Problemas, Maestros, y la Resolución de Problemas

Dedicatoria:
El tema de la solución de problemas por apoyos como las calculadoras gráficas y las computadoras, era parte de los intereses profesionales que se compartían y disfrutaban en pláticas personales y otras actividades académicas con Elfriede.
En virtud del fallecimiento de esta querida amiga y compañera de trabajo, Elfriede Wenzelburger Guttenberger, se dedica a ella esta modesta exposición sobre uno de sus temas favoritos.

Introducción

En la actualidad existen personas que cuando se refieren a la enseñanza de las matemáticas lo hacen en términos de contenidos. Valoran el currículo matemático a partir de la inclusión o ausencia de contenidos. Consideran que una persona tiene formación matemática cuando muestra conocimiento y manejo de temas diversos de matemáticas.

De este modo se constata la poca importancia que se da a los beneficios potenciales que se pueden obtener con el aprendizaje de la matemática en diversos niveles educativos. Se prefiere la acumulación de información, en vez de la habilidad para procesar los contenidos y descubrir relaciones entre diferentes objetos matemáticos. Se privilegia la memoria, en vez de la capacidad de razonamiento.

Esta concepción ha propiciado muchos errores en la educación y formación de las personas. También ha generado una serie de mitos y supersticiones en torno a las matemáticas y su dominio.

Se olvida frecuentemente que en educación la pregunta clave no es ¿qué?, sino ¿para qué? El contenido que se incorpora a los planes de estudio debe

Eduardo Mancera Martínez
Instituto Latinoamericano de
la Comunicación Educativa (ILCE)
Fortino Escareño Soberanes
Colegio de Profesores de Educación
Secundaria "Moisés Sáenz"

responder a necesidades sobre la formación de individuos o a perfiles de ciertas profesiones, pero también debe ser transmitido en formas adecuadas para el logro de las metas planteadas.

Si estamos de acuerdo en que la matemática es una manera de "ver el mundo", que permite participar en la creación y el descubrimiento, resulta que el contenido por sí solo no basta para modelar o traducir relaciones a números o nociones espaciales, porque de nada sirve la acumulación de información ni la destreza operativa si no se sabe cómo relacionar la información que se posee.

La historia de la matemática nos remite constantemente a esa forma de "ver el mundo", que trae como consecuencia una acumulación de conocimiento, pero este acopio se desplaza a un segundo lugar ante la genialidad, la perspicacia, la sagacidad o la originalidad con que fueron abordados diversos fenómenos o situaciones de la vida diaria o de la sociedad, para obtener esa herencia de saberes e informaciones.

El punto de despegue para emprender el vuelo en busca de relaciones cuantitativas o espaciales, fue el planteamiento de problemas y los intentos por resolverlos. Podemos modificar un conocido refrán para indicar esta situación "detrás de un gran tema de matemáticas hay un gran problema". Incluso en la actualidad gran parte de la actividad matemática creativa es provocada por el surgimiento de un problema, por la inquietud de explorar nuevos horizontes.

Así se puede reconocer una comunión entre los conocimientos matemáticos y los problemas. Uno se vincula a los otros de manera natural, en una relación de fuerte dependencia. Sin embargo, no todos los problemas estuvieron ligados a necesidades sociales, sino que los hay también provocados por el desarrollo de la teoría.

A pesar de la importancia que se da a los problemas en el desarrollo de la matemática, en los últimos veinte años se ha observado su ausencia en la enseñanza. Se quitó la esencia al contenido y se presentan los temas como reglas y procedimientos por aprender. Algunos maestros en tono paternal, o tal vez sacerdotal, dicen "lo debes aprender porque algún día te servirá".

Los problemas de matemáticas, donde se aplican tan "complejas" cosas y quitan el sueño a los estudiantes, son como las cintas cinematográficas, cuya clasificación determina si se pueden ver o no. "¿Las aplicaciones serán sólo para adultos?", se preguntan los estudiantes menores de 18 años. "¿Las aplicaciones serán algún tipo de pornografía que avergüenza a los más liberales?", se interrogan los mayores de 18 años, porque en ningún caso llegan a trabajar las aplicaciones prometidas desde la infancia.

Tal vez como reacción a este abandono se ha planteado en diversos foros que los problemas matemáticos tienen un papel importante en la enseñanza de la matemática. En venganza todos los congresos nacionales e internacionales dedican un espacio considerable a la discusión de la importancia de este asunto, o el planteamiento de propuestas didácticas relacionadas con los procesos de resolución de problemas. Incluso algunos, como el célebre matemático —y tal vez revanchista— Hilbert, plantean problemas que inquietan o revientan cerebros de individuos de la comunidad matemática en el proceso de búsqueda de una respuesta.

Sin embargo, a pesar de ser un tema que ha despertado el interés, de muchos investigadores y docentes, no se ha traducido en propuestas concretas que tengan impacto en la planeación e instrumentación didáctica.

En este artículo se presentará una propuesta para el desarrollo del trabajo docente, en el cual la solución de problemas es un elemento principal. Los planteamientos al respecto han sido obtenidos del trabajo directo con estudiantes y maestros de los niveles medios.

Las ideas que se expondrán son el resultado de la reflexión acerca de la instrumentación didáctica que impone el enfoque de solución de problemas; visto desde una perspectiva que integra una concepción de la matemática como un campo de conocimiento dinámico, no acabado, que se crea y recrea constantemente; una posición epistemológica que pondera la construcción del conocimiento; una concepción de la enseñanza que intenta recuperar los aspectos comunicacionales y culturales, que implica la enseñanza y el aprendizaje de la matemática.

¿Qué es un problema?

Antes de iniciar la exposición y discusión de la propuesta motivo de este artículo, vale la pena dedicar un espacio para acotar algunos términos y no dejar sueltas las interpretaciones.

La concepción que se tiene sobre los problemas es variada. Se habla de ellos como ejercicios, problemas de aplicación, acertijos y otras variantes. No hay acuerdo en este punto, pero independientemente de la concepción que se sustente, queda claro que debe ser una situación que despierte el interés del estudiante.

En principio, una estrategia para responder a la pregunta "¿qué es un problema?", puede ser enfocándola de otra manera, esto es, respondiendo a la interrogante, "¿qué no es un problema?"

Hay consenso en que un problema no implica exclusivamente la aplicación de fórmulas o rutinas. Se espera que un problema propicie la reflexión. Sin embargo, algunos de esos problemas son para gente experimentada o deseosa de una gimnasia mental, lo cual no se presenta de manera característica entre nuestros estudiantes; con ellos más bien se requiere motivar esa curiosidad y actitud de búsqueda [Santos; 1993].

En el trabajo docente los problemas no deben restringirse a los acertijos o a problemas de corte teórico poco cercanos a las posibilidades y expectativas de los estudiantes.

La práctica docente permite observar que, por lo general, basta que los problemas se refieran a situaciones conocidas por los estudiantes o que pueden conocer de manera inmediata [Mancera; 1991]. Pueden ser noticias en diarios o revistas, en contenidos de otras materias o de situaciones que aunque no son frecuentes o ni siquiera se presentan en su vida cotidiana, sí puedan ser entendidas por ellos, y construir o imaginarse modelos para identificar relaciones. No se descartan algunos juegos de acertijo, como la adivinación de edades o números, entre otros.

En relación con los aspectos didácticos, los problemas que se elijan deben propiciar la presentación de muchas soluciones, porque la intención en el aula es propiciar la discusión y asegurar que los estudiantes puedan resolver un problema de alguna manera para evitar la frustración e incrementar su autoestima, de manera que se motiven por la posibilidad patente de enfrentar un problema a partir de sus propios recursos; con lo que saben o con lo que tienen. No importa que tengan limitaciones o defectos en la comunicación de sus ideas, pues la discusión permitirá corregir algunas de esas dificultades.

En este orden de ideas, un problema como el descrito encontrará obstáculos con el ordenamiento curricular, expuesto siempre en forma de secuencias "lógicas" del contenido que, por lo general, invierten la ontogénesis, el origen de los conceptos, puesto que al requerir más de una forma de resolverlo se hace necesario el manejo de contenidos diversos. Sin embargo, como veremos, los problemas del tipo aludido si se trabajan en cierta forma, lejos de propiciar la dispersión y el desorden en los temas del curso, pueden favorecer el desarrollo de las propuestas curriculares.

¿Qué fue primero: la aritmética, el álgebra o la geometría?, . . ¿quién lo sabe?. . . La historia no presenta orden alguno; el desarrollo de una rama propició o impulsó el desarrollo de otra. ¿Cómo podemos decir que es lógico cierto orden? si dicho orden lógico, frecuentemente ligado a la formalización del conocimiento, representa una forma secuencial y convencional de construir el conocimiento desde una perspectiva totalmente disciplinaria, que nada tiene que ver con el orden lógico desde una perspectiva psicopedagógica o epistemológica. De tal modo, las secuencias temáticas pueden resultar totalmente ficticias.

Estrategias didácticas y el enfoque de solución de problemas

Se habla de la complejidad que tiene la introducción de estrategias didácticas relacionadas con la solución de problemas. Pero en el fondo están presentes una serie de supuestos y creencias no explícitos que conducen al planteamiento de dichas observaciones.

Se afirma que una de las objeciones principales para desarrollar el enfoque de solución de problemas es la falta de claridad de la manera en que se pueden alcanzar los objetivos educativos. Porque resolver un problema es una actividad que lleva mucho tiempo y esto limitaría el tratamiento de los contenidos que señala el programa.

Esto puede estar relacionado con la concepción que se tiene del alumno y sus posibilidades intelectuales, y con las aptitudes que tienen algunos docentes en el manejo de actividades que requieren una intensa participación de los estudiantes. Pero, sobre todo, como la concepción más difundida es la de una matemática liberada de las impurezas de las aplicaciones, resulta extremadamente complicado contar con una colección de problemas adecuados.

Se dice que los problemas deben incluirse, pero al final de una clase expositiva donde se le indica al estudiante cómo resolverlos, o se le proporcionan las "herramientas" para construir "la solución". Tal actitud, muy difundida, que evoca un comportamiento paternalista o de índole sacerdotal, descalifica de entrada cualquier perspectiva que no sea la tradicional, que como sabemos, está asociada a una imagen directiva y autoritaria de la enseñanza.

No se sabe si una nueva propuesta pueda modificar la situación actual, pero lo que sí se conoce es que las prácticas tradicionales no han rendido los frutos esperados [Guevara; 1991].

Como veremos posteriormente, el contenido, en general, no es un obstáculo para resolver un problema determinado. ¿Cuántos problemas de los apartados de álgebra de los cursos del nivel medio pueden resolverse más fácilmente con un razonamiento aritmético?

Algunos dicen que son contradictorias las propuestas relativas al enfoque de solución de problemas, porque en ciertas versiones se debe plantear un problema al inicio de un tema nuevo para introducir un contenido. ¿Cómo lo van a resolver los estudiantes si no se ha tratado el tema correspondiente?

Debemos tomar en cuenta que las personas poseen muchos recursos para resolver problemas, y que éstos son estrategias personales que les han dado resultado o que generan en el momento, en realidad no parten de cero y pueden intentar encontrar la solución e incluso encontrar un procedimiento que resuelva el problema de manera original [Ávila, 1990; y Nunes, 1987].

La gente resuelve problemas con los conocimientos que posee, con las habilidades que tiene, con la perspectiva que le sienta mejor a su estilo, o con la estrategia que mejor le acomoda. ¿Eso está mal?, ¡claro que sí! En efecto, si se queda en este nivel, si no se exploran y se mejoran las estrategias, y si no se modifican los procedimientos erróneos. El maestro debe utilizar las posibilidades de los alumnos como plataforma para construir el nuevo conocimiento.

Un alumno puede resolver un problema por una estrategia propia; esto puede hacer que dicha estrategia se arraigue en él y sea decisiva en un futuro, pero si somos capaces de mostrarle que esa es limitada o que existen otras mejores que le simplifican el trabajo, con toda seguridad que estará dispuesto al cambio. No acatará ciegamente nuestros consejos ni aceptará nuestras promesas sobre lo que tiene que aprender, debemos convencerlo de ello. Ese es el papel del maestro; son los retos que debemos aceptar cotidianamente y no intentar resolverlos por actos de fe o actitudes monacales, o por principios de autoridad.

Si dejamos a los estudiantes resolver los problemas por sus propios medios tendremos una riqueza de puntos de vista que nos asombrará sin duda, y estableceremos relaciones didácticas y de comunicación más importantes. Nuestro papel de maestro se desmoronará ante la aceptación del papel de alumno, porque de ellos, de los estudiantes, se aprende mucho, entre otras cosas a ser maestro, mientras que el alumno sin saberlo, sin pedanterías, se convierte en maestro. Así, en un proceso de intercambio de funciones se produce el ámbito propicio para la construcción del conocimiento, no sólo por parte del alumno, sino también por parte del maestro.

Las creencias y su influencia

El enfoque de solución de problemas requiere una visión diferente no sólo de la clase de matemáticas, sino también una revaloración de sus contenidos, metas y significados. Se requiere modificar la concepción sobre la matemática y su enseñanza. Y esto debe quedar claro al inicio de cualquier discusión sobre el tema.

La enseñanza de la matemática no está al margen de las posiciones epistemológicas, ideológicas y filosóficas. Los maestros sustentan posiciones al respecto de manera explícita e implícita [Steiner; 1987 y Thompson; 1984].

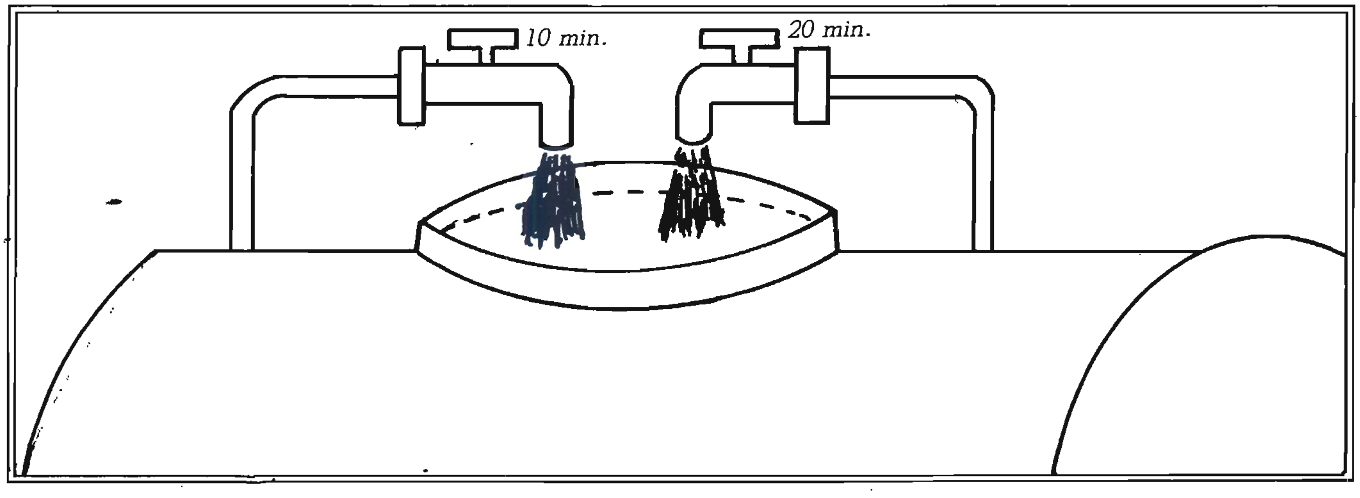
La perspectiva estructural y estática de la matemática ha conducido a desarrollar actitudes o creencias acerca de la solución de un problema. Se dice: "encuentra la solución de. . ." como si sólo hubiera un camino para resolver un problema dado. La historia es pródiga en ejemplos de cómo una visión más amplia y una búsqueda constante de nuevos caminos para resolver un problema, produjo importantes avances en la matemática. No existe "la solución", pero sí se puede hablar de "una solución" a un problema concreto.

Un ejemplo

No vale la pena continuar si no se presenta una situación que "aterrice" estas reflexiones. Por ello se describe una experiencia obtenida con alrededor de 400 maestros y 100 estudiantes del nivel básico.

Para dar inicio plantearemos un problema:

Un depósito de agua puede llenarse con cualquiera de dos llaves o grifos, una de ellas puede hacerlo en 10 minutos, si descarga a toda su capacidad. La otra, trabajando también sola a toda su capacidad, puede llenarlo en 20 minutos. Si ambas llaves descargan simultáneamente a toda su capacidad, ¿cuánto tiempo tardarán en llenar el tanque?



La primera actividad, cuando se trabaja con maestros, consiste en solicitar que, sin resolver el problema, se indique el contenido que evoca. La mayor parte indica que es un problema de aritmética, en particular de proporcionalidad (aprox. el 80%); otros aluden al álgebra, sin explicitar el tema (aprox. el 15%); una minoría no opina, o se refiere a "temas de geometría" como el volumen (aprox. 5%).

Posteriormente, también sin resolver el problema, se pide que se indique una estimación de la respuesta. No faltan los apresurados que indican que debe ser 30 min. Tampoco faltan los que llaman a la cordura a dichos aventurados y les recuerdan que una sola llave lo llena en 20 min. Continúan los pacificadores, que para evitar altercados plantean que debe ser un promedio, 15 min; con los ánimos ya más elevados, protestan otros indicando que una sola llave lo llena en 10 min. Después, . . . silencio. Hasta que alguien presenta como opción más de 5 min. y menos de 7, porque usando la llave más lenta, la cuarta parte se llena en sólo 5 min, y en el mismo tiempo, la más rápida llena la mitad, por lo que el resto no se debe llenar en a lo más de 2.5 min.

Como se observa, las actividades anteriores tuvieron un doble propósito. Primero asegurar que se tenía una idea de cómo resolverlo, sin enmarcar en un tema específico el problema, y asegurarse de que se entendía el enunciado sin recurrir a preguntas directas sobre los datos o las incógnitas. Además se ejercita una habilidad esencial para las matemáticas y la vida diaria: la estimación.

Posteriormente, se pide que lo resuelvan. . . ¿cómo?. . . ¡cómo puedan! Pero eso sí, ¡con mucho sentimiento!

Los resultados son asombrosos. Cabe un comentario acerca de esta parte: los maestros tardaron más que los estudiantes. Esta actividad no lleva más de 20 min. para que los estudiantes presenten más de tres opciones de solución. Sin embargo, los maestros se tardan a veces más del doble de ese tiempo. Esto no debe extrañar; la cautela y la discreción no son cualidades de nuestros alumnos, y sí nuestra, aunque esto es claramente una desventaja para aprender, porque los tiempos que requerimos para tener seguridad de que lo que hacemos es correcto, está más directamente relacionado con nuestro aprecio a una imagen. Los alumnos, libres de estos "problemillas", suelen ser más optimistas.

A continuación se presentarán algunas respuestas obtenidas en varias experiencias:

Solución A (50%):

De manera casi inmediata alguien presenta el siguiente procedimiento:

En 5 min. la llave A llena la mitad (½) del tanque, y la llave B llena ¼ de manera que juntas habrán llenado

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$$

Luego continúan por un procedimiento de aproximación, como el siguiente: en 1 min. la llave A llena 1/10, y la B llena 1/20, de modo que juntas habrán llenado 3/20.

Por tanto, en 6 min. se habrán llenado

$$\frac{3}{4} + \frac{3}{20} = \frac{18}{20}.$$

Posteriormente se hace un intento de hallar cuánto se llena en ½ min. y así se continúa, hasta encontrar una aproximación de la solución.

Solución *B* (10%):

Pocos se dan cuenta que si en 5 min. se llena ½ + ¼ = ¾ del depósito, el cuarto faltante se llena en la tercera parte de 5 min. De esta forma, la solución sería:

$$5 + \frac{5}{3} = 5 + 1\frac{2}{3} = 6\frac{2}{3}\ \text{. (min.)}$$

Solución *C* (5%):

Muy pocos también encuentran una relación entre los 3/20 que se llenan en 1 min. y que entonces en ⅓ de minuto se llena 1/20. De esta forma los 20/20 se llenarían en

$$20 \times \frac{1}{3} = 6\frac{2}{3}\ \text{. (min.)}$$

Generalmente esto sucede cuando se hace una tabla de variación proporcional, como la que sigue:

MINUTOS	1	2	3	4	5	6	7
PARTE LLENA	$\frac{3}{20}$	$\frac{6}{20}$	$\frac{9}{20}$	$\frac{12}{20}$	$\frac{15}{20}$	$\frac{18}{20}$	$\frac{1}{20}$

Solución *D* (20%):

Otra solución que se presenta de manera inmediata es por medio de una regla de tres y considerando las relaciones antes mencionadas:

"5 min. es a ¾ como x min. es a 1; por lo tanto:

$$x = \frac{5}{3/4} = \frac{5 \times 4}{3} = 6\frac{2}{3}\ \text{min.}$$

Esta es una solución muy popular.

Solución E (5%):

Una variante de la anterior es:

"1 min. es a 3/20, como x min. es a 1; por lo tanto:

$$x = \frac{1}{\frac{3}{20}}, \text{ y así } x = \frac{1 \times 20}{3} = 6\,\frac{2}{3} \text{ (min.)}$$

Solución F (5%):

Algunos se inspiran en el álgebra y plantean una ecuación como la que sigue:

$$\frac{x}{10} + \frac{x}{20} = 1$$

y de ahí que $3x/20 = 1$, es decir:

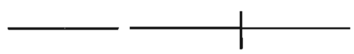
$$x = \frac{20}{3} = 6\,\frac{2}{3} \text{ (min.)}$$

Quienes optan por este camino a veces son muy mal vistos por los participantes.

Solución G (1%):

Algunos inspirados en la medición o la "geometría" ofrecen la siguiente respuesta:

Consideremos un segmento de recta:



Cada vez que un compañero coloca un trozo, otro coloca otro pedazo del doble, de modo que la relación es 2 a 1; quien pone 1 llena ⅓ de cada unidad de llenado del segmento; mientras que el otro llena 2/3. Así el tiempo de llenado será 2/3 de la llave (o grifo) más rápida (la que llena sola el tanque en 10 min.), o ⅓ de la llave más lenta (la que llena el depósito en 20 min.).

Solución H (1%):

Es una variante de la anterior planteada en términos de mosaicos, como si se colocaran en un piso, cada vez que una persona coloca uno, otra coloca dos:

y se vuelven a obtener las relaciones anteriores.

Solución I (1%):

Otros, a partir de la consideración excluyente de que una llave llena el doble de la otra, encuentra que la más rápida llena dos tercios, y la lenta, sólo un tercio.

Solución *J* (1%):

Una solución muy ingeniosa la propuso una niña y hasta hace poco, para beneplácito nuestro, un maestro. La niña razonó así: "Una llave es la más tardada, . . . la de 20 min.; y otra es más rápida, . . . la de 10 min., si la más rápida se divide en dos salidas de agua se obtienen dos llaves de 20 min., de tal manera que cuando la llave de 20 min. llena la tercera parte del tanque la otra ya llenó lo que faltaba.

Entonces, sin titubear, dice que la solución es $20 \div 3 = 6.666\ldots$,

Solución *K* (1%):

Un niño planteó una solución similar, pero llenando tres tanques: "Una llave llena el depósito en 20 min.; la otra llena dos tanques iguales en 20 min. también; . . . cuando la de 20 llena la tercera parte, ya se llenó todo".

Se encontró así la solución, y ¿ahora qué? Tradicionalmente, esto significaría el fin de la actividad. Pero coincidiendo con algunos investigadores [Schoenfeld; (1985)], llegar a la solución de un problema es el inicio de una rica experiencia matemática.

En efecto, la siguiente actividad consiste en solicitar que se planteen problemas similares al resuelto. Esto es, que se resuelvan de la misma forma pero que su contexto sea diferente:

Algunas de las respuestas obtenidas son las siguientes:

— "Si Juan sube andando por las escaleras fijas de una estación del metro, y tarda 20 s (segundos) en llegar arriba; si utiliza las escaleras eléctricas (inmóvil, de pie) tarda 10 s. ¿Cuánto tardaría si sube caminando también por las escaleras eléctricas?"

— "Pedro poda un jardín en 10 h y José lo hace en 20 h; si ambos trabajan juntos, ¿en cuánto tiempo terminarán de podar el jardín?"

— "María puede realizar una auditoría de un negocio en 10 días y Josefina en 20; si ambas trabajan juntas, ¿cuánto tiempo requieren para realizar la auditoría?"

— "Un tren recorre cierta distancia en 10 h, y otro la puede recorrer en 20 h; si ambos trenes recorrieran dicha distancia, partiendo de puntos opuestos, ¿en cuanto tiempo se encontrarían?

Esta actividad continúa, y se pide a los participantes que no utilicen los mismos valores numéricos de los datos del problema inicial, y que se planteen problemas que se resuelvan con el mismo procedimiento y sean de otros contextos.

La ventaja didáctica de esta actividad es evitar las inútiles repeticiones de procedimientos al resolver problemas del mismo tipo. Cuando los estudiantes discuten los problemas que se plantean, resulta interesante la forma en que argumentan su propuesta, y como ellos mismos pueden identificar si el problema que proponen cumple, o no, las condiciones solicitadas.

Queda por realizar una actividad más. Se concluye la experiencia regresando al problema original, pero solicitando que se den los datos necesarios para obtener como solución 7 min. exactos. También se puede pedir que el tiempo de llenado de una de las llaves o grifos sea el mismo, la solución sea otra, y que se encuentre el tiempo de llenado con la otra llave.

Esta actividad completa el ciclo propuesto para manejar los problemas en clase y promover el trabajo matemático en el aula. Tal tipo de actividades simulan, en parte, las que realiza un matemático formal. Recordemos que Choquet (1975) señalaba que los métodos de descubrimiento en matemáticas son:

- Relajamiento de axiomas
- Refuerzo de axiomas
- Estudio de estructuras próximas
- Creación de estructuras sometidas a exigencias previas.

El manejo propuesto de los problemas promueve estos métodos, valgan las proporciones, en contenidos al alcance de los estudiantes.

Por otra parte, se impulsa el desarrollo de aptitudes o habilidades matemáticas básicas como: flexibilidad del pensamiento, reversibilidad, generalización, estimación y transferencia, entre otras [Krutetskii; 1976].

La habilidad para resolver problemas, o mejor dicho, la aptitud para "hacer matemáticas", es lo más importante que puede aportarnos la escuela, ya sea como alumnos o como maestros. De nada sirve estudiar hasta el cansancio diversos temas de matemáticas si no aprendemos a relacionarlos, a utilizarlos para obtener nuevas estrategias.

Posibles desviaciones

Cabe señalar que con el enfoque de solución de problemas pueden surgir algunas desviaciones respecto de los objetivos curriculares, como cuando se centra la atención en los procesos de solución y no en los contenidos.

Incluso cuando se tienen en mente los contenidos escolares, puede haber desviaciones ocasionadas por las interesantes discusiones que se provocan en el salón de clase.

Otro ejemplo

El contenido que se trabajará debe estar muy relacionado con el problema que se utiliza para motivar dicho contenido. A modo de ejemplo, y de manera simplificada, se presenta la siguiente actividad para ilustrar lo anterior.

Problema

Un recipiente de aceite contiene 5¼ litros, con el cual se deben llenar botellas de ¾ de litro ¿Cuántas botellas se podrán llenar?

Estimación

Se pide una estimación de la solución:

$\frac{3}{4}$ es más o menos un litro, por lo que se deben poder llenar por lo menos 5 botellas.

Soluciones

Se pide que se resuelva precisamente el problema:

1) Procedimiento aditivo:

$\frac{3}{4} + \frac{3}{4} = 1\frac{2}{4}$; $1\frac{2}{4} + \frac{3}{4} = 2\frac{1}{4}$; $2\frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 3$; $3 + \frac{3}{4} = 3\frac{3}{4}$; $3\frac{3}{4} + \frac{3}{4} = 4\frac{2}{4}$

y así, $4\frac{2}{4} + \frac{3}{4} = 5\frac{1}{4}$.

Como se sumó siete veces $\frac{3}{4}$, se llenarían 7 botellas.

2) Procedimiento sustractivo:

$5\frac{1}{4} - \frac{3}{4} = 4\frac{2}{4}$; $4\frac{2}{4} - \frac{3}{4} = 3\frac{3}{4}$; $3\frac{3}{4} - \frac{3}{4} = 3$; $3 - \frac{3}{4} = 2\frac{1}{4}$; $2\frac{1}{4} - \frac{3}{4} =$ $1\frac{2}{4}$; $1\frac{2}{4} - \frac{3}{4} = \frac{3}{4}$.

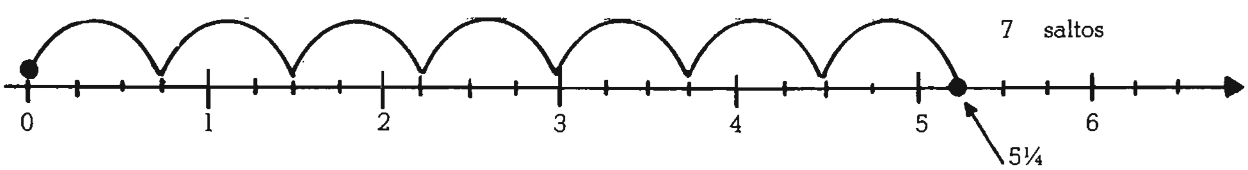
Como se restó siete veces $\frac{3}{4}$, se llenarían 7 botellas.

3) Procedimiento multiplicativo:

$\frac{3}{4} \times 1 = \frac{3}{4}$; $\frac{3}{4} \times 2 = 1\frac{2}{4}$; $\frac{3}{4} \times 3 = 2\frac{1}{4}$; $\frac{3}{4} \times 4 = 3$; $\frac{3}{4} \times 5 = 3\frac{3}{4}$;
$\frac{3}{4} \times 6 = 4\frac{2}{4}$; $\frac{3}{4} \times 7 = 5\frac{1}{4}$.

Como se multiplicó siete veces se pueden llenar siete botellas.

4) Uso de la recta numérica:



5) Por división de enteros:

$5\frac{1}{4}$ es lo mismo que 21/4, y como esto se debe repartir en cantidades de $\frac{3}{4}$, basta dividir $21 \div 3$ para obtener la respuesta, que será 7.

(En este caso se dice que 21/4 es semejante a tener 21 manzanas, y que $\frac{3}{4}$ es similar a tener 3 manzanas. Con esta analogía, si se desea apilar 21 manzanas en montones de tres, se podrían formar 7 pilas. También, si se desea repartir 21 "cuartos" en montones de tres, se podrían formar siete montones).

Nuevos contextos

Se pide que se planteen problemas que se resuelvan de la misma manera pero que hablen de otras situaciones.

1) Un listón de $5\frac{1}{4}$ m se desea dividir en cintas de $\frac{3}{4}$ m.

   ¿Cuántas cintas podrán obtenerse?

2) Una carrera de relevos debe cubrirse en $5\frac{1}{4}$ km; si cada relevo correrá $\frac{3}{4}$ km, ¿cuántos relevos por equipo se necesitarán?

3) Un disco compacto se escuchó $5\frac{1}{4}$ h; si su duración es de $\frac{3}{4}$ h, ¿cuántas veces se escuchó?

Modificación de datos

Se regresa al problema original y se plantean preguntas como:

1) Si se quisieran llenar 14 botellas con los $5\frac{1}{4}$ litros de aceite, ¿qué capacidad debe tener cada una de ellas?

2) Si se desearan llenar 14 botellas con $\frac{3}{4}$ de litro de capacidad, ¿cuántos litros de aceite se necesitarían?

3) Si se quiere llenar 14 botellas, ¿qué cantidad de aceite se necesitaría y qué capacidad debe tener cada envase?

La última solución permite introducir la división de fracciones convirtiendo un denominador común ambas fracciones:

$$5\tfrac{1}{4} \div \tfrac{3}{4} = \tfrac{21}{4} \div \tfrac{3}{4} = \tfrac{21}{3} = 7$$

$$3\tfrac{5}{8} \div \tfrac{3}{4} = \tfrac{29}{4} \div \tfrac{3}{4} = \tfrac{29}{3} = 9\tfrac{2}{3}$$

$$7\tfrac{1}{5} + \tfrac{3}{10} = \tfrac{36}{5} \div \tfrac{3}{10} = \tfrac{360}{10} \div \tfrac{3}{10} = \tfrac{360}{3} = 120$$

$$5\tfrac{1}{7} \div \tfrac{3}{5} = \tfrac{36}{7} \div \tfrac{3}{5} = \tfrac{180}{35} \div \tfrac{21}{35} = \tfrac{180}{21} = 8\tfrac{12}{21}$$

Esto permite introducir la regla del producto cruzado, y llegar hasta donde uno se proponga. Didácticamente, esta secuencia permite que el estudiante, para encontrar el resultado de una división de fracciones, pueda recurrir a diversos caminos y reconstruir el camino para recordar la regla correspondiente.

Comentarios finales

No existe acuerdo general en relación con la presencia de los problemas en los planteamientos didácticos. ¿Deben utilizarse al inicio de un tema? ¿Al final? ¿A veces al principio y a veces al final? No obstante, lo real es su ausencia en muchos cursos.

Resulta entonces paradójico el interés que ha despertado este tema y la respuesta real en el ámbito docente. Sin embargo, no resulta tan extraño a la luz de los intereses de los públicos participantes en la contienda: investigadores y maestros.

El investigador en educación matemática utiliza las situaciones problemáticas como una herramienta de trabajo permanente; el maestro, por su parte, sujeto a otras presiones y exigencias, considera la necesidad de obtener logros inmediatos en los resultados escolares. La reflexión teórica y la profundización en los problemas de enseñanza, se apartan de los problemas prácticos cotidianos y de la docencia.

En un intento de integrar en una propuesta la experiencia obtenida como docentes e investigadores, se hicieron los anteriores planteamientos, procurando enfatizar su utilidad en la planeación didáctica.

El usar los problemas como introducción a los temas del curso, permite a los estudiantes darse cuenta de la importancia, en términos de utilidad, de lo que se intenta abordar en clase. De esta forma, preguntas como: ¿Para qué sirve?, quedan nulificadas o por lo menos, matizadas.

Como se dijo anteriormente la matemática se ha desarrollado porque la solución a los problemas no se ha considerado satisfactoria, y se buscan nuevas alternativas y enfoques más generales. No puede decirse que: "lo hecho, hecho está". Por lo contrario, lo hecho nunca determina la última fase de los logros del pensamiento, sino que es el punto de partida de otros desafíos y cuestionamientos.

Evidentemente una propuesta como la presentada con anterioridad implicará modificar la tradicional "cátedra" de matemáticas. Requiere una transformación radical del trabajo docente, en la que los estudiantes puedan discutir, exponer y valorar sus puntos de vista.

¿Cómo se puede desarrollar el pensamiento crítico si no se ejerce continuamente en clase? ¿Cómo se puede educar para la democracia si no se aprende a participar y a respetar las intervenciones de los demás? La matemática ha perdido este sentido educativo, y tenemos que recuperarlo.

Sobre todo hay que asegurarnos de que los estudiantes son capaces de procesar la información que obtienen. El conocimiento resulta inútil si no se sabe como relacionarlo. La matemática —se dice— tiene la función de apoyar a los estudiantes en el desarrollo del razonamiento. ¿Cómo se puede lograr esto por métodos que enfatizan la repetición y la imitación? Se aprende a leer, leyendo; a escribir, escribiendo; por extensión, podemos decir: se aprende matemáticas, haciendo matemáticas, participando con las creaciones personales, comprometiéndose en el descubrimiento de relaciones cuantitativas y espaciales.

La matemática no está acabada, no es un conocimiento terminado; se construye día a día, y en las aulas podemos participar en esa construcción creando nuestras matemáticas conjuntamente con nuestros alumnos. **¡Dejemos que las matemáticas entren a nuestra clase de matemáticas!**

Referencias

Santos, L. M. (1993); "La resolución de problemas: Elementos para una propuesta en el aprendizaje de las matemáticas". Programa Nacional de Formación y Actualización de Profesores de Matemáticas, *Cuader-*

nos de Investigación, **No.** 25, México.

Mancera, E. (1991); "La matemática de la educación básica: El enfoque de la modernización educativa"; *Educación Matemática*, Vol. 3, **No. 3**, México.

Guevara, Gilberto (1991); "México: ¿Un país de reprobados?"; *Nexos*, junio, México.

Ávila Alicia (1990); "Las estrategias aritméticas de los adultos no alfabetizados". Tesis de maestría no publicada. Colegio de Pedagogía, UNAM, México.

Nunes, Terezinha (1987); "Written and Oral Mathematics"; *Journal for Research in Mathematics Education*, Vol. 18, **No. 2**, USA.

Steiner, H. (1987); "Philosophical and epistemological aspects of mathematics, and their interaction with theory and practice in mathematics education"; *Learning of Mathematics*, Vol. 7, **No 1**, Canadá.

Thompson, Alba (1984); "The relationship on teacher's conceptions of mathematics, and mathematics teaching to instructional practice"; *Educational Studies in Mathematics*, Vol. 15, Holland.

Schoelnfeld, A. (1985); *Mathematical Problem Solving*; Academic Press, USA.

Krutetskii, V. (1976); *The phychology of mathematical abilities in school children*; The University of Chicago Press, USA.

Choquet, J. (1975): "El análisis y Bourbaki"; en Hernández, J.: *La enseñanza de la matemática moderna*; Alianza Universidad, España.