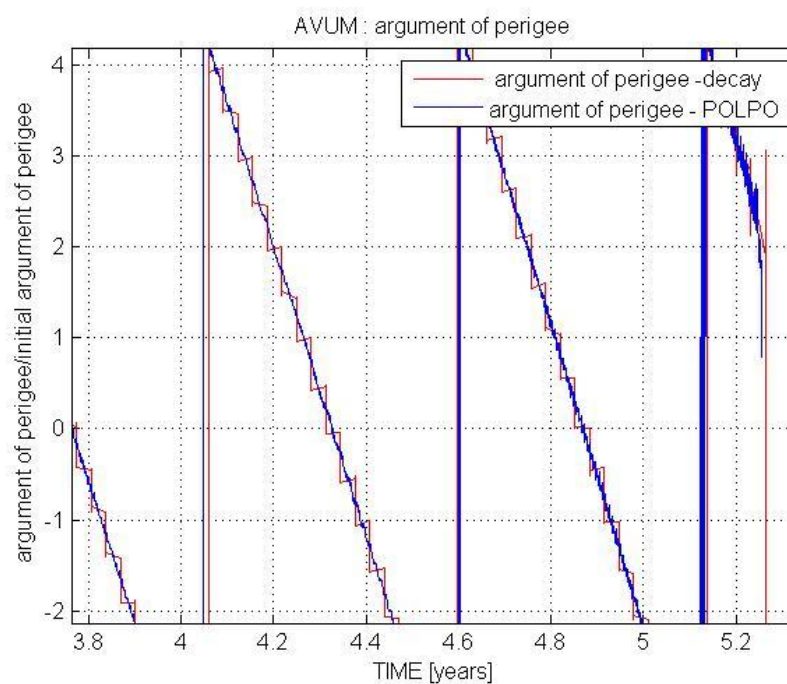
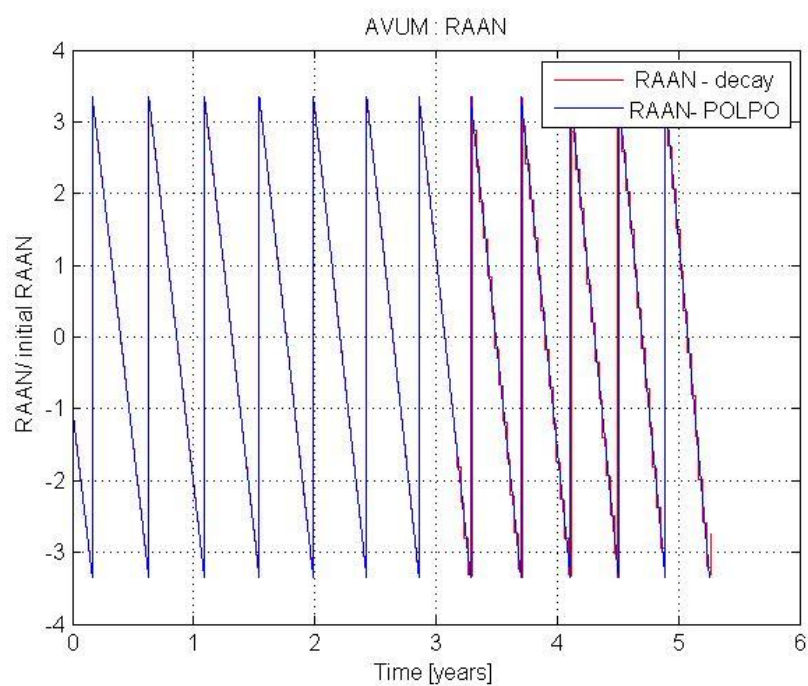
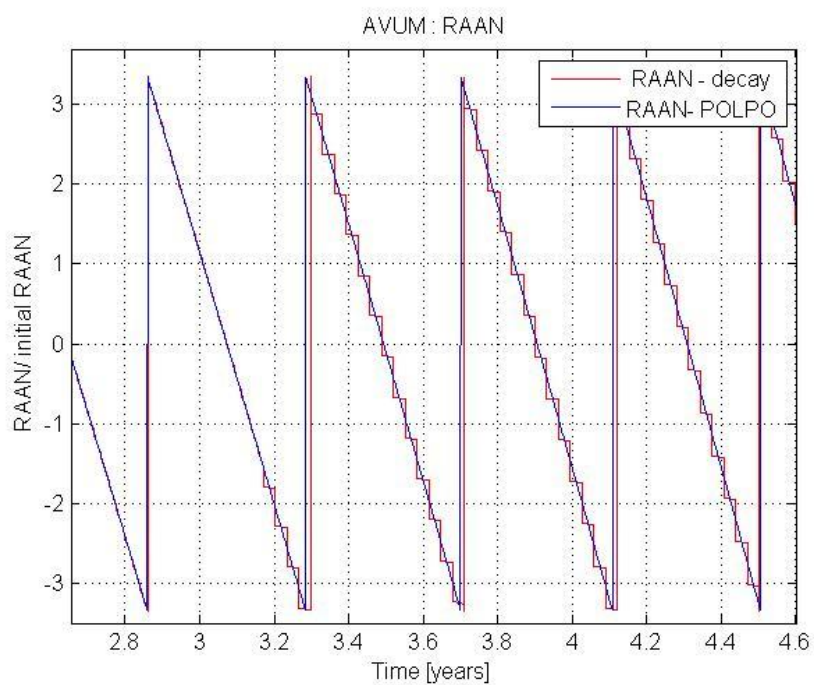


Fig.7.2.6 Dettaglio quote di apogeo e perigeo di AVUM..

INCLINAZIONE**Fig.7.2.7** Dettaglio inclinazione di AVUM.ARGOMENTO DEL PERIGEO**Fig.7.2.8** Dettaglio argomento perigeo di AVUM.

RAAN**Fig.7.2.9** RAAN AVUM.**Fig.7.2.10** Dettaglio RAAN AVUM.

I grafici riportati, inoltre, mostrano gli effetti di variazione istantanea (oscillazione) di tutti i parametri orbitali per effetto dell'armonica zonale J_2 .

Risulta evidente, anche, la variazione secolare della RAAN e dell'argomento del perigeo, sempre per effetto dell'armonica zonale J_2 .

Come risulta evidente dai dettagli delle figure riportate, l'introduzione del passo di integrazione variabile determina un andamento dei valori calcolati marcatamente più continuo rispetto ai dati ottenuti dall'integrazione a passo fisso, caratterizzata dall'andamento "a gradino".

Differenze legate alle caratteristiche di integrazione a parte, i valori dei parametri sono evidentemente concordi per entrambi i programmi: il riscontro tra i dati del programma di simulazione POLPO ed il programma DECAJ è sicuramente positivo.

- POLPO-STELA (*Semi-analytic Tool for End of Life Analysis*)

STELA è un programma del CNES ("Centre National d'Etude Spatiale") che fornisce, tra le varie applicazioni, il calcolo del tempo necessario per il rientro in atmosfera di un singolo corpo orbitante intorno alla Terra.

Tiene conto delle perturbazioni dell'ambiente spaziale legate alle armoniche zonali fino ad J_4 ($n = 4, m = 0$) e della resistenza atmosferica.

L'interfaccia del programma si riduce ad una singola schermata nel quale inserire i valori dei parametri orbitali iniziali ed il valore del rapporto tra il C_D e la massa del corpo orbitante.

Gli output del programma sono anch'essi riassunti in un'unica schermata che indica il tempo di rientro in anni ed un unico grafico che mostra l'andamento delle quote di perigeo ed apogeo.

Non sono forniti dati numerici su posizioni o velocità, quindi, il confronto dei dati ottenuti dal POLPO con questo programma si limita ai tempi necessari per il rientro indiretto dell'AVUM.

Anche in questo caso sono state svolte diverse simulazioni al variare del rapporto tra C_D e massa. Per ognuna delle simulazioni di confronto con STELA, il programma POLPO ha simulato la fase di De-orbiting per l'Upper Stage AVUM tenendo conto dei seguenti disturbi:

Disturbi considerati per il confronto POLPO-STELA	
Armoniche zonali	Resistenza atmosferica
$n = 4, m = 0$	$C_D = 2.2$ (imposto)

Tab.7.2.3 Disturbi considerati per il confronto DECAY-DAS.

I valori dei parametri utilizzati per l'integrazione sono gli stessi utilizzati per le simulazioni del cross-check POLPO-DECAY, ovvero:

Dati integratore per il confronto POLPO-STELA				
H_min	H_max	Iter_max	Err_max	G_factor
1 [sec]	10 [sec]	10	1E-12	2

Tab.7.2.4 Dati integratore per il confronto POLPO-STELA.

Il riscontro tra i tempi di rientro calcolati con il programma POLPO e quelli calcolati con il programma STELA è risultato positivo per tutte le simulazioni effettuate, seppur mai coincidente; il tempo di rientro, infatti, è un dato che varia sensibilmente a seconda dei modelli fisici utilizzati per il calcolo delle perturbazioni dell'ambiente spaziale ed i due software a confronto hanno diversi modelli sia per atmosfera che per la pressione solare. Tipicamente, dunque, si ottengono valori di *lifetime* differenti (anche dell'ordine di un anno su un *lifetime* previsto di 10 anni) tra programmi differenti, anche a parità di condizioni iniziali.

7.3. De-orbiting & in orbit collision analysis: simulazione realistica.

7.3.1. Condizioni per la simulazione.

Per la simulazione svolta per l'analisi del decadimento dell'upper stage AVUM e dello studio della collisione in orbita tra AVUM e LARES, si sono considerati gli effetti perturbativi riassunti nella seguente tabella :

Disturbi considerati per simulazione realistica			
Armoniche settoriali	Resistenza atmosferica	Luni-solar effect	Pressione solare
$m = n = 6$	$C_D = 2.2$ (imposto)	(standard) §4.4.4	(standard) §4.4.5

Tab.7.3.1 Disturbi considerati per simulazione realistica.

La scelta dei valori di n ed m non è causale, ma deriva da cross-check precedentemente effettuati nell'ambito degli studi di sistema sull'argomento, che attestano come l'influenza delle armoniche per valori fino ad $n=m=6$ non sia trascurabile per lo studio del rientro in atmosfera dell'Upper Stage AVUM [18]

Le posizioni velocità iniziali dei due corpi non verranno riportate, in quanto ritenuti dati sensibili coperti dai protocolli di sicurezza interni all'azienda ELV.

Per quanto riguarda il passo di integrazione, si sono utilizzati i seguenti valori :

Dati integratore				
H_min	H_max	Iter_max	Err_max	G_factor
1 [sec]	10 [sec]	10	1E-12	2

Tab.7.3.2 Dati integratore per simulazione realistica.

Sulla base dei valori assunti dalle accelerazioni perturbative nelle precedenti simulazioni (compresi tra E-02 e E-09), si è scelto il *range* di esponenti per i valori delle perturbazioni considerate, da specificare nel modulo del programma che effettua la sommatoria di tutte le perturbazioni considerate, in modo da essere sicuri di comprendere tutti i contributi perturbativi:

Range di valori per le perturbazioni considerate	
Esponente_max	Esponente_min
1	-14

Tab.7.3.3 Range di valori delle perturbazioni per la simulazione realistica.

Di seguito vengono riportati i grafici dei parametri orbitali di AVUM e LARES, ottenuti dalla simulazione finale effettuata con valori realistici per tutti i parametri in gioco.

7.3.2. De-orbiting : AVUM.

I grafici riportati di seguito riassumono l'analisi della fase di De-orbiting dell'Upper Stage AVUM.

Semiassse maggiore:

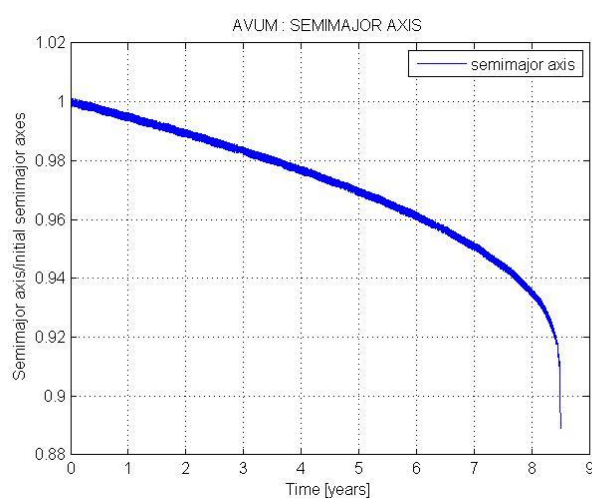


Fig.7.3.2.1 Semiassse maggiore AVUM- simulazione realistica.

Quote di apogeo e perigeo:

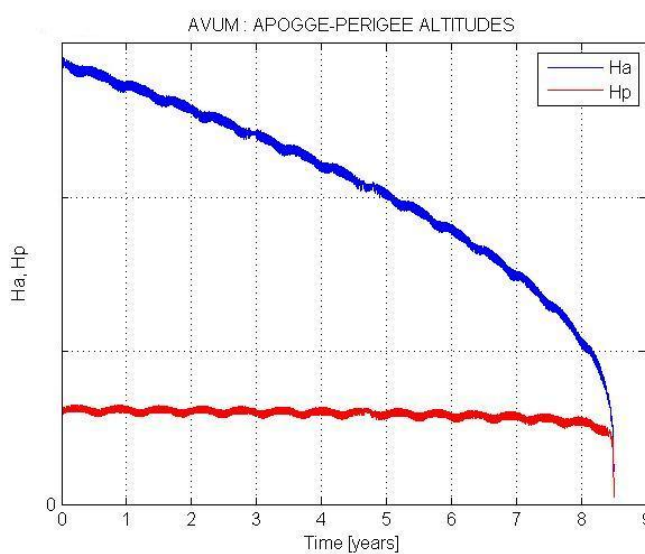
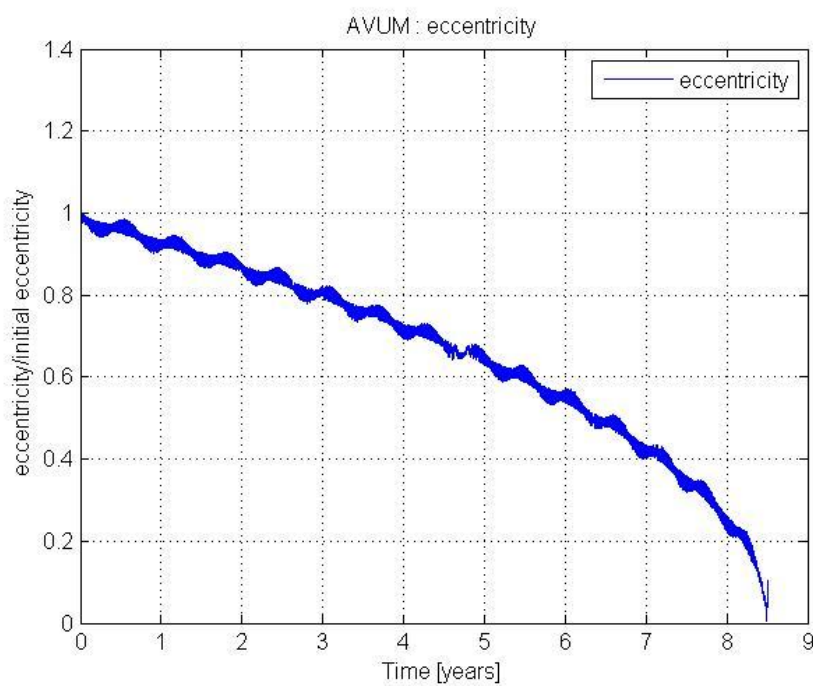
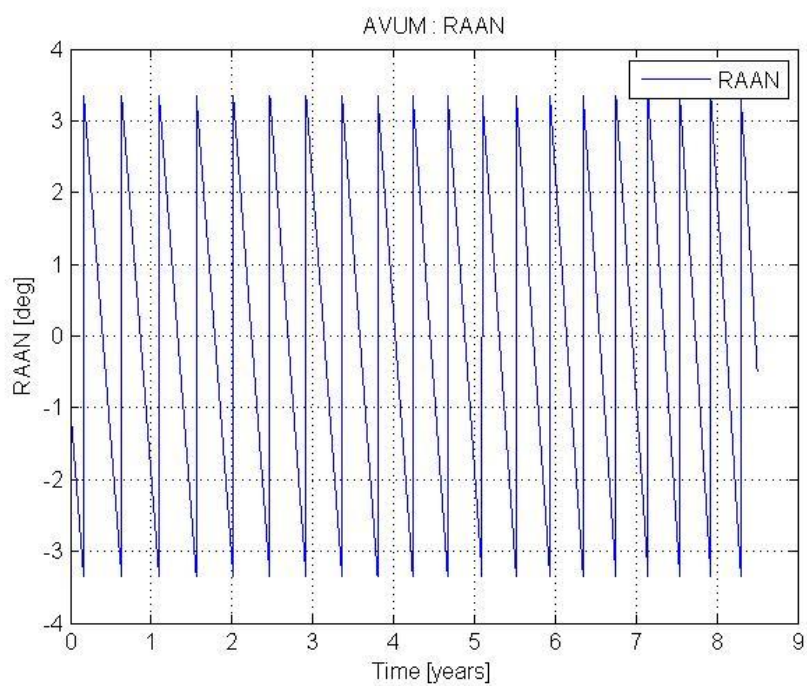
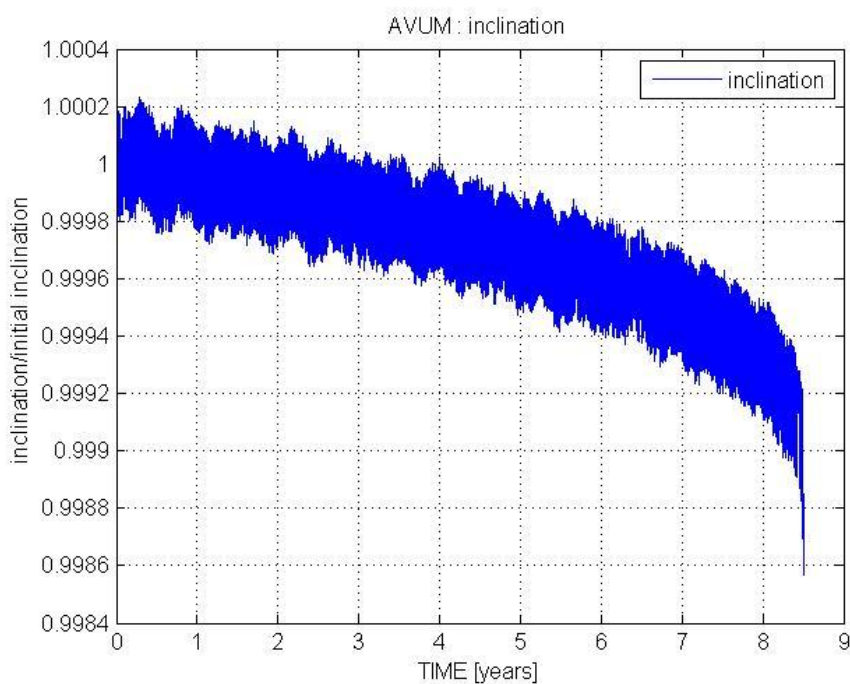
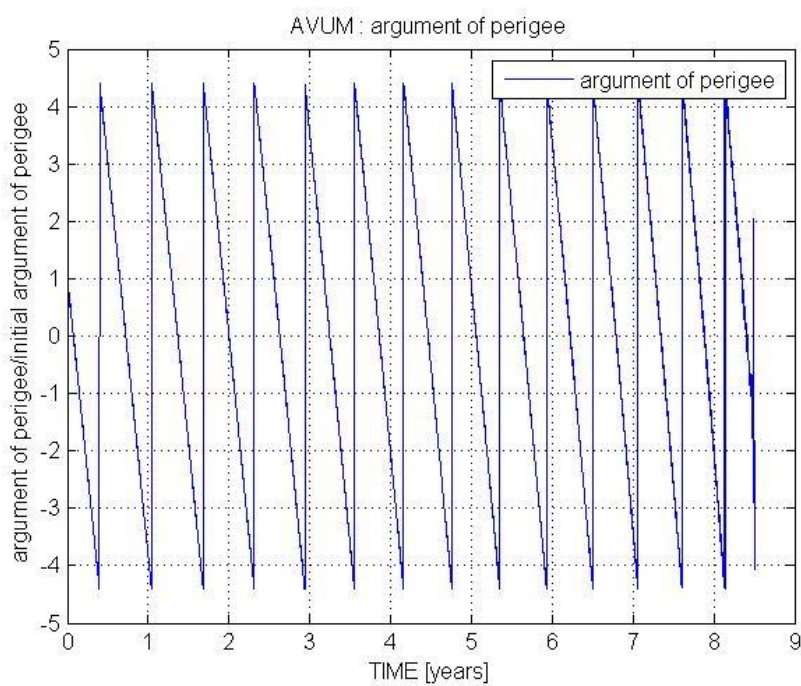


Fig.7.3.2.2 Ha e Hp AVUM- simulazione realistica.

Eccentricità.**Fig.7.3.2.3** Eccentricità AVUM- simulazione realistica.RAAN.**Fig.7.3.2.4** RAAN AVUM- simulazione realistica.

Inclinazione:**Fig.7.3.2.5** Inclinazione AVUM- simulazione realistica.Argomento del perigeo:**Fig.7.3.2.6** Argomento del perigeo AVUM- simulazione realistica.

Anche stavolta, come già si era osservato nel *cross-check* tra POLPO e DECAY, dai grafici riportati si nota l'evidente effetto della resistenza atmosferica sui parametri orbitali quali l'eccentricità, il semiasse maggiore, e la maggior diminuzione della quota di apogeo rispetto alla quota di perigeo.

Per quanto riguarda le altre perturbazioni considerate è difficile riconoscerne gli effetti legati a ciascuna separatamente, ma si evidenzia un effetto globale di variazione istantanea di tutti i parametri orbitali e la variazione secolare della RAAN e dell'argomento del perigeo.

Per quanto riguarda, invece, il tempo di rientro, evidentemente il limite massimo dei 25 anni è largamente rispettato.

Il tempo di rientro indiretto per l'Upper Stage AVUM è stimato entro i 9 anni dall'inizio della fase di De-orbiting; tale stima del tempo di rientro è concorde, sulla base delle considerazioni già discusse in §7.2, con i dati stimati da STELA per la medesima simulazione, pari a circa 9 anni e mezzo.

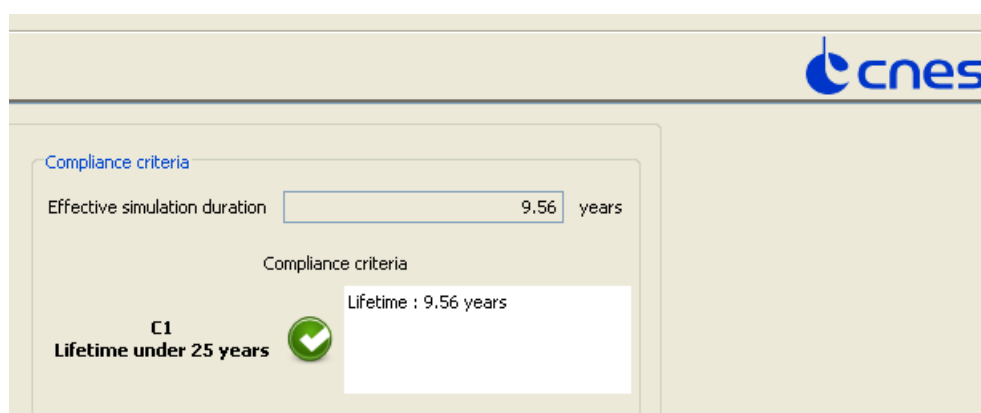


Fig.7.3.2.7 Tempo di rientro indiretto di AVUM stimato dal programma STELA.

Un ulteriore confronto sui tempi di rientro si è effettuato sui dati ottenuti dal software DAS (*Debris Analysis Software*) di proprietà della NASA; che attesta il rientro dell'Upper Stage AVUM entro 10 anno dal'inizio della fase di De-orbiting.

Di seguito si riportano degli esempi della traccia a terra per i primi periodi orbitali dell'AVUM dopo l'inizio della fase di De-orbiting.

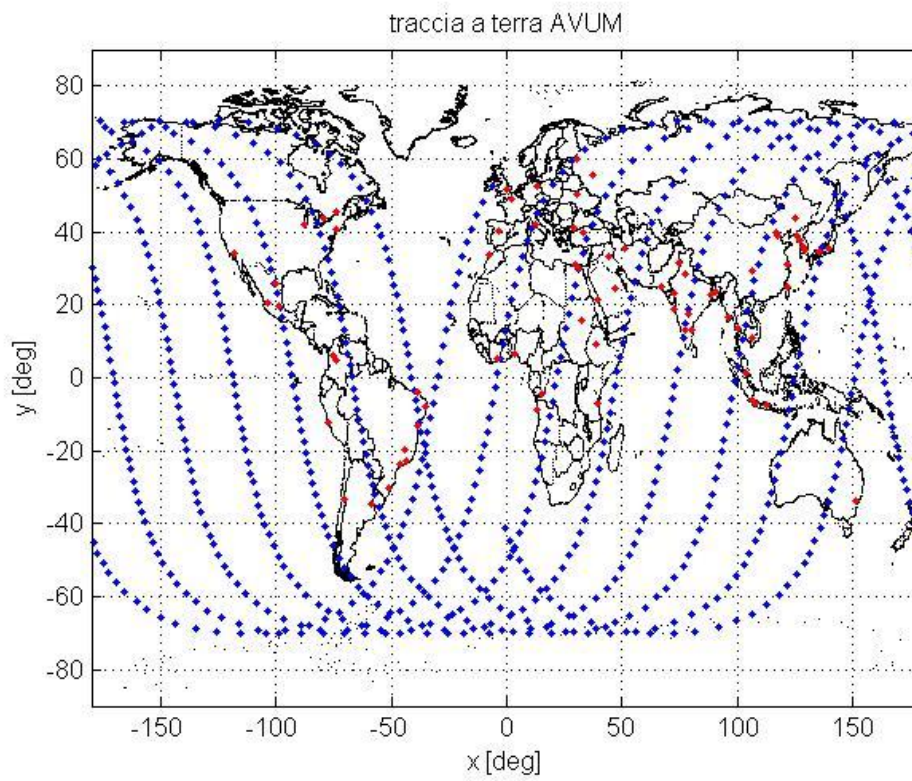


Fig.7.3.2.8 Traccia a Terra dei primi tre periodi orbitali di AVUM.

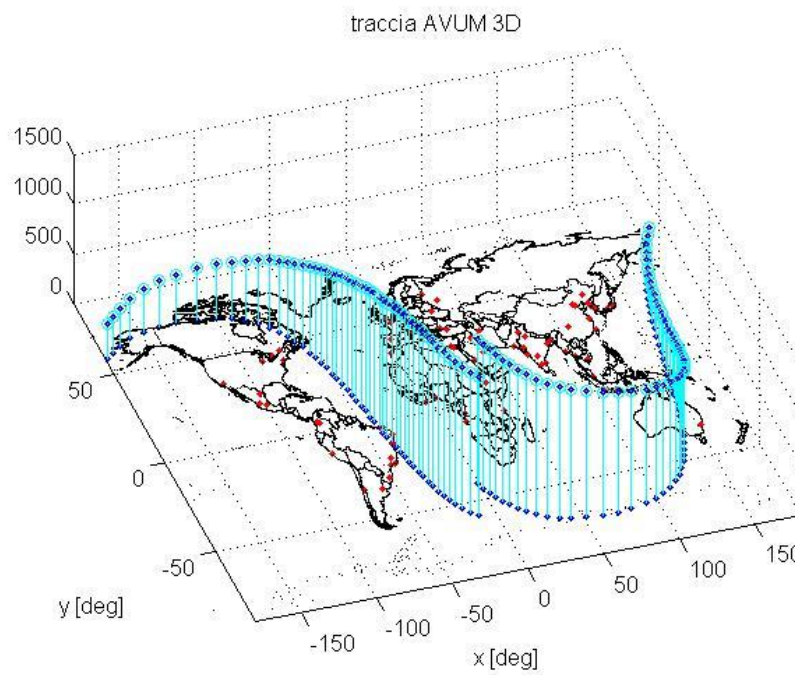


Fig.7.3.2.9 Traccia a terra e in quota del primo periodo orbitale di AVUM.

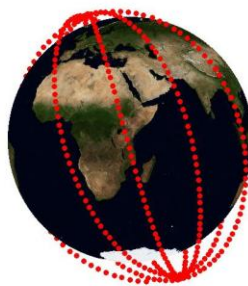


Fig.7.3.2.10 Traiettoria 3D dei primi periodi orbitali di AVUM.

7.3.3. Disturbi dell'ambiente spaziale : impatto su LARES.

Si riportano di seguito i grafici che mostrano l'andamento dei parametri orbitali del satellite LARES, ottenuti a partire dai dati realistici, per un periodo di osservazione pari al periodo di rientro in atmosfera dell'Upper Stage AVUM.

LARES orbita attorno alla Terra, in un'orbita circolare, con un rapporto massa/superficie ed una quota tali da non risentire in maniera apprezzabile dell'effetto della resistenza atmosferica; per tale ragione, i grafici seguenti evidenziano gli aspetti tipici legati alle variazioni istantanee e secolari dei parametri orbitali dovuti ai disturbi legati alle asimmetrie del campo gravitazionale terrestre, al “*luni-solar effect*” ed alla pressione solare.

Semiassse maggiore:

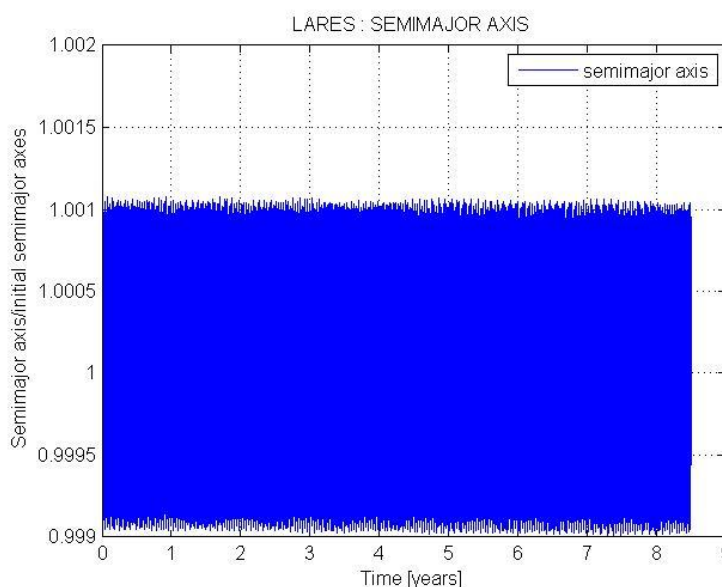


Fig.7.3.3.1 Semiassse maggiore LARES- simulazione realistica.

Quote di apogeo e perigeo:

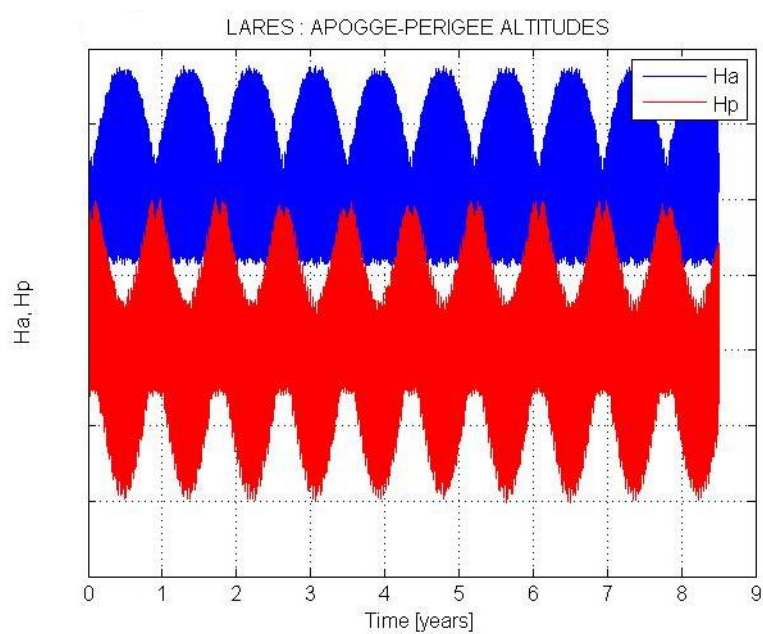


Fig.7.3.3.2 Ha e Hp LARES- simulazione realistica.

Eccentricità:

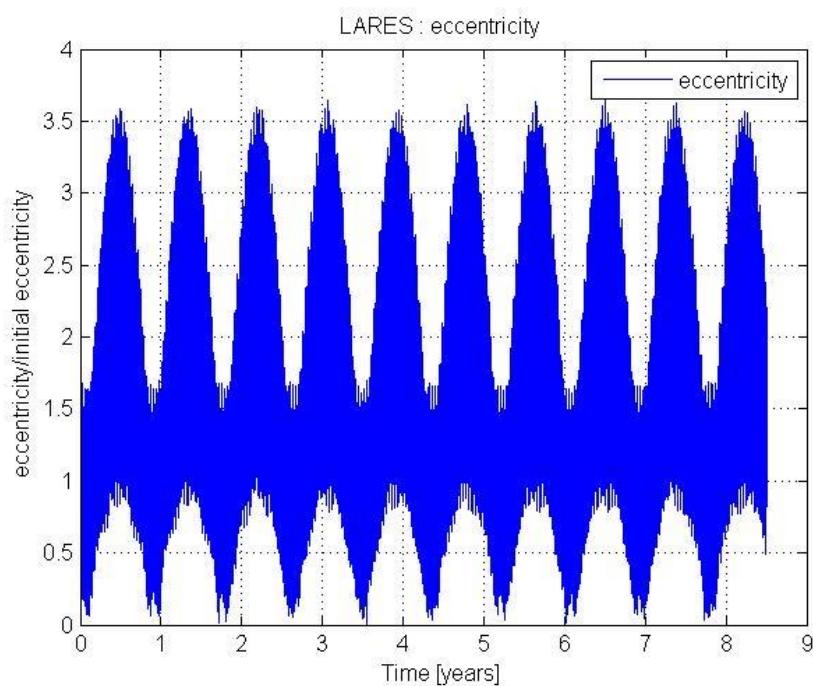
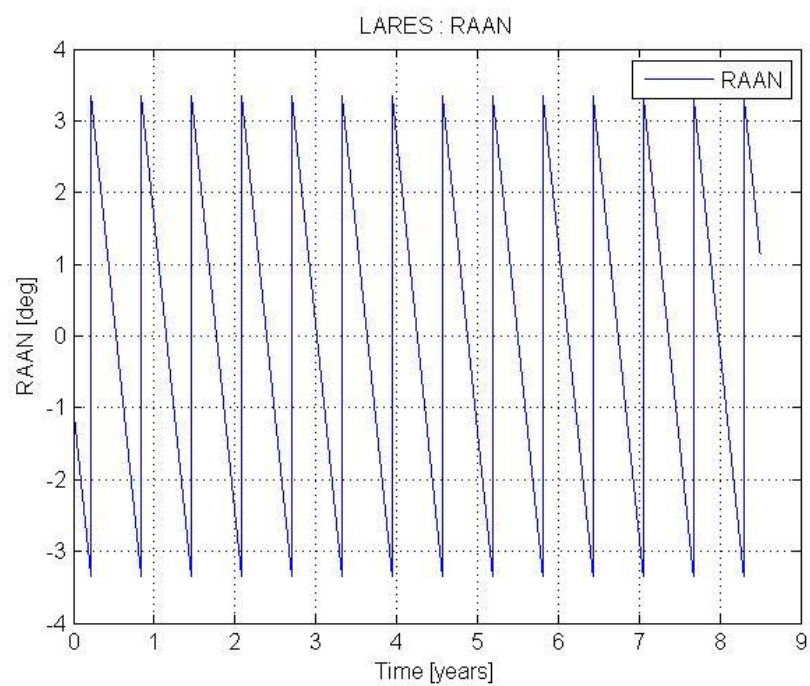
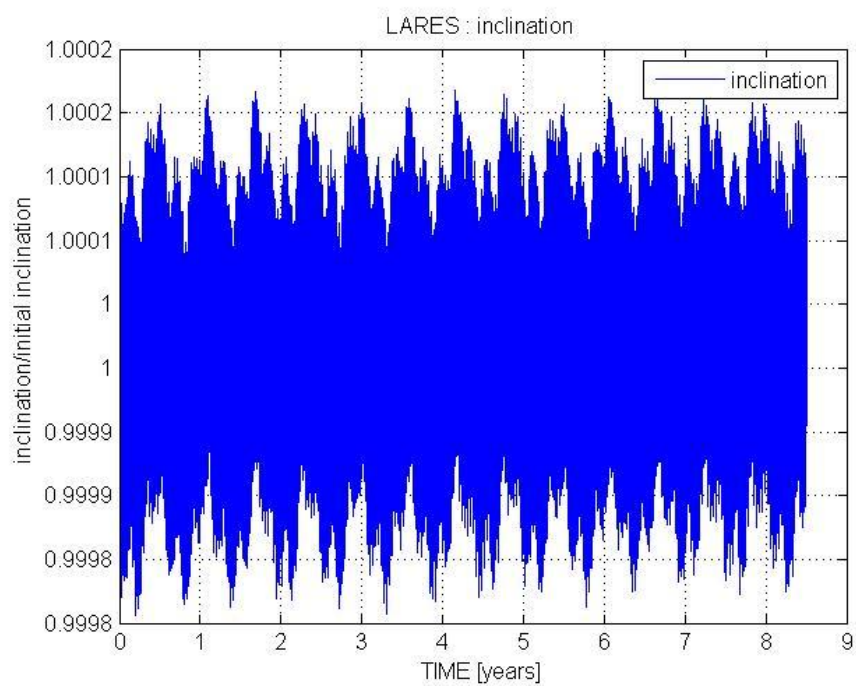


Fig.7.3.3.3 Eccentricità LARES- simulazione realistica.

RAAN:**Fig.7.3.3.4** RAAN LARES- simulazione realistica.Inclinazione.**Fig.7.3.3.5** Inclinazione LARES- simulazione realistica.

Argomento del perigeo

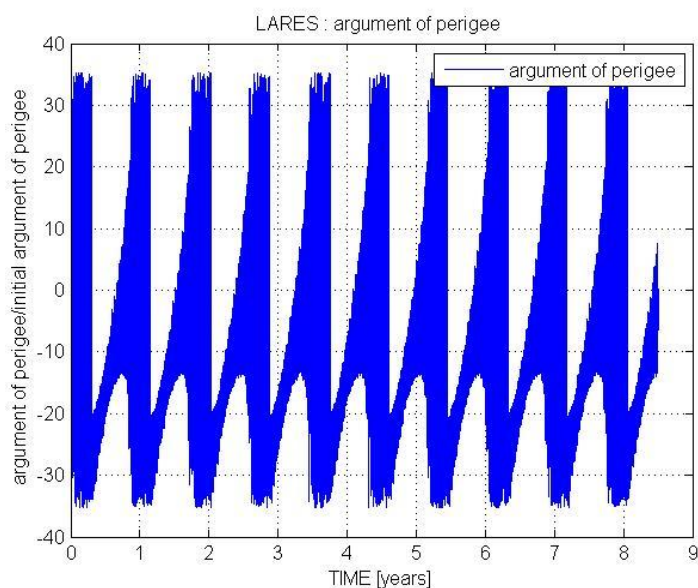


Fig.7.3.3.6 Argomento del perigeo LARES- simulazione realistica.

7.3.4. L'analisi di collisione in orbita.

Per quanto riguarda l'analisi di collisione in orbita è necessario chiarire che non ci si è basati sull'analisi dei dati tramite grafici, qui di seguito riportati per chiarezza, ma bensì sulla funzionalità del programma POLPO.

Bisogna, infatti, tener presente che i dati di output da cui si ottengono i grafici per l'analisi dei risultati di simulazione, sono comunque dei dati campionati a "frequenze" più basse del passo di calcolo; per un'analisi di collisione in orbita, però, non ci si può accontentare di tali dati, perché si potrebbe raggiungere la distanza minima in un qualsiasi istante del moto, non necessariamente coincidente con i tempi campionati di stampa su file dei dati.

Per tale ragione il calcolo della distanza all'interno del programma POLPO viene ripetuto per ogni singolo *step* integrativo, e nel qual caso la distanza calcolata risulti inferiore alla distanza minima di sicurezza, il programma arresta la simulazione e segnala il problema riscontrato nella schermata di interfaccia per l'utente.

Le figure se seguire riportano l'andamento della distanza tra AVUM e LARES relativo alla completa fase di De-orbitng di AVUM.

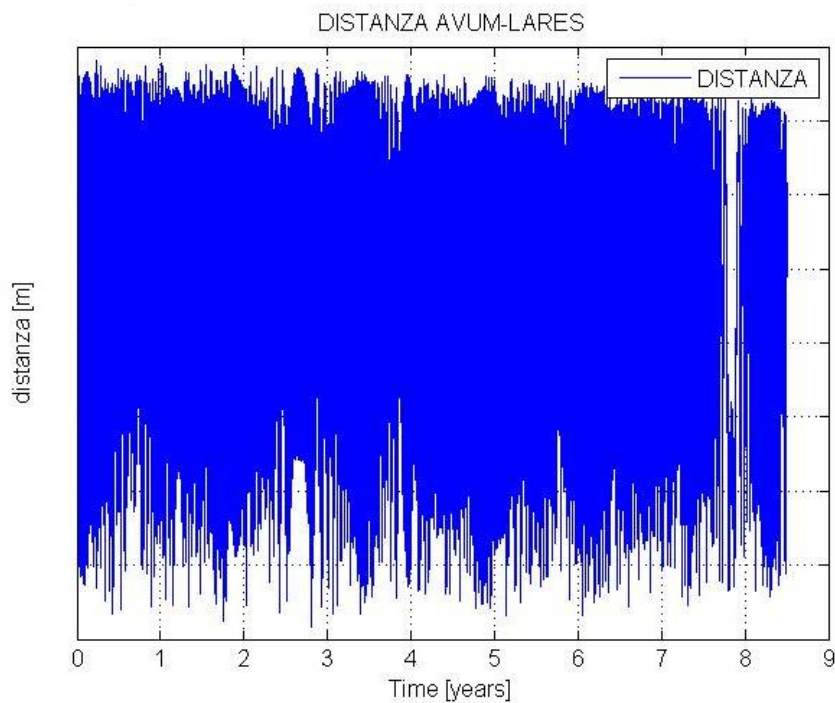


Fig.7.3.4.1 Distanza AVUM - LARES- simulazione realistica.

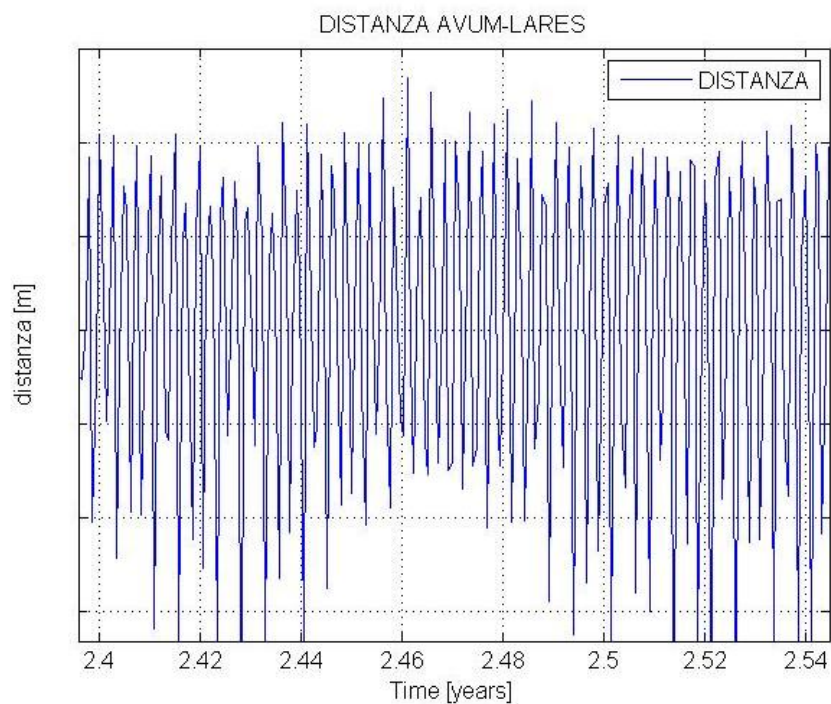


Fig.7.3.4.2 Dettaglio distanza AVUM - LARES- simulazione realistica.

La predizione di tale risultato può sembrare banale, in quanto, poco dopo la separazione dal P/L, AVUM effettua una manovra per l'immissione in un'orbita con una minore quota di perigeo ed inizia la propria fase di decadimento verso l'atmosfera; tuttavia, è proprio il fatto che AVUM si trovi in un'orbita differente, ma con apogeo comunque tangente all'orbita del P/L, che non permette di predire con sicurezza se si può verificare un futuro riavvicinamento dei due corpi, in quanto, essendo su orbite differenti, avranno differenti periodi orbitali, e risentiranno in modo differente anche delle perturbazioni dell'ambiente spaziale.

Analisi preliminari sul rischio di collisione in orbita per i primi mesi della fase di De-orbiting di AVUM [17], antecedenti all'analisi qui riportata, avevano già evidenziato il riavvicinamento dei due corpi ogni periodo sinodico, come del resto atteso in base alla definizione stessa di periodo sinodico, determinando un'evoluzione periodica della distanza nel tempo. Le perturbazioni stesse fanno sì, inoltre, che la distanza ad ogni periodo sinodico non sia la stessa, a causa del loro effetto sulle rispettive orbite. Se il moto di AVUM e LARES fosse imperturbato, il periodo sinodico risulterebbe costante; tuttavia, data l'effettiva presenza delle perturbazioni si ritiene plausibile una variazione, seppur minima, di tale periodo; l'analisi preliminare citata, seppur dettagliata, si riferisce ad un tempo di osservazione troppo breve perché si possano trarre conclusioni certe sul comportamento del periodo sinodico. Ad ogni modo, l'analisi svolta in questa tesi, non verte a scopi ricercativi tali, bensì alla verifica del rischio di collisione in orbita; tuttavia, le potenzialità del programma POLPO sono in grado di permettere lo studio accurato dell'evolversi della distanza tra AVUM e LARES; uno studio in merito sarà sicuramente oggetto di analisi future. Ancor più rilevante, a riguardo, risulterebbe uno studio sull'evoluzione del valore del picco di distanza minima raggiunto, allo scopo di determinare se anch'esso sia riconducibile ad un comportamento periodico da associare ad un periodo temporale maggiore e multiplo del periodo sinodico.

La figura seguente mostra la traiettoria di AVUM e LARES per il primo periodo orbitale di AVUM dall'inizio della fase di De-orbiting.

Come si vede i due corpi si trovano in orbite tangenti all'apogeo, e quindi la collisione è plausibile, ma al completamento del primo periodo orbitale di AVUM, LARES non ha ancora concluso il proprio periodo.

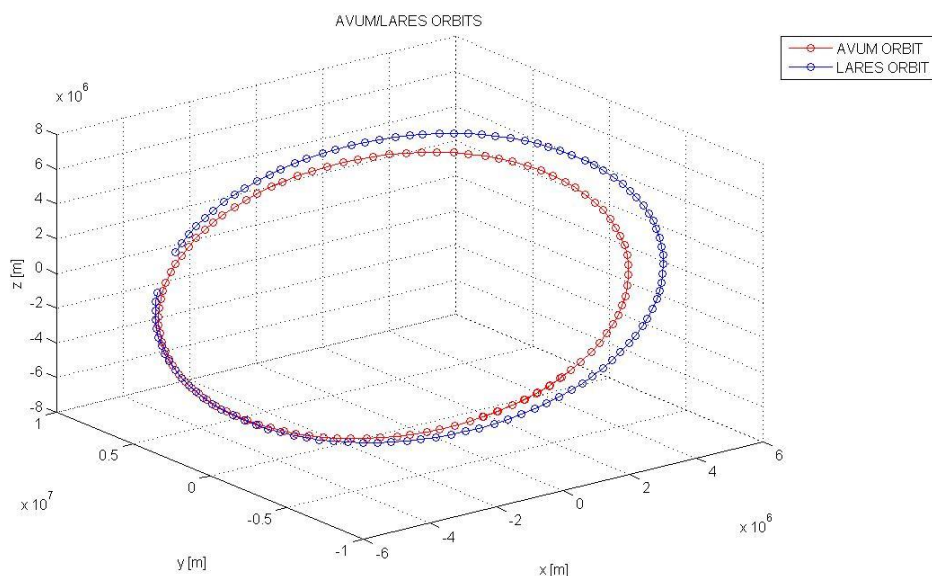


Fig.7.3.4.3 Traiettorie primo periodo orbitale AVUM - simulazione realistica

La figura seguente mostra l'andamento periodico della distanza tra AVUM e LARES, scandito da tempi uguali al periodo sinodico, per le prime 50 ore di propagazione di AVUM.

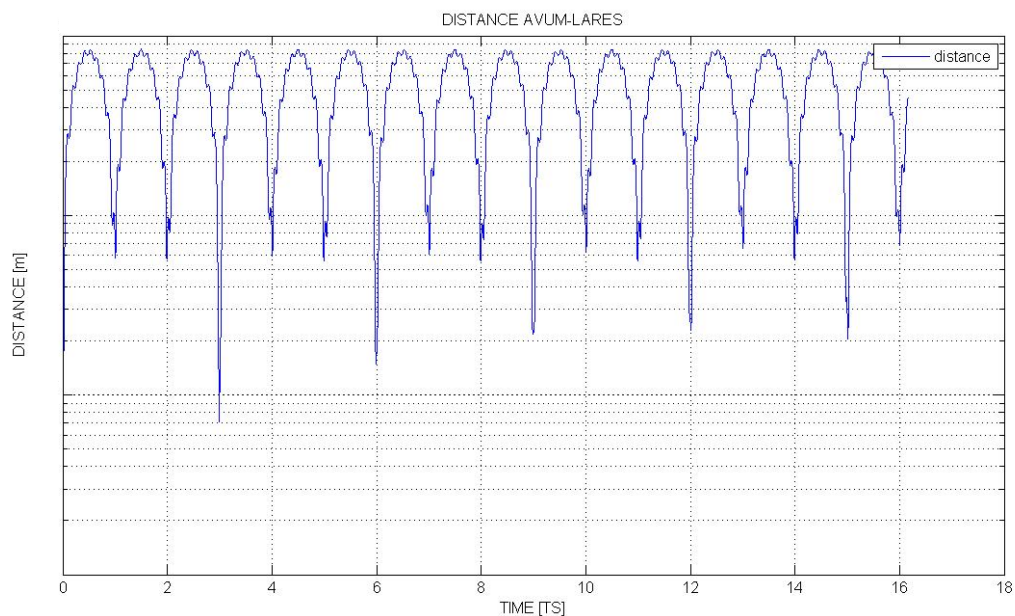


Fig.7.3.4.4 Distanza AVUM-LARES, ricorrenza della distanza minima.

La figura seguente mostra l'andamento della distanza durante un singolo tempo sinodico:

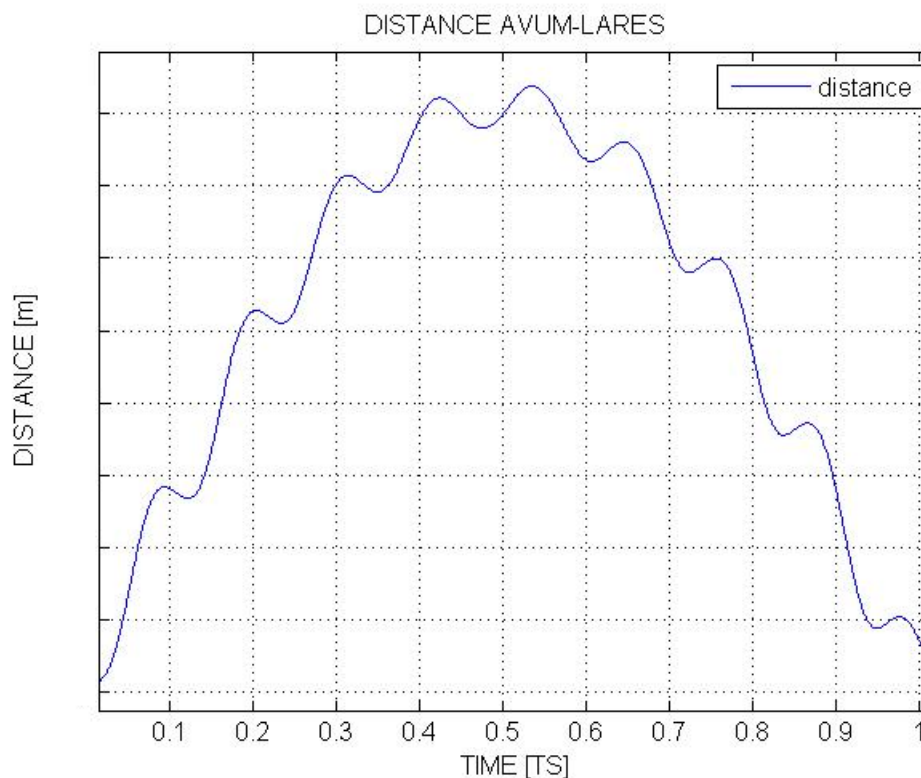


Fig.7.3.4.5 Distanza AVUM-LARES: primo periodo sinodico.

Come appare evidente dalla **Fig.7.3.4.5**, nell’arco di un periodo sinodico AVUM e LARES tendono a tornare alla distanza iniziale, salvo il contributo perturbativo dato dall’*environment*; la distanza presenta, inoltre, un comportamento sinodico “sovrapposto”: le piccole creste che si rilevano sulla curva della distanza sono dovute al fatto che i due corpi orbitanti hanno un periodo orbitale simile (come evidenziato dalla **Fig.7.3.4.3**): questo piccolo sfasamento sancisce l’accumulo di una distanza fino ad un valore massimo, per poi riavvicinarsi.

Per quanto riguarda l’analisi di collisione in orbita tra l’Upper Stage AVUM ed il suo P/L per il volo di qualifica, LARES, svolta durante il lavoro della presente tesi, si attesta che la distanza minima di sicurezza, fissata pari ad 1 km, non è mai stata raggiunta. In definitiva, sulla base dell’analisi svolta, si ritiene che la fase di De-orbiting dell’Upper Stage AVUM si svolga sicurezza senza alcun rischio di collisione con il P/L LARES.

7.4. Potenzialità del POLPO da un punto di vista della ricerca.

Sebbene il programma POLPO nasca come applicazione industriale, la sua configurazione estremamente versatile, ne permette l'uso anche per applicazioni orientate alla ricerca.

Per chiarire meglio le potenzialità del programma POLPO, il presente paragrafo riporta due esempi di potenziali analisi di interesse pratico.

Confronto tra diversi ordini di armoniche settoriali.

Come già ripetuto più volte, il programma POLPO prevede la possibilità di scegliere l'ordine e il tipo di armoniche da considerare per la modellazione del potenziale gravitazionale terrestre, questa possibilità apre le porte ad una varietà di possibili studi sull'influenza dell'ordine e del tipo di armoniche considerate sul moto perturbato di un corpo orbitante attorno alla Terra.

Di seguito si riporta un preliminare studio dell'effetto dell'ordine dell'armoniche settoriali ($n = m$) sul modulo dell'accelerazione totale avvertita dal corpo orbitante.

Lo scopo di tale confronto è puramente verso alla dimostrazione delle potenzialità del programma POLPO da un punto di vista della ricerca, e per tale ragione si limita all'analisi esplicita delle accelerazioni; studi più approfonditi, sugli effetti dell'ordine e del tipo dell'armonica utilizzata sulla vita in orbita dell'Upper Stage AVUM, o di un qualsivoglia corpo orbitante attorno alla Terra, saranno sicuramente oggetto di future analisi, ma esulano dal contesto e dagli obiettivi proposti in questa tesi.

Per realizzare questa analisi si sono svolte 5 differenti simulazioni, nelle quali l'unico disturbo considerato era, appunto, l'asimmetria del campo gravitazionale terrestre.

Confronto tra diversi ordini di armoniche settoriali	
simulazione	Disturbo considerato
1	Asimmetria del campo gravitazionale terrestre: $n = m = 2$
2	Asimmetria del campo gravitazionale terrestre: $n = m = 3$
3	Asimmetria del campo gravitazionale terrestre: $n = m = 4$
4	Asimmetria del campo gravitazionale terrestre: $n = m = 5$
5	Asimmetria del campo gravitazionale terrestre: $n = m = 6$

Tab.7.4.1 Confronto tra diversi ordini di armoniche settoriali.

Ciascuna delle simulazioni effettuate si limita ai primi tre anni di De-orbiting dell'Upper Stage AVUM.

Dai dati delle simulazioni svolte, si sono realizzati i seguenti grafici:

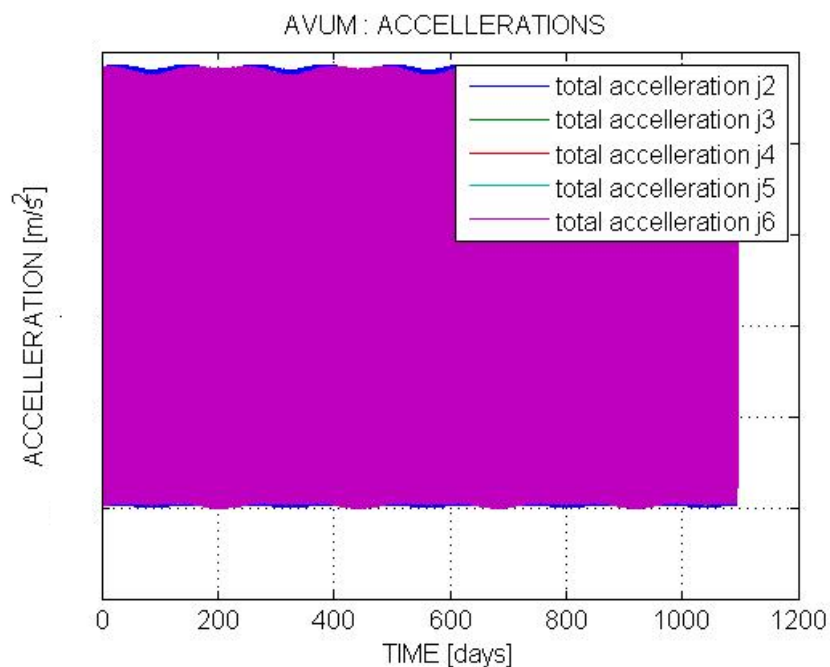


Fig.7.4.1 Accelerazioni totali AVUM- Confronto tra armoniche tesserali.

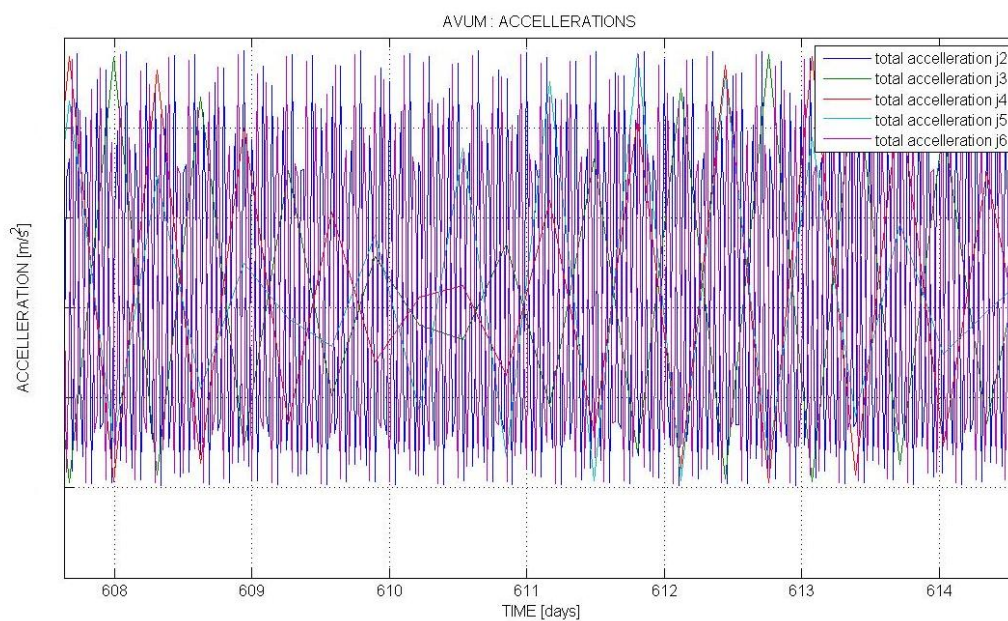


Fig.7.4.2 Dettaglio accelerazioni totali AVUM- Confronto tra armoniche tesserali.

I grafici riportati mostrano una variazione del modulo dell'accelerazione totale, avvertita da AVUM, apprezzabile anche a occhio nudo, senza bisogno di ingrandire eccessivamente la figura.

Questa considerazione preliminare giustifica sicuramente una futura analisi.

Confronto tra disturbi perturbativi a parità di ordine e tipo di armoniche considerate.

Un'altra caratteristica del POLPO è la possibilità di scegliere quali disturbi considerare e quali invece trascurare; appare evidente che uno studio sull'entità degli effetti di ciascuna delle perturbazioni considerate è di pratico interesse.

A titolo di esempio si sono svolte, anche in questo caso, diverse simulazioni, ciascuna delle quali tiene conto di diverse perturbazioni, ma in tutti i casi l'ordine dell'armonica settoriale considerata è lo stesso.

Confronto tra diversi disturbi a parità di ordine di armoniche settoriali considerate	
simulazione	Disturbo considerato
1	Asimmetria del campo gravitazionale terrestre: $n = m = 6$
2	Asimmetria del campo gravitazionale terrestre: $n = m = 6$, resistenza atmosferica
3	Asimmetria del campo gravitazionale terrestre: $n = m = 6$, resistenza atmosferica Luni-Solar effect
4	Asimmetria del campo gravitazionale terrestre: $n = m = 6$, resistenza atmosferica Luni-Solar effect Pressione solare

Tab.7.4.2 Confronto tra diversi disturbi a parità di ordine di armoniche settoriali.

Anche in questo caso le simulazioni si limitano ai primi tre anni della fase di De-orbiting dell'Upper Stage AVUM.

Dai risultati di queste simulazioni, si può decidere, ad esempio, di realizzare un confronto sul modulo dell'accelerazione totale avvertita dal corpo orbitante al variare degli effetti considerati:

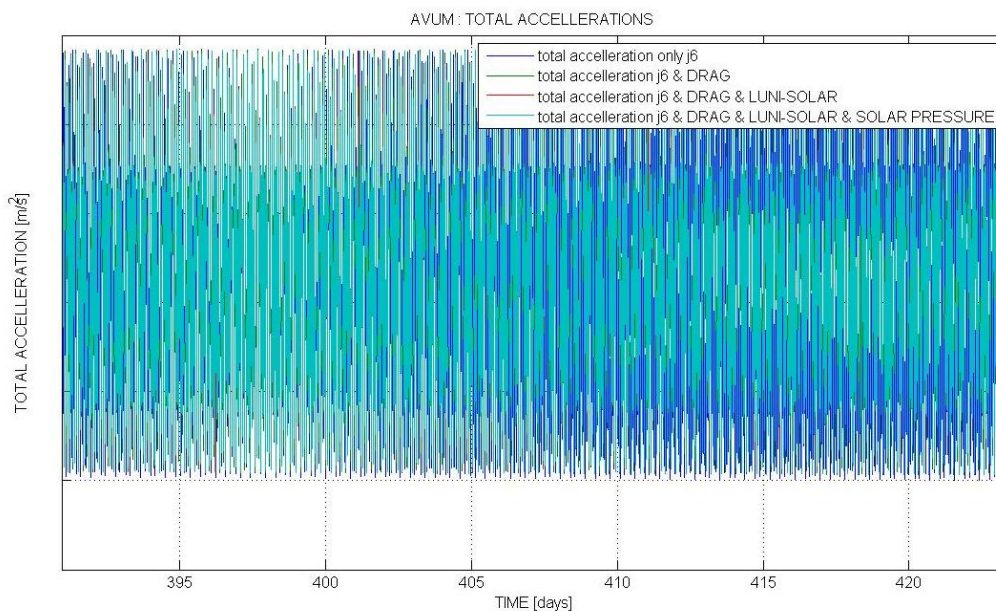


Fig.7.4.3 Accelerazioni totali AVUM- Confronto tra perturbazioni.

O di confrontare esclusivamente la risultante delle sole accelerazioni perturbative al variare delle perturbazioni considerate:

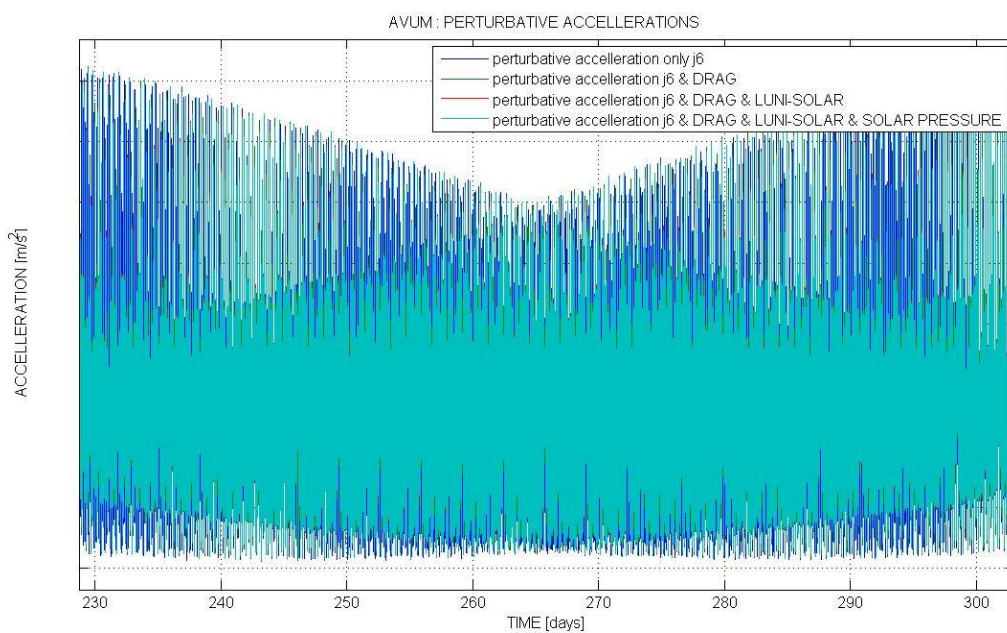


Fig.7.4.4 Dettaglio accelerazioni totali AVUM- Confronto tra disturbi.

Più semplicemente si potrebbero vedere direttamente gli effetti delle perturbazioni considerate su uno, o alcuni, dei parametri orbitali di AVUM; nei grafici seguenti si riporta la sovrapposizione dei valori di alcuni dei parametri orbitali di AVUM, al variare delle perturbazioni considerate:

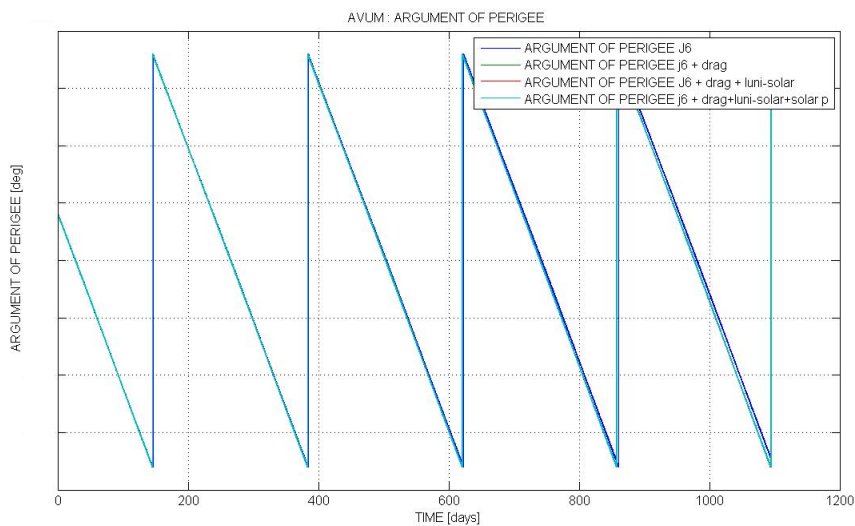


Fig.7.4.5 Effetto delle diverse perturbazioni sulla RAAN di AVUM.

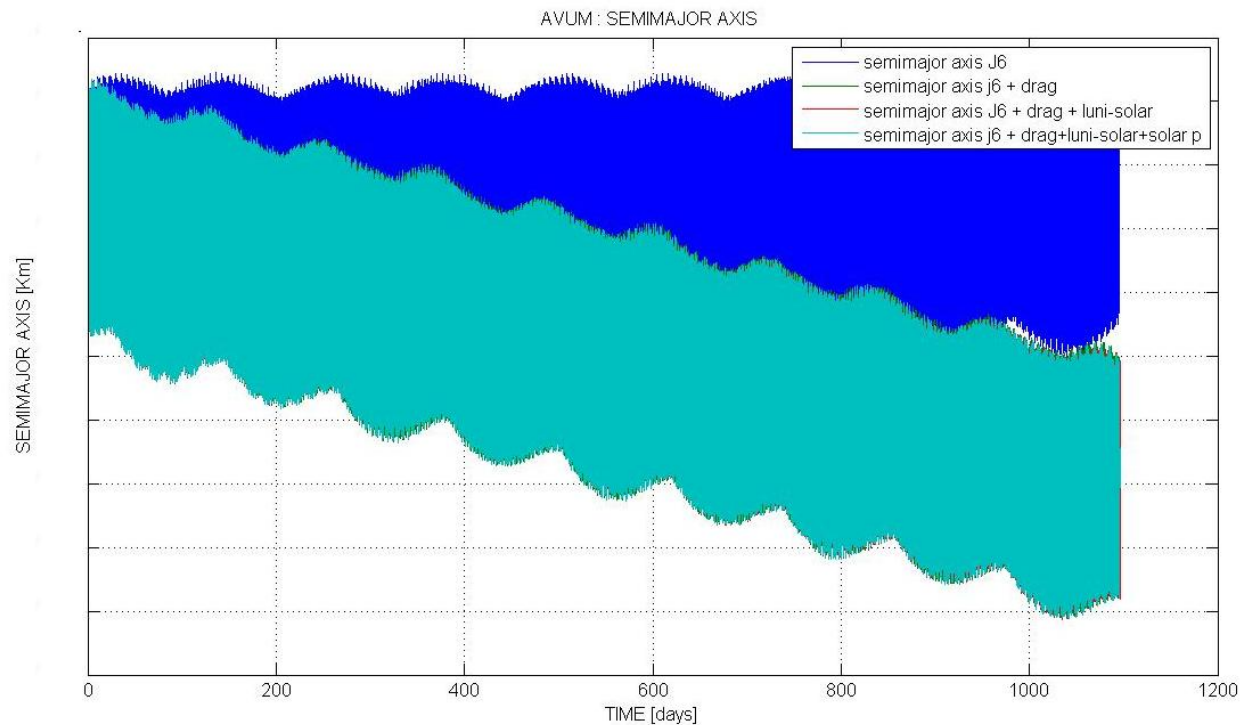


Fig.7.4.6 Effetto delle diverse perturbazioni sul semiassse maggiore di AVUM.

Appaiono, come ci si poteva aspettare, particolarmente significativi, in termini di variazione dei parametri orbitali, gli effetti legati alle asimmetrie del campo gravitazionale alla resistenza atmosferica.

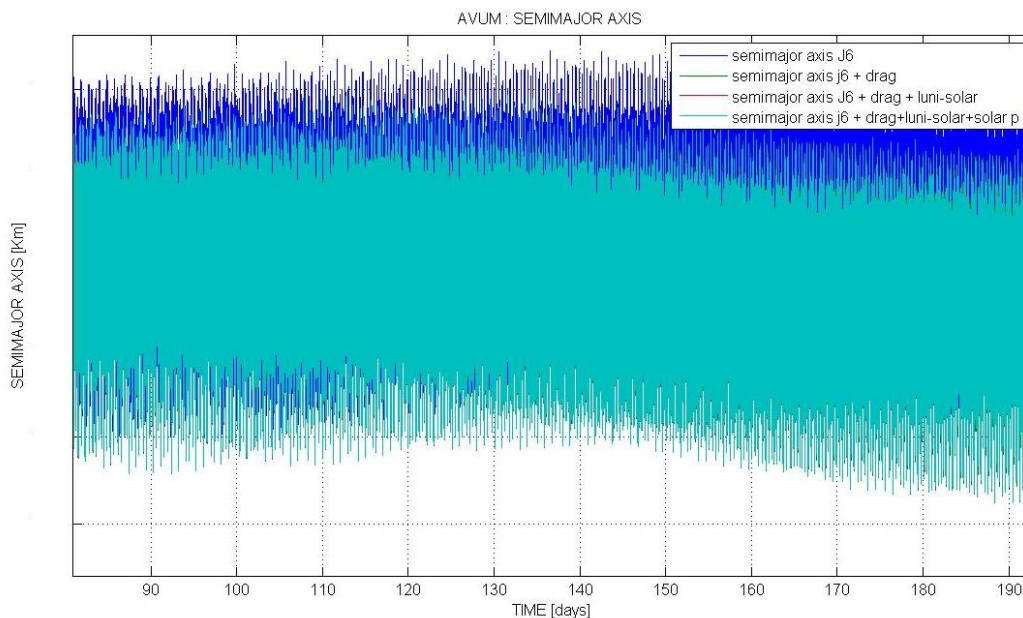


Fig.7.4.7 Dettaglio effetto delle diverse perturbazioni sul semiasse maggiore di AVUM.

Un'altra possibile scelta, qui non rappresentata potrebbe essere, la scelta di confrontare gli effetti delle singole perturbazioni separate mantenendo, al variare o meno dell'ordine e del tipo delle armoniche considerate, sui parametri orbitali o in termini di accelerazioni subite dal corpo orbitante, ad esempio effettuando le seguenti simulazioni:

Confronto tra gli effetti delle singole perturbazioni	
simuazione	Disturbo considerato
1	Asimmetria del campo gravitazionale terrestre: n , m qualsiasi
2	Solo resistenza atmosferica
3	Solo Luni-Solar effect
4	Solo Pressione solare

Tab.7.4.3 Confronto tra gli effetti delle singole perturbazioni.

Risulta dunque chiaro che l'applicabilità del programma POLPO va oltre l'uso industriale.

CAPITOLO 8

CONCLUSIONI E SVILUPPI FUTURI.

Nel presente capitolo vengono riassunte le conclusioni dell'analisi della fase di De-orbiting per l'Upper stage AVUM del lanciatore Vega, nonché le conclusioni dell'analisi sul rischio di collisione in orbita tra AVUM e il suo P/L per il volo di qualifica, LARES.

8.1. Conclusioni.

8.1.1. De-orbiting Analysis per AVUM.

Obiettivo.

In accordo con le normative internazionali che regolano la mitigazione dei detriti spaziali, la missione di qualifica per il lanciatore VEGA prevede di lasciare in orbita l'upper stage AVUM, oltre al satellite LARES immesso nell'orbita target.

L'upper stage dovrà rientrare indirettamente nell'atmosfera entro 25 anni rilasci dalla fine della missione del lanciatore, ovvero dall'inizio della fase di De-orbiting.

Risultati dell'analisi.

Dai dati ottenuti dalla simulazione effettuata con il programma POLPO, riportati nel capitolo precedente, si attesta il rientro indiretto dell'Upper Stage AVUM entro nove anni dall'inizio della fase di De-orbiting, nel rispetto, quindi, del limite massimo di 25 anni imposto dalle normative internazionali.

Il risultato ottenuto è coerente sia con i risultati delle diverse simulazioni preliminari per la verifica dei requisiti circa il tempo di vita in orbita, svolte precedentemente all'analisi esposta nella presente tesi, sia con i risultati ottenuti dai software DAS e STELA, che attestano il rientro indiretto di AVUM entro dieci anni dall'inizio della fase di De-orbiting.

Le differenze riscontrate tra i tempi di rientro delle diverse analisi sono, come già chiarito nei capitoli precedenti, da attribuire alle differenze tra modelli di ambiente spaziale utilizzati dai diversi programmi di simulazione.

Esiste, inoltre, una dispersione molto limitata sul valore nominale della quota di perigeo dell'orbita in cui AVUM viene immesso per il rientro. Secondo un approccio conservativo, nel calcolo delle condizioni limite, tale dispersione viene aumentata a 30 km.

Per completare l'analisi della fase di De-orbiting, tenendo conto di questa incertezza, si è svolta una simulazione del rientro indiretto di AVUM nel caso in cui questo fosse immesso nell'orbita con valore massimo della quota di perigeo, nella quale gli effetti della resistenza atmosferica sono minori.

Da quest'ultima simulazione svolta risulta che, anche nelle condizioni pessimistiche di immissione in orbita con quota di perigeo massima, il rientro dell'Upper Stage AVUM avviene entro 23 anni, nel rispetto, anche in questo caso, del limite massimo dei 25 anni imposto dalle normative internazionali.

I risultati ottenuti sono riassunti nella seguente tabella:

Tempi di rientro indiretto per AVUM stimati dal programma POLPO		
Simulazione	Tempo di rientro stimato	Rispetto del limite (25 anni)
Caso nominale (orbita nominale)	meno di 9 anni	✓
Caso peggiore (orbita con massima h_P)	meno di 23 anni	✓

Tab.8.1.1 Tempo di rientro indiretto di AVUM.

8.1.2. *In orbit collision analysis.*

Obiettivo.

Lo scopo dell'analisi della possibile collisione in orbita tra l'Upper Stage AVUM ed il suo P/L per il volo di qualifica, LARES, è di garantire una distanza minima tra i due corpi orbitanti attorno alla Terra, per tutta la durata della fase di De-orbiting di AVUM, dimostrando l'assenza di collisione tra i corpi.

Risultati dell'analisi.

L'analisi svolta attesta che la distanza reciproca tra LARES ed AVUM non raggiunge mai un valore di soglia minimo imposto di 1 km.

Poiché la trattazione del problema del moto dei due corpi orbitanti attorno alla Terra viene svolta sotto l'approssimazione di corpi puntiformi ed esiste un margine d'errore sui dati di posizione e velocità ad inizio della fase di propagazione di AVUM, la

distanza minima imposta per l'analisi tiene conto sia delle dimensioni effettive di AVUM e LARES, sia dell'incertezza nei dati di posizioni e velocità iniziali.

I risultati ottenuti, inoltre, concordano con la precedente analisi dei primi tre mesi di propagazione di AVUM riportata in [17], sulla ricorrenza della distanza minima registrata durante la fase di De-orbiting.

8.2. Sviluppi futuri.

Future missioni del VEGA.

I dati sulle dimensioni e i pesi, sia per AVUM che per LARES, sono forniti al programma POLPO tramite i files di input, conseguentemente sarà possibile utilizzare il programma per lo studio della fase di propagazione orbitale di AVUM nelle missioni future, già in programma, del lanciatore VEGA.

Analisi dell'*environment*.

Come discusso nella parte conclusiva del capitolo precedente, le potenzialità del programma POLPO, permettono anche l'analisi dell'entità degli effetti perturbativi sulla traiettoria di volo di un corpo orbitante attorno alla Terra; al variare dei parametri impostabili dall'utente, è possibile effettuare molteplici analisi per lo studio dell'*environmen spaziale*.

Missioni interplanetarie.

Le missioni interplanetarie non fanno ancora parte dei target ufficiali per il lanciatore VEGA, ma in vista di una possibile applicazioni in tali termini, è in proposito la modifica del modulo del programma POLPO che simula la presenza della spinta costante; le modifiche vertono, sostanzialmente, all'introduzione delle istruzioni necessarie per poter definire discrezionalmente la direzione della spinta costante.

Integrazione dei tool aziendali ELV.

Il programma POLPO trova applicazione nello studio della fase conclusiva della missione spaziale del lanciatore VEGA; per le altre fasi che compongono la missione spaziale, antecedenti alla fase di De-orbiting, l'azienda ELV dispone di ulteriori programmi di simulazione.

La possibilità di integrazione dei diversi tool aziendali, allo scopo di realizzare un programma di simulazione completo in grado di fornire l'analisi integrale delle missioni per il lanciatore VEGA è stata facilitata in fase di progettazione del software.

APPENDICE A

1. Calcolo dell'area del satellite illuminata dal Sole per la stima degli effetti dovuti alla pressione solare diretta.

Calcolo della condizione di luce ed ombra per satelliti.

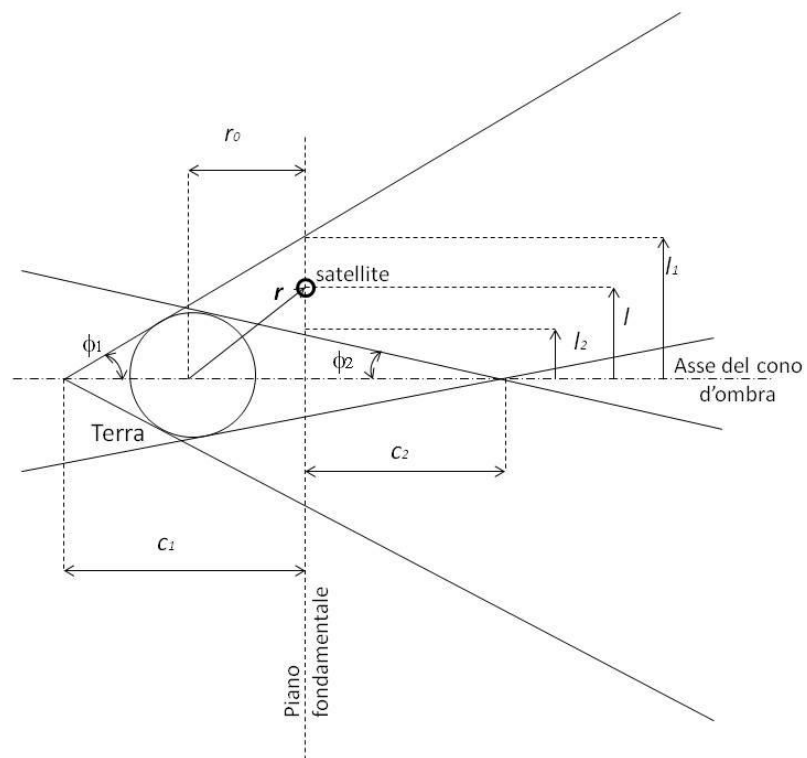
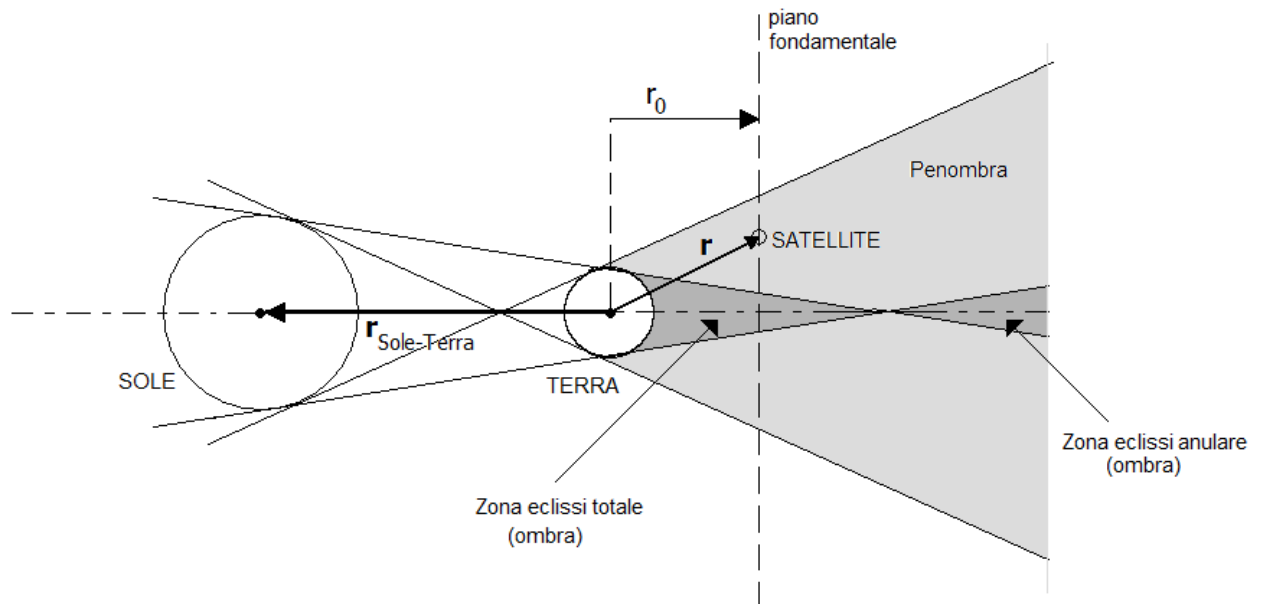


Fig.A.1 Modello del cono d'ombra (non in scala).

Per il calcolo delle condizioni di luce ed ombra ci si è basati sulle metodologie di calcolo indicate in [16].

La Terra rappresenta il corpo occultante e viene assunto perfettamente sferico di raggio R_{\oplus} .

Il *piano fondamentale*, mostrato in figura, è definito come il piano passante per il satellite e perpendicolare al cono d'ombra.

In riferimento alle Fig.6.6.1 e Fig.6.6.2, si ha:

$$r_0 = \frac{|\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_{\odot}|}{|\mathbf{r}_{\odot}|}$$

Dove

r_0 distanza del piano fondamentale dal baricentro della Terra.

r vettore posizione del satellite nel sistema di riferimento con origine nel baricentro della Terra.

r_{\odot} vettore posizione del Sole nel sistema di riferimento con origine nel baricentro della Terra.

Calcoliamo la distanza del satellite dall'asse del cono d'ombra:

$$l = \sqrt{r^2 - r_0^2}$$

Le intersezioni del cono di penombra e del cono d'ombra con il piano fondamentale formano due circonferenze di raggio rispettivamente l_1 e l_2 .

$$l_1 = c_1 \tan \varnothing_1$$

$$l_2 = c_2 \tan \varnothing_2$$

Con

$$c_1 = r_0 + \frac{R_{\oplus}}{\sin \varnothing_1}$$

Analisi delle condizioni di penombra e calcolo della “funzione ombra”.

Per le condizioni di penombra del satellite è possibile stimare la porzione di disco solare “vista” dal satellite; a tale scopo si definisce la “funzione d’ombra”:

$$\eta_{\odot} = \begin{cases} 1 & \text{il satellite è illuminato} \\ \in (0,1) & \text{il satellite è in penombra} \\ 0 & \text{il satellite è in ombra} \end{cases}$$

Per determinare la funzione d’ombra si procede al calcolo della porzione di disco solare “occultata” dal pianeta Terra.

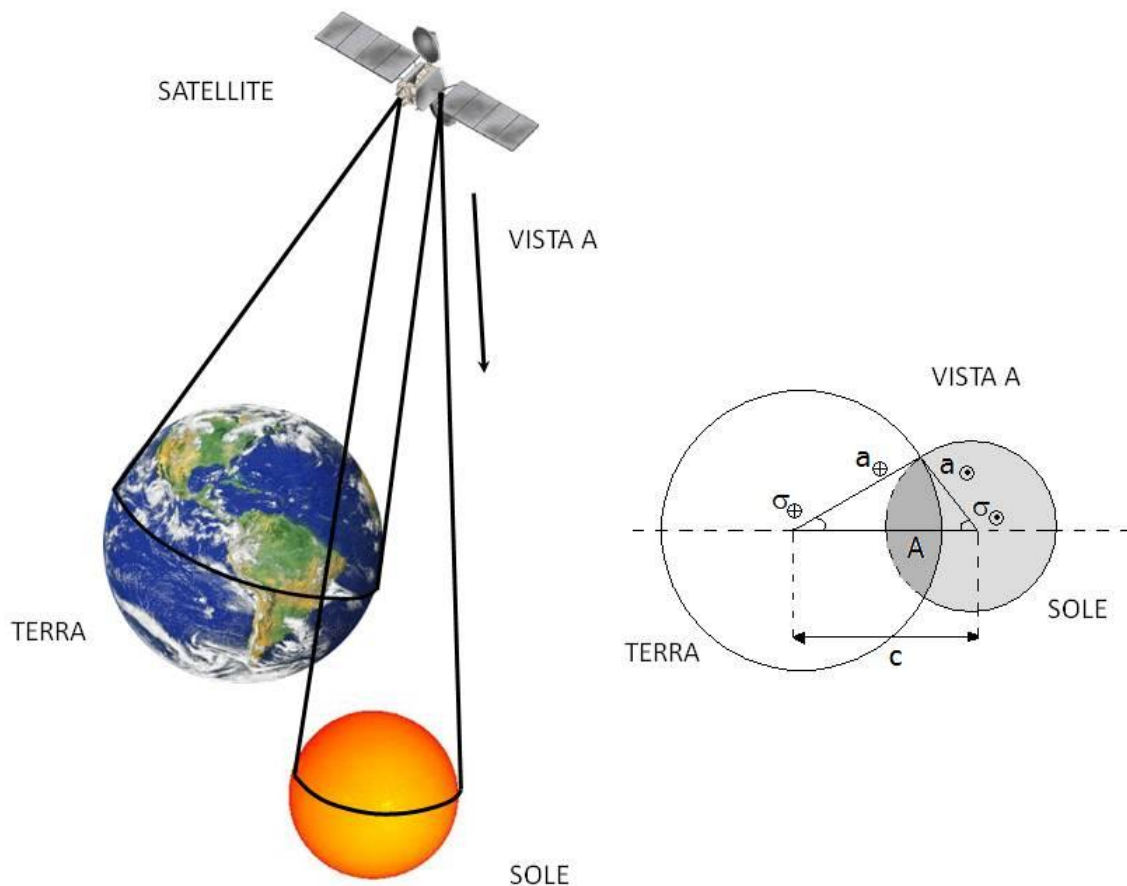


Fig.A.2 Occultamento del disco solare da parte della Terra(non in scala).

In riferimento alla Fig.A.2 :

Angolo solido attraverso il quale il satellite vede il Sole:

$$a_{\odot} = \arcsin\left(\frac{R_{\odot}}{\|\mathbf{r}_{\odot} - \mathbf{r}\|}\right)$$

Angolo solido attraverso il quale il satellite vede il Terra:

$$a_{\oplus} = \arcsin\left(\frac{R_{\oplus}}{r}\right)$$

$$c = \arccos\left(-\frac{\mathbf{r} \cdot (\mathbf{r}_{\odot} - \mathbf{r})}{\|\mathbf{r} \cdot (\mathbf{r}_{\odot} - \mathbf{r})\|}\right)$$

$$\cos \sigma_{\oplus} = \frac{a_{\oplus}^2 + c^2 - a_{\odot}^2}{2ca_{\oplus}}$$

$$\cos \sigma_{\odot} = \frac{a_{\odot}^2 + c^2 - a_{\oplus}^2}{2ca_{\odot}}$$

Da cui, la porzione di disco solare A messa in ombra dal pianeta risulta quindi:

$$A = \sigma_{\oplus} a_{\oplus}^2 - \frac{a_{\oplus}^2 \sin 2\sigma_{\oplus}}{2} + \sigma_{\odot} a_{\odot}^2 - \frac{a_{\odot}^2 \sin 2\sigma_{\odot}}{2}$$

L'espressione della funzione d'ombra risulta essere quindi:

$$\eta_{\odot} = 1 - \frac{A}{\pi a_{\odot}^2}$$

Calcolo della porzione di superficie illuminata.

Una volta definita la condizione del satellite, è possibile stimare l'area del satellite illuminata da considerare per il calcolo dell'azione della pressione solare diretta.

Per determinare tale superficie, dobbiamo prima definire in che modo il raggio solare incidente agisce sulla superficie stessa.

Nella figura seguente sono mostrati i modi di riflessione speculare e diffusa di una generica superficie esposta al Sole.

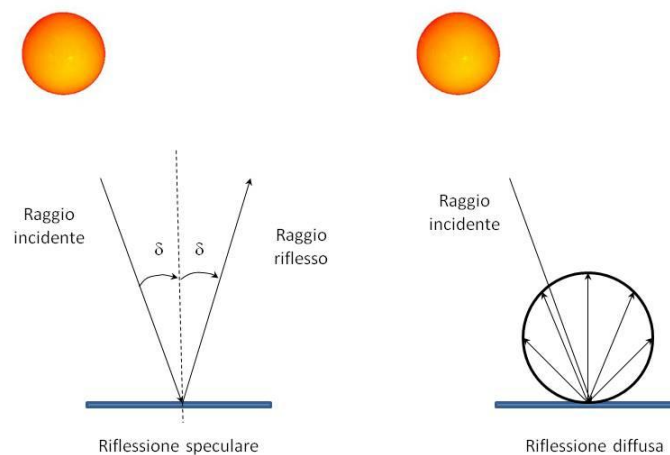


Fig.A.3. Riflessione speculare e diffusa.

La parte di superficie di A “vista” dal sole risulta, quindi, pari a:

$$A_s = A \cdot \cos \delta$$

L'espressione della forza totale esercitata su una superficie dall'azione dei fotoni assorbiti, riflessi diffusamente e riflessi specularmente, risulta essere:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_a + \mathbf{F}_s + \mathbf{F}_d = A_s \left[(\rho_a + \rho_d) \hat{\mathbf{s}} + \left(2\rho_s \cos \delta \frac{2}{3} \rho_d \right) \hat{\mathbf{n}} \right]$$

Dove:

ρ frazioni di ripartizione dei fotoni (a = assorbito, d = riflesso in modo diffuso, s = riflesso in modo speculare)

\hat{s} versore che indica la direzione del fascio di fotoni incidente;

\hat{n} versore normale alla parte in ombra della superficie A;

δ declinazione del Sole calcolata rispetto al piano orbitale

In definitiva, l'area del satellite illuminata A_{ill} , verrà assunta coincidente con l'area A_S nel caso in cui il satellite si trovi in una condizione di illuminazione totale, mentre verrà assunta pari a zero nel caso in cui il satellite si trovi in una condizione d'ombra totale.

Per le condizioni di penombra, si è scelto di definire un "efficienza" della forza esercitata dal

Sole sulla superficie; in prima approssimazione si può pensare di assumere tale "efficienza" coincidente con il valore della funzione d'ombra. In questo modo, nel caso in cui il satellite risulti illuminato la superficie considerata coinciderà nuovamente con A_S , nel caso in cui il satellite risulti in ombra l'area considerata sarà nulla, e per tutti i casi di penombra intermedi l'area considerata sarà proporzionale alla porzione di disco solare "vista" dal satellite.

Riassumendo:

$$A_{ill} = \begin{cases} A_S & \text{il satellite è illuminato} \\ A_S \cdot \eta_F & \text{il satellite è in penombra} \\ 0 & \text{il satellite è in ombra} \end{cases}$$

Con

$$\eta_F \cong \eta_{\odot}$$

2. Calcolo della posizione del Sole.

Per il calcolo della posizione del Sole si è utilizzato un algoritmo tratto da [16], qui di seguito riportato.

La posizione del Sole si determina considerandone il moto apparente, che avviene nel piano dell'eclittica, attorno alla Terra.

Definendo le due terne di riferimento :

- Sistema di riferimento Geocentrico-Equatoriale (0, X,Y,Z).

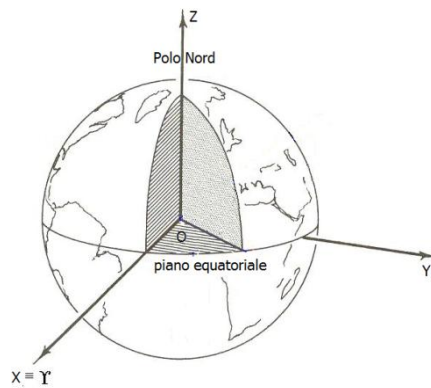


Fig A.4. Sistemadi riferimento Geocentrico-Equatoriale.

- Sistema di riferimento Geocentrico-Eclittico (0, X_E , Y_E , Z_E)

Questo sistema di riferimento ha origine nel centro della Terra e asse X_E coincidente con l'asse X del sistema di riferimento Geocentrico-Equatoriale.

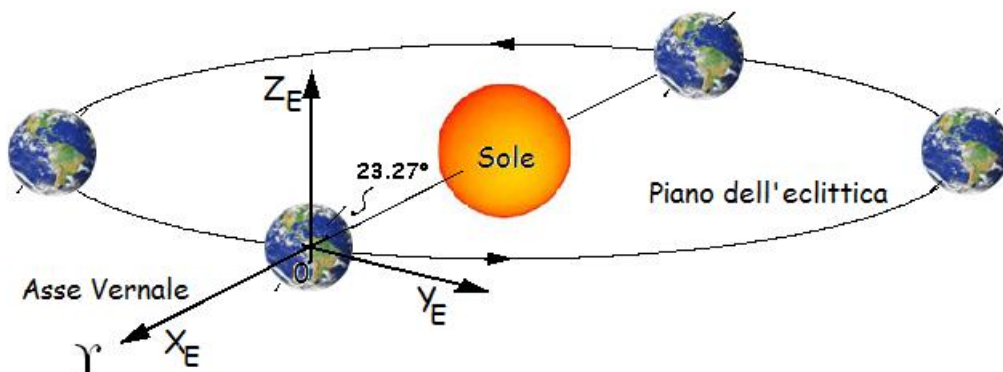


Fig A.4. Sistemadi riferimento Geocentrico-Eclittico.

Le due terne differiscono l'una dall'altra per una rotazione di un angolo pari all'inclinazione dell'eclittica attorno all'asse $X = X_E$.

Indichiamo con $JD(2000)$ la Data Giuliana corrispondente alle ore 12:00 del primo Gennaio 2000.

La posizione del Sole nel sistema di riferimento Geocentrico-Eclittico si calcola attraverso il seguente algoritmo:

- a) Si determinano i secoli trascorsi a partire dalla $JD(2000)$ fino alla JD_{UT} relativa all'istante di osservazione, attraverso:

$$T_{UT} = \frac{JD_{UT} - JD(2000)}{36525}$$

con

$$JD(2000) = 2451545$$

- b) Si calcola la longitudine media del Sole:

$$\lambda_{M_{\odot}} = 280.4606184^{\circ} + 36000.77005361 T_{UT}$$

- c) Calcolo dell'anomalia media del Sole:

$$M_{\odot} = 357.5277233^{\circ} + 35999.05034 T_{UT}$$

- d) Longitudine del Sole lungo l'eclittica:

$$\lambda_e = \lambda_{M_{\odot}} + 1.914666471^{\circ} \sin M_{\odot} + 0.019994643^{\circ} \sin 2M_{\odot}$$

- e) Calcolo della distanza Terra-Sole in unità astronomiche (1AU = 149597870 km)

$$r_{\odot} = 1.000140612 - 0.016708617 \cos M_{\odot} - 0.000139589 \cos 2M_{\odot}$$

- f) Calcolo dell'inclinazione del piano dell'eclittica rispetto al piano equatoriale:

$$\varepsilon = 23.439291^{\circ} - 0.0130042 T_{UT}$$

g) Vettore posizione del Sole nel sistema di riferimento Geocentrico-Eclettico.

$$\mathbf{r}_{\odot} = r_{\odot} \begin{bmatrix} \cos \lambda_e \\ \sin \lambda_e \\ 0 \end{bmatrix}$$

h) Infine, si ottiene la posizione del Sole nel sistema di riferimento Geocentrico-Equatoriale.

$$\mathbf{r}_{\odot} = r_{\odot} \begin{bmatrix} \cos \lambda_e \\ \cos \varepsilon \sin \lambda_e \\ \sin \varepsilon \sin \lambda_e \end{bmatrix}$$

Per quanto riguarda il calcolo della posizione della Luna, si procede in modo del tutto analogo; l'algoritmo completo per il calcolo della posizione della Luna è riportato integralmente in [19].

3. Calcolo della Data Giuliana(JD)

Sistema di conteggio dei giorni, invece che degli anni per determinare un intervallo di tempo tra due date.

Lo zero della Data Giuliana è fissato al 1 gennaio (a mezzogiorno) del 4713 A.C.

Per evitare di dover maneggiare numeri troppo grandi, tuttavia, spesso, ci si riferisce alla Data Giuliana Modificata (MJD), relazionata alla JD tramite l'espressione:

$$MJD = JD - 2400\,000.5$$

La MJD è legata alla nostra data civile dalla relazione:

$$MJD = B + DY + \text{int}\{30.6001(MO + 12D + 1)\} + \text{int}\{365.25(YR - D + 1)\} - 679,006$$

Con :

YR anno

MO mese

DY giorno del mese

Inoltre si ha:

$$D = \begin{cases} 0 & \text{se } MO \geq 3 \\ 1 & \text{se } MO < 3 \end{cases}$$

$$A = \text{int}\{(YR - D)/100\}$$

$$B = 2 + \text{int}\{A/4\} - A$$

4. Matrice di rotazione $(r, \lambda, \delta) \Rightarrow (IJK)$

Si riporta di seguito la matrice di rotazione usata per ottenere nel sistema IJK le componenti delle accelerazioni perturbative calcolate nel sistema (r, λ, δ)

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \delta \cos \lambda & -\sin \lambda & -\sin \delta \cos \lambda \\ \cos \delta \sin \lambda & \cos \lambda & -\sin \delta \sin \lambda \\ \sin \delta & 0 & \cos \delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{e}_r \\ \hat{e}_\lambda \\ \hat{e}_\delta \end{bmatrix}$$

Bibliografia

- [1] E.Fehlberg – “*Classical fifth, sixth, seventh, and eighth order Runge-Kutta formulas with stepsize control*”- NASA Technical Report TR R-287.
- [2] E.Fehlberg – “*New one-step integration methods of high-order accuracy applied to some problems in celestial mechanics*”- NASA Technical Report TR R-248, ottobre 1944.
- [3] E.Fehlberg – “*Low-order classical Runge-Kutta formulas with stepsize control and their application to some heat transfer problems*”- NASA Technical Report TR R-315, luglio 1949.
- [4] “*VEGA User’s Manual 3.0*”, Arianespace, March 2006.
- [5] ESA-Portal: “*Vega un passo avanti.*” – 09 Giugno 2004
http://www.esa.int/export/esaCP/SEM6XV2VQUD_Italy_0.html
- [6] ESA-Portal: “*Il lanciatore Vega.*” – 06 Marzo 2003
http://www.esa.int/export/esaCP/SEML4E9YFDD_Italy_0.html
- [7] ESA-Portal: “*Vega, per lanciare l’Italia nello spazio.*” – 07 Marzo 2002
http://www.esa.int/export/esaCP/ESAYZDF18ZC_Italy_0.html
- [8] ESA-Portal: “*Vega Elements.*”,
http://esamultimedia.esa.int/multimedia/vega/index_vega.html
- [9] “*VEGA – The small launcher for Europe*” – R. Lafranconi, M. Lopez, ESA Publication Division ESTEC, 2200 AG Noordwijk, The Netherlands, Nov 2005

- [10] VG-DF-16-C-001-CASA 5.1 – *Payload Adapter Functional File*, Technical Note, EADS Casa Espacio, October 2009
- [11] VG-DF-16V1-C-001-CASA 1.0 – *Vega Secondary Payload Adapter Functional File*, EADS Casa Espacio, June 2008
- [12] VG-ICD-1/3-003-IPT 2.1 – *VEGA / LARES Interface Control Document*, ESA
- [13] ASI-Portal : “*LARES, staellite per misure relativistiche*”, <http://www.asi.it/it/attivita/cosmologia/lares>
- [14] Text of the Report adopted by the Scientific and Technical Subcommittee of the United Nations Committee on the Peaceful uses of Outer Space, Technical Report on Space Debris, 1999, <http://www.oosa.unvienna.org/isis/pub/sdtechrep1/index.html>.
- [15] VG-NT-1F01-C-0001-SYS 31, “*Vega Program : Qualification Flight Trajectory*”, ELV s.p.a.
- [16] G.Mengali, A.A.Qurta, “*Fondamenti di meccanica del volo spaziale*”, Ed. PLUS.
- [17] M.Volpi, “*Vega Lv Upper Stage and Payloads In-Orbit Collision Analysis*”, Dicembre 2010.
- [18] SPC_2010_12_21_DLA_SDT_SPC_2010_28133, “*LARES AVUM Collision Risk Analysis DRAFT*”, CNES 2010.
- [19] Vladimir A. Chobotov – “*Orbital Mechanics*”, 3rd ed, AIAA 2002
- [20] R.R.Bate, D.D.Mueller, J.E.White – “*Fundamentals of Astrodynamics*”
- [21] G.Colasurdo, G.Avanzini – “*Astrodynamics*”, 2nd ed, SEEDS 2006

- [22] T.Fossati, “Analysis Of Land Impact And Casualty Effects Of Vega Launch Vehicle”
- [23] L. d’Agostino, “*Mission Analysis*”, Appunti delle lezioni del corso di “Endoreattori”, tenute presso la “Scuola di Ingegneria Aerospaziale” della Università degli Studi di Pisa.
- [24] ECSS-E-10-04 – Gravitation
- [25] ESA/ADMIN/IPOL(2008), “*Space Debris Mitigation for Agency Projects*”, Aprile 2008.
- [26] United Nations, “*Report Of The Scientific And Technical Subcommittee On Its Forty-Fourth Session*”, marzo 2007.
- [27] NT-LOS-arrete-31-03-2011-“*reglementation-technique-des-operations-spatiales*”, Maggio 2011.
- [28] ESA-“*Position Paper Space Debris Mitigation*”, Febbraio 2006.
- [29] IADC-“*IADC Space Debris Mitigation Guidelines*”, Ottobre 2002.
- [30] United Nations, “*United Nation Treaties And Principles On Outer Space*”
- [31] E.Fehlberg, “*Runge-Kutta-Fehlberg Method (RK45)*”