



UNIVERSITÀ DI PISA

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI
CORSO DI LAUREA MAGISTRALE IN MATEMATICA

TESI DI LAUREA MAGISTRALE

**La misura di occupazione del moto
browniano: tempi locali rispetto a
varietà e disintegrazione rispetto a
foliazioni differenziabili.**

CANDIDATO

Andrea Bevilacqua

RELATORE: PROF. FRANCO FLANDOLI

CONTRORELATORE: PROF. MAURIZIO PRATELLI

ANNO ACCADEMICO 2010/2011

Indice

Introduzione	3
1 Moto browniano e semimartingale continue in dimensione 1: il tempo locale	8
1.1 Concetto di tempo locale, proprietà di regolarità, formula dei tempi di occupazione	8
1.1.1 Definizione di misura di occupazione	10
1.1.2 La formula di Tanaka	12
1.1.3 La formula di Itô-Tanaka	20
1.1.4 Risultati di continuità e definizione di Lévy	26
1.2 SDE in dimensione 1: il teorema di Le Gall sull'unicità per traiettorie e l'esempio di Tsirel'son	30
1.2.1 Definizioni preliminari SDE	30
1.2.2 Condizioni di unicità per traiettorie nelle SDE unidimensionali	34
1.2.3 Risultati di comparazione tra soluzioni di SDE	45
1.2.4 Esempio di $e(f, g)$ senza unicità per traiettorie, con $f \equiv 1, g$ limitata	50
2 Moto browniano in dimensione n: la misura di occupazione	58
2.1 La misura di occupazione di un $BM^d, d > 1$	58
2.1.1 Funzioni polari	66
2.2 SDE in dimensione n: teorema di unicità per traiettorie tramite la misura di occupazione	71
3 Moto browniano in dimensione n: il tempo locale n-1 dimensionale	75
3.1 Definizioni preliminari	75
3.1.1 Tempo locale rispetto a iperpiani affini	75
3.1.2 Caso di varietà unidimensionali	79
3.1.3 Caso di varietà $N - 1$ dimensionali	84
3.2 Definizione di tempo locale rispetto a varietà $N - 1$ dimensionali	88
3.3 Il tempo locale rispetto ad insiemi più generali	91
4 Formule per integrali multipli rispetto alla misura di occupazione	94

4.1	Foliazioni di rette	96
4.2	Foliazioni di curve	100
4.2.1	Caso $ \nabla\phi \equiv 1$ su \mathbb{R}^2	102
4.2.2	Caso $ \nabla\phi \neq 0$ costante lungo le curve di livello	105
4.2.3	Caso $ \nabla\phi \geq \nu > 0$	107
4.3	Esempio di integrazione	109
4.4	Il supporto delle misure $Q(\cdot, a)$	111
5	Appendice	116
5.1	Teoria della misura e processi stocastici	116
5.2	Definizioni e teoremi di analisi stocastica	119
5.3	Risultati di analisi matematica	123
5.4	Risultati di geometria	125
5.5	Esempi elementari di non unicit� delle soluzioni di equazioni differenziali	127
	Bibliografia	131

Introduzione

I tempi locali del moto browniano furono introdotti nel 1948 dal matematico francese Paul Lévy nel suo libro “Processus stochastiques et mouvement brownien”.

Essi e la loro naturale generalizzazione alle semimartingale continue, oltre a permettere di ottenere importanti risultati nello studio del moto browniano e dei processi reali, compaiono in modo naturale in numerosi problemi di analisi stocastica, come per esempio l'estensione della formula di Itô alle funzioni convesse, teoremi di unicità delle soluzioni nelle equazioni differenziali stocastiche (SDE), o studi di singolarità negli integrali stocastici.

Il nome deriva dal fatto che essi descrivono l'ammontare di tempo trascorso da un moto browniano unidimensionale vicino ad un punto dato, esprimendo nei dettagli le caratteristiche delle traiettorie del processo.

Ci sono varie caratterizzazioni alternative del concetto di tempo locale: oltre alla definizione dovuta a Lévy sono altrettanto importanti la formula di Tanaka e soprattutto l'approccio attraverso la misura di occupazione.

Se $\gamma : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^d$ è una funzione misurabile e T un tempo fissato, allora $\mu_{\gamma, T}$ su \mathbb{R}^d si dice misura di occupazione di γ fino al tempo T se

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x) \mu_{\gamma, T}(dx) = \int_0^T f(\gamma(t)) dt$$

per ogni funzione continua limitata $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$.

Se $X = (X_t)_{t \geq 0}$ è un processo stocastico su \mathbb{R}^d con traiettorie misurabili, si può definire similmente un nucleo di misure $\mu_{X, T}$ su \mathbb{R}^d .

Per funzioni regolari γ , la misura $\mu_{\gamma, T}$ può essere molto concentrata, addirittura una delta di Dirac di peso T se la funzione è costante. Viceversa, nel caso di processi stocastici come ad esempio il moto browniano (BM) o le soluzioni di SDE, la misura $\mu_{X, T}$ è in un certo senso più sparsa, diffusa, sebbene sia in generale singolare rispetto alla misura di Lebesgue in dimensione $d > 1$.

In dimensione $d = 1$, se X è una semimartingala browniana, ossia una semimartingala continua con variazione quadratica $\langle X \rangle_t = t$, $\mu_{X, T}$ ha densità rispetto alla misura di Lebesgue: il tempo locale $L_{X, T}(a)$.

Invece in dimensione $d > 1$ non si ha un equivalente del tempo locale a causa della singolarità della misura di occupazione.

In questa tesi abbiamo definito un concetto sostitutivo al tempo locale classico: modificando la caratterizzazione di Lévy otteniamo il tempo locale in \mathbb{R}^d rispetto alle intersezioni con sottovarietà $d - 1$ dimensionali.

Grazie a questo, fissata una funzione $f \in \mathcal{L}^1(\mu_{X,T})$, abbiamo potuto costruire una nuova formula di fattorizzazione della misura di occupazione

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x) \mu_{X,T}(dx) = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\Gamma_a} f(x) Q(a, dx) \right) \mathcal{L}_{X,T}(a) da \quad (1)$$

dove $(\Gamma_a)_{a \in \mathbb{R}}$ è una foliazione di \mathbb{R}^d in sottovarietà $d - 1$ dimensionali

$$\Gamma_a = \{\phi = a\}$$

con $\phi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ avente le necessarie condizioni di non degenerazione.

Le $Q(a, \cdot)$ sono q.c. misure di probabilità su \mathbb{R}^d con $Q(a, \Gamma_a) = 1$, e la funzione $\mathcal{L}_{X,T}(a)$ coincide in molti casi col nuovo tempo locale rispetto alle foglie.

L'identità (1) somiglia ad una formula di coarea per $\mu_{X,T}$. In un certo senso $\mu_{X,T}$ ha una densità rispetto alla misura di Lebesgue in ogni direzione unidimensionale: X visita le sottovarietà $d-1$ dimensionali come le semimartingale continue visitano i punti.

Questa formula potrebbe avere molte applicazioni. Per esempio, permette di dimostrare che integrali

$$\int_0^T f(B_t) dt$$

con funzioni f poco regolari siano ben definiti.

Oppure, nel campo delle SDE si potrebbero ottenere nuovi risultati di unicità delle soluzioni o sullo studio di singolarità, simili a quelli ottenibili in dimensione 1 grazie al tempo locale classico.

Un'altra interessante direzione di ricerca riguarda poi le caratteristiche delle misure aleatorie $Q(\cdot, a)$: nella tesi si dimostra (nel caso bidimensionale) che esse hanno q.c. supporto perfetto e a parte interna vuota, ma sarebbe molto interessante scoprire con che regolarità varino in relazione al parametro a della foliazione.

La tesi inizia con un capitolo dedicato al caso in dimensione 1: dopo la definizione di misura di occupazione, si ottiene la formula di Tanaka che definisce il tempo locale, partendo dalla formula di Itô.

Segue un'altra costruzione, classica, del tempo locale, che usa risultati di analisi funzionale; poi si danno la caratterizzazione di Lévy del tempo locale e gli importanti risultati di continuità.

Sono esposte delle importanti applicazioni del tempo locale: il teorema di Le Gall di unicità forte per le SDE e teoremi di comparazione fra soluzioni.

Il capitolo si chiude con l'interessante esempio di Tsirel'son di una SDE senza unicità forte, ma con coefficiente di diffusione 1: esso non sfrutta il tempo locale, ma arricchisce il concetto di unicità delle soluzioni nelle SDE.

Nel capitolo successivo si tratta il caso in dimensione maggiore di 1: viene esposta una dimostrazione elementare della trascurabilità secondo Lebesgue delle traiettorie di un BM^d , $d > 1$, e di conseguenza della singolarità della relativa misura di occupazione; segue una breve digressione sulle funzioni polari.

Poi sono enunciati alcuni risultati noti che sfruttano le proprietà della misura di occupazione per ottenere l'unicità forte nelle SDE, grazie al teorema di Davie, che dà delle stime hölderiane della media degli integrali di funzioni \mathcal{L}^∞ , per gli shift della misura di occupazione.

Nella seconda parte della tesi per prima cosa viene costruito il nuovo tempo locale ripetto alle sottovarietà $d - 1$ dimensionali.

Inizialmente si affrontano i casi semplici di iperpiani affini, o curve nel piano, per poi esporre il caso generale delle sottovarietà e persino insiemi ancor meno regolari.

Infine, nell'ultimo capitolo si arriva alla costruzione della formula di disintegrazione della misura di occupazione rispetto a foliazioni differenziabili, limitandosi per semplicità alla misura di occupazione di un BM bidimensionale.

Prima si tratta il caso banale delle rette, poi il caso fondamentale delle foliazioni a gradiente di modulo 1, in cui compare proprio il nuovo tempo locale rispetto alle foglie.

Poi la generalizzazione a gradienti di modulo costante lungo le foglie e non nullo, e da ultimo il caso generico del modulo del gradiente della foliazione che sia sempre lontano da zero.

Si dà un esempio di integrazione tramite questa formula, e poi si dimostra che i supporti delle misure $Q(\cdot, a)$ sono insiemi perfetti a parte interna vuota: proprietà topologica che hanno in comune con gli zeri di un BM .

1 Moto browniano e semimartingale continue in dimensione 1: il tempo locale

1.1 Concetto di tempo locale, proprietà di regolarità, formula dei tempi di occupazione

Iniziamo con delle definizioni e dei risultati classici, per la cui trattazione si veda [5(Letta)] o [6(Karatzas-Shreve)].

Supporremo note le nozioni di base relative a processi stocastici e filtrazioni.

Notazione 1 *Nel testo, se non specificato ulteriormente, tutti i processi stocastici saranno definiti sullo spazio probabilizzato (Ω, \mathcal{A}, P) , con la filtrazione $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$, tale che $\forall t \geq 0$, \mathcal{F}_t sia completa.*

Definizione 2 (Moto browniano)

Un processo adattato $B = (\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, (B_t)_{t \geq 0}, P)$ a valori reali è un moto browniano se

i) $B_0 = 0$ q.c.;

ii) $\forall s \in [0, t]$ la v.a. $B_t - B_s$ è indipendente da \mathcal{F}_s ;

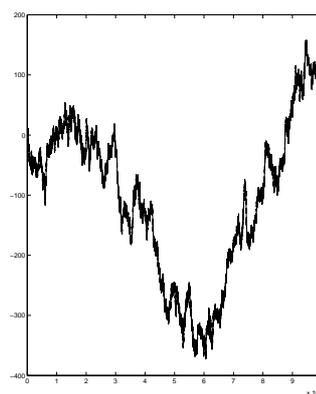
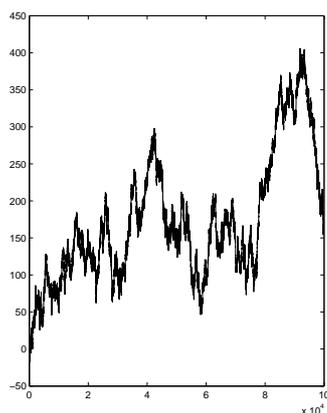
iii) $\forall s \in [0, t]$ la v.a. $B_t - B_s$ ha legge $N(0, t - s)$.

Un moto browniano si dice naturale se $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ è la filtrazione naturale.

Esso si dice anche processo di Wiener, specialmente nel contesto delle SDE.

Un moto browniano N dimensionale è un processo su \mathbb{R}^N le cui componenti sono una famiglia di moti browniani indipendenti fra loro.

Esempi di traiettorie di moti browniani unidimensionali:



Ricordiamo le seguenti proprietà, che riguardano la regolarità delle traiettorie di un moto browniano.

Teorema 3 (Lemma di hölderianità di Kolmogorov)

Sia $(X_t)_{t \in [0,1]^d}$ un processo a valori in uno spazio di Banach, tale che esistano tre costanti strettamente positive γ, c, ε , tali che

$$E [\|X_t - X_s\|^\gamma] \leq c |t - s|^{d+\varepsilon}.$$

Allora c'è una modificazione \tilde{X} di X tale che

$$E \left[\left(\sup_{s \neq t} \frac{\|\tilde{X}_t - \tilde{X}_s\|}{|t - s|^\alpha} \right)^\gamma \right] < +\infty$$

per ogni $\alpha \in [0, \varepsilon/\gamma)$.

In particolare, le traiettorie di \tilde{X} sono hölderiane di esponente α .

Il teorema precedente ci assicura in particolare che dato un qualunque moto browniano ne esiste una modificazione continua e γ -hölderiana su ogni intervallo di tempo limitato $\forall \gamma < \frac{1}{2}$.

In un certo senso, tale stima di regolarità non può essere migliorata.

Teorema 4 (Paley, Wiener, Zygmund (1933))

Per q.o. $\omega \in \Omega$ la traiettoria $B.(\omega)$ non è differenziabile in alcun punto.

In particolare l'insieme

$$A := \{ \omega \in \Omega \mid \forall t \in [0, \infty) (D^+ W_t(\omega) = +\infty) \vee (D_+ B_t(\omega) = -\infty) \}$$

contiene un evento $F \in \mathcal{F}$ che sia quasi certo.

E precisamente si ha il seguente risultato.

Proposizione 5 *Per q.o. $\omega \in \Omega$, $B.(\omega)$ non è in nessun punto hölderiana con esponente $\gamma > \frac{1}{2}$*

Queste caratteristiche di non regolarità rendono inaspettatamente speciali le traiettorie del moto browniano, e permettono di definire il concetto di tempo locale.

1.1.1 Definizione di misura di occupazione

Partiamo dall'idea di misura di occupazione, ossia la misura immagine su \mathbb{R}^d della misura di Lebesgue λ sullo spazio dei tempi, tramite le traiettorie del processo.

Definizione 6 (Misura di occupazione di un moto browniano)

Sia $(B_t)_{t \geq 0}$ un moto browniano d -dimensionale. Fissati $T > 0$ e $\omega \in \Omega$ tale che $B_s(\omega)$ sia una funzione continua, introduciamo la misura di Borel $\mu_{T,\omega}$ su \mathbb{R}^d così definita:

$$\mu_{T,\omega}(\varphi) = \int_0^T \varphi(B_s(\omega)) ds, \quad \varphi \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}^d)$$

Essa è detta misura di occupazione del moto browniano.

Quando ci sarà motivo di evidenziare la dimensione d , si indicherà con $\mu_{T,\omega}^d$.

Generalizziamo la definizione ad una classe più estesa di processi.

Per i concetti di martingala locale e variazione quadratica si veda [1(Revuz-Yor)] o [6(Karatzas-Shreve)].

Definizione 7 (Semimartingala continua)

Una semimartingala continua è un processo continuo X tale che

$$X = M + A$$

dove M è una martingala locale continua e A un processo continuo adattato di variazione finita.

In generale, fissata una semimartingala continua X la variazione quadratica $\langle X, X \rangle_s$ può essere vista come la scala di tempo “naturale” per X . (vedi [1(Revuz-Yor)])

Questa scelta, peraltro non obbligatoria, ci permetterà di scrivere in modo più semplice alcune formule di rappresentazione.

Definizione 8 (M. di occupazione di una semimartingala continua)

La misura di occupazione si può definire in generale rispetto a una semimartingala continua X .

Possiamo definire la misura di occupazione rispetto a X analogamente a quanto fatto per il moto browniano, ma usando come scala temporale la variazione quadratica del processo

$$\mu_{\omega, T}^X(\varphi) = \int_0^T \varphi(X_s) d\langle X, X \rangle_s.$$

Verifichiamo innanzitutto che queste siano una buone definizioni.

Proposizione 9 μ_T^X è una misura aleatoria, cioè per quasi ogni $\omega \in \Omega$, $\mu_{T, \omega}^X$ è una misura di Borel su \mathbb{R}^d e la funzione $\omega \mapsto \mu_{T, \omega}^X(\varphi)$ è misurabile per ogni $\varphi \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}^d)$;

Dimostrazione. Senza perdere generalità trattiamo il caso $X = B$. In generale basterà sostituire ds con $d\langle X, X \rangle_s$.

Consideriamo solo il caso di $B(\omega)$ traiettoria continua e che quindi μ_T sia ben definita, infatti l'evento che ciò non si verifichi è trascurabile.

Grazie alla definizione, $\forall A$ boreliano di $[0, T]$ vale che

$$\mu_{T, \omega}(A) = \mu_{T, \omega}(I_A) = \lambda \{B(\omega) \in A\}$$

dunque $\mu_{T, \omega}$ è evidentemente la misura immagine di λ tramite $B(\omega)$.

Inoltre se considero sullo spazio misurato

$$(\Omega \times [0, T], \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}([0, T]), P \otimes \lambda)$$

la funzione $B(\omega, t) = B_t(\omega)$, essa è misurabile, essendo progressivamente misurabile (D135) ogni processo adattato e continuo a destra.

In particolare, per ogni fissata $\varphi \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}^d)$, per composizione $\varphi(B(s, \omega))$ è misurabile su tale spazio, e grazie al teorema di Fubini anche la funzione

$$\omega \mapsto \mu_{T, \omega}(\varphi) = \int_0^T \varphi(B(s, \omega)) ds$$

è misurabile.

La tesi è provata. ■

1.1.2 La formula di Tanaka

Tutto quanto visto finora vale in ogni fissata dimensione d , invece adesso vediamo un risultato molto forte che non si ha in generale in dimensione maggiore di 1: la misura di occupazione è dotata di densità rispetto alla misura di Lebesgue.

Definizione 10 *Se X è una semimartingala unidimensionale, la densità $f_{T,\omega}(x)$ di $\mu_{T,\omega}^{X,1}$ rispetto a λ si dice tempo locale di X .*

Le proprietà del tempo locale rendono speciali le traiettorie del moto browniano rispetto alle curve differenziabili.

Ad esempio la misura di occupazione di una curva localmente costante, non sarà assolutamente continua rispetto a Lebsgue.

Inoltre se ci sono punti stazionari nella curva, essi generano singolarità nell'eventuale densità.

Invece, grazie proprio all'irregolarità delle traiettorie del moto browniano, i punti di massimo sono talmente frequenti e mischiati a punti di minimo, che la densità sarà addirittura continua q.c.

Iniziamo con un risultato di teoria della misura.

Nel seguito con \mathcal{C}_c^k , $k \in \{1, \dots, \infty\}$, denoteremo le funzioni di classe \mathcal{C}^k a supporto compatto.

Teorema 11 *Data una misura di Borel μ su \mathbb{R}^d , se esiste $1 < p < +\infty$ e una funzione $f \in \mathcal{L}_{loc}^p$ tale che*

$$\int_{\mathbb{R}^d} \varphi(y) \mu(dy) = \int_{\mathbb{R}^d} f(y) \varphi(y) dy \quad (2)$$

per ogni $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$, allora $\mu \ll \lambda^{\otimes d}$, ed f è la sua densità.

In particolare se μ è finita otteniamo che f è integrabile.

Dimostrazione. Sia q l'esponente coniugato a p .

Supponiamo per assurdo che esista A boreliano di misura (finita) positiva su cui $f < 0$.

Siccome \mathbb{R}^d è uno spazio topologico a base numerabile, grazie all'ipotesi che $f \in \mathcal{L}_{loc}^p$ possiamo ricoprire A con una famiglia numerabile $(B_i)_{i \in \mathbb{N}}$ di aperti tali che su di essi f sia \mathcal{L}^p .

Esiste quindi un $i \in \mathbb{N}$ tale che $C = B_i \cap A$ ha misura positiva.

In particolare $-\infty < \int_C f(y) dy < 0$.

È noto che in $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ esiste una successione $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ che converge a I_C in norma $L^r \forall 1 \leq r \leq +\infty$ e q.c.

In particolare per ogni r esiste una costante κ_r indipendente da n tale che $\|\varphi_n\|_r \leq \kappa_r < +\infty$.

Usando la disuguaglianza di Hölder otteniamo

$$\int_{\mathbb{R}^d} (\varphi_n(y) - I_C(y)) f(y) dy \leq \|\varphi_n(y) - I_C(y)\|_q \|f\|_p \longrightarrow 0,$$

dunque

$$\int_{\mathbb{R}^d} \varphi_n(y) f(y) dy \longrightarrow \int_C f(y) dy < 0,$$

e in particolare, grazie al teorema di convergenza dominata,

$$\int_C \varphi_n(y) f(y) dy \longrightarrow \int_C f(y) dy < 0. \quad (3)$$

Consideriamo la misura di probabilità μ_C ottenuta normalizzando la misura finita indotta da μ su C .

Fissato $\delta > 0$, stimiamo la norma $L^{1+\delta}(\mu_C)$ della successione φ_n .

$$\|\varphi_n\|_{1+\delta}^{1+\delta} = \int_C \varphi_n(y)^{1+\delta} \mu_C(dy) = \frac{1}{\mu(C)} \int_C \varphi_n(y)^{1+\delta} f(y) dy \leq$$

con $k = \frac{1}{\mu(C)}$,

$$\leq k \|\varphi_n^{1+\delta}\|_q \|f\|_p = k \|\varphi_n\|_{(1+\delta)q}^{\frac{1}{1+\delta}} \|f\|_p \leq k \kappa_{(1+\delta)q}^{\frac{1}{1+\delta}} \|f\|_p.$$

Grazie al criterio de La Vallée Poussin (T129) abbiamo che la successione φ_n è μ_C -uniformemente integrabile.

Inoltre la convergenza q.c. della successione a I_C implica la convergenza in probabilità secondo μ_C .

Possiamo applicare il teorema di Vitali (T130) e otteniamo che φ_n converge in $L^1(\mu_C)$ a I_C .

Abbiamo ottenuto che

$$\int_C \varphi_n(y) f(y) dy = \int_C \varphi_n(y) \mu(dy) = \mu(C) \int_C \varphi_n(y) \mu_C(dy) \longrightarrow \mu(C).$$

Ma confrontando con (3) abbiamo che $\mu(C) < 0$: assurdo.

Quindi f è q.c. positiva e abbiamo ottenuto una parte della tesi.

Siccome la costante 1 è limite puntuale di una successione crescente di funzioni in $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$, essendo la f positiva possiamo usare il teorema di Beppo Levi su entrambi i membri dell'uguaglianza ed ottenere (2) anche per $\varphi \equiv c \in \mathbb{R}$.

Automaticamente se μ è finita, (2) con $\varphi \equiv 1$ ci dice anche che f è integrabile.

La famiglia di funzioni $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d) \cup \mathbb{R}$ è chiusa per moltiplicazione e ovviamente contiene le costanti.

Essa genera una σ -algebra che contiene banalmente i prodotti $\prod_{i=1}^d I_i$ di intervalli limitati e dunque tutta $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$.

Dato che f è positiva, usando ancora il teorema di Beppo Levi si ottiene che la formula (2) passa al limite per ogni successione monotona dominata $(\psi_n)_{n \geq 0}$.

Infatti posso supporre, a meno di cambiare segno, che $(\psi_n)_{n \geq 0}$ sia una successione crescente e poi banalmente minorare con φ_0 .

Inoltre le funzioni limitate per cui vale (2) formano uno spazio vettoriale e dunque grazie al teorema delle classi monotone (T128) la formula vale per le funzioni boreliane limitate.

In particolare vale per le indicatori dei boreliani e quindi

$$\mu = f \cdot \lambda^{\otimes d}.$$

La tesi è provata. ■

Possiamo estendere l'enunciato anche al caso di nuclei di misure.

Corollario 12 *Sia $(\mu_\omega)_{\omega \in \Omega}$ un nucleo di misure su \mathbb{R}^d : se esiste una funzione misurabile $f(y, \omega)$ tale che per quasi ogni $\omega \in \Omega$ valgono le affermazioni:*

- *esiste $1 < p < +\infty$ tale che $f(\cdot, \omega) \in \mathcal{L}_{loc}^p(\mathbb{R}^d)$,*
- *$\mu_\omega(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^d} f(y, \omega)\varphi(y)dy$ per ogni $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)$,*

allora, per quasi ogni $\omega \in \Omega$, $\mu_\omega \ll \lambda^{\otimes d}$, ed $f(\cdot, \omega)$ è la sua densità.

Se μ_ω è q.c. una misura finita allora si ottiene in particolare la q.c. integrabilità di $f(\cdot, \omega)$.

Dimostrazione. Immediata conseguenza del teorema 11. ■

Cerchiamo di ricavare l'esistenza del tempo locale ottenendone, partendo dalla formula di Itô (T17), una rappresentazione esplicita detta formula di Tanaka.

In questo primo teorema di esistenza supporremo X limitata in $\mathcal{L}^2(\Omega)$, ma tale ipotesi non è restrittiva e in seguito daremo un'altra dimostrazione più generale.

Teorema 13 (Esistenza del tempo locale)

Sia X semimartingala continua limitata in $\mathcal{L}^2(\Omega)$, allora $\mu_{T,\omega}^X$ ha quasi certamente densità

$$f_T(\omega, y) := |X_T(\omega) - y| - |X_0(\omega) - y| - \left(\int_0^T \frac{X_s - y}{|X_s - y|} dX_s \right) (\omega)$$

rispetto a λ .

In particolare la formula vale per $X = B$ moto browniano.

Dimostrazione.

Fissato $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ vale che

$$\mu_{T,\omega}^X(\varphi) = u_\varphi(X_T) - u_\varphi(X_0) - \int_0^T u'_\varphi(X_s) dX_s \quad (4)$$

dove $u_\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ è una soluzione dell'equazione differenziale

$$u_\varphi''(x) = 2\varphi(x).$$

Infatti, per la formula di Itô (T17),

$$du_\varphi(X_s) = u_\varphi'(X_s)dX_s + \frac{1}{2}u_\varphi''(X_s)d\langle X \rangle_s$$

da cui segue l'uguaglianza precedente integrando ed usando la definizione di $\mu_{T,\omega}(\varphi)$.

Vogliamo esprimere u_φ in funzione di φ con una formula integrale del tipo

$$u_\varphi(x) = \int_{\mathbb{R}} G(x, y)\varphi(y)dy. \quad (5)$$

La funzione $G(x, y)$ è una soluzione del problema

$$\frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial x^2}(x, y) = \delta(x - y), \quad (6)$$

intendendo la derivata in senso distribuzionale (vedi appendice), visto che φ ha supporto compatto.

Infatti se $G(x, y)$ soddisfa questa identità, allora

$$\frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} \int_{\mathbb{R}} G(x, y)\varphi(y)dy = \int_{\mathbb{R}} \delta(x - y)\varphi(y)dy = \varphi(x). \quad (7)$$

Definiamo

$$G(x, y) = |x - y|.$$

Verifichiamo che G risolve (6): infatti per definizione di derivata distribuzionale, e poi sostituendo G

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} G(x, y)\varphi(x)dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2} G(x, y)\varphi''(x)dx = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} |x - y|\varphi''(x)dx =$$

integrando per parti

$$= -\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \frac{x - y}{|x - y|} \varphi'(x)dx = \frac{1}{2} \left(\int_{-\infty}^y \varphi'(x)dx - \int_y^{\infty} \varphi'(x)dx \right) =$$

essendo φ a supporto compatto

$$= \varphi(y) = \int_{\mathbb{R}} \delta(x - y) \varphi(x) dx.$$

Sostituiamo quindi (5) in (4)

$$\begin{aligned} \mu_{T,\omega}^X(\varphi) &= \int_{\mathbb{R}} G(X_T, y) \varphi(y) dy - \int_{\mathbb{R}} G(X_0, y) \varphi(y) dy + \\ &\quad - \int_0^T \left(\int_{\mathbb{R}} G(X_s, y) \varphi(y) dy \right)' dX_s \end{aligned}$$

Come visto sopra deriviamo, ed inoltre possiamo applicare il teorema di Fubini stocastico (T141)

$$\begin{aligned} \mu_{T,\omega}^X(\varphi) &= \int_{\mathbb{R}} G(X_T, y) \varphi(y) dy - \int_{\mathbb{R}} G(X_0, y) \varphi(y) dy + \\ &\quad - \int_{\mathbb{R}} \left(\int_0^T \frac{\partial G}{\partial x}(X_s, y) dX_s \right) \varphi(y) dy \end{aligned}$$

Posto

$$f_T(\omega, y) := G(X_T(\omega), y) - G(X_0(\omega), y) - \left(\int_0^T \frac{\partial G}{\partial x}(X_s, y) dX_s \right) (\omega) \quad (8)$$

abbiamo trovato

$$\mu_{T,\omega}^X(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} f_T(\omega, y) \varphi(y) dy. \quad (9)$$

Definiamo allora

$$f_T(\omega, y) := |X_T(\omega) - y| - |X_0(\omega) - y| - \left(\int_0^T \frac{X_s - y}{|X_s - y|} dX_s \right) (\omega).$$

Vogliamo mostrare che q.c. $f_T(\cdot, \omega) \in \mathcal{L}_{loc}^2(\mathbb{R})$.

Ovviamente, visti come funzione di y , i primi due addendi di f_T sono q.c. in \mathcal{L}_{loc}^2 .

Inoltre, se $X = M + V$ con M martingala locale e V a variazione limitata,

$$\int_0^T \frac{X_s - y}{|X_s - y|} dX_s = \int_0^T \frac{X_s - y}{|X_s - y|} dM_s + \int_0^T \frac{X_s - y}{|X_s - y|} dV_s. \quad (10)$$

Il secondo addendo di (10) si maggiora con V_T ed è q.c. finito, ed in particolare in \mathcal{L}_{loc}^2 .

Resta solo da esaminare il primo addendo di (10). Sia fissato (a, b) un intervallo finito.

$$E \left[\int_a^b \left(\int_0^T \frac{X_s - y}{|X_s - y|} dM_s \right)^2 dy \right] =$$

grazie a Fubini

$$\begin{aligned} &= \int_a^b E \left[\left(\int_0^T \frac{X_s - y}{|X_s - y|} dM_s \right)^2 \right] dy = \\ &= \int_a^b E \left[\int_0^T \left(\frac{X_s - y}{|X_s - y|} \right)^2 d\langle M \rangle_s \right] dy = \\ &= (b - a) E \left[\int_0^T d\langle M \rangle_s \right] = (b - a) E [\langle M \rangle_T] < +\infty \end{aligned}$$

per l'ipotesi di limitatezza in $\mathcal{L}^2(\Omega)$.

Quindi $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $\int_a^b \left(\int_0^T \frac{X_s - y}{|X_s - y|} dM_s \right)^2 dy$ è q.c. finito, e dunque anche $\int_0^T \frac{X_s - y}{|X_s - y|} dM_s$ sta in \mathcal{L}_{loc}^2 .

Grazie al corollario 12, la tesi è provata. ■

Osservazione 14 *Il problema (6), si ottiene in modo elementare derivando (5): otteniamo infatti*

$$\int_{\mathbb{R}} \delta(x - y) \varphi(y) dy = \varphi(x) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial G^2}{\partial x^2}(x, y) \varphi(y) dy, \quad \forall \varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}).$$

Quindi grazie al teorema delle classi monotone (T128), come visto nel teorema 11, per ogni fissato $x \in \mathbb{R}$ la misura $\frac{\partial G^2}{\partial x^2}(x, \cdot) \cdot \lambda$ coincide sui boreliani con il delta di Dirac δ_x , concentrato sul singolo $\{x\}$.

Tradotto nel linguaggio delle distribuzioni otteniamo il problema (6).

Dunque (6) e (5) sono equivalenti.

Osservazione 15 Per quanto riguarda la misurabilità di f , si ha che esiste un processo \tilde{f} misurabile su $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{P}$, tale che per ogni $a \in \mathbb{R}$, $\tilde{f}(\cdot, y)$ sia indistinguibile da $f(\cdot, y)$.

Dimostrazione. Applicando semplicemente il teorema di Fubini per integrali stocastici (T141) al processo $H(a, s, \cdot) = 1_{(X_s > a)}$.

Osservazione 16 Dalla definizione di misura di occupazione, grazie all'esistenza del tempo locale si ottiene che q.c.

$$\int_0^t \phi(X_s) d\langle X, X \rangle_s = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(a) L_t^a da$$

per ogni t e ogni $\phi \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}^d)$.

Essa si dice formula dei tempi di occupazione.

1.1.3 La formula di Itô-Tanaka

Mostriamo come si può costruire il tempo locale anche con un approccio diverso, ossia arrivando alla formula di Tanaka (T13) attraverso una generalizzazione della formula di Itô alle funzioni convesse.

Questa è la costruzione scelta da [1(Revuz-Yor)].

Ricordo la formula di Itô classica, per la cui dimostrazione si veda [1(Revuz-Yor)] o [6(Karatzas-Shreve)].

Teorema 17 (Formula di Itô (unidimensionale))

Sia X una semimartingala continua e sia $F \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$; allora $F(X)$ è una semimartingala continua e

$$F(X_t) = F(X_0) + \int_0^t \frac{\partial F}{\partial x}(X_s) dX_s + \frac{1}{2} \int_0^t \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(X_s) d\langle X, X \rangle_s.$$

Teorema 18 *Sia f una funzione reale convessa definita su \mathbb{R} e X una semimartingala continua, allora esiste un processo continuo crescente A^f tale che*

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'_-(X_s) dX_s + \frac{1}{2} A_t^f$$

dove f'_- è la derivata sinistra di f .

Dimostrazione. Se $f \in \mathcal{C}^2$, allora questa è la formula di Itô e

$$A^f = \int_0^t f''(X_s) d\langle X, X \rangle_s.$$

Nel caso generale, sia ρ una funzione \mathcal{C}^∞ positiva con supporto compatto in $(-\infty, 0]$, tale che

$$\int_{-\infty}^0 \rho(y) dy = 1 \tag{11}$$

e definiamo

$$f_n(x) = n \int_{-\infty}^0 f(x+y) \rho(ny) dy.$$

Siccome f è convessa e quindi localmente limitata, f_n è ben definita per ogni n e converge puntualmente a f per $n \rightarrow \infty$

Infatti con un semplice cambio di variabili e usando (11)

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \int_{-\infty}^0 |f(x + y/n) - f(x)| \rho(y) dy =$$

e se supponiamo che il supporto di ρ sia contenuto nell'intervallo $[-r, 0]$, e sfruttiamo l'uniforme continuità di f sui compatti

$$= \int_{-r/n}^0 |f(x + y/n) - f(x)| \rho(y) dy \rightarrow 0.$$

Inoltre ragionando in modo simile e sfruttando la crescita della derivata sinistra di f , si ha $f'_n \uparrow f'_-$.

Per ogni n abbiamo quindi

$$f_n(X_t) = f_n(X_0) + \int_0^t f'_n(X_s) dX_s + \frac{1}{2} A_t^{f_n}.$$

Inoltre arrestando X possiamo supporre che sia una semimartingala limitata e quindi che $f'_-(X_s)$ sia limitata.

Usando il teorema della convergenza dominata per gli integrali stocastici (T140) si ha la convergenza in probabilità di $\int_0^t f'_n(X_s) dX_s$ a $\int_0^t f'_-(X_s) dX_s$, uniformemente su ogni intervallo limitato.

In particolare A^{f_n} converge ad un processo A^f che come limite in probabilità di processi crescenti, è anch'esso crescente.

Infine, grazie all'uniforme convergenza sugli intervalli limitati, A^f può essere scelto quasi certamente continuo.

Il teorema è dimostrato. ■

Vediamo A^f nei casi particolari di $f = |x|$, $f = x^+$ o $f = x^-$.

In questo modo ritroviamo l'importante formula di Tanaka (T13) che caratterizza il tempo locale.

Definiamo $sgn(x) = 1$ se $x > 0$ e $sgn(x) = -1$ altrimenti.

Teorema 19 (Formula di Tanaka)

Sia X una semimartingala continua, $a \in \mathbb{R}$, allora esiste un processo continuo crescente L^a chiamato tempo locale di X in a , tale che:

$$|X_t - a| = |X_0 - a| + \int_0^t \operatorname{sgn}(X_s - a) dX_s + L_t^a,$$

$$(X_t - a)^+ = (X_0 - a)^+ + \int_0^t I_{\{X_s > a\}} dX_s + \frac{1}{2} L_t^a,$$

$$(X_t - a)^- = (X_0 - a)^- - \int_0^t I_{\{X_s \leq a\}} dX_s + \frac{1}{2} L_t^a,$$

Dimostrazione. La derivata destra di $f(x) = (x - a)^+$ è uguale a $I_{(a, +\infty)}$; usando il teorema 18, esiste un processo A^+ tale che

$$(X_t - a)^+ = (X_0 - a)^+ + \int_0^t I_{\{X_s > a\}} dX_s + A_t^+. \quad (12)$$

Allo stesso modo

$$(X_t - a)^- = (X_0 - a)^- - \int_0^t I_{\{X_s \leq a\}} dX_s + A_t^-. \quad (13)$$

Sottraendo le identità (12) e (13) otteniamo:

$$X_t = X_0 + \int_0^t dX_s + \frac{1}{2}(A_t^+ - A_t^-).$$

Segue che $A_t^+ = A_t^-$ quasi certamente e definiamo $L_t^a = A_t^+$.

Infine sommando le stesse identità otteniamo anche la prima formula dell'enunciato. ■

Al processo crescente L_t^a possiamo associare la misura aleatoria dL_t^a su \mathbb{R} . Essa è un nucleo da (Ω, \mathcal{A}) in $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

In un certo senso dL_t^a misura il “tempo” speso ad a dalla semimartingala X , come mostra il seguente risultato.

Proposizione 20 *La misura dL_t^a è quasi certamente concentrata sull'insieme $\{t : X_t = a\}$.*

Dimostrazione. Applicando la formula di Itô alla semimartingala $|X - a|$, abbiamo

$$(X_t - a)^2 = (X_0 - a)^2 + 2 \int_0^t |X_s - a| d(|X - a|)_s + \langle |X - a|, |X - a| \rangle_t$$

e usando la prima formula del teorema 19 otteniamo

$$(X_0 - a)^2 + 2 \int_0^t |X_s - a| \operatorname{sgn}(X_s - a) dX_s + 2 \int_0^t |X_s - a| dL_s^a + \langle X, X \rangle_t.$$

Se confrontiamo questo con l'uguaglianza, anch'essa data dalla formula di Itô applicata stavolta su X ,

$$(X_t - a)^2 = (X_0 - a)^2 + 2 \int_0^t (X_s - a) dX_s + \langle X, X \rangle_t$$

vediamo che $\int_0^t |X_s - a| dL_s^a = 0$ quasi certamente.

La tesi è dimostrata. ■

Osservazione 21 *Se $\sigma_a = \sup \{t : X_t = a\}$, allora banalmente $L_\infty^a = L_{\sigma_a}^a$.*

Dimostriamo un'importante formula che raffina attraverso il tempo locale il risultato del teorema 18.

Ricordiamo che se f è convessa, allora la sua derivata seconda distribuzionale è una misura positiva (vedi appendice).

Teorema 22 (Formula di Itô-Tanaka)

Se f è la differenza di due funzioni convesse e X è una semimartingala continua, allora

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'_-(X_s) dX_s + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} L_t^a f''(da).$$

In particolare, $f(X)$ è una semimartingala.

Dimostrazione. Senza perdere generalità ci limitiamo a considerare una f convessa.

Su ogni compatto K di \mathbb{R} , f coincide con una funzione convessa f_K tale che f_K'' ha supporto compatto.

Supponendo di arrestare X quando esce per la prima volta dal compatto, possiamo limitarci a dimostrare il risultato nel caso che f'' abbia supporto compatto.

Allora esistono $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tali che

$$f(x) = \alpha x + \beta + \frac{1}{2} \int |x - a| f''(da).$$

Grazie ai risultati precedenti possiamo scrivere

$$\begin{aligned} f(X_t) &= \alpha X_t + \beta + \frac{1}{2} \int |X_t - a| f''(da) = \\ &= \alpha(X_t - X_0) + f(X_0) + \int \frac{1}{2} \left(\int_0^t \operatorname{sgn}(X_s - a) dX_s + L_t^a \right) f''(da). \end{aligned}$$

Usando il lemma 152 vediamo che

$$\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \int_0^t \operatorname{sgn}(X_s - a) dX_s f''(da) = \int_0^t f'_-(x_s) dX_s - \alpha(X_t - X_0)$$

e ciò completa la dimostrazione. ■

Osservazione 23 *Una conseguenza della dimostrazione è che la formula di Itô vale invariata anche nel caso che f sia derivabile due volte e non sia necessariamente \mathcal{C}^2 , ma abbia f'' localmente integrabile.*

Come semplice corollario alla formula di Itô-Tanaka, si ottiene nuovamente il teorema 13 nella sua estensione a tutte le semimartingale continue: il tempo locale definito dalla formula di Tanaka è la densità della misura di occupazione rispetto alla misura associata alla variazione quadratica di X .

Questo giustifica la scelta di non usare dt sui tempi.

Corollario 24 (Formula dei tempi di occupazione) *Esiste un evento trascurabile N fuori del quale*

$$\int_0^t \phi(X_s) d\langle X, X \rangle_s = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(a) L_t^a da$$

per ogni t e ogni funzione boreliana positiva ϕ .

Dimostrazione. Se $\phi = f''$ con $f \in \mathcal{C}^2$ la formula segue dal confronto della formula di Itô con la formula di Itô-Tanaka, fuori da un evento trascurabile N_ϕ .

Considerando una famiglia $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ densa in $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ per la topologia della convergenza uniforme, è facile vedere che fuori da $N = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} N_{\phi_n}$ la formula è vera per ogni $\phi \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$.

Un'applicazione del teorema delle classi monotone (T128) conclude la prova.

■

1.1.4 Risultati di continuità e definizione di Lévy

Aggiungiamo un importante risultato di regolarità

Proposizione 25 (Continuità del tempo locale) *Per ogni semimartingala continua X esiste una modificazione del processo $\{L_t^a; a \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}_+\}$ tale che sia continuo in t e in a .*

In più se $X = M + V$, dove M è una martingala locale e V a variazione limitata, allora

$$L_t^a - L_t^{a-} = 2 \int_0^t 1_{(X_s=a)} dV_s = 2 \int_0^t 1_{(X_s=a)} dX_s.$$

Quindi in particolare, se X è una martingala locale, allora c'è una modificazione bicontinua della famiglia L^a dei tempi locali.

Dimostrazione. Per la formula di Tanaka

$$L_t^a = 2 \left[(X_t - a)^+ - (X_0 - a)^+ - \int_0^t 1_{(X_s > a)} dM_s - \int_0^t 1_{(X_s > a)} dV_s \right].$$

Usando il lemma di Kolmogorov proviamo che l'integrale stocastico

$$\tilde{M}_t^a = \int_0^t 1_{(X_s > a)} dM_s$$

ha una modificazione bicontinua.

Grazie alle disuguaglianze BDG (T142) e alla formula dei tempi di occupazione, per ogni $k \geq 1$ abbiamo

$$\begin{aligned} E \left[\sup_t \left| \tilde{M}_t^a - \tilde{M}_t^b \right|^{2k} \right] &\leq C_k E \left[\left(\int_0^\infty 1_{(a < X_s \leq b)} d\langle M \rangle_s \right)^k \right] = \\ &= C_k E \left[\left(\int_b^a L_\infty^x dx \right)^k \right] = \\ &= C_k (b - a)^k E \left[\left(\frac{1}{b - a} \int_a^b L_\infty^x dx \right)^k \right] \leq \end{aligned}$$

$$\leq C_k(b-a)^k E \left[\frac{1}{b-a} \int_a^b (L_\infty^x)^k dx \right].$$

L'ultimo passaggio grazie alla formula di Jensen.

Grazie al teorema di Fubini, questo è maggiorato da

$$C_k(b-a)^k \sup_x E[(L_\infty^x)^k].$$

Ora, $L_t^x = 2 \left\{ (X_t - x)^+ - (X_0 - x)^+ - \int_0^t 1_{(X_s > x)} dX_s \right\}$ e siccome $|(X_t - x)^+ - (X_0 - x)^+| \leq |X_t - X_0|$, c'è una costante universale d_k tale che

$$E[(L_\infty^x)^k] \leq d_k E \left[\sup_t |X_t - X_0|^k + \left(\int_0^\infty |dV_s| \right)^k + \langle M \rangle_\infty^{k/2} \right].$$

Il termine a destra non dipende da x . Se è finito per qualche $k > 1$, abbiamo provato la prima parte della tesi.

Altrimenti possiamo arrestare X ai tempi

$$T_n = \inf \left\{ t : \sup_{s \leq t} |X_s - X_0|^k + \left(\int_0^t |dV_s| \right)^k + \langle M \rangle_t^{k/2} \geq n \right\}.$$

Le martingale $(\tilde{M}^a)^{T_n}$ hanno modificazioni bicontinue, quindi anche \tilde{M}^a .

Per completare la tesi dobbiamo provare che

$$\tilde{V}_t^a = \int_0^t 1_{(X_s > a)} dV_s$$

è congiuntamente cadlág in a e continua in t .

Ma col teorema della convergenza dominata

$$\tilde{V}_t^{a-} = \lim_{b \rightarrow a^-} \int_0^t 1_{(X_s > b)} dV_s = \int_0^t 1_{(X_s \geq a)} dV_s.$$

Segue che $L_t^a - L_t^{a-} = 2 \left(\tilde{V}_t^{a-} - \tilde{V}_t^a \right) = 2 \int_0^t 1_{(X_s = a)} dV_s$.

Allo stesso modo

$$\tilde{V}_t^{a+} = \lim_{b \rightarrow a^+} \int_0^t 1_{(X_s > b)} dV_s = \int_0^t 1_{(X_s > a)} dV_s,$$

cioè $L_t^a = L_t^{a+}$.

In conclusione, la formula dei tempi di occupazione (T24) implica che

$$\int_0^t 1_{(X_s=a)} d\langle M \rangle_s = \int_0^t 1_{(X_s=a)} d\langle X \rangle_s = 0$$

e così $\int_0^t 1_{(X_s=a)} dM_s = 0$ e la tesi è provata. ■

Una fondamentale caratterizzazione simile al teorema di Lebesgue (T148) giustifica ulteriormente il nome tempo locale: storicamente è stata la prima definizione di tempo locale del moto browniano (Lévy, 1948).

Definizione 26 (Lévy) *Se X è una semimartingala continua allora q.c.*

$$L_t^a(X) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t 1_{[a, a+\varepsilon)}(X_s) d\langle X \rangle_s$$

per ogni a e t , e se M è una martingala locale continua

$$L_t^a(M) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\varepsilon} \int_0^t 1_{(a-\varepsilon, a+\varepsilon)}(M_s) d\langle M \rangle_s.$$

Dimostrazione. Usando la formula dei tempi di occupazione (T24)

$$\begin{aligned} & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t 1_{[a, a+\varepsilon)}(X_s) d\langle X \rangle_s = \\ & = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_a^{a+\varepsilon} L_t^x(X) dx = \\ & = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_a^{a+\varepsilon} (L_t^a(X) + \eta(x)) dx, \end{aligned}$$

con $\eta(x) > 0$ infinitesimo per $x \rightarrow a^+$.

E quindi

$$\begin{aligned} & = L_t^a(X) + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_a^{a+\varepsilon} \eta(x) dx \leq \\ & \leq L_t^a(X) + \sup_{x \in (a, a+\varepsilon)} \eta(x) = L_t^a(X). \end{aligned}$$

■

Osservazione 27 *In generale*

$$\tilde{L}_t^a(X) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\varepsilon} \int_0^t 1_{(a-\varepsilon, a+\varepsilon)}(X_s) d\langle X \rangle_s$$

si chiama tempo locale simmetrico e differisce dal tempo locale.

Per il tempo locale simmetrico vale una formula di Tanaka alternativa

$$|X_t - a| = |X_0 - a| + \int_0^t \widetilde{\text{sgn}}(X_s - a) dX_s + \tilde{L}_t^a(X),$$

dove $\widetilde{\text{sgn}}(x)$ vale 1 per $x > 0$, -1 per $x < 0$ e 0 per $x = 0$.

Vale inoltre che $\tilde{L}^a = \frac{L^a + L^{a-}}{2}$. Per maggiore dettaglio si veda [1(Revuz-Yor)].

1.2 SDE in dimensione 1: il teorema di Le Gall sull'unicità per traiettorie e l'esempio di Tsirel'son

Vediamo come grazie al tempo locale si possono ottenere importanti risultati nello studio delle equazioni differenziali stocastiche (SDE).

1.2.1 Definizioni preliminari SDE

Sia definito lo spazio probabilizzabile filtrato

$$(\mathbf{W}, \mathcal{G}_t) := (\mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d), \sigma(\xi(s), s \leq t)),$$

dove $\xi(s)$ denota la valutazione nel punto s .

Definiamo una grande classe di funzioni su cui definire le SDE.

Definizione 28 (Processo prevedibile)

Si chiama tribù prevedibile e si indica con \mathcal{P} l'unica tribù generata dall'insieme di tutti processi continui adattati rispetto alla filtrazione $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$.

Un processo misurabile rispetto a \mathcal{P} si dice prevedibile.

Una funzione f su $\mathbb{R}_+ \times \mathbf{W}$ a valori in \mathbb{R}^d si dice prevedibile se lo è come processo su $(W, (\mathcal{G}_t)_{t \geq 0})$.

Definizione 29 (Equazione differenziale stocastica di Itô)

Siano date due funzioni prevedibili f e g a valori in $\mathbb{R}^{d \times r}$ e \mathbb{R}^d , tali che fissato $T \in [0, +\infty]$, q.c.

$$\int_0^T \sum_{i,j} f_{ij}^2(s, X.) ds < +\infty, \quad \int_0^T \sum_i |g_i(s, X.)| ds < +\infty.$$

Una soluzione dell'equazione differenziale stocastica $e(f, g)$ è una coppia (X, B) di processi adattati sullo spazio probabilizzato filtrato $(\Omega, \mathcal{F}_t, P)$ e tali che

- B sia un (\mathcal{F}_t) -processo di Wiener in \mathbb{R}^r ;
- per $i = 1, 2, \dots, d$,

$$X_t^i = X_0^i + \sum_j^r \int_0^t f_{ij}(s, X.) dB_s^j + \int_0^t g_i(s, X.) ds.$$

In tal caso X è una semimartingala continua.

Si scriverà $e_x(f, g)$ per imporre la condizione che $X_0 = x$ q.c. sulle soluzioni.

Diamo i concetti di esistenza e unicità delle soluzioni, nel caso delle SDE.

Definizione 30 (Esistenza forte e debole)

Una soluzione (X, B) di $e(f, g)$ su $(\Omega, \mathcal{F}_t, P)$ si dice forte se X è adattato alla filtrazione naturale di B completata rispetto a P .

Altrimenti si dice soluzione debole.

Definizione 31 (Unicità per traiettorie e in legge)

Si dice che $e(f, g)$ ha unicità per traiettorie se per tutte le coppie (X, B) , (X', B') di soluzioni definite sullo stesso spazio filtrato, con $B = B'$ e q.c. $X_0 = X'_0$, allora X e X' sono indistinguibili.

Si dice che $e(f, g)$ ha unicità in legge se per tutte le coppie (X, B) , (X', B') di soluzioni con $X_0 \sim X'_0$, allora X e X' sono isonome.

Enunciamo alcuni risultati classici per la cui dimostrazione si veda [13], che permettono di comprendere meglio e collegare fra di loro i vari concetti di esistenza e unicità.

Teorema 32 (Yamada-Watanabe)

Se $e(f, g)$ ha unicità per traiettorie, allora

- $e(f, g)$ ha unicità in legge;
- Esiste una funzione boreliana

$$\phi : \mathcal{C}(\mathcal{R}_+) \longrightarrow \mathcal{C}(\mathcal{R}_+)$$

tale che per ogni soluzione (X, B) , i processi X e $\phi(B)$ sono indistinguibili.

In particolare tutte le soluzioni di $e_x(f, g)$ sono forti.

Teorema 33

Sia (X, B) una soluzione forte di $e(f, g)$.

Allora:

- Esiste una funzione boreliana

$$\phi : \mathcal{C}(\mathcal{R}_+) \longrightarrow \mathcal{C}(\mathcal{R}_+)$$

tale che i processi X e $\phi(B)$ sono indistinguibili.

- Per ogni \tilde{B} moto browniano, la coppia $(\phi(\tilde{B}), \tilde{B})$ è ancora soluzione forte.

Valgono infine i recenti risultati, per la cui dimostrazione si vedano [13(Cherny)] e [14(Cherny)].

Teorema 34 (Cherny)

L'unicità in legge implica che $(X, B) \sim (X', B')$.

Teorema 35 (Cherny)

Unicità in legge ed esistenza di una soluzione forte implicano l'unicità per traiettorie.

Osservazione 36 Riassumendo abbiamo le seguenti implicazioni:

- *esistenza forte* \implies *esistenza debole (ovvia)*;
- *unicità per traiettorie* \implies *unicità in legge [Yamada-Watanabe]*;
- *esistenza debole e unicità per traiettorie* \implies *esistenza forte [Yamada-Watanabe]*;
- *esistenza forte e unicità in legge* \implies *unicità per traiettorie [Cherny]*.

In generale vale il seguente teorema, dovuto a Itô, che per certi versi ricorda il classico teorema di Cauchy-Lipshitz riguardo le ODE.

Teorema 37 *Se f e g sono tali che*

- $\exists K > 0$ tale che per ogni $t \in \mathbb{R}_+$ e $w \in \mathbf{W}$ si ha

$$\|f(t, x_1) - f(t, x_2)\| + \|g(t, x_1) - g(t, x_2)\| \leq K \sup_{s \leq t} \|w(s) - w(t)\|,$$

- $\forall y \in \mathbb{R}^d$, se $\bar{y} \equiv y$ vale che $(f, g)(\cdot, \bar{y})$ è localmente limitata.

Allora per ogni $x \in \mathbb{R}^d$, $e_x(f, g)$ ha esistenza forte e unicità per traiettorie.

Finora i risultati elencati sono validi in dimensione qualsiasi: invece nel seguito del capitolo ci limiteremo a considerare solo SDE in dimensione 1.

Vedremo che le condizioni di unicità per le SDE sono in molti casi meno restrittive rispetto a quelle delle ODE deterministiche.

Ad esempio molto spesso equazioni della forma

$$\frac{dX_t}{dt} = b(t, X_t), \quad X_0 = x$$

con b continuo (definito ad esempio sulle funzioni limitate e hölderiane), non hanno unicità.

Invece con argomenti legati al teorema di Girsanov (T143), la SDE

$$X_t = x + \int_0^t b(s, X_s) ds + W_t$$

ha unicità in legge. (vedi [1(Revuz-Yor)])

Nell'appendice ci sono alcuni esempi di non unicità delle soluzioni di ODE.

1.2.2 Condizioni di unicità per traiettorie nelle SDE unidimensionali

In questa sezione considereremo sempre SDE (unidimensionali) $e(f, g)$ in cui $f(t, X) = \sigma(t, X_t)$ e $g(t, X) = b(t, X_t)$, ossia f e g dipendono solo dal presente.

Iniziamo con un risultato del 1971, dovuto ancora a Yamada e Watanabe, per la cui dimostrazione si veda [1(Revuz-Yor)].

Teorema 38 (Yamada-Watanabe; unicità per traiettorie)

Supponiamo che $b(t, x)$ sia una funzione lipshitziana in x , nel senso che $\forall t > 0 \exists K_t > 0$ tale che

$$|b(s, y) - b(s, x)| \leq K_t |y - x| \quad \forall s < t.$$

Supponiamo che $\sigma(t, x)$ sia una funzione boreliana tale che

$$|\sigma(t, x) - \sigma(t, y)|^2 \leq h(|x - y|) \quad \forall t, x, y, \quad (14)$$

con $h : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ funzione continua, strettamente crescente e tale che

$$h(0) = 0, \quad \int_{[0, \varepsilon]} \frac{1}{h(u)} du = +\infty \quad \forall \varepsilon > 0.$$

Allora $e(\sigma, b)$ ha unicità per traiettorie.

Osservazione 39 *L'ipotesi su σ è verificata nel caso che sia $\frac{1}{2}$ -hölderiana come funzione di x , indipendentemente da t .*

Usando i tempi locali dimostreremo che se

- σ è limitata e non dipende dal tempo,
- $\exists \varepsilon$ tale che $|\sigma| \geq \varepsilon > 0$,

allora anche indebolendo l'ipotesi (14), basta che b sia boreliana limitata e $e(\sigma, b)$ ha unicità per traiettorie.

Proveremo infine che hanno unicità per traiettorie persino SDE con dati molto irregolari, se σ è anche positiva.

Osservazione 40 Questi risultati coprono anche SDE $e(\sigma, b)$ con b tale che

$$df(t) = b(t, f(t))dt$$

è una ODE fuori dalle ipotesi del teorema di Cauchy-Lipshitz di esistenza e unicità.

Come già affermato, in alcuni casi la presenza del termine stocastico può così eliminare i problemi di non unicità delle soluzioni.

Cominciamo con l'osservare che mentre nelle ODE l'estremo superiore di due soluzioni è anch'esso soluzione, questo non è generalmente vero per le SDE, proprio a causa della comparsa del tempo locale.

Proposizione 41 Siano X^1, X^2 due soluzioni di $e(\sigma, b)$ rispetto allo stesso processo di Wiener B e tali che $X_0^1 = X_0^2$ q.c.

Allora $(X^1 \vee X^2, B)$ è soluzione se e solo se $L^0(X^1 - X^2) \equiv 0$.

Dimostrazione. Usiamo la formula di Tanaka (T19):

$$\begin{aligned} X_t^1 \vee X_t^2 &= X_t^1 + (X_t^2 - X_t^1)^+ = \\ &= X_t^1 + \int_0^t 1_{(X_s^2 - X_s^1 > 0)} d(X^2 - X^1)_s + \frac{1}{2} L_t^0(X^2 - X^1). \end{aligned}$$

Se sviluppiamo i primi due addendi otteniamo

$$\begin{aligned} &X_t^1 + \int_0^t 1_{(X_s^2 - X_s^1 > 0)} d(X^2 - X^1)_s = \\ &= X_0^1 + \int_0^t dX_s^1 + \int_0^t 1_{(X_s^2 - X_s^1 > 0)} dX_s^2 - \int_0^t 1_{(X_s^2 - X_s^1 > 0)} dX_s^1 = \\ &= X_0^1 + \int_0^t 1_{(X_s^1 - X_s^2 \geq 0)} dX_s^1 + \int_0^t 1_{(X_s^2 - X_s^1 > 0)} dX_s^2, \end{aligned}$$

sostituendo $X^i, i = 1, 2$ con $X_0^i + \int_0^\cdot \sigma(s, X_s^i) dB_s + \int_0^\cdot b(s, X_s^i) ds$, si ha

$$\begin{aligned} &= X_0^1 + \int_0^t 1_{(X_s^1 - X_s^2 \geq 0)} (\sigma(s, X_s^1) dB_s + b(s, X_s^1) ds) + \\ &\quad + \int_0^t 1_{(X_s^2 - X_s^1 > 0)} (\sigma(s, X_s^2) dB_s + b(s, X_s^2) ds) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= X_0^1 + \int_0^t 1_{(X_s^1 - X_s^2 \geq 0)} (\sigma(s, X_s^1 \vee X_s^2) dB_s + b(s, X_s^1 \vee X_s^2) ds) + \\
&\quad + \int_0^t 1_{(X_s^2 - X_s^1 > 0)} (\sigma(s, X_s^1 \vee X_s^2) dB_s + b(s, X_s^1 \vee X_s^2) ds) = \\
&= X_0^1 + \int_0^t \sigma(s, X_s^1 \vee X_s^2) dB_s + \int_0^t b(s, X_s^1 \vee X_s^2) ds,
\end{aligned}$$

e per l'ipotesi $X_0^1 = X_0^2 = X_0^1 \vee X_0^2$ q.c., sostituendo nella formula di partenza abbiamo

$$X_t^1 \vee X_t^2 = X_0^1 \vee X_0^2 + \int_0^t \sigma(s, X_s^1 \vee X_s^2) dB_s + \int_0^t b(s, X_s^1 \vee X_s^2) ds + \frac{1}{2} L_t^0(X^2 - X^1),$$

cioè anche $(X^1 \vee X^2, B)$ risolve $e(\sigma, b)$, se e soltanto se $\frac{1}{2} L_t^0(X^2 - X^1) \equiv 0$.
La tesi è dimostrata. ■

Per dimostrare la prossima proposizione è necessario ricordare il seguente lemma elementare di teoria della misura.

Lemma 42 *Siano X, Y due v.a. reali e isonome. Allora se $X \geq Y$ q.c., allora esse sono equivalenti.*

Dimostrazione. Consideriamo la speranza $E[X - Y]$, che è nulla per linearità e isonomia.

Per ipotesi la v.a. $X - Y$ è q.c. positiva e dunque avendo speranza nulla è trascurabile, cioè X e Y sono equivalenti.

La tesi è provata. ■

Proposizione 43 (Condizione fondamentale di unicità)

Sia $L^0(X^1 - X^2) \equiv 0$ per ogni coppia X^1, X^2 di soluzioni rispetto allo stesso processo di Wiener B e tali che $X_0^1 = X_0^2$ q.c.

Allora se vale l'unicità in legge per $e(\sigma, b)$, vale anche l'unicità per traiettorie.

Dimostrazione. Fissato B , se X^1 e X^2 sono due soluzioni coincidenti al tempo 0, allora per il teorema 41 anche $X^1 \vee X^2$ è una soluzione.

Dato che $X_0^1 = X_0^2 = X_0^1 \vee X_0^2$ q.c., per l'ipotesi di unicità in legge si avrà

$$(X^1, B) \sim (X^1 \vee X^2, B),$$

ed in particolare per ogni fissato $t \in \mathbb{R}_+$

$$X_t^1 \sim X_t^1 \vee X_t^2.$$

Dato che $X_t^1 \vee X_t^2 \geq X_t^1$, grazie al lemma precedente le due v.a. non possono essere isonome se non sono equivalenti.

Quindi X^1 e $X^1 \vee X^2$ coincidono q.c. su \mathbb{Q}_+ , e per continuità i due processi sono indistinguibili.

Grazie all'arbitrarietà di X^1 e X^2 si ha l'unicità per traiettorie e la tesi è dimostrata. ■

Notazione 44 *Nel seguito si indicherà con $\rho : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ una fissata funzione boreliana tale che*

$$\int_{[0, \varepsilon]} \frac{1}{\rho(u)} du = +\infty \quad \forall \varepsilon > 0.$$

Lemma 45 (Condizione di annullamento per $L^0(X)$)

Sia X una semimartingala continua tale che esiste $c \in (0, +\infty]$ tale che

$$\forall t \in \mathbb{R}_+ \quad A_t = \int_0^t 1_{(0 < X_s \leq c)} \rho(X_s)^{-1} d\langle X \rangle_s < +\infty \quad q.c.$$

Allora $L^0(X) \equiv 0$.

Dimostrazione. Fissiamo $t > 0$.

Grazie alla formula dei tempi di occupazione (T24), si ha

$$A_t = \int_0^c \rho(a)^{-1} L_t^a(X) da.$$

Usando la continuità a destra (T25), abbiamo che L_t^a converge a L_t^0 per $a \rightarrow 0$.

Grazie alla formula di Tanaka (T19) il tempo locale L_t^0 è q.c. finito $\forall t \in \mathbb{R}_+$.

Fissiamo $\omega \in \Omega$ tale che $+\infty > L_t^0(X(\omega)) > 0$.

Di conseguenza $\exists \delta > 0$ tale che,

$$\forall a < \delta, \quad L_t^a(X(\omega)) \geq \frac{L_t^0(X(\omega))}{2} := K(\omega) > 0.$$

Quindi, se $\delta \geq c$ abbiamo

$$\begin{aligned} A_t(\omega) &\geq \int_0^c \rho(a)^{-1} L_t^a(X(\omega)) da \geq \int_0^c \rho(a)^{-1} K(\omega) da = \\ &= K(\omega) \int_0^c \rho(a)^{-1} da = +\infty, \end{aligned}$$

e analogamente se $c > \delta$ vale che

$$\begin{aligned} A_t(\omega) &\geq \int_0^c \rho(a)^{-1} L_t^a(X(\omega)) da \geq \int_0^\delta \rho(a)^{-1} L_t^a(X(\omega)) da \geq \\ &\geq \int_0^\delta \rho(a)^{-1} K(\omega) da = K(\omega) \int_0^\delta \rho(a)^{-1} da = +\infty. \end{aligned}$$

Siccome $A_t = +\infty$ è un evento trascurabile per ipotesi, $L_t^0(X) = 0$ q.c.

Di conseguenza $L_t^0(X) = 0 \forall t \in \mathbb{Q}_+$ q.c. e per continuità (T25) di $L_t^0(X)$ otteniamo $L_t^0(X) \equiv 0$ q.c.

La tesi è dimostrata. ■

Corollario 46 *Siano $b_i, i = 1, 2$ due funzioni boreliane, e*

$$|\sigma(t, x) - \sigma(t, y)|^2 \leq \rho(|x - y|) \quad \forall t, x, y.$$

Siano $X^i, i = 1, 2$ soluzioni di $e(\sigma, b^i)$ rispetto allo stesso processo di Wiener B . Allora $L^0(X^1 - X^2) \equiv 0$.

Dimostrazione. Abbiamo

$$\begin{aligned} X_t^1 - X_t^2 &= X_0^1 - X_0^2 + \int_0^t (\sigma(s, X_s^1) - \sigma(s, X_s^2)) dB_s + \\ &\quad + \int_0^t (b_1(s, X_s^1) - b_2(s, X_s^2)) ds, \end{aligned}$$

quindi

$$\begin{aligned} &\int_0^t 1_{(X_s^1 - X_s^2 > 0)} \rho(X_s^1 - X_s^2)^{-1} d\langle X^1 - X^2 \rangle_s = \\ &= \int_0^t 1_{(X_s^1 - X_s^2 > 0)} \rho(X_s^1 - X_s^2)^{-1} (\sigma(s, X_s^1) - \sigma(s, X_s^2))^2 ds \leq \end{aligned}$$

e grazie all'ipotesi si ha

$$\leq \int_0^t 1_{(X_s^1 - X_s^2 > 0)} ds \leq t.$$

Di conseguenza possiamo applicare il lemma precedente con $c = +\infty$ e la tesi è dimostrata. ■

Infine enunciamo un utile risultato di esistenza debole, unicità in legge: per la dimostrazione si veda [1(Revuz-Yor)].

Proposizione 47 *Sia σ limitata, indipendente da t , tale che $\exists \varepsilon$ per cui $|\sigma| \geq \varepsilon > 0$. Sia b boreliana limitata.*

Allora $e(\sigma, b)$ ha esistenza debole e unicità in legge.

Finalmente possiamo enunciare il seguente teorema.

Teorema 48 (Le Gall (1983))

Se σ e b sono funzioni boreliane limitate e vale una delle seguenti:

1. $|\sigma(x) - \sigma(y)|^2 \leq \rho(|x - y|) \quad \forall x, y; \quad \exists \varepsilon$ tale che $|\sigma| \geq \varepsilon > 0$;
2. $|\sigma(x) - \sigma(y)|^2 \leq |f(x) - f(y)| \quad \forall x, y$ con f funzione crescente e limitata;
 $\exists \varepsilon$ tale che $\sigma \geq \varepsilon > 0$.

Allora $e(\sigma, b)$ ha unicità per traiettorie.

Osservazione 49 *In 2. l'ipotesi che $\sigma \geq \varepsilon$ non può essere rimpiazzata con $|\sigma| \geq \varepsilon$; infatti è noto che non c'è unicità per traiettorie per $e(\sigma, 0)$ quando $\sigma(x) = \text{sgn}(x)$ (esempio di Tanaka).*

Osservazione 50 *Fissiamo una funzione g tale che esista*

$$S_t^2 = \sup_{|\Delta|} \sum_i |g(t_{i+1}) - g(t_i)|^2,$$

allora S_t^2 si può dire variazione quadratica di g ed è una funzione crescente di t .

Sostanzialmente il punto 2 ci mostra che si ha l'unicità per traiettorie nel caso che $\sigma \geq \varepsilon > 0$ funzione boreliana limitata abbia variazione quadratica limitata.

Infatti in tal caso possiamo facilmente ottenere l'ipotesi del teorema prendendo come f la variazione quadratica stessa, e viceversa una σ che verifica tale ipotesi ha automaticamente variazione quadratica limitata.

Dimostrazione. 1. Grazie alla proposizione 47, siccome $|\sigma| \geq \varepsilon$, l'unicità in legge vale per $e(\sigma, b)$.

La tesi segue dalla proposizione 43 attraverso il corollario 46.

2. Anche in questo caso la condizione $\sigma \geq \varepsilon$ implica l'unicità in legge per $e(\sigma, b)$.

Se riusciamo ad applicare direttamente il lemma 45 con $\rho = x$, poi la tesi seguirà come sopra dalla proposizione 43.

Siano X^i , $i = 1, 2$, due soluzioni rispetto allo stesso processo di Wiener B e tali che $X_0^1 = X_0^2$ q.c.

Sia $(k_m)_{m \in \mathbb{N}}$ una successione reale strettamente decrescente tale che $k_m \searrow 0$ per $m \rightarrow +\infty$.

Fissiamo $t \geq 0$ e $\forall m \geq 0$ definiamo

$$A_t^{k_m} := \int_0^t (X_s^1 - X_s^2)^{-1} 1_{(X_s^1 - X_s^2 > k_m)} d\langle X^1 - X^2 \rangle_s.$$

Allora la successione $(A_t^{k_m})_{m \in \mathbb{N}}$ è positiva, crescente e tende a A_t del lemma 45 con $\rho = x$, $c = +\infty$.

Se otteniamo che $\exists C > 0$ tale che

$$\forall m > 0 \quad E [A_t^{k_m}] \leq C, \tag{15}$$

dove C è una costante che non dipende da m , possiamo applicare il teorema di Beppo Levi e ottenere

$$+\infty > C \geq \lim_{m \rightarrow \infty} E [A_t^{k_m}] = E [A_t].$$

Di conseguenza l'integrando A_t è q.c. finito, e quindi si ha la tesi.

Dobbiamo solo dimostrare che $\exists C \in \mathbb{R}_+$ tale che valga (15).

Fissiamo $m > 0$ e abbiamo

$$\begin{aligned} E [A_t^{k_m}] &= E \left[\int_0^t (X_s^1 - X_s^2)^{-1} 1_{(X_s^1 - X_s^2 > k_m)} d\langle X^1 - X^2 \rangle_s \right] = \\ &= E \left[\int_0^t (\sigma(X_s^1) - \sigma(X_s^2))^2 (X_s^1 - X_s^2)^{-1} 1_{(X_s^1 - X_s^2 > k_m)} ds \right] \leq \\ &\leq E \left[\int_0^t (f(X_s^1) - f(X_s^2)) (X_s^1 - X_s^2)^{-1} 1_{(X_s^1 - X_s^2 > k_m)} ds \right] := K(f)_t. \end{aligned}$$

Prendiamo quindi una successione $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ di funzioni \mathcal{C}^1 , crescenti e uniformemente limitate dalla costante M , tale che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$$

per ogni x che non sia punto di discontinuità per f .

Una tale successione si ottiene immediatamente regolarizzando per convoluzione con una successione di mollificatori \mathcal{C}^1 .

L'insieme D dei punti di discontinuità di f è numerabile; grazie alla formula dei tempi di occupazione (T24), per q.o. $\omega \in \Omega$ vale che

$$\int_0^T 1_D(X_s^1(\omega)) d\langle X^1 \rangle_s = \int_{-\infty}^{+\infty} 1_D(a) L_t^a da,$$

il secondo membro è q.c. nullo perché D è numerabile, e allora sviluppando il primo abbiamo

$$0 = \int_0^T 1_D(X_s^1(\omega)) d\langle X^1 \rangle_s = \int_0^T 1_{\{X_s^1(\omega) \in D\}}(s) \sigma(X_s^1)^2 ds,$$

e siccome $\sigma > \varepsilon \Rightarrow \sigma^2 \neq 0$, vale che l'insieme dei tempi $\{s \in \mathbb{R}_+ \mid X_s^1(\omega) \in D\}$ è trascurabile secondo Lebesgue. Lo stesso vale per X_t^2 .

Di conseguenza si ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (f_n(X_s^1) - f_n(X_s^2)) = f(X_s^1) - f(X_s^2)$$

per q.o. $s < t$. Segue che $\lim_n K(f_n)_t = K(f)_t$ grazie al teorema di Lebesgue, dominando l'integranda con $\frac{M}{k_m}$.

Dunque se troviamo una costante C indipendente da n e da m che maggiori tutti i $K(f_n)_t$, avremmo subito che

$$\forall m \in \mathbb{N}, \quad C \geq K(f)_t \geq E[A_t^{k_m}],$$

e quindi la tesi.

Bisogna trovare una C che verifichi tale proprietà.

Fissato $u \in [0, 1]$, sia $Z^u = X^2 + u(X^1 - X^2)$ combinazione convessa tra X^1 e X^2 .

Abbiamo

$$\begin{aligned} Z_t^u(\omega) &= Z_0^u(\omega) + \int_0^t ((1-u)\sigma(X_s^1(\omega)) + u\sigma(X_s^2(\omega))) dB_s(\omega) + \\ &\quad + \int_0^t ((1-u)b(s, X_s^1(\omega)) + ub(s, X_s^2(\omega))) ds := \\ &:= Z_0^u(\omega) + \int_0^t \sigma^u(s, \omega) dB_s(\omega) + \int_0^t b^u(s, \omega) ds, \end{aligned}$$

dove, grazie alla positività di $\sigma > \varepsilon$,

$$\sigma^u(s, \omega) = (1-u)\sigma(X_s^1(\omega)) + u\sigma(X_s^2(\omega)) \geq (1-u)\varepsilon + u\varepsilon = \varepsilon$$

e inoltre $|\sigma^u|$ e $|b^u|$ sono ancora limitate.

Fissato $n \in \mathbb{N}$, riscriviamo l'espressione di $K(f_n)_t$, usando l'uguaglianza

$$f_n(X_s^1) - f_n(X_s^2) = \int_0^1 df_n(Z_s^u)_u, \quad \forall s \in [0, t].$$

Otteniamo, siccome $f_n \in \mathcal{C}^1$,

$$\begin{aligned} K(f_n)_t &= E \left[\int_0^t \left(\int_0^1 df_n(Z_s^u)_u \right) (X_s^1 - X_s^2)^{-1} 1_{(X_s^1 - X_s^2 > k_m)} ds \right] = \\ &= E \left[\int_0^t \left(\int_0^1 f'_n(Z_s^u)(X_s^1 - X_s^2) du \right) (X_s^1 - X_s^2)^{-1} 1_{(X_s^1 - X_s^2 > k_m)} ds \right] \leq \\ &\leq E \left[\int_0^t \left(\int_0^1 f'_n(Z_s^u) du \right) ds \right] = \end{aligned}$$

con Fubini, essendo l'integrando positivo, si ha

$$\begin{aligned} &= \int_0^1 E \left[\int_0^t f'_n(Z_s^u) ds \right] du = \frac{1}{\varepsilon^2} \int_0^1 E \left[\int_0^t f'_n(Z_s^u) \varepsilon^2 ds \right] du \leq \\ &\leq \frac{1}{\varepsilon^2} \int_0^1 E \left[\int_0^t f'_n(Z_s^u) \sigma^u(s, \cdot)^2 ds \right] du \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \int_0^1 E \left[\int_0^t f'_n(Z_s^u) d\langle Z^u \rangle_s \right] du = \end{aligned}$$

usiamo la formula dei tempi di occupazione (T24) e abbiamo

$$= \frac{1}{\varepsilon^2} \int_0^1 E \left[\int_{\mathbb{R}} f'_n(a) L_t^a(Z^u) da \right] du,$$

e infine, di nuovo con Fubini

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{\varepsilon^2} \int_0^1 \int_{\mathbb{R}} f'_n(a) E [L_t^a(Z^u)] dadu \leq \\ &= \frac{1}{\varepsilon^2} \sup_{a,u} E [L_t^a(Z^u)] \int_0^1 \lim_{N \rightarrow +\infty} (f(N) - f(-N)) du \leq \\ &= \frac{2}{\varepsilon^2} \sup_{a,u} E [L_t^a(Z^u)] \sup_n \|f_n\|. \end{aligned}$$

Vogliamo maggiorare $\sup_{a,u} E [L_t^a(Z^u)]$ e usando la formula di Tanaka (T19) si ha che

$$\begin{aligned} \sup_{a,u} E [L_t^a(Z^u)] &= \sup_{a,u} E \left[|Z_t^u - a| - |Z_0^u - a| - \int_0^t \operatorname{sgn}(Z_s^u - a) dZ_s^u \right] \leq \\ &\leq \sup_{a,u} E [|Z_t^u - a| - |Z_0^u - a|] + \sup_{a,u} \left| E \left[\int_0^t \operatorname{sgn}(Z_s^u - a) \sigma^u(s, \omega) dB_s \right] \right| + \\ &\quad + \sup_{a,u} \left| E \left[\int_0^t \operatorname{sgn}(Z_s^u - a) b^u(s, \omega) ds \right] \right|. \end{aligned}$$

Maggioriamo separatamente i tre addendi, per ogni fissata (a, s) .

Sia $M > 0$ tale che $|\sigma^u| + |b^u| < M$.

- Vediamo il primo addendo

$$\begin{aligned} &E [|Z_t^u - a| - |Z_0^u - a|] = \\ &= E \left[\left| Z_0^u - a + \int_0^t \sigma^u(s, \cdot) dB_s + \int_0^t b^u(s, \cdot) ds \right| - |Z_0^u - a| \right] \leq \end{aligned}$$

cancello $|Z_0^u - a|$, e uso la disuguaglianza di Hölder (o Jensen)

$$\begin{aligned} &\leq E \left[\left| \int_0^t \sigma^u(s, \cdot) dB_s \right|^2 \right]^{\frac{1}{2}} + E \left[\left| \int_0^t b^u(s, \cdot) ds \right| \right] = \\ &= E \left[\int_0^t \sigma^u(s, \cdot)^2 ds \right]^{\frac{1}{2}} + E \left[\left| \int_0^t b^u(s, \cdot) ds \right| \right] \leq \\ &\leq \sqrt{t}M + tM. \end{aligned}$$

- Essendo σ^u limitata, il secondo addendo è la speranza di una martingala nulla in zero, e quindi è nullo.

Infatti è l'integrale stocastico di $\text{sgn}(Z_s^u - a)\sigma^u(s, \omega)$ rispetto alla martingala B_s^t e, grazie alla limitatezza di $\sigma^u(s, \omega)$, la funzione integranda è in $\mathcal{L}^2(B_s^t)$ (D136).

- Possiamo maggiorare il terzo addendo con tM .

Quindi abbiamo provato che $\exists H > 0$ tale che

$$\sup_{a,u} E [L_t^a(Z^u)] < H < +\infty.$$

In conclusione

$$K(f_n)_t \leq \frac{2}{\varepsilon^2} H \sup_n \|f_n\| := C.$$

La tesi è provata. ■

1.2.3 Risultati di comparazione tra soluzioni di SDE

In questa breve sezione mostriamo come il tempo locale possa essere sfruttato per ottenere anche dei teoremi di confronto fra le traiettorie di SDE aventi lo stesso σ , ma b differenti.

Notazione 51 *In questa sezione assumiamo σ funzione boreliana limitata tale che verifichi una delle seguenti:*

1. $|\sigma(t, x) - \sigma(t, y)|^2 \leq \rho(|x - y|) \quad \forall x, y;$
2. $|\sigma(x) - \sigma(y)|^2 \leq |f(x) - f(y)| \quad \forall x, y \quad \exists \varepsilon \text{ tale che } \sigma \geq \varepsilon > 0.$

Definizione 52 *Nel seguito, come nel teorema 38, diremo che la funzione $b(t, x)$ è lipshitziana in x , se $\forall t > 0 \exists K_t > 0$ tale che*

$$|b(s, y) - b(s, x)| \leq K_t |y - x| \quad \forall s < t.$$

Teorema 53 *Siano $b_i, i = 1, 2$ due funzioni boreliane, con $b^1 \geq b^2$ ovunque. Una delle due sia lipshitziana rispetto a x . Siano $X^i, i = 1, 2$ soluzioni di $e(\sigma, b^i)$ rispetto allo stesso processo di Wiener B , tali che $X_0^1 \geq X_0^2$ q.c. Allora $P(X_t^1 \geq X_t^2, \quad \forall t \geq 0) = 1.$*

Dimostrazione. Grazie corollario 46 e al teorema 48 vale che $L^0(X^1 - X^2) = 0$, e quindi grazie alla formula di Tanaka (T19)

$$\begin{aligned} \varphi(t) &:= E \left[(X_t^2 - X_t^1)^+ \right] = \\ &= E \left[(X_0^2 - X_0^1)^+ \right] + E \left[\int_0^t 1_{(X_s^2 > X_s^1)} (\sigma(s, X_s^2) - \sigma(s, X_s^1)) dB_s \right] + \\ &\quad + E \left[\int_0^t 1_{(X_s^2 > X_s^1)} (b^2(s, X_s^2) - b^1(s, X_s^1)) ds \right]. \end{aligned}$$

Il primo addendo è nullo per ipotesi. Poi σ è limitata e dunque $\sigma \in \mathcal{L}^2(B^t)$ (D136), così il secondo addendo è la speranza di una martingala nulla in zero ed è quindi nullo anch'esso.

Allora abbiamo

$$\varphi(t) = E \left[\int_0^t 1_{(X_s^2 > X_s^1)} (b^2(s, X_s^2) - b^1(s, X_s^1)) ds \right] := E[g(t)].$$

Per definizione $\varphi(t) \geq 0$, e poi vale che $\varphi(t)$ è continua in t .

Infatti grazie all'ipotesi di limitatezza, possiamo supporre che $|b^1| + |b^2| < C$ per cui,

$$\forall t \in \mathbb{R}_+ \quad |g(t)| = \left| \int_0^t 1_{(X_s^2 > X_s^1)} (b^2(s, X_s^2) - b^1(s, X_s^1)) ds \right| \leq Ct.$$

Quindi, se $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ è una successione che tende ad un fissato $\bar{t} \geq 0$, definitivamente $t_n < \bar{t} + 1$, quindi $|g(t_n)| < C(\bar{t} + 1)$ e usando il teorema di Lebesgue abbiamo

$$\varphi(t_n) = E[g(t_n)] \rightarrow E[g(\bar{t})] = \varphi(\bar{t}).$$

Per l'arbitrarietà di $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e di \bar{t} , questo implica la continuità di φ .

- Nel caso che b^1 sia lipshitziana in x con costanti K_t ,

$$\begin{aligned} \varphi(t) &\leq E \left[\int_0^t 1_{(X_s^2 > X_s^1)} (b^1(s, X_s^2) - b^1(s, X_s^1)) ds \right] \leq \\ &\leq E \left[\int_0^t 1_{(X_s^2 > X_s^1)} |b^1(s, X_s^2) - b^1(s, X_s^1)| ds \right] \leq \\ &\leq K_t E \left[\int_0^t 1_{(X_s^2 > X_s^1)} |X_s^2 - X_s^1| ds \right] = \\ &= K_t E \left[\int_0^t (X_s^2 - X_s^1)^+ ds \right] = K_t \int_0^t \varphi(s) ds. \end{aligned}$$

Grazie alla continuità di $\varphi \geq 0$ applichiamo il lemma di Gronwall e otteniamo $\varphi(t) \equiv 0$. Di conseguenza $\forall t \geq 0$ fissato, $X_t^1 \geq X_t^2$ q.c.

Per continuità di X^i , $i = 1, 2$, $P(X_t^1 \geq X_t^2, \forall t \geq 0) = 1$ e la tesi è provata.

- Invece se b^2 è lipshitziana in x , otteniamo

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= E \left[\int_0^t 1_{(X_s^2 > X_s^1)} (b^2(s, X_s^2) - b^1(s, X_s^1)) ds \right] \leq \\ &\leq E \left[\int_0^t 1_{(X_s^2 > X_s^1)} (b^2(s, X_s^2) - b^2(s, X_s^1)) ds \right]. \end{aligned}$$

Possiamo quindi completare la dimostrazione come nel primo caso.

■

Osservazione 54 *La disuguaglianza $b^1 \geq b^2$ nel teorema precedente deve valere ovunque: infatti è usata sulle due funzioni composte con X^i , $i = 1, 2$. Lo stesso vale per l'ipotesi 1 del teorema successivo.*

Il prossimo teorema completa il precedente nel caso che abbiamo disuguaglianze strette fra i b^i . Esso non sfrutta il tempo locale, ma la formula risolutiva delle SDE lineari.

Definizione 55 (SDE lineari) *Una equazione differenziale stocastica è detta lineare se può essere scritta*

$$dY_t = dH_t + Y_t dX_t, \quad Y_0 = H_0,$$

dove H e X sono due fissate semimartingale continue.

Lemma 56 *La soluzione della SDE lineare della definizione precedente è*

$$Y_t = \mathcal{E}(X)_t \left(H_0 + \int_0^t \mathcal{E}(X)_s^{-1} (dH_s - d\langle H, X \rangle_s) \right),$$

dove $\mathcal{E}(X)_t$ indica la semimartingala esponenziale di X , cioè

$$\exp \left\{ X_t - \frac{1}{2} \langle M, M \rangle_t \right\}.$$

In particolare, se $\langle H, X \rangle = 0$, allora

$$Y_t = \mathcal{E}(X)_t \left(H_0 + \int_0^t \mathcal{E}(X)_s^{-1} dH_s \right).$$

Per la dimostrazione, diretta conseguenza della formula di integrazione per parti, caso particolare della formula di Itô, si veda [1(Revuz-Yor)].

Teorema 57 *Supponendo le stesse ipotesi del teorema 53, siano le b_i , $i = 1, 2$, funzioni continue e non dipendenti da t . Sia inoltre σ lipshitziana rispetto a x .*

Se vale una delle seguenti:

1. $b^1 > b^2$ ovunque;

2. $\exists \varepsilon$ tale che $|\sigma| \geq \varepsilon > 0$, entrambe le b^i sono lipshitziane ed esiste un intorno $V(x)$ di un punto x tale che

$$\int_{V(x)} 1_{(b^1(a)=b^2(a))} da = 0,$$

e le X^i sono soluzioni di $e_x(\sigma, b^i)$;

allora $P(X_t^1 > X_t^2, \quad \forall t > 0) = 1$.

Dimostreremo la tesi solo sotto le ipotesi 1. Per la prova dell'altro caso si veda [1(Revuz-Yor)].

Dimostrazione. Come primo caso supponiamo b^1 lipshitziana. Possiamo scrivere

$$\begin{aligned} X_t^1 - X_t^2 &= \int_0^t (\sigma(s, X_s^1) - \sigma(s, X_s^2)) dB_s + (b^1(X_s^1) - b^2(X_s^2)) ds = \\ &= \int_0^t (b^1(X_s^2) - b^2(X_s^2)) ds + \\ &\quad + \int_0^t ((\sigma(s, X_s^1) - \sigma(s, X_s^2)) dB_s + (b^1(X_s^1) - b^1(X_s^2)) ds) = \\ &= \int_0^t (b^1(X_s^2) - b^2(X_s^2)) ds + \int_0^t 1_{(X_s^1 \neq X_s^2)} (X_s^1 - X_s^2)^{-1} (X_s^1 - X_s^2) \cdot \\ &\quad \cdot ((\sigma(s, X_s^1) - \sigma(s, X_s^2)) dB_s + (b^1(X_s^1) - b^1(X_s^2)) ds) := \\ &\quad := H_t + \int_0^t (X_s^1 - X_s^2) dM_s, \end{aligned}$$

dove

$$H_t = \int_0^t (b^1(X_s^2) - b^2(X_s^2)) ds,$$

e

$$\begin{aligned} M_t &= \int_0^t 1_{(X_s^1 \neq X_s^2)} (X_s^1 - X_s^2)^{-1} \cdot \\ &\quad \cdot ((\sigma(s, X_s^1) - \sigma(s, X_s^2)) dB_s + (b^1(X_s^1) - b^1(X_s^2)) ds). \end{aligned}$$

La lipshitzianità di entrambe σ e b^1 implica che M_t sia una semimartingala continua: infatti il termine in funzione di σ rientra facilmente in $\mathcal{L}^2(B)_{loc}$ (D137) e il termine in funzione di b^1 è un integrale ben definito q.c.

Analogamente grazie alla limitatezza delle b^i , $i = 1, 2$, anche H_t è una semimartingala continua.

Di conseguenza, grazie al lemma precedente

$$X_t^1 - X_t^2 = \mathcal{E}(M)_t \int_0^t \mathcal{E}(M)_s^{-1} dH_s,$$

e siccome $\forall t > 0$ vale che $dH_t > 0$ q.c., automaticamente $X_t^1 - X_t^2 > 0$ q.c.

Nel caso che sia b^2 a essere lipshitziana, basta definire

$$H_t = \int_0^t (b^1(X_s^1) - b^2(X_s^1)) ds,$$

$$M_t = \int_0^t 1_{(X_s^1 \neq X_s^2)} (X_s^1 - X_s^2)^{-1} \cdot ((\sigma(s, X_s^1) - \sigma(s, X_s^2)) dB_s + (b^2(X_s^1) - b^2(X_s^2)) ds).$$

e si segue la stessa dimostrazione dell'altro caso.

La tesi è provata. ■

1.2.4 Esempio di $e(f, g)$ senza unicità per traiettorie, con $f \equiv 1$, g limitata

Questa sezione non usa esplicitamente il tempo locale: è una digressione sulle conseguenze dei teoremi di unicità forte.

Dai risultati precedenti uniti al teorema di Yamada-Watanabe sull'esistenza forte (T32), si ha che con b funzione limitata, l'equazione $e(1, b)$ ha sempre una soluzione forte che è unica per traiettorie.

Questo non vale se $b = g(t, X)$ dipende da tutto il passato del processo X .

Esempio 58 (Tsirel'son)

Definiamo una funzione limitata τ su $\mathbb{R}_+ \times \mathbf{W}$ nel modo seguente.

Sia $(t_k)_{k \in \mathbb{N}}$ una successione strettamente crescente con $0 < t_k \leq 1$, $t_0 = 1$, $t_k \searrow 0$ per $k \rightarrow -\infty$.

Fissiamo

$$\tau(t, \omega) = \begin{cases} \left[\frac{\omega(t_k) - \omega(t_{k-1})}{t_k - t_{k-1}} \right] & \text{se } t_k < t \leq t_{k+1}, \\ 0 & \text{se } t = 0 \text{ o } t > 1, \end{cases}$$

dove $[x]$ è la parte frazionaria del numero reale x .

Essendo continuo a sinistra, questo è un processo prevedibile su \mathbf{W} .

Se (X, B) è soluzione debole di $e(1, \tau)$, allora su $]t_k, t_{k+1}]$

$$X_t - X_{t_k} = B_t - B_{t_k} + \left[\frac{X_{t_k} - X_{t_{k-1}}}{t_k - t_{k-1}} \right] (t - t_k); \quad (16)$$

e se fissiamo, sempre su $]t_k, t_{k+1}]$,

$$\eta_t = \frac{X_t - X_{t_k}}{t - t_k}, \quad \varepsilon_t = \frac{B_t - B_{t_k}}{t - t_k},$$

abbiamo

$$\eta_t = \varepsilon_t + \left[\frac{X_{t_k} - X_{t_{k-1}}}{t_k - t_{k-1}} \right] = \varepsilon_t + [\eta_{t_k}]. \quad (17)$$

Osservazione 59 Il teorema di Girsanov (T143) ci assicura l'esistenza di una X soluzione debole di $e(1, \tau)$. Infatti, fissato B un processo di Wiener, consideriamo $X = B$.

Allora (X, B) è soluzione forte di $e(1, 0)$, e quindi

$$dX_t = (dB_t + \tau(t, X)dt) - \tau(t, X)dt.$$

Definendo $\tilde{B}_t = B_t + \int_0^t \tau(t, X)dt$, siccome $\tau(t, \cdot)$ è limitata da 1 per $t \leq 1$ e nulla per $t > 1$, si verifica facilmente la condizione di Novikov (P146)

$$E \left[\exp \left(\frac{1}{2} \left\langle \int_0^\infty \tau(s, X_s) dB_s \right\rangle_\infty \right) \right] = E \left[\exp \left(\frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \tau^2(s, X_s) ds \right) \right] \leq e^{\frac{1}{2}} < +\infty.$$

Abbiamo quindi che \tilde{B} è un processo di Wiener e (X, \tilde{B}) risolve $e(1, \tau)$.

Prima di enunciare la proposizione, vediamo un breve lemma che ci sarà utile.

Lemma 60 Sia X una v.a. \mathcal{F} -misurabile e siano $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ due sottotribù di \mathcal{F} . Se X e \mathcal{A}_1 sono indipendenti da \mathcal{A}_2 , allora

$$E[X|\mathcal{A}_1 \vee \mathcal{A}_2] = E[X|\mathcal{A}_1].$$

Dimostrazione. Innanzitutto $E[X|\mathcal{A}_1]$ è $\mathcal{A}_1 \vee \mathcal{A}_2$ -misurabile. Poi notiamo che

$$\mathcal{A}_1 \vee \mathcal{A}_2 = \sigma(U|U \text{ è misurabile secondo } \mathcal{A}_1 \text{ o } \mathcal{A}_2).$$

Fissata una funzione U \mathcal{A}_2 -misurabile e tale che UX sia integrabile

$$E[UX] =$$

per l'indipendenza tra X e \mathcal{A}_2

$$= E[U] E[X] = E[U] E[E[X|\mathcal{A}_1]] =$$

e per l'indipendenza fra \mathcal{A}_1 e \mathcal{A}_2

$$= E[UE[X|\mathcal{A}_1]].$$

Per definizione tale proprietà vale anche per U \mathcal{A}_1 -misurabile, dunque su una famiglia di generatori di $\mathcal{A}_1 \vee \mathcal{A}_2$.

La tesi è provata. ■

Notazione 61 Nel seguito si indicherà con $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ la filtrazione rispetto cui è definita la soluzione (X, B) .

La seguente dimostrazione segue le linee di una dovuta a Stroock e Yor, 1980.

Proposizione 62 L'equazione $e(1, \tau)$ non ha soluzioni forti. Più precisamente

1. $\forall t \in [0, 1]$, la v.a. $[\eta_t]$ è uniformemente distribuita su $[0, 1]$;
2. $\forall t \in [0, 1]$, la v.a. $[\eta_t]$ è indipendente da \mathcal{F}_1^B .

Dimostrazione. Prima di passare alla dimostrazione, verifichiamo che 1 e 2 insieme implicano che $e(1, \tau)$ non ha soluzione forte.

Se vale 1, la legge di $[\eta_t]$ assicura che $\sigma([\eta_t])$ non sia degenere, e l'indipendenza 2 da $\mathcal{F}_1^B \supset \mathcal{F}_t^B$ implica $\forall 0 \leq t \leq 1$ che $\sigma([\eta_t]) \cap \mathcal{F}_t^B$ contiene solo eventi degeneri: infatti un tale evento dovrebbe essere indipendente da se stesso. Quindi $\sigma([\eta_t]) \vee \mathcal{F}_t^B$ contiene strettamente \mathcal{F}_t^B .

Dato che $[\eta_t]$ è \mathcal{F}_t^X -misurabile, vale che

$$\mathcal{F}_t^X \vee \mathcal{F}_t^B \supseteq \sigma([\eta_t]) \vee \mathcal{F}_t^B,$$

e quindi anche $\mathcal{F}_t^X \vee \mathcal{F}_t^B$ contiene strettamente \mathcal{F}_t^B .

Questo può succedere solo se \mathcal{F}_t^X contiene eventi non misurabili secondo \mathcal{F}_t^B , cioè se X non è soluzione forte di $e(1, \tau)$.

1. Sia fissato $p \in \mathbb{Z} - \{0\}$ e definiamo $\forall k \in -\mathbb{N}$

$$d_k = E[\exp(2i\pi p \eta_{t_k})].$$

Se dimostriamo che $d_k = 0 \forall k \in -\mathbb{N}$ e $\forall p \in \mathbb{Z} - \{0\}$, vale che $[\eta_t]$ ha legge uniforme su $[0, 1] \forall t \in [0, 1]$.

Infatti per $t_k < t \leq t_{k+1}$, siccome B è un processo di Wiener rispetto a $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0} \supseteq (\mathcal{F}_t^X)_{t \geq 0}$, abbiamo che ε_t è indipendente da η_{t_k} , quindi $\exp(2i\pi p \varepsilon_t)$ da $\exp(2i\pi p \eta_{t_k})$, e grazie a (17)

$$\begin{aligned} E[\exp(2i\pi p \eta_t)] &= E[\exp(2i\pi p(\varepsilon_t + [\eta_{t_k}]))] = \\ &= E[\exp(2i\pi p(\varepsilon_t + \eta_{t_k}))] = E[\exp(2i\pi p \varepsilon_t)] d_k = 0 \end{aligned}$$

Poi, fissato $t \in [0, 1]$, dato che $[\eta_t]$ ha immagine in $[0, 1]$, possiamo considerare la legge μ di $2\pi[\eta_t]$ su $[0, 2\pi)$, e integrando rispetto alla legge immagine otteniamo

$$\int_{[0, 2\pi)} e^{ipx} d\mu(x) = 0.$$

Ovviamente nel caso $p = 0$ abbiamo l'integrale della costante 1.

Di conseguenza gli integrali dei polinomi trigonometrici rispetto a μ coincidono con quelli rispetto alla legge uniforme su $[0, 2\pi)$.

Siccome questa classe di funzioni è un'algebra contenente le costanti e la tribù da essa generata contiene tutte le funzioni continue periodiche, e dunque tutte le funzioni boreliane, allora grazie al teorema delle classi monotone le due leggi coincidono su $[0, 2\pi)$.

Questo implica che la legge di $[\eta_t]$ coincida con la ripartizione uniforme su $[0, 1]$ visto che coincidono su $[0, 1)$, e sono concentrate su tale insieme.

Bisogna dimostrare che $d_k = 0 \forall k \in -\mathbb{N}$.

Fissiamo $k \in -\mathbb{N}$. Grazie a (17) applicata alla coppia $(t_{k-1}, t = t_k)$ abbiamo

$$\begin{aligned} d_k &= E [\exp(2i\pi p \eta_{t_k})] = E [\exp(2i\pi p(\varepsilon_{t_k} + [\eta_{t_{k-1}}]))] = \\ &= E [\exp(2i\pi p(\varepsilon_{t_k} + \eta_{t_{k-1}}))] =, \end{aligned}$$

dato che ε_{t_k} è indipendente da $\eta_{t_{k-1}}$, come sopra l'indipendenza vale a maggior ragione tra $\exp(2i\pi p \varepsilon_{t_k})$ e $\exp(2i\pi p \eta_{t_{k-1}})$, e quindi

$$= d_{k-1} E [\exp(2i\pi p \varepsilon_{t_k})] =$$

poi grazie all'espressione della funzione caratteristica $\varphi(t) = \exp(-\frac{\sigma^2 t^2}{2})$ di una v.a. di legge $N(0, \sigma^2)$,

$$= d_{k-1} \exp(-2\pi^2 p^2 (t_k - t_{k-1})^{-1}).$$

Segue che minorando $(t_k - t_{k-1})^{-1}$ con 1, e maggiorando

$$\forall k \in -\mathbb{N}, \quad |d_k| = |E [\exp(2i\pi p \eta_{t_k})]| \leq 1,$$

abbiamo $\forall n \in \mathbb{N}$

$$|d_k| \leq |d_{k-1}| \exp(-2\pi^2 p^2) \leq \dots \leq |d_{k-n}| \exp(-2n\pi^2 p^2) \leq \exp(-2n\pi^2 p^2).$$

Siccome $p \neq 0$, otteniamo $d_k = 0 \forall k \in -\mathbb{N}$ e per quanto visto sopra la tesi è provata.

2. Dobbiamo dimostrare che η_t è indipendente da \mathcal{F}_1^B .
Ragionando ancora su $[0, 2\pi)$, supponiamo che valga che

$$\begin{aligned} E [\exp (2i\pi p\eta_t) | \mathcal{F}_1^B] &= E [\exp (2i\pi p\eta_t)] = \\ &= \begin{cases} 0, & p \neq 0 \\ 1, & p = 0, \text{ ovvio.} \end{cases} \end{aligned} \quad (18)$$

Allora tale uguaglianza vale per i polinomi trigonometrici in $2\pi\eta_t$, e possiamo estendere il risultato similmente a prima.

Infatti, grazie al teorema di Lebesgue anche condizionale (o al teorema di Beppo Levi anche condizionale), la classe delle funzioni che composte con η_t verifica (18) è uno spazio vettoriale monotono.

Applicando il teorema delle classi monotone come sopra all'algebra dei polinomi trigonometrici, estendiamo (18) a tutte le funzioni boreliane limitate.

Abbiamo quindi, grazie al lemma di misurabilità di Doob (T131), che tutte le funzioni $\sigma(\eta_t)$ -misurabili e limitate verificano (18).

Questo implica la tesi, dato che allora una versione della legge condizionale sarebbe costante (e coincidente con la legge uniforme).

Similmente a prima, basta verificare (18) per $t = t_k$ e $\forall k \in -\mathbb{N}$.

Infatti per $t_k < t \leq t_{k+1}$ abbiamo, grazie a (17)

$$\begin{aligned} E [\exp (2i\pi p\eta_t) | \mathcal{F}_1^B] &= E [\exp (2i\pi p(\varepsilon_t + [\eta_{t_k}])) | \mathcal{F}_1^B] = \\ &= E [\exp (2i\pi p(\varepsilon_t + \eta_{t_k})) | \mathcal{F}_1^B] = \end{aligned}$$

per la \mathcal{F}_1^B -misurabilità di ε_t , e quindi di $\exp (2i\pi p\varepsilon_t)$,

$$= \exp (2i\pi p\varepsilon_t) E [\exp (2i\pi p\eta_{t_k}) | \mathcal{F}_1^B] = 0.$$

Resta solo da provare che

$$E [\exp (2i\pi p\eta_{t_k}) | \mathcal{F}_1^B] = 0 \quad \forall p \in \mathbb{Z} - \{0\}, \quad \forall k \in -\mathbb{N}.$$

Fissiamo $n \in \mathbb{N}$, $k \in -\mathbb{N}$ e definiamo $\mathcal{A}_k^{k-n} = \sigma(B_v - B_u, t_{k-n} \leq u \leq v \leq t_k)$. Allora, usando ancora (17),

$$\begin{aligned} E [\exp(2i\pi p \eta_{t_k}) | \mathcal{A}_k^{k-n}] &= E [\exp(2i\pi p(\varepsilon_{t_k} + [\eta_{t_{k-1}}])) | \mathcal{A}_k^{k-n}] = \\ &= E [\exp(2i\pi p(\varepsilon_{t_k} + \eta_{t_{k-1}})) | \mathcal{A}_k^{k-n}] =, \end{aligned}$$

ripetendo n passi analoghi e usando la \mathcal{A}_k^{k-n} -misurabilità di $\varepsilon_u \forall t_n < u \leq t_k$ e dunque delle rispettive esponenziali,

$$= E [\exp(2i\pi p(\varepsilon_{t_k} + \varepsilon_{t_{k-1}} + \dots + \varepsilon_{t_{k-n+1}} + \eta_{t_{k-n}})) | \mathcal{A}_k^{k-n}] =$$

$$= \exp(2i\pi p(\varepsilon_{t_k} + \varepsilon_{t_{k-1}} + \dots + \varepsilon_{t_{k-n+1}})) E [\exp(2i\pi p \eta_{t_{k-n}}) | \mathcal{A}_k^{k-n}] = (*).$$

Come già osservato, B è un processo di Wiener rispetto a $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0} \supseteq (\mathcal{F}_t^X)_{t \geq 0}$, e quindi tutto il blocco $[B_t - B_{t_{k-n}}]_{t > t_{k-n}}$ è indipendente da $\mathcal{F}_{t_{k-n}}^X$, e a maggior ragione la famiglia $(B_v - B_u)_{t_{k-n} \leq u \leq v \leq t_k}$ che genera \mathcal{A}_k^{k-n} .

Di conseguenza la v.a. $\mathcal{F}_{t_{k-n}}^X$ -misurabile $\eta_{t_{k-n}}$ è indipendente da \mathcal{A}_k^{k-n} , lo stesso vale per $\exp(2i\pi p \eta_{t_{k-n}})$, e quindi la speranza condizionale rispetto a tale tribù coincide con la speranza d_{k-n} . Vale che

$$(*) = \exp(2i\pi p(\varepsilon_{t_k} + \varepsilon_{t_{k-1}} + \dots + \varepsilon_{t_{k-n+1}})) d_{k-n} = 0.$$

Abbiamo ottenuto che $\exp(2i\pi p \eta_{t_k})$ è indipendente da $\mathcal{A}_k^{k-n} \forall n \in \mathbb{N}$.

Notiamo che $\mathcal{F}_{t_k}^B = \bigvee_n \mathcal{A}_k^{k-n}$ e dunque per il principio della sottofamiglia finita (si veda [3(Letta)]), $\exp(2i\pi p \eta_{t_k})$ è indipendente anche da $\mathcal{F}_{t_k}^B$.

Poi grazie al lemma 60, dato che la v.a. $\exp(2i\pi p \eta_{t_k})$ è \mathcal{F}_{t_k} -misurabile, e sia $\mathcal{F}_{t_k}^B$ che $\mathcal{F}_{t_k} \supseteq \mathcal{F}_{t_k}^B$ sono indipendenti da $\sigma((B_t - B_{t_k})_{(1 \geq t > t_k)})$ sempre per l'additività di B , possiamo affermare che

$$0 = E [\exp(2i\pi p \eta_{t_k}) | \mathcal{F}_{t_k}^B] = E [\exp(2i\pi p \eta_{t_k}) | \mathcal{F}_{t_k}^B \vee \sigma((B_t - B_{t_k})_{(1 \geq t > t_k)})].$$

Dato che per definizione $\mathcal{F}_1^B = \mathcal{F}_{t_k}^B \vee \sigma((B_t - B_{t_k})_{(1 \geq t > t_k)})$, vale che

$$E [\exp(2i\pi p \eta_{t_k}) | \mathcal{F}_1^B] = 0.$$

La tesi è provata. ■

Vediamo un risultato ulteriore che precisa la natura di \mathcal{F}_t^X .

Proposizione 63 *Nelle ipotesi della proposizione 62 sia $\mathcal{F}_0^X = \mathcal{F}_0^B$. Allora per ogni fissato $t \in [0, 1]$,*

$$\forall s \in [0, t], \quad \mathcal{F}_t^X = \sigma([\eta_s]) \vee \mathcal{F}_t^B.$$

Dimostrazione. Supponiamo che $t_k < s \leq t_{k+1}$ e $t_N < t \leq t_{N+1}$, e fissiamo la tribù $\sigma([\eta_s]) \vee \mathcal{F}_t^B$.

In tutte le implicazioni seguenti si suppone la misurabilità di $(B_u)_{u \leq t}$.

Siccome la funzione parte frazionaria è boreliana e lo sono anche tutte le sue possibili inverse, da (16) abbiamo

$$\eta_s \text{ è misurabile} \implies \eta_{t_k} \text{ è misurabile,}$$

analogamente $\forall h$ tale che $t_h < s$

$$\eta_{t_h} \text{ è misurabile} \implies \eta_{t_{h-1}} \text{ è misurabile,}$$

e quindi per induzione su $-\mathbb{N}$ se la misurabilità vale per η_s , vale per tutti gli η_{t_h} .

D'altra parte $\forall m > k$ tale che $m < N$, sempre da (16) otteniamo il passo induttivo

$$\eta_{t_m} \text{ è misurabile} \implies \eta_{t_{m+1}} \text{ è misurabile,}$$

e la misurabilità di η_s implica anche quella degli η_{t_m} .

Inoltre fissato $r \leq t$, $\exists n \leq N$ tale che $t_n < r \leq t_{n+1}$ e ancora usando (16)

$$\eta_{t_n} \text{ è misurabile} \implies \eta_r \text{ è misurabile.}$$

Abbiamo provato che se $[\eta_s]$ è misurabile e lo è anche $(B_u)_{u \leq t}$, allora è misurabile tutta la famiglia $(\eta_u)_{u \leq t}$, cioè

$$\sigma([\eta_s]) \vee \mathcal{F}_t^B = \sigma((\eta_u)_{u \leq t}) \vee \mathcal{F}_t^B.$$

In tal caso $\forall t_k \leq r$

$$X_r - X_{t_k} = X_r - X_{t_n} + \sum_{i=k+1}^n (X_{t_{i-1}} - X_{t_i}) = (r - t_n)\eta_r + \sum_{i=k+1}^n ((t_i - t_{i-1})\eta_{t_i})$$

è misurabile.

Per continuità di X

$$X_r - X_0 = \lim_{k \rightarrow -\infty} (X_r - X_{t_k}),$$

e quindi se X_0 è misurabile, anche X_r è misurabile $\forall r \leq t$.

Abbiamo ottenuto che

$$\mathcal{F}_t^X \subseteq \sigma([\eta_s]) \vee \mathcal{F}_t^B.$$

Viceversa, sempre da (16),

$$B_t - B_{t_k} \in \mathcal{F}_t^X \quad \forall t_k \leq t,$$

poi

$$B_t - B_0 = \lim_{k \rightarrow -\infty} (B_t - B_{t_k}),$$

e quindi se B_0 è \mathcal{F}_0^X -misurabile, anche B_t è \mathcal{F}_t^X -misurabile.

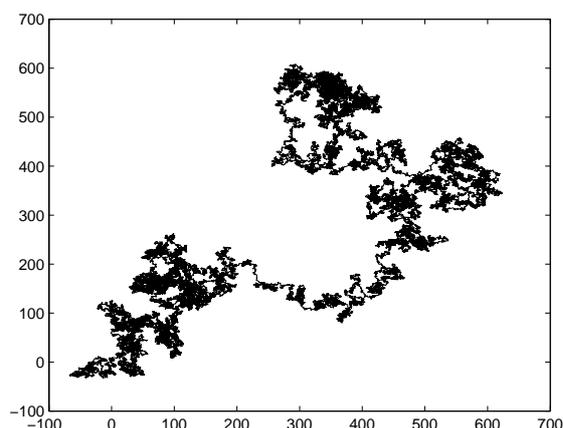
Così

$$\mathcal{F}_t^X = \sigma([\eta_s]) \vee \mathcal{F}_t^B.$$

La tesi è provata. ■

2 Moto browniano in dimensione n : la misura di occupazione

Esempio di una traiettoria di moto browniano bidimensionale:



Notazione 64 *Scriveremo BM per indicare un moto browniano unidimensionale, BM^d per indicare un moto browniano d -dimensionale.*

2.1 La misura di occupazione di un BM^d , $d > 1$

Abbiamo visto che se $d = 1$ il tempo locale è cruciale per la risoluzione dei problemi di unicità.

Per questo andiamo ad analizzare le caratteristiche della misura di occupazione $\mu_{T,\omega}^d$ in dimensione $d > 1$, che sono strettamente legate a quelle del moto browniano d -dimensionale BM^d . Nel seguito sia fissato $d \in \mathbb{N}$, $d > 1$.

Vediamo che non si riesce a ottenere una densità rispetto alla misura di Lebesgue λ^d : infatti vedremo che la misura di occupazione è λ^d -singolare.

Iniziamo col seguente risultato, che potrebbe essere ingannevole.

Lemma 65 *Siano dati un moto browniano d -dimensionale B , una funzione reale boreliana f su \mathbb{R}^d , trascurabile secondo Lebesgue, e una misura μ σ -finita sulla tribù boreliana di \mathbb{R}_+ , con $\mu\{0\} = 0$.*

Allora, per quasi ogni ω , la funzione $t \mapsto f(X_t(\omega))$ è trascurabile secondo μ .

Dimostrazione. Possiamo supporre f positiva, infatti basta provare la tesi per $|f|$, che è ancora trascurabile.

Si ha allora

$$\begin{aligned} \int P(d\omega) \int \mu(dt) f(X_t(\omega)) &= \int \mu(dt) \int P(d\omega) f(X_t(\omega)) = \\ &= \int \mu(dt) \int f d\mathcal{N}(0, t)^{\otimes d} = f(\mathbf{0}) \mu\{0\} = 0. \end{aligned}$$

Da ciò la tesi. ■

Corollario 66 *Fissato un insieme $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ che sia trascurabile secondo Lebesgue, allora per quasi ogni ω , $\mu_{T,\omega}(A) = 0$*

Dimostrazione. Banale applicazione del lemma 65 alla misura $\mu = \lambda$: la restrizione della misura di Lebesgue ai boreliani di $[0, T]$, e con $f = I_A$. ■

Osservazione 67 *L'evento trascurabile su cui la tesi non vale, in generale dipende da f . Quindi non possiamo dedurre l'assoluta continuità rispetto alla misura di Lebesgue. Infatti questa proprietà si perde per $d > 1$.*

Dimostriamo dopo due semplici lemmi, un importante risultato che differenzia nettamente un BM da un BM^d .

Lemma 68 *Sia B un BM^d uscente dall'origine e sia λ^d la misura di Lebesgue su $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$. Allora:*

1. *Gli insiemi*

$$\begin{aligned} \gamma_1(\omega) &= \{B_t(\omega), 0 \leq t \leq 1\}, \\ \gamma_2(\omega) &= \{B_t(\omega), 0 \leq t \leq 2\}, \\ \gamma_3(\omega) &= \{B_{1-t}(\omega) - B_1(\omega), 0 \leq t \leq 1\}, \\ \gamma_4(\omega) &= \{B_{1+t}(\omega) - B_1(\omega), 0 \leq t \leq 1\}, \end{aligned}$$

sono quasi certamente boreliani di \mathbb{R}^d e le mappe $\omega \mapsto \lambda^d(\gamma_i(\omega))$ sono v.a. per $i = 1, \dots, 4$.

2. Vale che

$$E[\lambda^d(\gamma_2)] = 2^{\frac{d}{2}} E[\lambda^d(\gamma_1)], \quad (19)$$

$$E[\lambda^d(\gamma_1)] = E[\lambda^d(\gamma_3)] = E[\lambda^d(\gamma_4)]. \quad (20)$$

Dimostrazione. 1) Sia fissato $i \in \{1, 2, 3, 4\}$. Innanzitutto banalmente γ_i è quasi certamente immagine continua di un compatto, e dunque compatto e a maggior ragione boreliano.

Poi

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \bigcap_n \left\{ z : \inf_{u \in [0,1] \cup \mathbb{Q}} |z - B_u(\omega)| < \frac{1}{n} \right\} = \\ &= \bigcap_n \left\{ z : \inf_{u \in [0,1] \cup \mathbb{Q}} f(z, \omega) < \frac{1}{n} \right\} \end{aligned}$$

con f misurabile su $(\Omega \times \mathbb{R}^d, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$:

$$f = |x - y| \circ (Id, B).$$

Quindi la funzione $I_{\gamma_1(\omega)}(\omega, z)$ è misurabile, e per il teorema di Fubini anche $\omega \mapsto \lambda^d(\gamma_1(\omega))$ lo è.

Analogamente sono misurabili le mappe $\omega \mapsto \lambda^d(\gamma_i)$ per $i = 2, 3, 4$.

2) Per le proprietà di scaling del *BM* (P132), vale che

$$B_t \text{ è isonomo a } \sqrt{2} B_{\frac{t}{2}}.$$

D'altra parte, per le proprietà della misura di Lebesgue in \mathbb{R}^d ,

$$\lambda^d(\sqrt{2}A) = 2^{\frac{d}{2}} \lambda^d(A), \quad \forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d).$$

Quindi

$$\begin{aligned} E[\lambda^d(\gamma_2)] &= E[\lambda^d \{B_t(\cdot), 0 \leq t \leq 2\}] = \\ &= E \left[\lambda^d \left\{ \sqrt{2} B_{\frac{t}{2}}(\cdot), 0 \leq t \leq 2 \right\} \right] = E \left[\lambda^d \left(\sqrt{2} \{B_t(\cdot), 0 \leq t \leq 1\} \right) \right] = \\ &= 2^{\frac{d}{2}} E \left[\lambda^d(\gamma_1) \right]. \end{aligned}$$

Inoltre, fissato $\omega \in \Omega$,

$$\gamma_3(\omega) = \gamma_1(\omega) - B_1(\omega),$$

e dunque

$$\lambda^d(\gamma_3(\omega)) = \lambda^d(\gamma_1(\omega) - B_1(\omega)) = \lambda^d(\gamma_1(\omega)).$$

Poi $B_{1+t} - B_1$ è isonomo a B_t (P132) e dunque

$$E[\lambda^d(\gamma_1)] = E[\lambda^d(\gamma_3)] = E[\lambda^d(\gamma_4)].$$

La tesi è provata. ■

Lemma 69 (BM con tempo invertito)

Sia B un BM su $[0, 1]$.

Allora il processo

$$\tilde{B}_t = B_{1-t} - B_1$$

è anch'esso un BM su $[0, 1]$.

Dimostrazione. Vale che $\tilde{B}_0 = 0$ q.c.

Inoltre

$$\tilde{B}_t - \tilde{B}_s = B_{1-t} - B_{1-s} \sim -\mathcal{N}(0, t-s) \sim \mathcal{N}(0, t-s).$$

Infine

$$\tilde{B}_t - \tilde{B}_s = B_{1-t} - B_{1-s} \in \mathcal{F}_{1-s}$$

e $\tilde{B}_s = B_{1-s} - B_1$ è indipendente da \mathcal{F}_{1-s} , dunque \tilde{B} è additivo.

La tesi è provata. ■

Proposizione 70 (Trascurabilità delle traiettorie di BM^d , $d > 1$)

Sia B un BM^d uscente dall'origine e sia λ^d la misura di Lebesgue su $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$.

Allora vale che $E[\lambda^d(\gamma_1)] = 0$, e dunque quasi certamente le traiettorie del moto browniano sono trascurabili in \mathbb{R}^d .

Dimostrazione. Il caso $E[\lambda^d(\gamma_1)] = +\infty$ si può escludere a priori. Per ogni fissato $t \in \mathbb{R}_+$ sia infatti definito, con β_t un BM in dimensione 1,

$$S_t = \sup_{s \leq t} \beta_t.$$

Si ha che γ_1 è contenuto nell'insieme $[-S_t, S_t]^d$ e si ha che per ogni $d \in \mathbb{N}$ e ogni $t \in \mathbb{R}_+$ fissato S_t^d è integrabile in Ω (si veda [1(Revuz-Yor)]), dunque anche $\lambda^d(\gamma_1)$.

Usando (19) e (20) abbiamo

$$\begin{aligned} 2^{\frac{d}{2}} E[\lambda^d(\gamma_1)] &= E[\lambda^d(\gamma_2)] = E[\lambda^d(\gamma_3)] + E[\lambda^d(\gamma_4)] - E[\lambda^d(\gamma_3 \cap \gamma_4)] = \\ &= 2E[\lambda^d(\gamma_1)] - E[\lambda^d(\gamma_3 \cap \gamma_4)]. \end{aligned}$$

Quindi

$$0 \leq E[\lambda^d(\gamma_1)] \left(2^{\frac{d}{2}} - 2\right) = -E[\lambda^d(\gamma_3 \cap \gamma_4)] \leq 0.$$

Cioè

$$E[\lambda^d(\gamma_1)] \left(2^{\frac{d}{2}} - 2\right) = 0, \tag{21}$$

$$E[\lambda^d(\gamma_3 \cap \gamma_4)] = 0. \tag{22}$$

Nel caso $d > 2$ (21) implica $E[\lambda^d(\gamma_1)] = 0$, e abbiamo finito.

Nel caso $d = 2$ (e anche per $d > 2$), da (22) si ha che

$$0 = E[\lambda^d(\gamma_3 \cap \gamma_4)] = E \left[\int_{\mathbb{R}^d} I_{(\gamma_3(\cdot) \cap \gamma_4(\cdot))}(z) dz \right] =$$

con il teorema di Fubini

$$= \int_{\mathbb{R}^d} E[I_{(\gamma_3(\cdot) \cap \gamma_4(\cdot))}(z)] dz = \int_{\mathbb{R}^d} E[I_{\gamma_3(\cdot)}(z) I_{\gamma_4(\cdot)}(z)] dz =$$

ma per ogni fissato $z \in \mathbb{R}^d$, queste due funzioni sono indipendenti come v.a. su Ω e quindi posso spezzare la speranza:

$$= \int_{\mathbb{R}^d} E[I_{\gamma_3(\cdot)}(z)] E[I_{\gamma_4(\cdot)}(z)] dz.$$

Grazie al lemma precedente e a (P132) si ha l'isonomia di $B_{1-t} - B_1$, $B_{1+t} - B_1$ e B_t , quindi per ogni fissato $z \in \mathbb{R}^2$

$$I_{\gamma_3(\cdot)}(z) \sim I_{\gamma_1(\cdot)}(z) \sim I_{\gamma_4(\cdot)}(z)$$

e allora

$$E[I_{\gamma_3(\cdot)}(z)] = E[I_{\gamma_1(\cdot)}(z)] = E[I_{\gamma_4(\cdot)}(z)].$$

Abbiamo ottenuto che

$$0 = E[\lambda^d(\gamma_3 \cap \gamma_4)] = \int_{\mathbb{R}^d} E[I_{\gamma_1(\cdot)}(z)]^2 dz,$$

dunque la v.a. $I_{\gamma_1(\cdot)}(z)$ è trascurabile, e allora $E[\lambda(\gamma_1)] = 0$ anche per $d = 2$.

La tesi è provata. ■

Come semplice corollario otteniamo un fatto cruciale:

Corollario 71 *In \mathbb{R}^d la misura di occupazione $\mu_{T,\omega}^d$ è singolare rispetto alla misura di Lebesgue.*

Dimostrazione. Grazie alla proposizione 70, per quasi ogni $\omega \in \Omega$ la traiettoria $B(\omega)$ è trascurabile secondo Lebesgue, ed essendo $\mu_{T,\omega}^d$ concentrata su tale insieme, essa è singolare rispetto alla misura di Lebesgue.

■

Osservazione 72 *Cerchiamo di capire euristicamente perché fallisce l'approccio della dimostrazione del teorema 13 con $d > 1$.*

Fissato $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ abbiamo che

$$\mu_{T,\omega}^d(\varphi) = u_\varphi(B_T) - u_\varphi(0) - \int_0^T \nabla u_\varphi(B_s) dB_s$$

dove $u_\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ è una soluzione dell'equazione di Poisson

$$\Delta u_\varphi(x) = 2\varphi(x).$$

Infatti per la formula di Itô (vettoriale) (T139),

$$du_\varphi(B_s) = \nabla u_\varphi(B_s) \cdot dB_s + \frac{1}{2} \Delta u_\varphi(B_s) ds$$

da cui segue, come prima, l'uguaglianza precedente integrando ed usando la definizione di $\mu_{T,\omega}^d(\varphi)$.

Bisognerebbe ora esprimere u_φ in funzione di φ :

$$u_\varphi(x) = \int_{\mathbb{R}^d} G(x, y)\varphi(y)dy$$

Otterremmo la candidata densità

$$f_T^d(\omega, y) := G(B_T(\omega), y) - G(B_0(\omega), y) - \left(\int_0^T \nabla_x G(B_s, y) dB_s \right) (\omega).$$

Il termine stocastico ha grossi problemi di integrabilità ed è per questo che l'approccio non funziona.

Infatti è noto che l'equazione di Poisson ha soluzione in dimensione $d > 2$:

$$\int_{\mathbb{R}^d} \frac{C_d}{\|x - y\|^{d-2}} \varphi(y) dy,$$

con C_d una costante reale che dipende dalla dimensione. (Si veda [7(Doob)])

Invece per $d = 2$ la soluzione è logaritmica:

$$\int_{\mathbb{R}^d} \log \left(\frac{C_2}{\|x - y\|} \right) \varphi(y) dy.$$

Quindi definendo $\tilde{G}(x - y) := G(x, y)$

$$\nabla_x G(x, y) = \nabla_x \tilde{G}(x - y) = C_d \frac{x - y}{\|x - y\|^d}.$$

Andiamo a studiare cosa succede a

$$I_T(y) := \int_0^T \nabla_x \tilde{G}(B_s - y) dB_s,$$

per semplicità limitandoci ad osservare

$$E \left[\int_{B(0, R)} |I_T(y)| dy \right] = \int_{B(0, R)} E[|I_T(y)|] dy.$$

Usando la disuguaglianza di Burkholder-Davis-Gundy (T142)

$$E[|I_T(y)|] \geq cE \left[\langle I \rangle_T^{\frac{1}{2}} \right] = cE \left[\left(\int_0^T |\nabla_x \tilde{G}(B_s - y)|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \right]$$

dove $c \in \mathbb{R}_+$.

Sostituendo $\nabla_x G$ otteniamo

$$E[|I_T(y)|] \geq cC_d^2 E \left[\left(\int_0^T \frac{1}{|B_s - y|^{2d-2}} ds \right)^{\frac{1}{2}} \right],$$

e questo è un integrale problematico.

Osserviamo semplicemente che

$$E[\langle I \rangle_t] = C_d^2 \int_0^T E \left[\frac{1}{|B_s - y|^{2d-2}} \right] ds = +\infty$$

sostituendo la densità gaussiana

$$C_d^2 \int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\exp\left(-\frac{|x|^2}{2s}\right)}{(2s\pi)^{\frac{1}{2}} |x - y|^{2d-2}} dx ds.$$

Risultati più precisi non sono ovvi, ma questa rapida analisi è indicazione della presenza di una grossa difficoltà, di una singolarità non integrabile.

Aggiungiamo altri due risultati che riguardano la ricorrenza del moto browniano in dimensione > 1 , interessanti di per sé.

Per la dimostrazione si veda [1(Revuz-Yor)].

Teorema 73 *Sia B un moto browniano bidimensionale.*

Allora per ogni aperto $U \subseteq \mathbb{R}^2$, l'insieme $\{t : B_t \in U\}$ è q.c. non limitato.

Più precisamente se A è un boreliano di misura di Lebesgue positiva, allora $\{t : B_t \in A\}$ è q.c. non limitato e ha misura di Lebesgue infinita.

Corollario 74 *Le traiettorie del moto browniano bidimensionale sono quasi certamente dense in \mathbb{R}^2 .*

Invece questo non avviene in dimensione più alta.

Teorema 75 *Sia B un moto browniano di dimensione $d \geq 3$.*

Allora $\lim_{t \rightarrow \infty} |B_t| = +\infty$ q.c.

2.1.1 Funzioni polari

Grazie alla proposizione 70 possiamo provare un'importante caratteristica delle traiettorie di un BM^d , ossia che per ogni punto $x \in \mathbb{R}^d$ fissato, quasi certamente il moto browniano non passerà mai in x .

Questa proprietà è generalizzata dalle definizioni di insieme e funzione polare: la sezione seguente è una digressione su tale concetto.

In generale è noto che, fissato un insieme boreliano A , il tempo di impatto $T_A = \inf\{t > 0 : X_t \in A\}$ è un tempo di arresto e quindi $\{T_A < \infty\}$ è misurabile.

Definizione 76 (Insiemi polari)

Per un processo di Markov con spazio degli stati $(E, \mathcal{B}(E))$, un insieme $A \in \mathcal{B}(E)$ si dice polare se

$$P_z[T_A < +\infty] = 0, \quad \forall z \in E.$$

Prima di dare la definizione di funzione polare, è necessario un breve lemma che ci assicurerà che questa è ben posta.

Lemma 77 *Sia B un BM^d uscente dall'origine e sia f una fissata funzione continua da \mathbb{R}_+ in \mathbb{R}^d .*

Allora $\Gamma_x^f = \{\exists t > 0 : B_t + x = f(t)\}$ è un evento di (Ω, \mathcal{A}) .

Dimostrazione. Si ha che

$$B : ([0, +\infty) \times \Omega) \longrightarrow \mathbb{R}^d \quad \text{è misurabile rispetto a } \mathcal{B}([0, +\infty)) \otimes \mathcal{A}.$$

Quindi anche $B_t(\omega) - f(t)$ è misurabile.

In particolare l'insieme $(B-f)^{-1}(-x)$ è misurabile, e dunque la sua proiezione su Ω è un evento.

Tale proiezione coincide con Γ_x^f e quindi la tesi è provata. ■

Definizione 78 (Funzioni polari)

Una funzione continua f da \mathbb{R}_+ in \mathbb{R}^d è detta polare per BM^d se $P(\Gamma_x^f) = 0 \forall x \in \mathbb{R}^d$.

Adesso cerchiamo di caratterizzare la classe delle funzioni polari, in modo da avere un criterio da applicare facilmente per riconoscerle.

Prima è necessario dimostrare un utile risultato:

Lemma 79 Consideriamo lo spazio probabilitizzato $(\mathbf{W}^d, \mathcal{W}^{\otimes d}, P^{\otimes d})$ con $\mathbf{W}^d = \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d)$, \mathcal{W} la tribù di Wiener, e P la misura di Wiener.

Per ogni fissato $x \in \mathbb{R}^d$, definiamo la traslazione τ_x su W_d con

$$\tau_x(w)(t) = x + w(t)$$

e chiamiamo P^x l'immagine di $P^{\otimes d}$ tramite τ_x .

Allora il processo canonico X è, secondo P^x una versione di BM^d uscente da x .

Inoltre P^x è concentrata sull'insieme $\{w : w(0) = x\}$ e quindi P^x e P^y sono misure estranee (mutualmente singolari) se $x \neq y$.

Tuttavia vale che per ogni $\varepsilon > 0$, P^x e P^y sono equivalenti sulla σ -algebra $\sigma(X_s, s \geq \varepsilon)$ secondo la relazione di assoluta continuità.

Dimostrazione. L'unico fatto non banale è l'equivalenza delle due misure: dobbiamo verificare che

$$\forall A \in \sigma(X_s, s \geq \varepsilon), \quad (P^x(A) > 0) \Leftrightarrow (P^y(A) > 0).$$

Sia $A \in \sigma(X_s, s \geq \varepsilon)$, allora A appartiene alla tribù generata da una sottofamiglia numerabile $(X_{t_n})_{n \geq 0}$ di $(X_s)_{s \geq \varepsilon}$. (si veda [4(Letta)])

Per ogni fissata $S = (s_n)_{n \geq 0}$ definiamo $A_n = \pi_n(A)$ la proiezione di A su $\sigma((X_{s_i})_{i \leq n})$.

Abbiamo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I_{A_n} = I_A, \quad \text{dominata dalla costante 1.}$$

Quindi senza perdere generalità trattiamo solo il caso

$$A \in \sigma(X_s = [X_{s_1}, \dots, X_{s_k}], s_j \geq \varepsilon \forall j) \text{ con } k \in \mathbb{N}.$$

Inoltre per semplicità supponiamo $s_1 = \varepsilon$.

Definiamo

$$\Delta X_s = [X_{s_1}, X_{s_2} - X_{s_1}, \dots, X_{s_k} - X_{s_{k-1}}],$$

allora $A = \{\Delta X_s \in B\}$ con $B \in \mathcal{B}(\mathcal{R}^k)$.

Dunque

$$P^x(A) = \int_{W^d} I_A dP^x = \int_{\mathbb{R}^k} I_B d(\Delta X_s(P^x)) =$$

Per la regolarità di \mathbb{R}^n , esiste un nucleo di misure Q tale che, con $x \in \mathbb{R}$ e $y \in \mathbb{R}^{k-1}$,

$$\begin{aligned} &= \int_{\mathbb{R}} (X_\varepsilon(P^x))(dx) \int_{\mathbb{R}^{k-1}} I_B Q(x, dy) = \\ &= \int_{\mathbb{R}} d\mathcal{N}(x, \varepsilon) \int_{\mathbb{R}^{k-1}} I_B Q(x, dy) \end{aligned}$$

Ma per l'indipendenza degli incrementi del moto browniano, Q è un nucleo costante, e quindi

$$\forall x \in \mathbb{R}, P^x(A) = \int_{\mathbb{R}} d\mathcal{N}(x, \varepsilon) \int_{\mathbb{R}^{k-1}} I_{\Delta X_s(A)} Q(dy).$$

Da ciò la tesi, essendo la densità gaussiana strettamente positiva su tutto \mathbb{R} .

■

Diamo un'utile criterio per riconoscere le funzioni polari.

Proposizione 80

1. La funzione continua f è polare se e solo se

$$P\{\exists t > 0 : B_t = f(t)\} = 0.$$

2. Se f non è polare, allora

$$E[\lambda^d(\{B_t + f(t), t \geq 0\})] > 0.$$

Dimostrazione. 1) Per ogni $x \in \mathbb{R}^d$,

$$P\{\exists t > 0 : B_t + x = f(t)\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} P\left\{\exists t > \frac{1}{n} : B_t + x = f(t)\right\}$$

e inoltre secondo la notazione del lemma 79

$$P\left\{\exists t > \frac{1}{n} : B_t + x = f(t)\right\} = P^x \left\{\exists t > \frac{1}{n} : B_t = f(t)\right\}.$$

Sempre per il lemma 79, per l'equivalenza secondo la relazione di assoluta continuità di P^x rispetto a $P = P^0$ sulle tribù generate dagli eventi posteriori ad un fissato istante ε piccolo a piacere, si ha la tesi.

2) Innanzitutto, dato che B_t è isonomo a $-B_t$, si ha che

$$f \text{ è polare} \Leftrightarrow -f \text{ è polare}.$$

Notiamo che $\Gamma_x := \Gamma_x^{(-f)} = \{\exists t > 0 : B_t + f(t) = x\}$ e che, per quanto visto al punto 1), grazie al lemma 79,

$$-f \text{ non polare} \Rightarrow (\forall x \in \mathbb{R}^d, P(\Gamma_x) > 0).$$

Quindi, verificando la misurabilità come visto nella proposizione 68,

$$\begin{aligned} E[\lambda^d(\{B_t + f(t), t \geq 0\})] &= \int_W P(d\omega) \int_{\mathbb{R}^d} I_{\{B_t(\omega)+f(t), t \geq 0\}}(\omega, x) dx = \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} dx \int_W I_{\{B_t(\omega)+f(t), t \geq 0\}}(\omega, x) P(d\omega) = \int_{\mathbb{R}^d} dx \int_{\Gamma_x} 1 P(d\omega) = \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} P(\Gamma_x) dx > 0. \end{aligned}$$

La tesi è provata. ■

Otteniamo facilmente un importante corollario.

Teorema 81 *Le indicatrici dei punti in \mathbb{R}^d sono funzioni polari (costanti nel tempo), ossia i punti di \mathbb{R}^d sono insiemi polari.*

Dimostrazione. Per la proposizione 70, abbiamo che per ogni fissato $x_0 \in \mathbb{R}^d$,

$$E[\lambda^d(\{B_t + x_0, t \geq 0\})] = E[\lambda^d(\{B_t, t \geq 0\})] = 0,$$

e dunque grazie alla proposizione 80 applicata alla funzione costante $f = x$, abbiamo la tesi. ■

Osservazione 82 Anche il teorema precedente implica facilmente la singolarità di $\mu_{T,\omega}^d$ rispetto λ^d .

Infatti q.c. il supporto della traiettoria $x + B_{[0,T]}(\omega)$ è trascurabile:

$$E \left[\int_{\mathbb{R}^d} 1_{x+B_{[0,T]}(\omega)}(y) dy \right] = \int_{\mathbb{R}^d} P(y - x \in B_{[0,T]}(\omega)) dy = 0.$$

Enunciamo infine un risultato che permette di individuare un'ampia classe di funzioni polari. Per la dimostrazione si veda [8(Le Gall)]

Teorema 83 (Le Gall (1988))

1. Sia $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^2)$. Supponiamo che per ogni $K > 0$ esista una costante $\delta > 0$ tale che $\forall s, t$ con $0 \leq s < t \leq K$ e $t - s < \delta$,

$$|f(t) - f(s)| \leq \left(2(t - s) \log \log \left(\frac{1}{t - s} \right) \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Allora f è polare.

2. Sia $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d)$. Supponiamo che per ogni $K > 0$,

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \sup_{0 \leq s < t \leq K, t-s < \delta} \frac{f(t) - f(s)}{(t - s)^{\frac{1}{d}}} = 0.$$

Allora f è polare.

Osservazione 84 È noto, però che in \mathbb{R}^2 , per ogni $\gamma < \frac{1}{2}$ esistono funzioni hölderiane di esponente γ che non siano polari. [9(Graversen)]

2.2 SDE in dimensione n: teorema di unicità per traiettorie tramite la misura di occupazione

Vediamo come la misura di occupazione permetta, anche senza poter utilizzare il concetto di tempo locale, di ottenere risultati di unicità per le soluzioni di SDE.

Questa sezione ripercorre rapidamente l'approccio di [12(Flandoli)].

Incominciamo con una interessante proprietà del moto browniano.

Esempio 85 (Proprietà di Feller forte) *Sia $(B_t)_{t \geq 0}$ un moto browniano d -dimensionale definito su uno spazio probabilizzato filtrato $(\Omega, \mathcal{F}_t, P)$.*

Sia $\varphi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione misurabile limitata.

Allora $u(t, x) = E[\varphi(x + B_t)]$ è differenziabile in x , in particolare è continua, infatti

$$\begin{aligned} u(x, t) &= (2\pi t)^{-d/2} \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x + z) \exp\left(-\frac{|z|^2}{2t}\right) dz = \\ &= (2\pi t)^{-d/2} \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(y) \exp\left(-\frac{|y - x|^2}{2t}\right) dy. \end{aligned}$$

Si dice che B_t ha la proprietà di Feller forte.

In questo caso si considera della misura immagine di P tramite la mappa

$$\omega \mapsto x + B_t(\omega).$$

Vediamo che si ottiene regolarità anche attraverso la mappa

$$t \mapsto x + B_t(\omega),$$

che definisce la misura di occupazione.

Vale il seguente risultato, una sorta di stima hölderiana per una funzione \mathcal{L}^∞ , ma composta con un moto browniano e in media.

Per approfondimenti relativi a tutte le dimostrazioni seguenti si veda [12(Flandoli)].

Teorema 86 (Davie (2007)) Sia $\varphi \in \mathcal{L}^\infty([0, T] \times \mathbb{R}^d)$.

Allora, per ogni $p \geq 2$ e $T > 0$

$$\begin{aligned} & E [|\mu_{T,x+B}(\varphi) - \mu_{T,y+B}(\varphi)|^p] = \\ & = E \left[\left| \int_0^T (\varphi(t, x + B_t) - \varphi(t, y + B_t)) dt \right|^p \right] \leq (CTp)^{p/2} \|\varphi\|_\infty |x - y|^p, \end{aligned}$$

per ogni $x, y \in \mathbb{R}^d$.

E grazie al lemma di hölderianità di Kolmogorov (T3):

Corollario 87 Sia $\varphi \in \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}^d)$, sia $T > 0$.

Allora la famiglia di v.a.

$$x \mapsto \mu_{T,x+B(\omega)}(\varphi) = \int_0^T \varphi(x + B_t(\omega)) dt$$

ha una modificazione α -hölderiana per ogni $\alpha < 1$.

Questo risultato permette di ottenere teoremi di unicità anche in dimensione d .

Grazie al teorema precedente infatti riconduciamo la differenza tra due soluzioni alla differenza fra i punti iniziali.

Diamo una definizione ulteriore per alleggerire la notazione:

Definizione 88 (Misura di occupazione aumentata) Si dice misura di occupazione aumentata relativa alla curva γ fino al tempo T , la misura di Borel finita $\tilde{\mu}_{T,\gamma}$ su $[0, +\infty) \times \mathbb{R}^d$ definita con

$$\tilde{\mu}_{T,\gamma}(\varphi) = \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^d} \varphi d\tilde{\mu}_{T,\gamma} = \int_0^T \varphi(s, \gamma_s) ds,$$

per ogni $\varphi \in \mathcal{C}_b([0, +\infty) \times \mathbb{R}^d)$.

Con la misura di occupazione aumentata le stime del teorema di Davie si possono generalizzare al caso che φ , hölderiana su \mathbb{R}^d , dipenda anche dal tempo in modo continuo.

Finalmente enunciamo i risultati di unicità, nei quali si usano le stime precedenti grazie al fatto cruciale che $\int_0^t b(s, X_s) ds = \tilde{\mu}_{t,X}(b)$.

Teorema 89 Per ogni $r \geq 2$, $\alpha \in (0, 1)$, data $\varphi \in \mathcal{C}([0, T]; \mathcal{C}_b^\alpha(\mathbb{R}^d))$, ci sono costanti $C_{r,T,\alpha}$ e $C_{r,T,\alpha}^0$ dipendenti da φ tali che si hanno le seguenti proprietà:

- Siano $X^{(i)}$, $i = 1, 2$, due soluzioni della SDE

$$X_t = x + \int_0^t b(s, X_s) ds + B_t$$

con $b \in \mathcal{C}([0, T]; \mathcal{C}_b^\alpha(\mathbb{R}^d))$.

Siano tali soluzioni definite sullo stesso spazio filtrato $(\Omega, \mathcal{F}_t, P)$, e con le condizioni iniziali $x^{(i)}$ tali che

$$E[|x^{(i)}|^r] < +\infty.$$

Allora abbiamo

$$\begin{aligned} & E \left[\sup_{0 \leq t \leq T} |\tilde{\mu}_{t,X^{(1)}}(\varphi) - \tilde{\mu}_{t,X^{(2)}}(\varphi)|^r \right] \leq \\ & \leq C_{r,T,\alpha} E \left[|x^{(1)} - x^{(2)}|^r \right] + C_{r,T,\alpha} E \left[\sup_{0 \leq t \leq T} |X_t^{(1)} - X_t^{(2)}|^r \right] + \\ & + C_{r,T,\alpha} E \left[\int_0^T |X_t^{(1)} - X_t^{(2)}|^r ds \right]; \end{aligned}$$

- $\lim_{t \rightarrow 0} C_{r,T,\alpha}^0 = 0$.

E dunque:

Corollario 90 La SDE

$$X_t = x + \int_0^t b(s, X_s) ds + B_t$$

ha unicità per traiettorie se $b \in \mathcal{C}([0, T]; \mathcal{C}_b^\alpha(\mathbb{R}^d))$.

In particolare, se X^x denota la soluzione con condizione iniziale x allora

$$E \left[\sup_{0 \leq t \leq T} |\tilde{\mu}_{t,X^x}(\varphi) - \tilde{\mu}_{t,X^y}(\varphi)|^r \right] \leq C_r |x - y|^r,$$

$$E \left[\sup_{0 \leq t \leq T} |X_t^x - X_t^y|^r \right] \leq C_r |x - y|^r.$$

Segue che i due processi

$$(t, x) \mapsto \tilde{\mu}_{t, X^x}(\varphi), \quad (t, x) \mapsto X_t^x$$

hanno modificazioni continue, α -hölderiane per ogni $\alpha < 1$.

3 Moto browniano in dimensione n: il tempo locale n-1 dimensionale

3.1 Definizioni preliminari

Diamo alcune definizioni adatte a casi particolari, che ci permettono di arrivare alla costruzione generale in dimensione N di un nuovo concetto, sostitutivo al tempo locale.

3.1.1 Tempo locale rispetto a iperpiani affini

Incominciamo con la naturale definizione di tempo locale relativo a una retta in \mathbb{R}^2 .

Fissata la retta affine r , la vedo come funzione

$$\begin{aligned} r : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto t\hat{r} + a\hat{r}^\perp, \end{aligned}$$

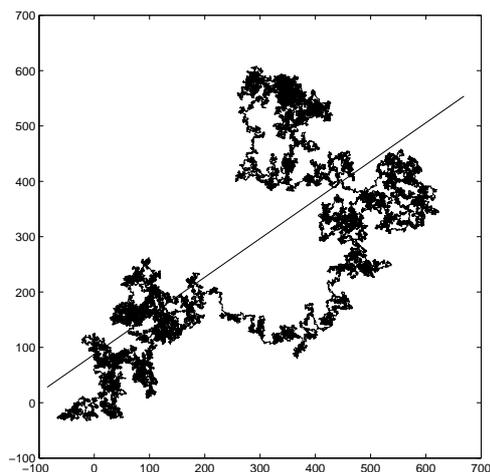
dove $a \in \mathbb{R}$, \hat{r} è il versore della retta e \hat{r}^\perp il suo ortogonale.

Allora sia $B = (B_1, B_2)$ un moto browniano bidimensionale, e considero

$$B^\perp := B - B \cdot \hat{r} = B \cdot \hat{r}^\perp,$$

che è un moto browniano unidimensionale.

Esempio:

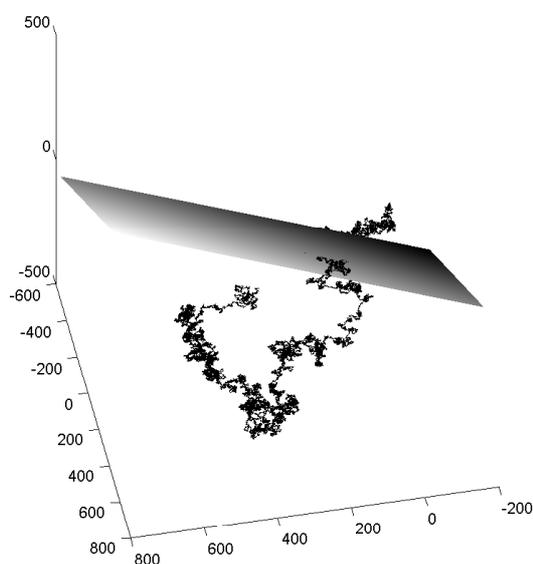


Definizione 91 Definisco allora il tempo locale rispetto ad r

$$L_t^r(B) := L_t^a(B^\perp).$$

In generale fissato un iperpiano affine W in \mathbb{R}^N e un moto browniano N -dimensionale B , si può fare lo stesso: si prende τ uno dei due versori ortonormali all'iperpiano, e si considera il tempo locale $L_t^a(\tau \cdot B)$, con a tale che $a\tau \in W$.

Esempio:



Osservazione 92 Il tempo locale ottenuto è costante lungo le direzioni parallele all'iperpiano, mentre è continuo lungo la direzione τ , essendo B una martingala locale continua.

Inoltre, siccome rispetto alla martingala locale continua B^\perp il tempo locale simmetrico (O27) coincide con quello canonico, per simmetria la scelta del versore normale non influisce sulla definizione.

Invece nel caso di semimartingale continue questo non avviene in generale e la scelta del verso di τ è importante, come vediamo subito.

Se al posto di B consideriamo un semimartingala continua X , la definizione si complica leggermente.

Infatti a seconda che si scelga di usare $L_t^a(X^\perp)$ oppure $L_{a,t}^{simm}(X^\perp)$ il tempo locale simmetrico (O27), avremo più tempi locali diversi.

- Nel primo caso, scelto uno dei due semispazi individuati da W , costruiamo il tempo locale rispetto alla normale esterna τ , e otteniamo un processo continuo a destra rispetto alla componente lungo τ , ma non simmetrico rispetto alla scelta di τ .
- Nel secondo caso otteniamo invece un processo che non dipende dalla scelta del versore ortonormale τ , ma che non è in generale continuo né a destra né a sinistra lungo tale direzione.

Nel seguito per semplicità tratteremo solo il secondo caso, ma i risultati sono analoghi nel primo.

Vogliamo definire il concetto di tempo locale per una semimartingala N -dimensionale continua X rispetto a una sottovarietà $N-1$ dimensionale orientata Γ di \mathbb{R}^N .

Cerchiamo di sfruttare una carta F “raddrizzante” da R^N in se stesso, visto come varietà, che renda Γ un iperpiano, e poi di usare le definizioni precedenti.

Grazie alla formula di Itô vettoriale (T139) si ha

$$dF_i(X_s) = \sum_j \frac{\partial F_i(X_s)}{\partial x_j} dX_s^j + \frac{1}{2} \sum_{j,k} \frac{\partial^2 F_i(X_s)}{\partial x_j \partial x_k} d\langle X^j, X^k \rangle_s,$$

e quindi, se ben definita, $F(X)$ è una semimartingala continua.

Questa idea presenta inizialmente molti problemi:

- Il primo problema è che anche nel caso che X sia una martingala locale, come B , in generale componendo con la carta F otterremo solo una semimartingala continua.
- Un secondo problema, di natura anche formale, è che la carta sarà definita solo in un intorno della varietà, quindi $F(B)$ non sarà in generale ben definita.
- Inoltre l’immagine “raddrizzata” non sarà in generale un iperpiano, ma solo un sottinsieme aperto. Nel caso unidimensionale si ottiene un segmento, e non tutta una retta.

- Infine sorge anche il problema della scelta della carta: infatti il risultato cambia se la carta “dilata” nella direzione perpendicolare lungo la quale vogliamo calcolare il tempo locale unidimensionale.

Vedremo che il modo migliore di definire il tempo locale passa attraverso il concetto di distanza dalla varietà, senza passare attraverso le carte.

Ciò nonostante prima esploriamo l’approccio in carta perché fornisce un utile punto di partenza.

Vediamo innanzitutto che non tutte le carte fanno ottenere lo stesso tempo locale: dobbiamo “conservare” la distanza dalla curva.

Esempio 93 *Sia*

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto 2x. \end{aligned}$$

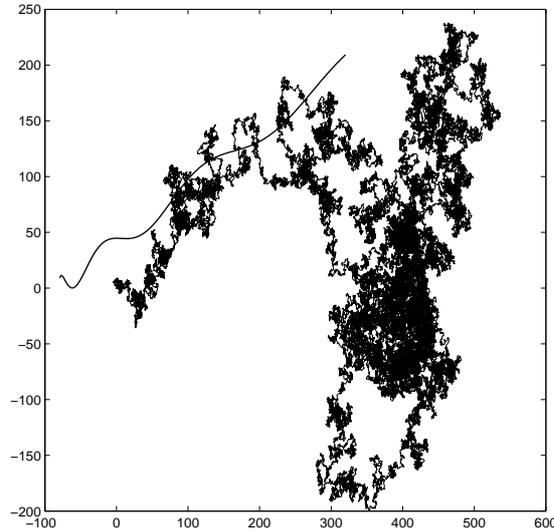
Allora anche nel caso del tempo locale classico di un BM rispetto a 0, abbiamo (D26)

$$\begin{aligned} L_t^0(F(B)) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t 1_{[0,\varepsilon)}(F(B_s)) ds = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t 1_{[0,\varepsilon/2)}(B_s) ds = \\ &= \frac{1}{2} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon/2} \int_0^t 1_{[0,\varepsilon/2)}(B_s) ds = \frac{1}{2} L_t^0(B). \end{aligned}$$

Possiamo avvalerci del concetto di intorno tubolare per superare questo problema.

3.1.2 Caso di varietà unidimensionali

Esempio:



Definizione 94 Sia Γ una sottovarietà di classe \mathcal{C}^1 unidimensionale connessa.

È noto che Γ è omeomorfa a \mathbb{R} o a S^1 : nel primo caso esiste una parametrizzazione globale, nel secondo periodica.

Per i già citati problemi di definizione ci restringeremo per ora al primo caso, considerando in particolare una curva regolare iniettiva e illimitata, così da ottenere una retta come immagine rispetto alla lunghezza d'arco.

Definizione 95 Sia $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ una parametrizzazione globale rispetto alla lunghezza d'arco.

Sia

$$\hat{t}(s) := \dot{\gamma}(s), \quad s \in \mathbb{R}$$

il versore tangente, e sia $\hat{n}(s)$ il versore normale orientato.

La coppia $(\hat{t}(s), \hat{n}(s))$ si dice riferimento locale di Frénet di Γ nel punto $\gamma(s) := p$, e vale che

$$\dot{\hat{t}}(s) = \hat{n}(s), \quad \dot{\hat{n}}(s) = -\kappa \hat{t}(s),$$

con κ la curvatura con segno di Γ nel punto p . (vedi [10(Abate-Tovena)])

Osservazione 96 Possiamo banalmente estenderci al caso che ci siano un numero finito di componenti connesse: basterà costruire il tempo locale rispetto ad ognuna di esse e poi sommare.

Definizione 97 (Intorno tubolare) Fissata la parametrizzazione γ , $\varepsilon > 0$ e $p = \gamma(s)$, indichiamo con $I_\gamma(p, \varepsilon)$ il segmento

$$\gamma(s) + (-\varepsilon, \varepsilon)\hat{n}(s)$$

di lunghezza 2ε centrato in p e ortogonale a $\hat{t}(s)$.

Indichiamo con $D_\gamma(\varepsilon)$ l'unione dei segmenti $I_\gamma(p, \varepsilon)$ al variare di $p \in \Gamma$. L'insieme $D_\gamma(\varepsilon)$ si chiama intorno tubolare di Γ se ε è tale che

$$I_\gamma(p_1, \varepsilon) \cap I_\gamma(p_2, \varepsilon) = \emptyset, \quad \forall p_1 \neq p_2 \in \Gamma.$$

Abbiamo che sui compatti, se fosse $\gamma \in \mathcal{C}^2[a, b]$, ne esisterebbero sempre intorni tubolari (T153). (vedi [10(Abate-Tovena)])

Supponiamo che esista un intorno tubolare anche nel nostro caso illimitato.

Una parametrizzazione di $D_\gamma(\varepsilon)$ è data da

$$\begin{aligned} G : (a, b) \times (-\varepsilon, \varepsilon) &\longrightarrow D_\gamma(\varepsilon) \subseteq \mathbb{R}^2 \\ (u, v) &\longmapsto v\hat{n}(u) + \gamma(u). \end{aligned}$$

In generale supponiamo per ipotesi che esista $D_\gamma(\varepsilon)$ intorno tubolare di Γ così parametrizzato.

Chiameremo G la parametrizzazione canonica di $D_\gamma(\varepsilon)$.

Osservazione 98 Se $D_\gamma(\varepsilon)$ è un intorno tubolare di una curva di classe \mathcal{C}^2 e $q_0 \in D_\gamma(\varepsilon)$, allora il punto $p_0 = \gamma(s_0)$ di Γ più vicino a q_0 è l'unico punto $p \in \Gamma$ per cui $q_0 \in I_\gamma(p, \varepsilon)$.

Infatti, se la funzione $s \mapsto \|q_0 - \gamma(s)\|^2$ ha un minimo in s_0 , derivando troviamo

$$(q_0 - \gamma(s_0)) \cdot \dot{\gamma}(s_0) = 0,$$

e quindi $q_0 \in I_\gamma(p_0, \varepsilon)$.

In particolare la nostra definizione di $D_\gamma(\varepsilon)$ coincide con quella data in [11(Sato-Tanaka)], rispetto alla distanza euclidea.

Supponiamo anche che esista un diffeomorfismo \tilde{G} di \mathbb{R}^2 in se stesso, che sia la parametrizzazione canonica G di $D_\gamma(\varepsilon)$ estesa arbitrariamente fuori dall'intorno tubolare.

Vedremo successivamente che questa ipotesi non è indispensabile.

Finalmente, fissato B un BM^2 , andiamo a costruire il tempo locale $L_\gamma^t(B)$ rispetto alla sottovarietà Γ .

Definiamo la carta raddrizzante

$$F := \tilde{G}^{-1}.$$

Allora, ricordando la formula di Lévy (D26) e il teorema di Lebesgue (T148), definiamo

$$L_\gamma^t(B) := \lim_\varepsilon \frac{1}{2\varepsilon} \int_0^t 1_{D_\gamma(\varepsilon)}(B_s) ds =$$

dato che F è iniettiva ed è definita su tutto \mathbb{R}^2 , possiamo scrivere

$$= \lim_\varepsilon \frac{1}{2\varepsilon} \int_0^t 1_{F(D_\gamma(\varepsilon))}(F(B_s)) ds =$$

utilizzando la definizione di tempo locale per gli iperpiani

$$= \lim_\varepsilon \frac{1}{2\varepsilon} \int_0^t 1_{(-\varepsilon, \varepsilon)}(F_2(B_s)) ds.$$

Vogliamo provare che questo limite esista q.c. e per questo consideriamo la formula di Lévy (D26) per il tempo locale simmetrico di $F_2(B)$

$$L_{0,t}^{sim}(F_2(B)) = \lim_\varepsilon \frac{1}{2\varepsilon} \int_0^t 1_{(-\varepsilon, \varepsilon)}(F_2(B_s)) d\langle F_2(B) \rangle_s.$$

Usando la formula di Itô (T139), fissando le coordinate (x_1, x_2) su \mathbb{R}^2 abbiamo

$$d\langle F_2(B) \rangle_s = \left(\left| \frac{\partial F_2(B_s)}{\partial x_1} \right|^2 + \left| \frac{\partial F_2(B_s)}{\partial x_2} \right|^2 \right) ds = \|\nabla F_2(B_s)\|^2 ds.$$

Siano $\hat{n}(u) = (n_1(u), n_2(u))$ e scriviamo

$$F^{-1}(u, v) = G(u, v) = \begin{pmatrix} v \cdot n_1(u) + \gamma_1(u) \\ v \cdot n_2(u) + \gamma_2(u) \end{pmatrix}.$$

Dunque

$$dF^{-1}(u, v) = dG(u, v) = \begin{pmatrix} v \cdot n'_1(u) + \gamma'_1(u) & n_1(u) \\ v \cdot n'_2(u) + \gamma'_2(u) & n_2(u) \end{pmatrix},$$

e sostituendo le formule di Frenét (D95)

$$\begin{aligned} &= \begin{pmatrix} -\kappa v \cdot t_1(u) + t_1(u) & n_1(u) \\ -\kappa v \cdot t_2(u) + t_2(u) & n_2(u) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} (1 - \kappa v) \cdot t_1(u) & n_1(u) \\ (1 - \kappa v) \cdot t_2(u) & n_2(u) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Invertendo la matrice otteniamo, omettendo la dipendenza da (x_1, x_2)

$$dF = \frac{1}{(\kappa v) \cdot (n_2 \cdot t_1 - n_1 \cdot t_2)} \begin{pmatrix} n_2 & -n_1 \\ -(1 - \kappa v) \cdot t_2 & (1 - \kappa v) \cdot t_1 \end{pmatrix}.$$

Poi osserviamo che definendo

$$\hat{t} \wedge \hat{n} := \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

abbiamo che

$$n_2 \cdot t_1 - n_1 \cdot t_2 = (\hat{t} \wedge \hat{n})_3 = \pm 1$$

a seconda dal verso di \hat{n} .

Quindi

$$\nabla F_2 = \frac{1}{\pm(1 - \kappa v)} \begin{pmatrix} -t_2(1 - \kappa v) \\ t_1(1 - \kappa v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mp t_2 \\ \pm t_1 \end{pmatrix},$$

e allora $\|\nabla F_2\| = 1$ e $\|\nabla F_2\|^2 ds = ds$.

Riprendendo la definizione

$$\begin{aligned} L_\gamma^t(B) &:= \lim_\varepsilon \frac{1}{2\varepsilon} \int_0^t 1_{(-\varepsilon, \varepsilon)}(F_2(B_s)) ds = \\ &= \lim_\varepsilon \frac{1}{2\varepsilon} \int_0^t 1_{(-\varepsilon, \varepsilon)}(F_2(B_s)) d\langle F_2(B) \rangle_s = L_{0,t}^{sim} (F_2(B)), \end{aligned}$$

e dunque il limite esiste q.c.

Osservazione 99 *Si vede facilmente (O98) che, a meno del segno, $F_2(q)$ è la distanza del punto q dalla curva.*

Dunque ci interessava calcolare il gradiente della distanza di q da Γ al variare del punto q .

Scegliamo (x_1, x_2) rispetto alla base di Frenét $(\hat{t}(p), \hat{n}(p))$ con p il punto di Γ più vicino a q (D95).

Spostando q lungo $\hat{n}(p)$ otteniamo la derivata parziale $\frac{\partial F_2}{\partial x_2} = \pm 1$ a seconda della posizione di q rispetto alla curva e al verso di $\hat{n}(p)$.

Invece spostare q lungo $\hat{t}(p)$ fa variare a priori in modo meno banale F_2 , anche in dipendenza della curvatura di Γ .

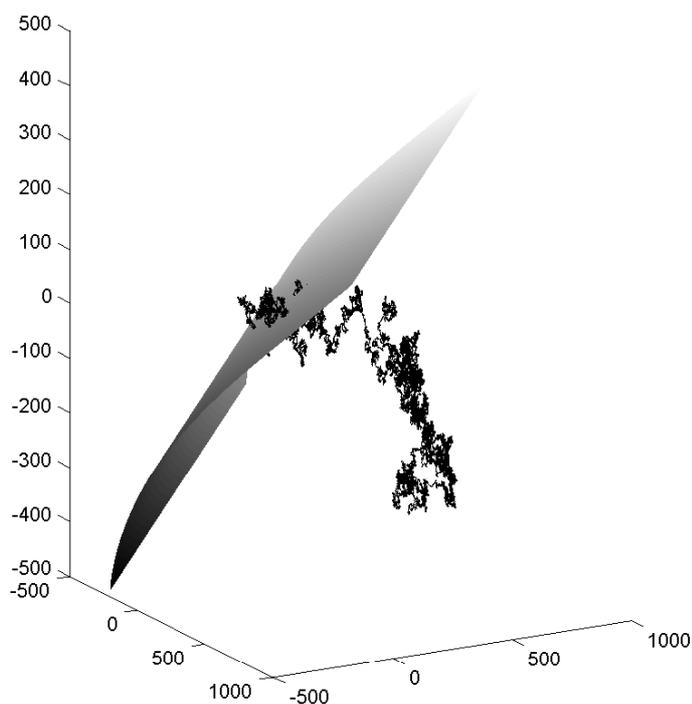
Nonostante questo $\frac{\partial F_2(q)}{\partial x_1} = 0$, dato che abbiamo visto che $\|\nabla F_2(q)\| = 1$. Cerchiamo di dare una spiegazione euristica di questo risultato abbastanza inaspettato.

Il punto p verifica il minimo della distanza d_q da q come funzione vincolata alla curva γ e quindi la derivata lungo la direzione tangente al vincolo $\nabla d_q \cdot \hat{t}(p)$ è nulla.

Ora noi non stiamo variando p , ma invece variamo q lungo tale direzione, però al primo ordine il risultato non cambia.

3.1.3 Caso di varietà $N - 1$ dimensionali

Esempio:



Esaminiamo il caso in \mathbb{R}^N e definiamo la generalizzazione dell'intorno tubolare.

Definizione 100 Sia Γ una sottovarietà orientabile di classe \mathcal{C}^1 , di dimensione $N - 1$ e connessa.

Dato $\varepsilon > 0$ e $p \in \Gamma$, indichiamo con $I_\Gamma(p, \varepsilon)$ il segmento

$$p + (-\varepsilon, \varepsilon)N(p)$$

di lunghezza 2ε centrato in p e ortogonale a $T_p\Gamma$, dove N è la mappa di Gauss associata a Γ (vedi [10(Abate-Tovena)]).

Indicheremo con $D_\Gamma(\varepsilon)$ l'unione dei segmenti $I_\Gamma(p, \varepsilon)$ al variare di $p \in \gamma$.

L'insieme $D_\Gamma(\varepsilon)$ si chiama intorno tubolare di Γ se ε è tale che

$$I_\Gamma(p_1, \varepsilon) \cap I_\Gamma(p_2, \varepsilon) = \emptyset, \quad \forall p_1 \neq p_2 \in \Gamma.$$

Osservazione 101 *Come nel caso unidimensionale la definizione si estende facilmente a varietà non connesse, ma formate da un numero finito di componenti connesse ognuna a parametrizzazione globale.*

Supponiamo come prima che esista una parametrizzazione globale della varietà, definita su tutto \mathbb{R}^{N-1}

$$\varphi : \mathbb{R}^{N-1} \longrightarrow \Gamma.$$

Vedremo successivamente che questa richiesta non è affatto necessaria in generale.

Osservazione 102 *Se Γ è di classe \mathcal{C}^2 , limitata e $\bar{\Gamma}$ è una varietà (compatta) eventualmente con bordo, grazie ai risultati in [10(Abate-Tovena)] si può costruire un intorno tubolare. (T154)*

Supponiamo per ipotesi che esista un intorno tubolare di Γ così parametrizzato

$$G(u_1, \dots, u_{N-1}, v) = \varphi(\underline{u}) + vN(\varphi(\underline{u})).$$

Infine supponiamo che esista un diffeomorfismo \tilde{G} di \mathbb{R}^N in se stesso, che sia la parametrizzazione globale G di $D_\Gamma(\varepsilon)$ estesa arbitrariamente fuori dall'intorno tubolare.

Vedremo nella prossima sezione che anche quest'ultima ipotesi non è indispensabile.

Fissato B un moto browniano N -dimensionale, andiamo a costruire il tempo locale $L_\Gamma^t(B)$ rispetto alla sottovarietà Γ .

Definiamo la carta raddrizzante

$$F := \tilde{G}^{-1}.$$

Allora definiamo come nel caso unidimensionale

$$L_\Gamma^t(B) := \lim_{\varepsilon} \frac{1}{2\varepsilon} \int_0^t 1_{D_\Gamma(\varepsilon)}(B_s) ds =$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{\varepsilon} \frac{1}{2\varepsilon} \int_0^t 1_{F(D_\Gamma(\varepsilon))}(F(B_s)) ds = \\
&= \lim_{\varepsilon} \frac{1}{2\varepsilon} \int_0^t 1_{(-\varepsilon, \varepsilon)}(F_N(B_s)) ds.
\end{aligned}$$

Innanzitutto $\forall q \in D_\Gamma(\varepsilon)$, $F_N(q)$ non dipende dalla scelta di φ : infatti esattamente come visto prima (O98), coincide a meno del segno con la distanza di q da Γ .

Di nuovo consideriamo la formula di Lévy (D26) per il tempo locale simmetrico di $F_N(B)$

$$L_{0,t}^{simm}(F_2(B)) = \lim_{\varepsilon} \frac{1}{2\varepsilon} \int_0^t 1_{(-\varepsilon, \varepsilon)}(F_N(B_s)) d\langle F_N(B) \rangle_s.$$

Analogamente a sopra, usando la formula di Itô (T139) abbiamo

$$d\langle F_N(B) \rangle_s = \|\nabla F_N(B_s)\|^2 ds.$$

Vogliamo provare che $\|\nabla F_N(B_s)\| = 1$.

In tal caso infatti possiamo concludere ancora

$$L_\Gamma^t(B) = L_{0,t}^{simm}(F_N(B)),$$

e che dunque il limite esiste q.c.

Fissato $q \in \mathbb{R}^N$, sia p il punto di Γ più vicino a q .

Innanzitutto mettiamoci nella base ottenuta completando $N(p)$ ad una base ortonormale $(N(p), v_1, \dots, v_{N-1})$ di \mathbb{R}^N .

Abbiamo che $\nabla F_N \cdot N(p) = 1$ siccome almeno localmente esso coincide con la distanza di q da Γ , che si realizza proprio lungo $N(p)$.

Fissata invece una qualsiasi direzione v in $T_p\Gamma$, definiamo il piano affine $W := \text{Span}(N(p), v) + p$.

Sia inoltre $\tilde{\Gamma}_v := W \cap \Gamma$ e Γ_v la sua componente connessa contenente p e dunque anche q .

Si ha allora (vedi [10(Abate-Tovena)] sulla trasversalità) che Γ_v è una sottovarietà unidimensionale di W e possiamo calcolare $\nabla F_N \cdot v$ come derivata

parziale di F_N ristretta a W , che coincide ancora ovviamente con la distanza di q da Γ_v .

In questo modo ci siamo ricondotti al problema unidimensionale esaminato in precedenza e quindi $\nabla F_N(q) \cdot v = 0$.

In particolare questo vale per $v = v_i$, $i = 1, \dots, N - 1$ e dunque

$$\|\nabla F_N(q)\|^2 = \sum_i |\nabla F_N(q) \cdot v_i|^2 + |\nabla F_N(q) \cdot N(p)|^2 = 1.$$

La tesi è provata.

3.2 Definizione di tempo locale rispetto a varietà $N - 1$ dimensionali

Generalizziamo le costruzioni preliminari già viste, usando solo la distanza piuttosto che le carte locali.

Sia $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^N$ una sottovarietà $N - 1$ dimensionale orientata, chiusa e senza bordo.

In particolare possiamo considerare le varietà di livello relative a valori regolari di funzioni reali definite su \mathbb{R}^N , come faremo nella prossima sezione.

Sia $D_\Gamma(\varepsilon)$ l'insieme dei punti che distano meno di ε da Γ .
(come in [11(Sato-Tanaka)])

Abbiamo visto che negli intorni tubolari la funzione $dist(\cdot, \Gamma)$ coincide localmente, a meno del segno, con l' N -esima componente di una carta locale "raddrizzante", che è una funzione di classe \mathcal{C}^2 vicino alla varietà (O98).

Supponiamo che esista un ε tale che $d(\cdot, \Gamma)$ sia \mathcal{C}^2 su $D_\Gamma(\varepsilon)$, e che esso sia un intorno tubolare (D100).

Questa richiesta nel caso di varietà compatte è verificata sempre, grazie ai risultati di esistenza degli intorni tubolari globali (T154).

Osservazione 103 *L'ipotesi di chiusura non è indispensabile, se comunque vale la condizione precedente.*

Nella maggior parte dei casi però le varietà non chiuse non la verificano.

Su $D_\Gamma(\varepsilon)$ definiamo $d(\cdot, \Gamma)$ come la distanza $dist(\cdot, \Gamma)$ con il segno associato all'orientazione fissata.

Usando funzioni di taglio possiamo estendere globalmente $d(\cdot, \Gamma)$ a \mathbb{R}^N con una funzione $\tilde{d}(\cdot)$ di classe \mathcal{C}^2 imponendo le immagini dei punti fuori da $D_\Gamma(\varepsilon)$ a valori di modulo maggiore di ε .

Il processo $d(B_s, \Gamma)$ coincide vicino alla varietà con $\tilde{d}(B_s)$, che è una semimartingala continua. Inoltre le immagini dei punti lontani da Γ sono lontane da 0.

Così nelle prossime formule possiamo sostituire ovunque $\tilde{d}(\cdot)$ a $d(\cdot, \Gamma)$ e utilizzare tutti i risultati validi per le semimartingale continue.

Definiamo

$$\begin{aligned} L_\Gamma^t(B) &:= \lim_\varepsilon \frac{1}{2\varepsilon} \int_0^t 1_{D_\Gamma(\varepsilon)}(B_s) ds = \\ &= \lim_\varepsilon \frac{1}{2\varepsilon} \int_0^t 1_{(-\varepsilon, \varepsilon)}(d(B_s, \Gamma)) ds. \end{aligned} \quad (23)$$

Usando di nuovo il fatto (O98) che $d(B_s, \Gamma)$ coincide localmente con $F_N(B_s)$ per qualche carta locale, abbiamo che

$$d\langle d(B_s, \Gamma) \rangle_s = \|\nabla F_N(B_s)\|^2 ds = ds$$

per quanto visto nella sezione precedente.

Allora

$$\begin{aligned} L_\Gamma^t(B) &= \lim_\varepsilon \frac{1}{2\varepsilon} \int_0^t 1_{(-\varepsilon, \varepsilon)}(d(B_s, \Gamma)) d\langle d(B_s, \Gamma) \rangle_s = \\ &= L_{0,t}^{simm}(d(B, \Gamma)) \end{aligned}$$

e la dimostrazione è completa.

Riassumendo in una frase, il tempo locale rispetto alla varietà è il tempo locale della distanza del moto browniano dalla varietà rispetto al punto 0.

Osservazione 104 *Dal punto di vista del processo, la costruzione si estende invariata ad ogni semimartingala continua N -dimensionale X che abbia componenti di uguale variazione quadratica e tale che componenti diverse abbiano covarianza quadratica nulla.*

Basta sostituire ds con $d\langle X_1 \rangle_s$ nella formula (23) che definisce il tempo locale.

Osservazione 105 *In generale, da (P147) vale che l'immagine di una semimartingala continua tramite una funzione F convessa è ancora una semimartingala continua.*

In particolare, nel caso che $dist(\cdot, \Gamma)$ sia convessa, in questa costruzione si potrebbe considerare direttamente tale distanza e il tempo locale classico invece di quello simmetrico (O27).

Infatti,

$$L_\Gamma^t(B) = \lim_\varepsilon \frac{1}{2\varepsilon} \int_0^t 1_{[0, \varepsilon)}(dist(B_s, \Gamma)) ds =$$

$$= \lim_{\varepsilon} \frac{1}{2\varepsilon} \int_0^t 1_{[0,\varepsilon)}(dist(B_s, \Gamma)) d\langle dist(B_s, \Gamma) \rangle_s.$$

Inoltre sempre grazie a (P147), con un leggero abuso di notazione nella sommatoria,

$$\begin{aligned} & d\langle dist(B, \Gamma) \rangle_s = \\ &= \sum_i \left(\left(\frac{\partial dist(B, \Gamma)}{\partial x_i} \right)^- \right)^2 (B_0^{(1)}, \dots, B_0^{(i-1)}, B_s^{(i)}, B_t^{(i+1)}, \dots, B_t^{(d)}) d\langle B^{(i)} \rangle_s = \\ &= 1 + R(\varepsilon), \end{aligned}$$

dove $R(\cdot)$ è un residuo che tende a zero per ε tendente a zero.

Quindi

$$L_\Gamma^t(B) = L_t^0(dist(B, \Gamma)).$$

Grazie al teorema 157, si ha che $dist(\cdot, \Gamma)$ è convessa se e solo se Γ è convessa: una richiesta molto forte.

Osservazione 106 Un'altra possibilità potrebbe essere di utilizzare $dist^2(\cdot, \Gamma)$ al posto di $dist(\cdot, \Gamma)$ o $d(\cdot, \Gamma)$.

In questo caso però vediamo che non si ottengono buoni risultati.

Infatti abbiamo

$$\begin{aligned} & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t 1_{[0,\varepsilon)}(dist^2(B_s, \Gamma)) ds = \\ & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t 1_{[0,\varepsilon^{\frac{1}{2}})}(dist(B_s, \Gamma)) ds = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \frac{1}{\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \int_0^t 1_{[-\varepsilon^{\frac{1}{2}}, \varepsilon^{\frac{1}{2}})}(d(B_s, \Gamma)) ds = +\infty, \end{aligned}$$

grazie all'esistenza del limite fatto in modo classico (23).

3.3 Il tempo locale rispetto ad insiemi più generali

Nel paragrafo precedente abbiamo escluso le varietà non chiuse o con bordo, in particolare i segmenti aperti o chiusi.

Vediamo quali sono i problemi che sorgono se Γ è il segmento

$$I = (0, 1) \times \{0\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

e cerchiamo di applicare la costruzione vista per coprire almeno gli insiemi di questo tipo.

Innanzitutto gli intorni $D_I(\varepsilon)$ costituiti dai punti che distano da I meno di ε , non sono tubolari (D100) e quindi non rientriamo nei casi osservati dal punto di vista geometrico.

Anche assegnare un segno a $dist(\cdot, I)$ per mezzo dell'orientazione non è possibile senza perdere la continuità.

Osservazione 107 *La distanza $dist(\cdot, I)$ è non è di classe \mathcal{C}^2 anche in punti non appartenenti al segmento, ma arbitrariamente vicini ad esso.*

Infatti $dist^2(\cdot, I)$ è coincide localmente con tre funzioni raccordate con continuità:

- $(x - 1)^2 + y^2$, per $x \geq 1$;
- y^2 , per $0 \leq x \leq 1$;
- $x^2 + y^2$, per $x \leq 0$.

Si vede banalmente che le derivate prime si raccordano con continuità, ma le derivate seconde no.

Quindi anche $dist(\cdot, I)$ perde la regolarità, e non solo su I .

Osservazione 108 *In questo caso potremmo anche prendere l'idea dell'osservazione 105 sfruttando la convessità del segmento.*

Dall'osservazione precedente si ha inoltre che $|\nabla(dist(\cdot, I))|$ è ben definita e vale sempre 1, quindi potremmo seguire la costruzione già vista apportando poche modifiche.

Scegliamo però un altro approccio, che non richiede la convessità.

Notiamo che, sebbene gli estremi del segmento creino problemi di regolarità, la parte di $dist(\cdot, I)$ relativa ad essi non dovrebbe dare q.c. alcun contributo al tempo locale.

Infatti sappiamo già che la misura di occupazione $\mu_{T,\omega}$ è q.c. concentrata su un insieme compatto e singolare rispetto a λ^2 (C71), e dunque la misura delle palle con raggio tendente a zero intorno a un punto fissato è definitivamente zero q.c.

Quindi potremmo cambiare l'approccio e limitarci a non considerare le traiettorie quando non si trovano nella striscia $(0, 1) \times \mathbb{R}$.

Il nuovo approccio si adatta perfettamente a tutti gli aperti connessi in iperpiani affini, oltre che ai segmenti.

Osservazione 109 *Tali insiemi saranno in generale del tipo $\iota(A)$ con A aperto di \mathbb{R}^{N-1} e ι l'inclusione dell'iperpiano in \mathbb{R}^N .*

In particolare se $N = 2$ e l'iperpiano è la retta $y = 0$, abbiamo il caso dei segmenti orizzontali $(a, b) \times \{0\}$.

A meno di ruotare l'iperpiano, possiamo supporre che A sia contenuto in $\{x_N = 0\}$.

Sia μ la misura di occupazione di una semimartingala continua N -dimensionale X .

Consideriamo l'insieme $\hat{A} = A \times \mathbb{R}^{N-1}$, e sia ν la traccia di μ su \hat{A} . (Nel caso $\mu(\hat{A}) = 0$, definiamo il tempo locale $L^A(X) = 0$.)

Sia Π la proiezione sull' N -esima coordinata: $\Pi(x) = X_N$.

Allora abbiamo che, con λ la misura di Lebesgue su \mathbb{R} ,

$$\Pi(\nu) \leq \Pi(\mu) \ll \lambda,$$

la prima disuguaglianza ovvia, e la seconda grazie all'esistenza del tempo locale rispetto agli iperpiani.

Usando il teorema di Radon-Nikodym (T133), otteniamo che esiste L^A densità di $\Pi(\nu)$ rispetto λ .

Grazie al teorema di derivazione secondo Lebesgue (T148), L^A coincide q.c. con il limite dei rapporti incrementali

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\Pi(\nu)(-\varepsilon, \varepsilon)}{\lambda(-\varepsilon, \varepsilon)}.$$

Essi coincidono anche con i rapporti incrementali delle misure secondo μ (coincidenti con le misure secondo ν) dei cilindri $\tilde{A} = A \times (-\varepsilon, \varepsilon)$ divise per 2ε

$$L^A = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\mu(\tilde{A})}{2\varepsilon}. \quad (24)$$

Osservazione 110 *In realtà questa costruzione senza alcuna modifica permette di definire il tempo locale rispetto ad un qualsiasi sottoinsieme misurabile di un iperpiano, senza ulteriori proprietà.*

4 Formule per integrali multipli rispetto alla misura di occupazione

Notazione 111 *In questo capitolo, per alleggerire la notazione ometteremo quasi sempre la dipendenza da $\omega \in \Omega$.*

Con un piccolo abuso di notazione parleremo comunque di misure e nuclei di misure con parametri reali, anche se in realtà si tratterà sempre di nuclei di misure dipendenti anche da ω .

Iniziamo definendo il concetto astratto di foliazione di una varietà.

Definizione 112 (Foliazione differenziabile) *Una foliazione F di dimensione p di una varietà n -dimensionale M è un atlante (U_i, φ_i) tale che le funzioni di transizione*

$$\phi_{ij} = \varphi_j \varphi_i^{-1}$$

hanno la forma

$$\phi(x, y) = (\phi_1(x), \phi_2(x, y))$$

dove x denota le prime $n - p$ coordinate, y le ultime p , e

$$\phi_1 : \mathbb{R}^{n-p} \longrightarrow \mathbb{R}^{n-p},$$

$$\phi_2 : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p.$$

Inoltre nella carta (U_i, φ_i) gli insiemi $x = \text{cost}$ devono essere compatibili con quelli delle altre carte (U_j, φ_j) .

Le componenti connesse ottenute riunendo tali insiemi rispetto alle varie carte sono dette foglie, e sono sottovarietà immerse p -dimensionali di M .

Nel seguito indicheremo come foliazione di aperti $A \subseteq \mathbb{R}^N$ una fissata funzione differenziabile a gradiente non nullo

$$\phi : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Le foglie saranno gli insiemi di livello $\Gamma_a = \{\phi(x) = a\}$.

Consideriamo per semplicità $N = 2$ e μ la misura di occupazione di un BM^2 in \mathbb{R}^2 sull'intervallo di tempi $[0, T]$.

Fissata una foliazione ϕ , vogliamo ottenere una decomposizione

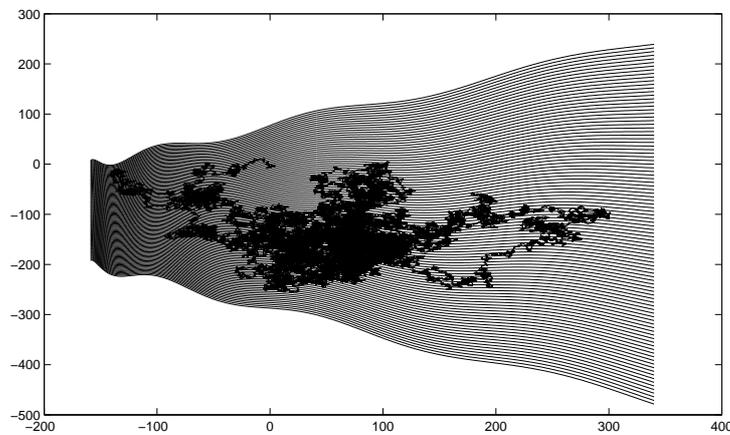
$$\mu = Q(dx, a) \otimes \nu(a),$$

con Q un nucleo di misure di probabilità concentrate sulle foglie, e

$$\nu(a) \ll \lambda(a)$$

con densità strettamente legata al tempo locale L^{σ^a} rispetto alle foglie.

Esempio:



Nel seguito sia fissato $T = 1$: in tal caso μ è anche una misura di probabilità.

In generale ci si riconduce comunque a misure di probabilità normalizzando μ e scaricando successivamente la costante di normalizzazione T su ν .

Le dimostrazioni valgono senza modifiche e le misure $Q(\cdot, a)$ restano normalizzate.

Osservazione 113 *Il nucleo di misure Q , nel linguaggio delle leggi condizionali (vedi [5(Letta)]), è una versione della disintegrazione di μ rispetto alla tribù generata dalle foglie della foliazione.*

4.1 Foliazioni di rette

In questa situazione molto semplice come vedremo si può ragionare in modo abbastanza banale, ma prima esaminiamo un approccio euristico che ci fa intuire che la definizione di tempo locale rispetto alle varietà (23) sia quella giusta per scrivere formule di decomposizione.

Esempio 114 *Iniziamo considerando il caso semplice di $f = I_A$ con $A = \mathbb{R} \times (b, c)$ una striscia orizzontale e $\phi(x) = x_2$ una foliazione di rette orizzontali.*

Definiamo D_ρ^a la striscia orizzontale larga ρ intorno alla retta di livello $r_a := \{x_2 = a\}$.

Essa si può vedere come un intorno tubolare di r_a , e quindi

$$L^a = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\mu(D_\rho^a)}{\lambda(D_\rho^a)},$$

rileggendo la definizione di tempo locale come una “derivata fra misure”.

Fissato $n \in \mathbb{N}$, definiamo π_n la partizione di A in 2^n strisce orizzontali centrate sulle rette $\{x_2 = \frac{2k+1}{2^{n+1}} = a_{nk}\}$ e larghe $\rho_n = 2^{-n}$.

Le partizioni sono ognuna inclusa nella seguente, e ad ogni passo le strisce si infittiscono.

Le rette corrispondenti a numeri diadici stanno definitivamente in una successione di strisce che ne sono intorni tubolari di larghezza tendente a zero.

Definiamo

$$h_n(a) = \sum_k \frac{\mu(D_{\rho_n}^{a_{nk}})}{\lambda(D_{\rho_n}^{a_{nk}})} I_{\{D_{\rho_n}^{a_{nk}}\}}(a).$$

Sia \mathcal{F} la filtrazione definita da $\mathcal{F}_n = \sigma(\pi_n)$.

Ognuna di tali tribù è costituita da un numero finito di insiemi misurabili, e per ogni $F \in \mathcal{F}_n$

$$\int_F h(a) da = \mu(F).$$

La successione $h_n(a)$ costituisce una martingala positiva (e quindi limitata in \mathcal{L}^1).

Dunque converge quasi certamente, ed in particolare il limite per a diadico deve coincidere per definizione con L^a . (vedi [5(Letta)])

Ci sono 2 problemi:

- Per ottenere la convergenza \mathcal{L}^1 dovremmo provare l'uniforme integrabilità della successione (ϕ_n) .
- Anche se sappiamo che il limite esiste per quasi tutti i punti e che coincide col tempo locale per i valori diadici, a priori potrebbe non essere così per gli altri.

Questo problema sia nel caso della convergenza quasi certa, sia nel caso della convergenza \mathcal{L}^1 .

Per ottenere la convergenza su un'altra famiglia numerabile di valori potrei cambiare successione di strisce, ma così ovviamente cambierebbero anche gli h_n e non avremmo ancora una convergenza al tempo locale per tutti i valori contemporaneamente.

In altre parole il limite potrebbe dipendere dalla famiglia di partizioni scelta.

Potremmo appellarci alla teoria dei filtri (vedi [4(Letta)]) e cercare di dimostrare l'uniforme integrabilità della successione generalizzata delle $h_{\mathcal{P}}$ rispetto a tutte le possibili partizioni \mathcal{P} , ordinate per raffinamento.

Ma questo risulta difficoltoso e quindi accantoniamo questo approccio.

Per ottenere facilmente le formule volute possiamo usare i potenti risultati che sono noti in dimensione 1.

Infatti osserviamo che il nostro tempo locale rispetto alle rette coincide per definizione con la formulazione di Lévy (D26) del tempo locale classico della martingala unidimensionale $B^\perp = B^{(2)}$.

E grazie alla formula dei tempi di occupazione (T24), esso coincide con la densità rispetto a dx_2 della misura di occupazione proiettata sulla retta verticale $\{x_1 = 0\}$, che chiamiamo $\pi_2(\mu)$.

In particolare

$$\mu(A) = \pi_2(\mu)((b, c)) = \int_{(b,c)} L^{x_2}(B^\perp) dx_2 = \int_{(b,c)} L^{x_2}(B) dx_2.$$

Sia $\pi_1^a(\mu) := Q(\cdot, a)$ la misura di occupazione proiettata sulla retta orizzontale r_a .

Ovviamente abbiamo $Q(\mathbb{R} \times \{a\}, a) = 1$ per ogni $a \in (b, c)$ e allora otteniamo la formula voluta

$$\mu(A) = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{r_a} I_A(x_1, x_2) Q(dx_1, a) \right) L^{r_{x_2}}(B) dx_2.$$

Osservazione 115 In [5(Letta)] c'è una dimostrazione del teorema di Radon-Nikodym (133) che funziona in modo molto simile a quanto avevamo fatto con le partizioni di strisce.

Nelle note ipotesi del teorema, fissata una partizione \mathcal{P} dello spazio Ω , si definisce $\phi_{\mathcal{P}}$ la somma dei rapporti fra le due misure calcolati negli insiemi della partizione.

Così, ordinando rispetto all'inclusione fra le partizioni, si ottiene una martingala filtrante e si usa proprio il fatto che tale famiglia sia uniformemente integrabile per ottenere l'esistenza del limite \mathcal{L}^1 , che risulta proprio essere la densità cercata.

Per avere facilmente tale uniforme integrabilità ci si riconduce però al caso in cui le due misure non siano solo legate da una relazione di assoluta continuità, ma siano addirittura maggiorate una dall'altra.

Nel caso della successione di strisce non era così, e cambiare le misure per ottenere tale ipotesi ci avrebbe fatto perdere il legame con la definizione di tempo locale (che è rispetto alla misura di Lebesgue).

Impostiamo adesso il problema rispetto al concetto di legge condizionale, che ne semplifica molto la soluzione. (vedi [5(Letta)])

Sia $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ e supponiamo di voler decomporre

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x) d\mu.$$

Consideriamo su $(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2), \mu)$ le due proiezioni $X = x_1, Y = x_2$ viste come variabili aleatorie reali. Sia ν la legge di Y su $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

Siccome Y ha immagine in $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ che è regolare secondo il concetto di legge condizionale, allora esiste Q nucleo da \mathbb{R} in \mathbb{R} versione della legge condizionale di Y rispetto a X :

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x) d\mu = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x_1, x_2) Q(x_2, dx_1) \right) d\nu(x_2).$$

Sappiamo già che $d\nu = L^y \cdot dy$, e in più abbiamo ottenuto l'esistenza del nucleo Q che rappresenta la distribuzione degli attraversamenti della retta $\{y = x_2\}$ da parte della traiettoria del moto browniano.

Il problema è quindi banalmente risolto in questo caso particolare.

Nella prossima sezione esamineremo la generalizzazione a foliazioni che non siano costituite da semplici rette.

4.2 Foliazioni di curve

Sia $\phi(x) = a$ una foliazione di \mathbb{R}^2 , e sia $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$.

Definiamo $X = Id$ e $Y = \phi$ viste come variabili aleatorie e sia ν la legge di Y su $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

Allora

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x) d\mu = \int_{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}} f(X) dP_{[X,Y]}.$$

Come sopra esiste Q nucleo da \mathbb{R}^2 in \mathbb{R} versione della legge condizionale di Y rispetto a X :

$$\int_{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}} f(X) dP_{[X,Y]} = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}^2} f(x) Q(a, dx) \right) d\nu(a).$$

Vale che esiste una parte A di \mathbb{R} trascurabile secondo ν , tale che per ogni $a \in \mathbb{R} \setminus A$ si ha che $\phi(Q(a, dx)) = \epsilon_a$, e quindi per ν -q.o. t la misura $Q(a, \cdot)$ si concentra sulla curva di livello $\sigma^a = \{\phi(x) = a\}$. (si veda [5(Letta)])

Possiamo dunque scrivere

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}^2} f(x) Q(a, dx) \right) d\nu(a) = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\sigma^a} f(x) Q(a, dx) \right) d\nu(a).$$

Basta ora dimostrare che $d\nu = L^{\sigma^a} \cdot da$.

Fissato ω , sia $B(t) = B_t(\omega)$, e siccome $\mu = B(\lambda)$ allora

$$\phi(\mu) = \phi(B(\lambda)),$$

la misura di occupazione di $\phi(B)$ su \mathbb{R} .

D'ora in poi per maggiore generalità riprendiamo a considerare un qualsiasi $T > 0$ fissato.

Grazie alla formula dei tempi di occupazione (T24), fissata f funzione test che sia boreliana limitata si ha che

$$\int_0^T f(\phi(B_t)) |\nabla \phi(B_t)|^2 dt = \int_0^T f(\phi(B_t)) d\langle \phi(B) \rangle_t = \int_{\mathbb{R}} f(a) L_\phi^a da,$$

e se supponiamo che $|\nabla\phi| \equiv 1$, allora abbiamo che L_ϕ è la densità di $\phi(\mu)$ rispetto alla misura di Lebesgue:

$$(\phi(\mu))(da) = L_\phi da.$$

Basta dimostrare che fissato t , $L^{\sigma^a} = L_{d^0\sigma^a} = L_\phi^a$.

Questa proprietà non è sempre vera, e dipende dalla foliazione ϕ .

Esamineremo vari casi.

4.2.1 Caso $|\nabla\phi| \equiv 1$ su \mathbb{R}^2

Lungo la curva di livello σ^a entrambi $\nabla\phi$ e ∇d^{σ^a} (la distanza euclidea dalla curva) hanno norma unitaria e sono ortogonali alla curva, dunque coincidono.

Applicando la seguente proposizione a $\phi - a$ concludiamo la dimostrazione, ottenendo la formula di decomposizione

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x) d\mu = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\sigma^a} f(x) Q(a, dx) \right) L^{\sigma^a} da.$$

Proposizione 116 *Sia ϕ una funzione in $C^1(\mathbb{R}^2; \mathbb{R})$ tale che lungo la curva σ^a sia $\phi \equiv 0$ e $\nabla\phi$ unitario e normale alla curva.*

Allora $L_\phi^0 = L_{d^{\sigma^a}}^0$.

Dimostrazione. Si ha che

$$L_\phi^0 = \lim_{\varepsilon} \frac{1}{2\varepsilon} \int_{I_{(-\varepsilon, \varepsilon)}} (\phi(B_t)) dt. \quad (25)$$

e lo stesso vale per $L_{d^{\sigma^a}}^0$.

Supponiamo che l'insieme di livello $\Gamma_0 = \{\phi = 0\}$ coincida con la sola curva connessa σ^a , altrimenti la dimostrazione vale senza modifiche considerando Γ_0 al posto di σ^a .

Per ogni fissato x abbastanza vicino alla curva, sia $x_0(x)$ il punto di minima distanza sulla curva, che è tale che $\nabla\phi(x_0) \cdot (x - x_0) = |x - x_0|$ e che $d^{\sigma^a}(x) = |x - x_0|$.

Allora sviluppando al primo ordine e grazie alle ipotesi

$$\phi(x) = \nabla\phi(x_0) \cdot (x - x_0) + R(x, x_0) = |x - x_0| + R(x, x_0),$$

con $R(x, x_0) = o(|x - x_0|)$.

Fissato un compatto $K \subset \mathbb{R}^2$, vale che $\forall \varepsilon' > 0, \exists \delta > 0$ tale che $\forall x \in K$

$$\phi(x) < \delta \implies d(x, \sigma^a) = |x - x_0| \leq \varepsilon'.$$

Infatti se non fosse così, grazie alla compattezza potremmo costruire una successione che tende ad un punto di σ^a , ma che se ne tiene ad una distanza maggiore di ε' . E ciò è assurdo.

In (25) abbiamo che

$$\left| |B_t - x_0| + R(B_t, x_0) \right| = |\phi(B_t)| < \varepsilon. \quad (26)$$

Con un piccolo abuso di notazione possiamo vedere ϕ e quindi anche R come funzioni di ε , nel senso che ne consideriamo solo i valori tali che $\phi < \varepsilon$.

Più precisamente possiamo considerare $\phi(x, \varepsilon) = \phi(x)$, ma definita sullo spazio

$$D = \{\varepsilon \in (0, \varepsilon_0], x \mid \phi(x) < \varepsilon\},$$

scelto ε_0 abbastanza piccolo. Analogamente definiamo $R(x, x_0, \varepsilon)$.

Se $B_t \in K$ compatto, abbiamo che scegliendo $\varepsilon = \delta(\varepsilon')$, vale che

$$|B_t - x_0| \leq \varepsilon',$$

e quindi $R = o(\varepsilon')$ indipendentemente da (x, x_0) .

Poi grazie a (26) si ha che $\varepsilon > \varepsilon' + o(\varepsilon')$, dunque $R = o(\varepsilon)$ e in particolare esiste una funzione C , che non dipende da (x, x_0) , tale che $C \geq |R|$ su K .

Si ha che $|\phi - d^{\sigma^a}| \leq C(\varepsilon) = o(\varepsilon)$ e allora definitivamente

$$I_{(-(\varepsilon-C(\varepsilon)), \varepsilon-C(\varepsilon))}(\phi) \leq I_{(-\varepsilon, \varepsilon)}(d^{\sigma^a}) \leq I_{(-(\varepsilon+C(\varepsilon)), \varepsilon+C(\varepsilon))}(\phi)$$

sul compatto K .

Sia definita

$$\tilde{L}_\phi^K = \lim_\varepsilon \frac{1}{2\varepsilon} \int I_K(B_t) I_{(-\varepsilon, \varepsilon)}(\phi(B_t)) dt,$$

e analogamente $\tilde{L}_{d^{\sigma^a}}^K$.

Tali limiti esistono perché monotoni e maggiorati dai limiti che definiscono tempi locali.

E sostituendo in (25)

$$\begin{aligned} & \lim_\varepsilon \frac{1}{2\varepsilon} \int I_K(B_t) I_{(-(\varepsilon-C(\varepsilon)), \varepsilon-C(\varepsilon))}(\phi(B_t)) dt \leq \\ & \leq \tilde{L}_{d^{\sigma^a}}^K \leq \lim_\varepsilon \frac{1}{2\varepsilon} \int I_K(B_t) I_{(-(\varepsilon+C(\varepsilon)), \varepsilon+C(\varepsilon))}(\phi(B_t)) dt, \end{aligned}$$

il primo termine coincide con

$$\left(\lim_{\varepsilon} \frac{\varepsilon - C(\varepsilon)}{\varepsilon} \right) \tilde{L}_{\phi}^K = \tilde{L}_{\phi}^K$$

e analogamente il terzo termine coincide anch'esso con

$$\left(\lim_{\varepsilon} \frac{\varepsilon + C(\varepsilon)}{\varepsilon} \right) \tilde{L}_{\phi}^K = \tilde{L}_{\phi}^K.$$

Quindi per ogni K compatto in \mathbb{R}^2 , $\tilde{L}_{\phi}^K = \tilde{L}_{d^{\sigma^a}}^K$.

Utilizzando la successione di compatti $(B(n))_{n \in \mathbb{N}}$ ricopriamo tutto \mathbb{R}^2 e usando il teorema di Beppo Levi passiamo al limite e otteniamo come voluto $L_{\phi} = L_{d^{\sigma^a}}$.

La tesi è provata. ■

4.2.2 Caso $|\nabla\phi| \neq 0$ costante lungo le curve di livello

Usiamo il seguente lemma:

Lemma 117 *Sia ϕ funzione reale di classe \mathcal{C}^1 definita su \mathbb{R}^n , tale che $|\nabla\phi(x)| \neq 0$ è costante lungo le curve di livello.*

Allora esiste $\psi = g \circ \phi$ funzione reale di classe \mathcal{C}^1 tale che $|\nabla\psi| \equiv 1$, con g funzione reale di classe \mathcal{C}^1 , con inversa di classe \mathcal{C}^1 .

Dimostrazione. Usando l'ipotesi che $|\nabla\phi(x)|$ è costante lungo le curve di livello, con un piccolo abuso di notazione chiameremo $|\nabla\phi(a)|$ la funzione che associa a a il valore che prende $|\nabla\phi(x)|$ sui punti di σ^a .

Mostriamo che $|\nabla\phi(a)|$ è continua.

Fissiamo $x \in \sigma^a$ e definiamo la funzione

$$\tilde{\phi}(s) = \phi(x + s\nabla\phi(x)).$$

Vale che

$$\tilde{\phi}'(s) = \nabla\phi(x + s\nabla\phi(x)) \cdot \nabla\phi(x) \neq 0,$$

per $s < \delta$, grazie alla continuità.

Dunque $\tilde{\phi}$ è invertibile per $s \in [0, \delta]$ con inversa di classe \mathcal{C}^1 quindi continua.

Sia $[0, \varepsilon] = \tilde{\phi}[0, \delta]$ il dominio di $\tilde{\phi}^{-1}$.

Otteniamo che per $a \in [0, \varepsilon]$,

$$\nabla\phi(a) = \nabla\phi(\tilde{\phi}^{-1}(a)).$$

In particolare $|\nabla\phi(a)|$ è continua, come voluto.

Ritornando alla costruzione della g cercata, osserviamo che

$$\nabla\psi(x) = g'(\phi(x))\nabla\phi(x),$$

e dunque basta prendere una g tale che

$$g'(a) = \frac{1}{|\nabla\phi(a)|},$$

che abbiamo dimostrato essere una funzione continua.

Integriamo scegliendo arbitrariamente la costante, e otteniamo finalmente una g di classe \mathcal{C}^1 .

Siccome $g'(a)$ non si annulla, g è invertibile e l'inversa di g è di classe \mathcal{C}^1 .

La tesi è provata. ■

Fissata una foliazione ϕ con $|\nabla\phi| \neq 0$ costante lungo le curve di livello, abbiamo visto in generale che

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x) d\mu(x) = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\sigma^a} f(x) Q(a, dx) \right) d(\phi(\mu))(a),$$

e grazie al lemma, abbiamo che esiste $\psi = g \circ \phi$ con $|\nabla\psi| \equiv 1$.

Quindi $d(\phi(\mu))(a) = d(g^{-1} \circ \psi(\mu))(a)$ e

$$d(\phi(\mu))(a) = d(\psi(\mu))(\alpha) = L^{\sigma^\alpha} d\alpha,$$

definendo $\alpha = g(a)$.

Usando poi la formula per il cambio di variabili

$$L^{\sigma^\alpha} d\alpha = L^{\sigma^a} |g'(a)| da = L^{\sigma^a} \frac{1}{|\nabla\phi(a)|} da.$$

Quindi abbiamo la formula generalizzata

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x) d\mu = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\sigma^a} f(x) Q(a, dx) \right) L^{\sigma^a} \frac{1}{|\nabla\phi(a)|} da.$$

4.2.3 Caso $|\nabla\phi| \geq \nu > 0$

In generale, possiamo utilizzare la seguente proposizione per avere un risultato di esistenza.

Proposizione 118 *Data una semimartingala continua reale X_t , se*

$$\langle X \rangle_t = \int_0^t g_s ds$$

con

$$g_s \geq \nu > 0,$$

allora esiste una funzione \mathcal{L}_T^a tale che q.c.

$$\int_0^T \varphi(X_t) dt = \int_{\mathbb{R}} \varphi(a) \mathcal{L}_T^a da,$$

per ogni $\varphi \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$.

Dimostrazione. Consideriamo il funzionale lineare

$$\varphi \xrightarrow{F_T} \int_0^T \varphi(X_t) dt.$$

Vale che

$$\begin{aligned} \left| \int_0^T \varphi(X_t) dt \right| &\leq \int_0^T |\varphi(X_t)| dt = \\ &= \int_0^T \frac{|\varphi(X_t)|}{g_t} d\langle X \rangle_t \leq \frac{1}{\nu} \int_0^T |\varphi(X_t)| d\langle X \rangle_t = \\ &= \frac{1}{\nu} \int_{\mathbb{R}} |\varphi(a)| L_T^a da \leq C \|\varphi\|_{L^1} \end{aligned}$$

dove L_T^a è il tempo locale di X_t .

Quindi F_T è lineare continuo su $L^1(\mathbb{R})$ e pertanto esiste una funzione $\mathcal{L}_T^a \in L^\infty(\mathbb{R})$ per cui $F_T(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(a) \mathcal{L}_T^a da$. (vedi [2(Rudin)])

La tesi è provata. ■

Nel nostro caso $X_t = \phi(B_t)$, con $\phi \in \mathcal{C}^2$: $\langle \phi(B) \rangle_t = \int_0^t |\nabla\phi(B_s)|^2 ds$, e vale che

$$|\nabla\phi(x)|^2 \geq \nu > 0,$$

quindi possiamo applicare la proposizione.

In più, se usiamo come funzione test $\varphi = 1_{(x-\varepsilon, x+\varepsilon)}$, otteniamo che

$$\int_0^T 1_{(x-\varepsilon, x+\varepsilon)}(\phi(B_t)) dt = \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} \mathcal{L}_T^a da.$$

Grazie al teorema di Lebesgue (T148), possiamo quindi caratterizzare quasi ovunque

$$\mathcal{L}_T^a = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\varepsilon} \int_0^T 1_{(x-\varepsilon, x+\varepsilon)}(\phi(B_t)) dt,$$

espressione che ricorda da vicino la definizione del tempo locale (23).

In conclusione abbiamo la formula generale

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x) d\mu = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\sigma^a} f(x) Q(a, dx) \right) \mathcal{L}_T^a da.$$

4.3 Esempio di integrazione

In dimensione 1 la formula dei tempi di occupazione (T24) e il tempo locale ci permettono di calcolare gli integrali rispetto a μ_T^1 di funzioni molto irregolari: ad esempio sulle classi L^p , o anche molto più generali.

Invece in d dimensione maggiore, la misura $\mu_T^d(\omega)$ è q.c. una misura singolare rispetto alla misura di Lebesgue (C71), quindi sulle classi di equivalenza degli $L^p(\lambda^d)$, l'integrale

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(x) \mu_T^d(dx)$$

non è in generale ben definito.

In generale le misure di occupazione rispetto a una curva regolare γ sono “molto singolari” rispetto alla misura di Lebesgue, e non ha mai senso integrare classi di equivalenza L^p .

Invece, grazie alla nuova formula di fattorizzazione (nella sua versione d -dimensionale) possiamo integrare funzioni molto irregolari rispetto a μ_T^d , nel caso che le irregolarità siano “concentrate” lungo una sola direzione.

Vediamo qualche esempio in dimensione 2. Sia $\mu = \mu_T^2$.

Innanzitutto se $f(x, y)$ è continua l'integrale è ovviamente ben definito.

Se invece $f = f_1(x, y)f_2(y)$ possiamo anche allentare le ipotesi sulla seconda delle componenti, usando la formula di fattorizzazione.

Ad esempio se $f_1 \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}^2)$, possiamo anche supporre $f_2 \in L^p(\mathbb{R})$ e l'integrale

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x, y) d\mu = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f_1(x, y) Q(y, dx) \right) f_2(y) L^y dy$$

è ben definito, dove abbiamo usato la decomposizione rispetto alla foliazione di rette orizzontali.

Allo stesso modo, se la funzione f si può scrivere come $f_1(x, a)f_2(a)$ con a parametro di una foliazione differenziabile (σ^a), e x che esprime le coordinate delle foglie, allora l'integrale diventa

$$\int_{\mathbb{R}^2} f d\mu = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\sigma^a} f_1(x, a) Q(a, dx) \right) f_2(a) L^a da.$$

Esso è ben definito, grazie questa volta alla decomposizione rispetto alla foliazione di curve (σ^a).

Osservazione 119 *Questa proprietà evidenzia il fatto che, sotto certi punti di vista, μ_T^d è speciale rispetto alla misura di occupazione di una curva γ regolare.*

La semplice esistenza di una densità continua rispetto ad una misura di occupazione (in una sola dimensione) è una caratteristica delle traiettorie del BM e che dipende proprio dalla loro non differenziabilità. (vedi capitolo 1)

Inoltre lo “spargimento” di μ rende ancora più speciale questa misura aleatoria: quasi certamente una traiettoria non avrà nulla a che fare con la struttura di una particolare foliazione, e quindi diversamente dal caso di μ_γ , tutte le foliazioni regolari sono ugualmente adatte a fattorizzare μ_T^d .

Un ulteriore passo nello studio delle proprietà di μ sarebbe esaminare come cambiano le misure $Q(\cdot, a)$ al variare di a .

Un risultato prezioso sarebbe dimostrare che varino in modo debolmente continuo.

4.4 Il supporto delle misure $Q(\cdot, a)$

Definizione 120 (Insieme perfetto)

Un insieme in uno spazio topologico X si dice perfetto se è chiuso e privo di punti isolati.

Definizione 121 (Supporto di una misura)

Il supporto di una misura μ su uno spazio misurabile (E, \mathcal{E}) è la chiusura del sottoinsieme di E i cui punti hanno la proprietà che ogni loro intorno ha misura positiva.

Ricordiamo il seguente risultato che riguarda le caratteristiche topologiche dei tempi di annullamento di un BM .

Per la dimostrazione si veda [5(Letta)].

Teorema 122 (Caratteristiche topologiche dei tempi in cui $BM=0$)

Sia $(B_t)_{t \geq 0}$ un BM e sia

$$Z(\omega) = \{t \geq 0 \mid B_t(\omega) = 0\}.$$

Allora quasi certamente

- $Z \neq \emptyset$;
- $\lambda(Z) = 0$;
- Z è perfetto.

Vediamo che sotto certe ipotesi, anche il supporto della misura $Q(\cdot, a)$ su σ^a è un insieme perfetto.

Siccome q.c. $\mu_{T,\omega}$ è concentrata sul compatto $B_{[0,T]}(\omega)$, allora esso coincide col suo supporto.

In particolare q.c. il supporto di $Q(\cdot, a)$ è l'insieme $B_{[0,T]}(\omega) \cap \sigma^a$.

Useremo la seguente proposizione.

Proposizione 123 Sia $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^N$ una sottovarietà $N - 1$ dimensionale orientabile, chiusa e senza bordo.

Sia B un moto browniano N -dimensionale.

Supponiamo che sia perfetto l'insieme $S(\omega) = \{t \mid d(B_t, \Gamma) = 0\}$, dove $d(\cdot, \Gamma)$ è la distanza con segno da Γ .

Allora

$$A(\omega) = B_{[0, T]}(\omega) \cap \Gamma$$

è un insieme perfetto.

Dimostrazione. Abbiamo visto che il processo $d(B_t, \Gamma)$ è una semimartingala continua.

Vale che

$$A(\omega) = B(S, \omega).$$

Allora S è compatto perché chiuso in $[0, T]$, quindi A è q.c. anch'esso compatto e dunque chiuso.

Inoltre se $x \in A$, allora $x = B_t$ con $t \in S$.

Grazie alla perfezione di S , t non è isolato, e grazie alla q.c. continuità delle traiettorie di B , nemmeno x .

Abbiamo quindi che A è chiuso e non ha nessun punto isolato.

La tesi è provata. ■

Osservazione 124 Oltre ad essere perfetto, l'insieme $A(\omega) = B_{[0, T]}(\omega) \cap \Gamma$ ha q.c. parte interna vuota.

Infatti, dato che i punti sono polari (T81) basta considerare l'insieme $D(\omega) = \mathbb{Q}^d \cap \Gamma$, denso nella varietà e numerabile quindi polare.

In particolare se su un evento non trascurabile $A(\omega)$ avesse parte interna non vuota, questa intersecherebbe $D(\omega)$ contraddicendo la polarità dell'insieme.

Per applicare la proposizione precedente al supporto di $Q(\cdot, a)$, basta provare che l'insieme dei tempi in cui $d(\cdot, \Gamma)$ si annulla sia perfetto.

Vale la seguente proposizione:

Proposizione 125 Sia $\gamma \subseteq \mathbb{R}^2$ una curva semplice di classe C^2 e parametrizzata rispetto la lunghezza d'arco.

Sia B un moto browniano bidimensionale.

Allora q.c. è perfetto l'insieme $S(\omega) = \{t \mid d(B_t, \gamma) = 0\}$, dove $d(\cdot, \gamma)$ è la distanza con segno da γ .

Dimostrazione. Innanzitutto S coincide con l'insieme dei tempi in cui B interseca γ , e nella dimostrazione useremo questa caratterizzazione.

Fissiamo il punto $x_0 \in \gamma$. Per la continuità delle traiettorie, S è chiuso.

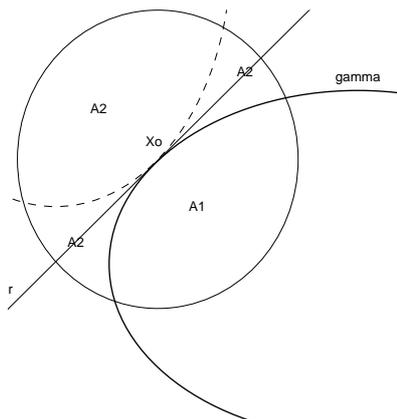
Grazie alla proprietà di Markov forte (vedi [1(Revuz-Yor)]) basta provare che $t = 0$ non è isolato in S a avremo la tesi.

Infatti, per ogni fissato $u \in \mathbb{Q}$, basta ripetere la dimostrazione partendo dal tempo di arresto τ_u : il primo zero successivo a u .

Intersecando al variare di u , per la densità dei numeri razionali, otteniamo che q.c. tutti i punti di S non sono isolati.

Fissiamo palla A centrata in x_0 : è divisa dalla curva in due distinte componenti connesse A_1 e A_2 sulle quali d prende segno opposto.

Disegno:



Sia B definito su (Ω, \mathcal{F}, P) . Fissiamo una successione infinitesima di tempi (t_n) : si ha che $B_{t_n}(\omega)$ è definitivamente in A q.c.

Allora siano definiti gli eventi

$$E_1 = \{B_{t_n} \in A_1 \text{ frequentemente}\}, \quad E_2 = \{B_{t_n} \in A_2 \text{ frequentemente}\}.$$

Essi sono eventi terminali, quindi degeneri grazie alla legge 0-1 di Kolmogorov (vedi [3(Letta)]).

Se dimostriamo che non sono trascurabili, allora anche l'intersezione è quasi certa e abbiamo la tesi.

Sia r la retta tangente alla curva in x_0 , e considero $\tilde{\gamma}$ la curva simmetrica a γ rispetto ad r .

Anche $\tilde{\gamma}$ divide la palla in due componenti connesse distinte \tilde{A}_1 e \tilde{A}_2 , rispettivamente simmetriche ad A_1 e A_2 rispetto a r .

Siano \tilde{E}_1 e \tilde{E}_2 gli eventi corrispondenti, definiti analogamente a E_1 e E_2 .

Vale che il simmetrico \tilde{B} di B rispetto a r è ancora un moto browniano, dunque ha la stessa legge di B .

Di conseguenza $P(E_1) = P(\tilde{E}_1)$ e $P(E_2) = P(\tilde{E}_2)$.

Supponiamo per assurdo che E_1 sia trascurabile (supporre che E_2 sia trascurabile è lo stesso).

Di conseguenza è quasi certo

$$(E_1)^c = \{B_{t_n} \in \overline{A_2} \text{ definitivamente}\},$$

la stessa cosa vale su \tilde{E}_1 , quindi è quasi certo anche

$$(\tilde{E}_1)^c = \{B_{t_n} \in \overline{\tilde{A}_2} \text{ definitivamente}\},$$

e dunque anche l'intersezione è quasi certa:

$$\{B_{t_n} \in \overline{\tilde{A}_2} \cap \overline{A_2} \text{ definitivamente}\},$$

e definiamo $C = \overline{\tilde{A}_2} \cap \overline{A_2}$.

Per regolarità esiste una palla $A = B(x_0, r)$ tale che la retta r non interseca la curva in nessun altro punto di A tranne x_0 .

Se così non fosse, la componente ortogonale a r della derivata cambierebbe segno infinite volte arbitrariamente vicino a x_0 e quindi in tale punto la derivata seconda lungo tale direzione non sarebbe ben definita.

In tal caso l'insieme C è diffeomorfo ad un cono: due componenti connesse dal punto x_0 .

A meno di scegliere A abbastanza piccola, possiamo dividere le due componenti con una retta s passante per x_0 .

Siccome q.c. una traiettoria resterà definitivamente in C , ma q.c. non passerà più da x_0 , allora per continuità resterà definitivamente in una delle due componenti di C .

Questo è assurdo perché avremmo che la componente di B ortogonale a s , che è ancora un moto browniano, q.c. non si annulla definitivamente lungo la successione t_n .

Ciò contraddice la tesi del teorema 122.

La tesi è provata. ■

Osservazione 126 *Tutto questo capitolo si limita sostanzialmente a trattare il caso bidimensionale, ma una generalizzazione della formula di disintegrazione al caso N dimensionale non presenterebbe nuove complicazioni.*

Le misure $Q(\cdot, a)$ sarebbero concentrate su delle sottovarietà $N - 1$ dimensionali di \mathbb{R}^N : avrebbe quindi interesse generalizzare la proposizione 125 ad una tale Γ .

Se Γ è un iperpiano, la distanza è un moto browniano e quindi $S(\omega)$ è perfetto, ma in generale sorgono delle difficoltà ulteriori, sebbene sia un risultato plausibile.

5 Appendice

5.1 Teoria della misura e processi stocastici

Supponiamo noti i concetti di uniforme integrabilità e speranza condizionale, per la cui trattazione si vedano [4(Letta)] e [5(Letta)].

Definizione 127 *Sia \mathcal{M} una classe di funzioni reali. Diremo che \mathcal{M} è monotona se essa è stabile per convergenza monotona dominata delle successioni, nel senso che possiede le due proprietà seguenti:*

- *Per ogni successione crescente f_n di elementi di \mathcal{M} maggiorati da un medesimo elemento di \mathcal{M} , si ha $\sup_n f_n \in \mathcal{M}$.*
- *Per ogni successione decrescente f_n di elementi di \mathcal{M} minorati da un medesimo elemento di \mathcal{M} , si ha $\inf_n f_n \in \mathcal{M}$.*

Ovviamente se \mathcal{M} è uno spazio vettoriale, le due proprietà sono equivalenti.

Teorema 128 (Classi monotone)

Sia (E, \mathcal{E}) uno spazio misurabile e sia \mathcal{H} una classe di funzioni limitate su E , dotata delle proprietà seguenti:

- $\mathcal{E} = \mathcal{T}(\mathcal{H})$;
- \mathcal{H} contiene la costante 1 ed è stabile per la moltiplicazione, ossia per l'operazione $(f, g) \mapsto fg$.

Allora ogni spazio vettoriale monotono \mathcal{L} (di funzioni reali su E), che contenga \mathcal{H} , contiene tutte le funzioni limitate e misurabili su (E, \mathcal{E}) .

Teorema 129 (Criterio de La Vallée Poussin)

Si supponga che esista $\delta > 0$ tale che la famiglia $(X_i)_{i \in I}$ di v.a. sia limitata in $\mathcal{L}^{1+\delta}(P)$.

Allora la famiglia è uniformemente integrabile.

Teorema 130 (Vitali)

Siano date una successione di v.a. integrabili $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e un'ulteriore v.a. X .

Le condizioni che seguono sono allora equivalenti:

- X è integrabile e $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge verso X in $\mathcal{L}^1(P)$;
- la successione $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ è uniformemente integrabile e converge in probabilità verso X .

Teorema 131 (Criterio di misurabilità di Doob)

Siano dati due spazi misurabili (E, \mathcal{E}) , (F, \mathcal{F}) e un'applicazione f di E in F , tale che la tribù generata da f coincida con \mathcal{E} , cioè tale che si abbia

$$\mathcal{E} = \{f^{-1}(A) : A \in \mathcal{F}\}.$$

Allora, affinché una funzione numerica g definita su E sia misurabile su (E, \mathcal{E}) , occorre e basta che esista una funzione numerica h , misurabile su (F, \mathcal{F}) , tale che si abbia

$$g = h \circ f.$$

Proposizione 132 (Proprietà di scaling del BM)

Sia $B = (\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), (B_t), P)$ un moto browniano.

Allora anche

1. $X_t^{(1)} = B_{t+s} - B_s$
2. $X_t^{(2)} = -B_t$
3. $X_t^{(3)} = cB_{t/c^2}$
4. $X_t^{(4)} = \begin{cases} tB_{1/t} & \text{per } t \geq 0 \\ 0 & \text{per } t = 0 \end{cases}$

sono moti browniani.

Il primo è un moto browniano rispetto alla filtrazione $(\mathcal{F}_{t+s})_t$, il secondo rispetto a $(\mathcal{F}_t)_t$, il terzo rispetto a $(\mathcal{F}_{t/c^2})_t$, il quarto è un moto browniano naturale.

Teorema 133 (Radon-Nikodým)

Su uno spazio misurabile (Ω, \mathcal{A}) siano μ, ν due misure σ -finite, tali che

$$\nu \ll \mu.$$

Allora esiste una funzione misurabile Z tale che si abbia $\nu = Z \cdot \mu$, ossia

$$\nu(A) = \int_A Z d\mu$$

per ogni elemento A di \mathcal{A} .

Definizione 134 (Processo misurabile, progressivamente misurabile)

Un processo X su $(\Omega, \mathcal{F}_t, P)$ che sia misurabile rispetto alla tribù prodotto $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{F}^\infty$ è detto, semplicemente, misurabile.

Si dice invece che X è progressivamente misurabile se, per ogni numero reale positivo t , la restrizione di X a $[0, t] \times \Omega$ è misurabile rispetto alla tribù $\mathcal{B}([0, t]) \otimes \mathcal{F}_t$.

Proposizione 135 Affinché il processo X sia progressivamente misurabile è necessario che sia adattato.

Questa condizione è anche sufficiente se X è continuo a destra, cioè tale che ciascuna delle sue traiettorie sia continua a destra.

5.2 Definizioni e teoremi di analisi stocastica

Supponiamo noti i concetti di variazione quadratica, integrale stocastico, martingale locali e loro principali proprietà.

Per una trattazione esauriente si veda [1(Revuz-Yor)] o [6(Karatzas-Shreve)].

Definizione 136 (Lo spazio $\mathcal{L}^2(M)$)

Sia M una martingala limitata in \mathcal{L}^2 , allora si dice $\mathcal{L}^2(M)$ lo spazio dei processi progressivamente misurabili K tali che

$$\|K\|_M^2 = E \left[\int_0^\infty K_s^2 d\langle M, M \rangle_s \right] < +\infty.$$

Se, per ogni $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{F}^\infty$, definiamo

$$P_M(A) = E \left[\int_0^\infty 1_A(s, \omega) d\langle M, M \rangle_s(\omega) \right]$$

abbiamo una misura limitata e lo spazio $\mathcal{L}^2(M)$ coincide con lo spazio delle funzioni P_M -quadrato integrabili e progressivamente misurabili.

$L^2(M)$ denota lo spazio delle classi di equivalenza di $\mathcal{L}^2(M)$ secondo P_M , ed è uno spazio di Hilbert.

Per $K \in \mathcal{L}^2(M)$, l'integrale stocastico

$$\int_0^T K_s dM_s$$

è una martingala limitata in \mathcal{L}^2 e nulla in zero.

Definizione 137 (Lo spazio $\mathcal{L}_{loc}^2(M)$)

Sia M una martingala locale continua, allora si dice $\mathcal{L}_{loc}^2(M)$ lo spazio dei processi progressivamente misurabili K per cui esiste una successione (T_n) di tempi di arresto crescenti all'infinito e tali che

$$E \left[\int_0^{T_n} K_s^2 d\langle M, M \rangle_s \right] < +\infty.$$

$L_{loc}^2(M)$ denota lo spazio delle classi di equivalenza di $\mathcal{L}_{loc}^2(M)$ secondo P_M .

Per $K \in \mathcal{L}_{loc}^2(M)$, l'integrale stocastico

$$\int_0^T K_s dM_s$$

è una martingala locale continua e nulla in zero.

Proposizione 138 *Ogni processo in $\mathcal{L}_{loc}^2(M)$ è equivalente ad un processo prevedibile (D28).*

In particolare ricordiamo due importanti proprietà dell'integrale stocastico.

Sia $X = M + V$ una semimartingala continua e H un processo prevedibile in $\mathcal{L}_{loc}^2(M)$ e tale che $\int_0^t |H_s| dV_s$ sia q.c. finito

Allora:

$$E \left[\left(\int_0^t H_s dM_s \right)^2 \right] = E \left[\int_0^t H_s^2 d\langle M \rangle_s \right],$$

$$\left\langle \int_0^t H_s dX_s \right\rangle_t = \int_0^t H_s^2 d\langle M \rangle_s.$$

Teorema 139 (Formula di Itô (vettoriale))

Sia $X = (X^1, \dots, X^d)$ una semimartingala vettoriale e sia $F \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$; allora $F(X)$ è una semimartingala continua e

$$F(X_t) = F(X_0) + \sum_i \int_0^t \frac{\partial F}{\partial x_i}(X_s) dX_s^i + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \int_0^t \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}(X_s) d\langle X^i, X^j \rangle_s.$$

Teorema 140 (Convergenza dominata, caso stocastico)

Sia X una semimartingala continua. Se $(K^n)_{n \geq 0}$ è una successione di processi localmente limitati (rispetto alla successione di t.d.a. della martingala locale) convergenti a zero puntualmente e se esiste un processo localmente limitato K tale che $|K^n| \leq K$ per ogni n , allora $\int_0^t K_s^n dX_s$ converge a zero in probabilità, uniformemente su ogni intervallo compatto.

Teorema 141 (Fubini, caso stocastico)

Sia $H(a, s, \omega)$ un processo $\mathcal{A} \otimes \mathcal{P}$ -misurabile uniformemente limitato (rispetto alla successione di t.d.a della martingala locale) e sia X una semimartingala continua, allora esiste un processo $K(a, \cdot, \cdot)$ tale che per ogni a , $K(a, \cdot, \cdot)$ sia indistinguibile da $\int_0^\cdot H(a, s, \cdot) dX_s$.

In più se ν è una misura limitata su \mathcal{A} , allora quasi certamente

$$\int_A K(a, t, \cdot) \nu(da) = \int_0^t \left(\int_A H(a, s, \cdot) \nu(da) \right) dX_s.$$

Teorema 142 (Le disuguaglianze BDG)

Per ogni $p \in (0, +\infty)$ esistono due costanti c_p e C_p tali che, per ogni martingala locale continua M nulla in zero,

$$c_p E \left[\langle M \rangle_{+\infty}^{p/2} \right] \leq E [(M_\infty^*)] \leq C_p E \left[\langle M \rangle_{+\infty}^{p/2} \right],$$

dove $M_t^* = \sup_{s \leq t} |M_s|$

Diamo infine l'enunciato del teorema di Girsanov.

Teorema 143 (Girsanov)

Sia (F_t) una filtrazione, e siano due misure di probabilità $Q \ll P$ su \mathcal{F}^∞ .

Sia $D_t = E \left[\frac{dQ}{dP} \middle| \mathcal{F}_t \right]$ la martingala formata dalle densità.

Allora, se D è continua, ogni semimartingala continua secondo P lo è anche secondo Q .

Più precisamente, se M è una martingala locale secondo P , allora

$$\tilde{M} = M - D^{-1} \cdot \langle M, D \rangle$$

è una martingala locale secondo Q , con la stessa variazione quadratica.

Corollario 144 Se $P \sim Q$, allora D si può esprimere come

$$D_t = \exp \left\{ L_t - \frac{1}{2} \langle L \rangle_t \right\} = \mathcal{E}(L_t)$$

con

$$L_t = \log D_0 + \int_0^t D_s^{-1} dD_s.$$

Allora la formula del teorema di Girsanov diventa

$$\tilde{M} = M - \langle M, L \rangle.$$

In generale se sono dati P e L e vogliamo costruire Q in modo da applicare il teorema di Girsanov, sono necessarie delle condizioni affinché $\mathcal{E}(L)$ sia una martingala, ossia $E[\mathcal{E}(L)] \equiv 1$.

Se L è limitata o $E[\exp(L^*)_\infty] < +\infty$ (con $L_t^* = \sup_{s \leq t} |L_s|$) la condizione si ottiene facilmente, ma esistono due condizioni sufficienti più maneggevoli.

Proposizione 145 (Kazamaki)

Se L è una martingala locale continua tale che $\exp(\frac{1}{2}\langle L \rangle_\infty)$ sia uniformemente integrabile, allora $E[\mathcal{E}(L)]$ è uniformemente integrabile.

Proposizione 146 (Novikov)

Se L è una martingala locale continua tale che

$$E \left[\exp \left(\frac{1}{2} \langle L \rangle_\infty \right) \right] < +\infty,$$

allora $E[\mathcal{E}(L)]$ è uniformemente integrabile.

Infine il seguente risultato, conseguenza elementare del teorema 18.

Corollario 147 *Sia F una funzione reale convessa definita su \mathbb{R}^d e X una semimartingala continua d -dimensionale, allora $F(X)$ è ancora una semimartingala continua.*

In particolare

$$d\langle F(X) \rangle_s = \sum_i \left(\left(\frac{\partial F}{\partial x_i} \right)^- \right)^2 (X_0^{(1)}, \dots, X_0^{(i-1)}, X_s^{(i)}, X_t^{(i+1)}, \dots, X_t^{(d)}) d\langle X^{(i)} \rangle_s,$$

dove abbiamo fatto un leggero abuso di notazione nella sommatoria, per rendere la formula più leggibile.

Dimostrazione. Si ottiene facilmente applicando il teorema 18 a ogni coordinata i , mantenendo fisse le altre:

$$F(X_t^{(1)}, \dots, X_t^{(d)}) = F(X_0^{(1)}, \dots, X_0^{(d)}) + \sum_i \int_0^t \left(\frac{\partial F}{\partial x_i} \right)^- (X_0^{(1)}, \dots, X_0^{(i-1)}, X_s^{(i)}, X_t^{(i+1)}, \dots, X_t^{(d)}) dX_s^{(i)} + \sum_i \frac{1}{2} A_t^{i,F},$$

con un piccolo abuso di notazione nella sommatoria.

La seconda parte della tesi è conseguenza immediata di questa formula. ■

5.3 Risultati di analisi matematica

Teorema 148 (Il teorema di Lebesgue)

Sia f una funzione reale o complessa definita su \mathbb{R}^n e integrabile secondo Lebesgue.

Allora per q.o. $x \in \mathbb{R}^n$

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{1}{\lambda(B(x, \rho))} \int_{B(x, \rho)} f d\lambda = f(x),$$

dove $B(x, \rho)$ indica la palla di centro x e raggio ρ .

I punti per cui vale l'uguaglianza si dicono punti di Lebesgue.

Definizione 149 Sia U un aperto fissato di \mathbb{R}^n .

Denotiamo con \mathcal{D} lo spazio delle funzioni C^∞ a supporto compatto in U .

Su questo spazio diremo che una successione $(\phi_n)_{n \geq 0}$ converge ad un elemento $\phi \in \mathcal{D}$ se i supporti delle ϕ_n sono contenuti in un compatto fissato e tutte le derivate di $\phi_n - \phi$ convergono a zero uniformemente.

Una distribuzione T su U è una forma lineare su \mathcal{D} tale che $T(\phi_n)$ converge a zero se ϕ_n converge a zero.

Più precisamente si può dimostrare [2(Rudin)] che questo tipo di convergenza genera una topologia su \mathcal{D} e lo spazio delle distribuzioni è il duale di \mathcal{D} rispetto tale topologia.

Indicheremo con $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto di dualità.

Notazione 150 Associamo ad ogni misura di Radon μ su U la distribuzione T_μ così caratterizzata:

$$\langle T_\mu, \phi \rangle = \int \phi d\mu, \quad \forall \phi \in \mathcal{D}.$$

Analogamente, se f è una funzione boreliana localmente integrabile, scriveremo T_f al posto di T_μ dove $\mu(dx) = f(x)dx$.

Definizione 151 (Derivata distribuzionale)

Se T è una distribuzione definiamo la derivata k -esima di T imponendo per ogni $\phi \in \mathcal{D}$

$$\langle T^{(k)}, \phi \rangle = (-1)^k \langle T, \phi^{(k)} \rangle.$$

Abbiamo utilizzato questo risultato sulla derivata seconda in senso distribuzionale di una funzione convessa.

Teorema 152 *Sia f una funzione reale convessa, allora la derivata seconda f'' di f nel senso delle distribuzioni è una misura di Radon positiva.*

Inoltre per ogni intervallo limitato I e $x \in I$ esistono $\alpha_I, \beta_I \in \mathbb{R}$ tali che

$$f(x) = \frac{1}{2} \int_I |x - a| f''(da) + \alpha_I x + \beta_I,$$

$$f'_-(x) = \frac{1}{2} \int_I \operatorname{sgn}(x - a) f''(da) + \alpha_I.$$

5.4 Risultati di geometria

Teorema 153 (Esistenza intorni tubolari di curve)

Sia $\sigma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ una curva regolare semplice di classe \mathcal{C}^2 di sostegno C .

Allora esiste $\varepsilon_0 > 0$ tale che $N_\sigma(\varepsilon) = \bigcup_t \{\sigma(t) + (-\varepsilon, \varepsilon)\hat{n}(t)\}$ è un intorno tubolare di σ per ogni $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$.

In particolare $N_\sigma(\varepsilon)$ è un intorno aperto di σ (esclusi gli estremi se la curva non è chiusa).

Teorema 154 (Esistenza intorni tubolari di superfici)

Per ogni superficie $S \subset \mathbb{R}^3$ esiste una funzione $\epsilon : S \rightarrow \mathbb{R}_+$ continua e positiva tale che $N_S(\epsilon) = \bigcup_p \{p + (-\epsilon, \epsilon)N(p)\}$ sia un intorno tubolare di S , dove $N(p)$ è un versore ortogonale a $T_p S$ (piano tangente ad S in p).

Inoltre

1. $N_S(\epsilon)$ è un intorno aperto connesso di S in \mathbb{R}^3 ;
2. se $U \subseteq \mathbb{R}^3$ è un intorno aperto di S tale che S sia chiusa in U , allora possiamo scegliere ϵ in modo che $N_S(\epsilon) \subseteq U$;
3. esiste un'applicazione $\pi : N_S(\epsilon) \rightarrow S$ di classe \mathcal{C}^∞ tale che $\pi|_S \equiv Id_S$ e $y \in \{\pi(y) + (-\epsilon(\pi(y)), \epsilon(\pi(y)))\}$ per ogni $y \in N_S(\epsilon)$;
4. se S è orientabile esiste una funzione $h : N_S(\epsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ di classe \mathcal{C}^∞ tale che $y = \pi(y) + h(y)N(\pi(y))$ per ogni $y \in N_S(\epsilon)$, dove N è la mappa di Gauss di S . In particolare $S = h^{-1}(0)$;
5. $N_S(\epsilon) \setminus S$ ha al più due componenti connesse e, se S è orientabile, allora ha esattamente due componenti connesse.

Osservazione 155 Il teorema vale invariato anche per sottovarietà $N - 1$ dimensionali di \mathbb{R}^N .

Corollario 156 Se S è compatta, e se prendiamo $\varepsilon = \min_S \epsilon$, esiste un intorno tubolare di larghezza costante ε .

Diamo infine la dimostrazione di un risultato elementare che abbiamo citato.

Teorema 157 (La distanza da un insieme convesso è convessa)

Sia $\text{dist}(C, x)$ la distanza di $x \in \mathbb{R}^n$ da un fissato insieme C convesso.

Allora $\text{dist}(C, \cdot)$ è una funzione convessa.

Dimostrazione. Vogliamo provare la convessità del sopragrafico Σ di $\text{dist}(C, \cdot)$ in \mathbb{R}^{n+1} .

Esso è costituito da tutti i punti (x, t) dove $x \in S_t$ la sezione di livello $\{\text{dist}(C, x) \geq t\}$, cioè

$$\Sigma = \bigcup_t (S_t, t).$$

Consideriamo una coppia arbitraria $z_1 = (y_1, t_1)$, $z_2 = (y_2, t_2)$ in Σ , dove

$$y_i = x_i + \lambda_i \hat{v}_i,$$

con $x_i \in C$, $\lambda_i \in (0, t_i)$ e $\hat{v}_i \in B(0, 1)$.

Basta mostrare che $\forall \eta \in (0, 1)$

$$z = \eta z_1 + (1 - \eta) z_2 = (\eta y_1 + (1 - \eta) y_2, \eta t_1 + (1 - \eta) t_2) \in \Sigma.$$

La seconda componente $\eta t_1 + (1 - \eta) t_2 = t$.

Consideriamo la prima componente

$$\eta y_1 + (1 - \eta) y_2 = (\eta x_1 + (1 - \eta) x_2) + (\eta \lambda_1 \hat{v}_1 + (1 - \eta) \lambda_2 \hat{v}_2),$$

dove il primo addendo x appartiene a C per convessità.

Sia $\kappa = \eta \lambda_1 + (1 - \eta) \lambda_2$: vale che

$$\eta \lambda_1 \hat{v}_1 + (1 - \eta) \lambda_2 \hat{v}_2 = \kappa (k_1 \hat{v}_1 + k_2 \hat{v}_2),$$

con $k_1 + k_2 = 1$ e $\kappa \leq \eta t_1 + (1 - \eta) t_2 = t$.

Usando la convessità di $B(0, 1)$ abbiamo che $\kappa (k_1 \hat{v}_1 + k_2 \hat{v}_2) = \kappa \tilde{v}$, dove $\tilde{v} \in B(0, 1)$.

Dunque

$$z = (x + \kappa \tilde{v}, t) \in \Sigma.$$

Il sopragrafico è convesso e quindi la tesi è provata. ■

5.5 Esempi elementari di non unicità delle soluzioni di equazioni differenziali

Vediamo alcuni esempi di non unicità nel caso di equazioni differenziali ordinarie (ODE).

Esempio 158 Consideriamo la funzione $b(x) = 2\operatorname{sgn}(x)\sqrt{|x|}$ e la ODE unidimensionale

$$\frac{dX_t}{dt} = b(X_t), \quad X_0 = x_0, \quad t \geq 0.$$

La funzione b è regolare per $x \neq 0$ e grazie al teorema di Cauchy-Lipshitz, per ogni $x_0 \neq 0$ la ODE ha un'unica soluzione globale.

Infatti su ogni intervallo compatto e non contenente 0 esiste unica la soluzione $\pm t^2$, e per continuità la si estende a $t = 0$.

Invece per $x_0 = 0$ ci sono infinite soluzioni. Una di queste è $X_t \equiv 0$.

Altre due sono

$$X_t^{(\pm)} = \pm t^2.$$

Tutte le altre soluzioni hanno la seguente forma: sono uguali a zero in una semiretta $(-\infty, t_0]$ e uguali a $\pm(t - t_0)^2$ per $t \geq t_0$.

Infatti sia $s \in \mathbb{R}_+$ l'estremo superiore dei tempi per cui $X_s = 0$.

Ci sono 2 casi:

1. $s = +\infty$, e abbiamo la soluzione $X_t \equiv 0$.
2. $s \in \mathbb{R}$ e possiamo applicare il risultato di unicità visto sopra, questa volta sulla semiretta $[s, +\infty)$.

Notiamo che le soluzioni $X_t^{(\pm)}$ sono estremali nell'insieme delle possibili soluzioni.

Infine grazie al teorema di Ascoli-Arzelà, per ogni intervallo I compatto di \mathbb{R}_+ , l'insieme delle soluzioni ristrette a I è compatto in $\mathcal{C}(I)$.

Quindi l'insieme $\mathcal{C}(x_0)$ delle soluzioni è compatto nella topologia della convergenza uniforme.

In generale in una dimensione, se b è continua e autonoma e $b(x_0) > 0$ (il caso $b(x_0) < 0$ è analogo), allora localmente nel tempo c'è una soluzione unica con condizione iniziale x_0 .

Infatti dal teorema di Peano esiste localmente almeno una soluzione, e inoltre se X_t è una generica soluzione locale (necessariamente continua per definizione), per continuità esiste t_0 tale che $b(X_t) \neq 0$ su $[0, t_0)$.

Dunque

$$\frac{1}{b(X_t)} \frac{dX_t}{dt} = 1$$

su $[0, t_0)$.

Integriamo su un qualsiasi intervallo $[0, t] \subset [0, t_0)$, e col cambio di variabili $x = X_s$ otteniamo

$$\int_{x_0}^{X_t} \frac{1}{b(x)} dx = t$$

che identifica univocamente X_t dato che la funzione

$$H_{x_0}(r) := \int_{x_0}^r \frac{1}{b(x)} dx = t$$

è strettamente crescente.

Abbiamo così la formula $X_t = H_{x_0}^{-1}(t)$.

Quindi per funzioni continue b in dimensione 1, la non unicità può verificarsi solo se b si annulla in un punto x_0 dove b non sia derivabile con continuità.

Si possono abbastanza facilmente costruire esempi di funzioni b continue, ma che hanno infiniti punti di tale tipo, con accumulazioni.

Definizione 159 (Moto browniano bidirezionale)

Sia $(W_t)_{t \in \mathbb{R}}$ un processo ottenuto incollando due moti browniani indipendenti $B^{(1)}$ e $B^{(2)}$:

$$W_t \equiv B_t^{(1)} \quad \forall t \geq 0,$$

$$W_t \equiv B_{-t}^{(2)} \quad \forall t < 0.$$

Tale processo si dice moto browniano bidirezionale.

Esempio 160 Sia $(W_t)_{t \in \mathbb{R}}$ un moto browniano bidirezionale, sia fissato $\alpha \in (0, 1)$.

Dato $\omega \in \Omega$, consideriamo la funzione $x \mapsto b_\omega(x)$ definita come

$$b_\omega(x) = |W_x(\omega)|^\alpha, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Tranne che per $\omega \in N$ evento trascurabile, l'insieme $Z(\omega)$ degli zeri della funzione $b_\omega(\cdot)$

$$Z(\omega) = \{x \in \mathbb{R} : b_\omega(x) = 0\}$$

è un insieme perfetto, non vuoto e trascurabile secondo Lebesgue (T122).

Se $x_0 \in Z(\omega)$, la funzione costante $X_t^{(-)} = x_0$ è una soluzione.

Ma la funzione $H_{x_0}(r)$ vista sopra, o più precisamente

$$H_{x_0, \omega}(r) := \int_{x_0}^r \frac{1}{b_\omega(x)} dx$$

è ancora ben definita quando $\alpha \in (0, 1)$: per ogni $T > 0$ si ha che $W_t = W_t - W_0 \sim \mathcal{N}(0, t)$ e quindi, a meno ingrandire trascurabilmente N

$$E \left[\int_{-T}^T \frac{1}{|W_t|^\alpha} dt \right] = \int_{\mathbb{R}} \int_{-T}^T \frac{1}{|x|^\alpha \sqrt{2t\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2|t|}\right) dt dx =$$

siccome l'integrando è positivo scambiamo con Fubini, e poi

$$\begin{aligned} \int_{-T}^T \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{|x|^\alpha \sqrt{2t\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2|t|}\right) dx dt &\leq \int_{-T}^T \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{|x|^\alpha \sqrt{2t\pi}} dx dt = \\ &= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{|x|^\alpha} dx \int_{-T}^T \frac{1}{\sqrt{2t\pi}} dt < +\infty. \end{aligned}$$

La funzione $H_{x_0, \omega}$ è strettamente crescente (dato che $Z(\omega)$ è Lebesgue trascurabile) e continua, quindi possiamo definire

$$X_t^{(+)} := H_{x_0, \omega}^{-1}(t)$$

e questa è un'altra soluzione della ODE: la soluzione massimale di una grande famiglia di soluzioni costruite per incollamento in modo analogo all'esempio 158.

Osservazione 161 *In particolare notiamo che $H_{x_0,\omega}^{-1}$ è di classe \mathcal{C}^1 , anche dove $H_{x_0,\omega}$ non lo sia: per definizione infatti $H'_{x_0,\omega} = \frac{1}{b_\omega}$ e nelle singolarità vale $+\infty$. Quindi la derivata di $H_{x_0,\omega}^{-1}$ in tali punti esiste e vale 0.*

Se non imponiamo la continuità possiamo costruire strani esempi più facilmente.

Innanzitutto possiamo avere una più netta separazione delle traiettorie.

Esempio 162 *Sia $b(x) = \operatorname{sgn}(x)$, $x_0 = 0$.*

Le soluzioni estremali sono $X_t^\pm = \pm t$.

Poi possiamo costruire esempi con separazione delle traiettorie per ogni condizione iniziale in tempi arbitrariamente brevi.

Esempio 163 *Sia $b(x)$ la funzione di Dirichlet*

$$b(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{Q}; \\ 1, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Per ogni condizione iniziale $x_0 \in \mathbb{Q}$ abbiamo la soluzione minimale $X_t^{(-)} = x_0$ e la massimale $X_t^{(+)} = x_0 + t$.

Da ogni $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ abbiamo innanzitutto la soluzione $X_t^{(-)} = x_0$.

Però possiamo anche considerare, per ogni $t_0 > 0$ tale che $x_0 + t_0 \in \mathbb{Q}$, la soluzione uguale a $x_0 + t$ su $[0, t_0]$, e poi uguale alla costante $x_0 + t_0$ su $[t_0, +\infty)$.

L'istante di separazione t_0 può essere preso arbitrariamente piccolo.

Dunque, anche per $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, non esiste un'unica soluzione nemmeno localmente.

In dimensione $d > 1$ si possono costruire esempi ancor più strani, e anche nel caso continuo non si hanno semplici criteri (come $b(x_0) \neq 0$) che garantiscano l'unicità.

Bibliografia

- 1) Daniel Revuz, Marc Yor. *Continuous martingales and brownian motion*. Terza edizione. Springer; 1991.
- 2) Walter Rudin. *Functional analysis*. Seconda edizione. McGraw Hill; 1991.
- 3) Giorgio Letta. *Dispense del corso "Probabilità"*. Pisa; 2008.
- 4) Giorgio Letta. *Dispense del corso "Teoria della misura"*. Pisa; 2009.
- 5) Giorgio Letta. *Dispense del corso "Processi stocastici"*. Pisa; 2010.
- 6) Ioannis Karatzas, Steven E. Shreve. *Brownian motion and stochastic calculus*. Springer-Verlag; 1988.
- 7) Joseph L. Doob. *Classical potential theory and its probabilistic counterpart*. Springer-Verlag; 1984.
- 8) Jean Francois Le Gall. *Sur les fonctions polaires pour le mouvement brownien*. Seminaire de Probabilités XXII, 186-189; Strasburgo; 1988.
- 9) S. E. Graversen. *Polar functions for brownian motion*. Z. Wahrsch. verw, Gebiete 61, 261-270; 1982.
- 10) Marco Abate, Francesca Tovena. *Curve e superfici*. Ristampa con modifiche. Springer-Verlag; 2008.
- 11) Keniti Sato, Hiroshi Tanaka. *Local times on the boundary for multi-dimensional reflecting diffusion*. Proc. Japan Acad. vol 38 n.10, 699-702; 1962.
- 12) Franco Flandoli. *Random perturbation of PDEs and fluid dynamic models*. École d'été de probabilités de Saint Flour 2010. Springer; 2011.
- 13) A. S. Cherny. *On the strong and weak solutions of stochastic differential equations governing Bessel processes*. Stochastic Rep. 70, 213-219; 2000.
- 14) A. S. Cherny. *On the uniqueness in law and the pathwise uniqueness for stochastic differential equations*. Theory Probab. Appl. vol 46 n.3; 2001.