■ EDUCACIÓN MATEMÁTICA ■ Vol. 5 - No. 3 • Diciembre 1993 ■ © GEI ■ Pág. 39 ■

La Matemática expulsada de la escuela*

Este artículo, dirigido a maestros de educación primaria, contiene algunas reflexiones acerca de una característica de las matemáticas escolares en el nivel básico: la exclusión de los conocimientos informales que tienen los alumnos.

Se argumenta que, sin embargo, la puesta en juego de conocimientos informales representa, para los alumnos, una vía importante para aprender a crear procedimientos originales de solución a problemas y, sobre todo, forma parte del proceso que les permite acceder a los conocimientos formales de las matemáticas, de manera que éstos tengan mayor sentido para ellos.

Las matemáticas de Margarita

Margarita es una mujer alta, fornida, morena, de pelo corto, negro y ondulado, ojos oscuros, y su semblante se ve demacrado. Tiene 37 años, es casada y ha tenido 10 hijos cuyas edades oscilan entre los 8 y los 22 años. Ha trabajado desde muy joven en los quehaceres domésticos, lavando y planchando ajeno. Nunca fue a la escuela, no sabe leer ni escribir, y sólo conoce la representación de los números del 1 al 10.

Ella es uno de los adultos que fueron entrevistados en el Proyecto de Investigación "Conceptualizaciones matemáticas de Adultos no Alfabetizados"[1] que se llevó a cabo en el Departamento de Investigaciones Educativas, en el año de 1987.

Durante la entrevista, Margarita proporcionó algunos datos que se utilizaron para plantearle problemas matemáticos que resolvió acertadamente, aunque en varias ocasiones comentó no saber nada: *"Es que yo no sé nada, no puedo"*.

David Block y Martha Dávila

DIE-CINVESTAV-IPN

---

* Ponencia presentada en la "Semana de la Escuela Pública", organizada por la Fundación SNTE para la Cultura del Maestro Mexicano. Del 1 al 7 de julio de 1991. México, D. F.

[1] Proyecto de Investigación: "Conceptualizaciones matemáticas en adultos no alfabetizados". Ferreiro, E., Fuenlabrada, I. (responsables). Nemirovsky, M. (coordinación). Nemirovsky, M., Block, D., Dávila, M. (equipo de investigación). 1987. DIE-CINVESTAV-IPN.

Veamos cómo se desempeña Margarita frente a algunos de los problemas que se le plantean:

Entrevistador: "*¿Cuánto vale ahorita el camión?*"
(refiriéndose a lo que cobran por el trayecto en el autobús)

Margarita: "*Pues ahorita están cobrando veinte pesos*"

Entrevistador: "*Si yo le dijera que me gasté quinientos cuarenta pesos en camiones a lo largo de todo el mes, ¿usted podría saber cuántas veces usé el camión?*"

M.: "*Sí*"

E.: "*¿Cómo?*"

M.: "*Bueno, pues haciendo la cuenta*"

E.: "*¿Cómo?*"

M.: "*¿Quinientos qué, me dijo?*"

E.: "*Me gasté quinientos cuarenta pesos durante el mes, en viajes de veinte pesos. Usted, a partir de esto, ¿podría adivinar cuántas veces me subí a un camión?*

M.: (Se queda pensativa, tiene las manos sobre las piernas, suelta la risa y dice): "*se subió veintisiete veces al camión*".

E.: "*Ahora, ¿me puede platicar cómo le hizo*"?

M.: "*Bueno pues, es que si cobran veinte pesos, cien pesos tiene cinco veintes, con cien pesos se sube cinco veces, ¿no?*

E.: "*Ajá*"

M.: "*Entonces, si se sube diez veces son doscientos, si se sube quince veces son trescientos* (se ríe). *Si se sube veinte veces son cuatrocientos pesos y si se sube veinticinco veces son quinientos pesos* (se ríe). *Y sobran otros dos veintes, son veintisiete veces*" (se ríe divertida).

En la resolución de este problema cabe destacar, por un lado, la claridad muy particular en Margarita para explicitar los procedimientos que siguió para llegar a los resultados de los problemas (en general, esta claridad no se dio con todos los sujetos que se entrevistaron), y por otro lado, la habilidad que demostró en el manejo de algunos elementos matemáticos, de manera implícita, en los procedimientos que utilizó para resolver los problemas.

En este caso, el problema que se le planteó podía resolverse con la división (540 ÷ 20). Margarita, para resolverlo, hace lo siguiente:

Reduce el problema a 100 ÷ 20. Subyace una descomposición del dividendo:

$$540 = 100 + 100 + 100 + 100 + 100 + 20 + 20$$

Resuelve la división 100 ÷ 20, buscando cuántas veces cabe el 20 en 100:

$$100 = 20 + 20 + 20 + 20 + 20$$

Encuentra que el 20 cabe 5 veces en el 100.

Posteriormente, se puede apreciar en su explicación el manejo de la relación proporcional entre las veces que se usa el autobús y el costo:

	Veces	Pesos
	5	100
	10	200
	15	300
	20	400
	25	500
	1	20
	1	20
Total:	27	540

Fue necesario que Margarita llevara mentalmente una doble cuenta: por un lado, el número de veces que se subía al camión, y por otro, la suma de los cientos de pesos gastados.

Si se desea describir el procedimiento de Margarita con una propiedad formal de la división, puede destacarse que, implícitamente, aplica la propiedad distributiva de la división con respecto a la suma:

$$\begin{aligned} 540 \div 20 = {} & (100 + 100 + 100 + 100 + 100 + 20 + 20) \div 20 = \\ & (100 \div 20) + (100 \div 20) + (100 \div 20) + (100 \div 20) \\ & + (100 \div 20) + (20 \div 20) + (20 \div 20) \end{aligned}$$

Esta misma propiedad sustenta, junto con otras propiedades, nuestro algoritmo de la división.

Dos concepciones de lo que es hacer matemáticas

Veamos cómo resuelve el siguiente problema una niña de 4° grado de primaria:

Talia 4°.C

Jugué 2 partidos de balero. En el último juego gané 69 puntos. Con los que gané en el primer juego, ahora tengo 83 puntos. ¿Cuántos puntos gané en el primer juego?

$$\begin{array}{r} 2 \\ 69 \\ \underline{83} \\ 154 \end{array}$$

$\mathcal{R} = 154$

Talía no relaciona los datos de manera adecuada, sino que aplica la suma sin entender de qué se trata el problema, usa todos los datos que aparecen en el texto, sin discriminar aquéllos que no le sirven para resolverlo. Utiliza las operaciones que la escuela le ha enseñado pero sin echar a andar su capacidad de razonamiento. Tampoco hace uso de los recursos propios que le sirven fuera de la escuela para resolver situaciones aún más difíciles.

Estos ejemplos, aunque extremos, expresan de manera muy viva un hecho inquietante: nuestros alumnos no logran resolver satisfactoriamente los problemas, aunque conozcan las mecanizaciones, mientras que las personas que no fueron nunca a la escuela, que no saben escribir ni conocen los números escritos, mayores que 10, han desarrollado una capacidad sorprendente para resolver problemas aritméticos y geométricos que tienen que ver con su vida diaria.

Frente a esto surge una primera pregunta: lo que hace Margarita para resolver problemas, ¿son matemáticas? Si por saber matemáticas entendemos sólo conocer el lenguaje convencional y los algoritmos canónicos (es decir, los procedimientos usuales para resolver las operaciones), es cierto que Margarita no sabe. Pero si, atendiendo a los objetivos señalados como prioritarios en la enseñanza escolar, definimos "saber matemáticas" como tener la capacidad de usar flexiblemente herramientas matemáticas para resolver los problemas que se nos presentan en nuestra vida, ¡vaya que Margarita sí sabe matemáticas! Según esta misma definición, nuestros alumnos egresados de primaria quizá no quedarían tan bien parados.

Está en juego aquí, entonces, nuestra concepción de qué son las matemáticas: un conjunto de contenidos definidos formalmente o una capacidad, una manera de actuar, de proceder frente a diversos problemas.

Creemos que, sin desatender la necesidad de conocer las herramientas matemáticas que la humanidad ha creado a lo largo de la historia para resolver problemas, es fundamental que analicemos nuestra concepción de lo que es saber matemáticas, centrando la atención ya no sólo en los contenidos matemáticos formales, sino también en la capacidad de pensar matemáticamente, de generar y crear procesos no canónicos para resolver problemas, justo como lo hicieron aquéllos que fueron inventando las matemáticas que hoy nos presentan los libros.

Lo que no se aprende sin la escuela

Aceptando que lo que Margarita hace sí es hacer matemáticas, así sean matemáticas con "*m* minúscula" como señala Bishop (1988), cabe hacernos dos preguntas más: ¿cómo aprendió? y, si aprendió sin la escuela, entonces, ¿para qué sirve la escuela?

Margarita aprendió a partir de enfrentarse a numerosos problemas que tuvo que resolver a lo largo de su vida. Afortunadamente, nadie la reprobó cuando ella, al hacer una compra, exigía un cambio justo usando un procedimiento no canónico. Al contrario, tuvo la satisfacción de poder saber cuánto le tenían que devolver.

Con respecto a la segunda pregunta: ¿para qué sirve la escuela?, basta con destacar la evidencia de que una persona no puede, ni a lo largo de toda su vida, reconstruir los conocimientos que muchas personas han construido a lo largo de miles de años. Los algoritmos que se nos enseñan en la escuela, por ejemplo, son herramientas matemáticas poderosas porque permiten resolver una gran variedad de problemas de una manera más económica, más rápida, y permiten también, gracias al lenguaje con el que se expresan, comunicar a los demás con precisión los procedimientos que empleamos.

A pesar de que Margarita demostró una gran capacidad para resolver problemas, sus procedimientos tienen un límite de eficacia. Necesita guardar demasiadas cosas en su memoria, y ésta, aunque está muy desarrollada, no es ilimitada.

Por otro lado, Margarita muestra dificultades para leer y escribir cantidades. Esto implica una limitación muy grande en nuestro medio, en el que la información escrita es un vehículo básico de comunicación.

Otro aspecto importante a tener en cuenta es que lo que Margarita sabe hacer lo ha aprendido a lo largo de más de 30 años de experiencias. Los requerimientos de nuestra sociedad nos hacen esperar que nuestros niños lo puedan hacer en sólo seis años.

Es claro que la escuela es necesaria, pero también es claro que no hemos logrado que cumpla satisfactoriamente su función: desarrollar la capacidad de nuestros alumnos para resolver problemas utilizando los conocimientos matemáticos con los que cuentan.

Algunas consecuencias de invalidar los procedimientos informales en la escuela

¿Por qué muchos de nuestros alumnos fracasan en la resolución de problemas si, después de todo, les enseñamos esas poderosas herramientas desde que son muy pequeños?

Númerosas personas, hoy en día, estudian las causas de este mal social y buscan formas de resolverlo. En este artículo intentamos mostrar que una de las causas que originan este complejo problema es la concepción misma de matemáticas que hemos heredado y que compartimos socialmente.

Antes de continuar, queremos hacer explícito que el hecho de que los estudios epistemológicos, psicológicos y didácticos en matemáticas nos permitan, hoy en día, cuestionar una concepción de matemáticas en la escuela primaria, no significa que consideremos que tener ese concepto es un "error" de algunos. Es, en todo caso, una construcción colectiva que, como toda concepción social, ha ido cambiando y seguirá cambiando. Sin duda, el estudio de la formación histórica de las concepciones de 'saber matemático' es una importante tarea pendiente.[2]

---

[2] En el artículo *"Constructivismo y educación matemática"*, de Luis Moreno y Guillermina Woldegg, publicado en el Vol. 4., No. 2, de **Educación Matemática**, el lector podrá encontrar interesantes reflexiones acerca de algunas concepciones predominantes en la historia de cómo se producen y cómo se aprenden los conocimientos matemáticos así como la influencia de éstas sobre las prácticas educativas.

Por otro lado, sabemos también que el mejoramiento de la enseñanza en el salón de clases no depende de un solo factor. Además de las concepciones sobre el contenido, acerca del aprendizaje y sobre la enseñanza, hay numerosos factores que influyen, presionan, limitan o posibilitan el trabajo de los maestros (tiempos disponibles para la enseñanza, programas escolares, exámenes externos, expectativas de los padres de familia, condiciones laborales de los maestros. . .).

En este artículo, trataremos de mostrar únicamente cómo el desarrollo de nuestros alumnos y sus producciones en matemáticas, se pueden ver sumamente favorecidos cuando se les mira a partir de otra concepción de lo que es hacer matemáticas. Empecemos por distinguir dos problemas:

a) ¿Por qué nuestros alumnos son poco creativos en el uso de herramientas matemáticas?

Desde nuestro punto de vista, uno de los motivos importantes es, simplemente, porque no se los permitimos. En las clases de matemáticas, aun en las clases de problemas, en general se tiene la expectativa de que las cosas se hagan de un modo único, de la manera que se convino es la "matemática", que incluye la aplicación de operaciones y fórmulas. No se da cabida a otros recursos matemáticos, a aquellos procesos de matematización que los mismos niños hacen y que se expresan verbalmente o por escrito, en un lenguaje informal como él de las matemáticas de Margarita.

En un Proyecto de Formación de Maestros[3], se analizaron varios problemas resueltos por niños escolarizados, con procedimientos no convencionales. Veamos un ejemplo de las evaluaciones que se hicieron al principio:

Problema 2 **Ramón, 4° grado**

En la granja de Menelao hay conejos y gallinas; cuando Menelao cuenta las cabezas de sus animales llega hasta el 20; si cuenta las patas encuentra que hay 56. ¿Cuántos conejos y cuántas gallinas tiene Menelao?

8 conejos 12 gallinas

---

[3] Proyecto de Investigación: **"Formación de profesores sobre áreas fundamentales de la educación básica".** Fuenlabrada, I. (responsable del proyecto ante CONACYT). Block, D., Fuenlabrada, I., Nemirovsky, M. (corresponsables del proyecto). Block, D., Carvajal, A., Dávila, M., Fuenlabrada, I., Nemirovsky, M., Parra, B., Valencia, R. (equipo de investigación). Financiado parcialmente por CONACYT, DIE-CINVESTAV-IPN. México, (1990).

Las opiniones acerca del procedimiento empleado por Ramón fueron las siguientes:

> *"El nino sí entendió el problema pero no pudo aplicar las operaciones; yo le pongo uno porque sí lo razonó".*
>
> *"Yo se lo pongo mal porque no supo hacer las operaciones aunque sí lo pudo resolver, pero pudo haber copiado".*
>
> *"Procedió como un niño de primero y es de cuarto; no hizo operaciones."*

Algunas veces, los alumnos resuelven los problemas de matemáticas recurriendo a estas matemáticas informales, pero muy pronto aprenden que esto es incorrecto, que debieron haber puesto "la operación". En el mejor de los casos, los alumnos siguen utilizando estos recursos a escondidas y en el peor, los dejan de hacer y, si aún no dominan otro recurso, se quedan bloqueados o eligen una operación casi al azar.

Los mismos problemas que se escogen para plantearse en la clase suelen estar "mandados a hacer" para que se aplique una operación específica. Frecuentemente, la pregunta del alumno frente al problema es: ¿con qué operación o fórmula se resolverá este problema? La búsqueda de una solución deja de ser una búsqueda creativa que adapta los elementos con que ya se cuenta.

b) ¿Por qué nuestros alumnos, en la resolución de problemas, aplican mal los algoritmos y fórmulas que ya les fueron enseñados?

Esta pregunta es todavía más difícil de contestar. Esbozamos a continuación, algunas de las razones que en nuestra opinión la explican.

- El sentido de un algoritmo está dado tanto por los problemas que permite resolver, como por los procedimientos largos y no sistemáticos que el algoritmo sustituye. Sin embargo, en la enseñanza escolar ambas fuentes del sentido de los algoritmos tienden a estar ausentes.

  Los algoritmos se suelen enseñar separadamente de los problemas, e incluso antes que los problemas. Esas largas y numerosas horas que los alumnos dedican a dominar la técnica de un algoritmo fuera de contexto producen, en el mejor de los casos, destreza en una técnica algorítmica vacía de significado: aprenden a dividir con un sofisticado procedimiento, pero no saben cuándo dividir. Por otro lado, nunca se da un espacio en el que los alumnos desarrollen por sí mismos procedimientos de resolución informales, previamente a la enseñanza del algoritmo, de forma que el algoritmo no es para ellos una herramienta que evita esfuerzos, ahorra tiempo, etcétera.

- Un algoritmo es una forma de resolver una operación, pero la variedad de problemas que se resuelven con una operación puede ser muy grande. Aun cuando ya se identifican algunos problemas que se resuelven con cierta operación, reconocer que otros se resuelven también con ella no es nada inmediato. Implica un proceso en el que, durante un tiempo, se ponen en juego nuevamente procesos informales hasta que más adelante se descubre que aquella operación los resuelve. Cuando esto sucede, se ha enriquecido el significado que tal operación tiene para el alumno.

La resta, por ejemplo, permite resolver —entre otros— problemas en los que se quita una cantidad a otra, o aquellos en los que se desea conocer la diferencia entre dos cantidades. Estos dos tipos de problemas tienen una estructura semántica muy distinta, aunque nosotros, adultos, los vemos similares porque ya sabemos que ambos se resuelven con resta.

Aun cuando los alumnos ya hayan aprendido que los problemas de "quitar" se resuelven con resta, suelen tardar más en aprender que los problemas de "diferencia" también se resuelven con resta.

¿Y cómo lo aprenden? Justamente resolviendo estos problemas con recursos informales, es decir, **sin** usar la resta convencional. Poco a poco, los alumnos mismos identifican las relaciones comunes a ambos tipos de problemas, lo que les permite ver que la resta resuelve también los problemas de diferencia.

Si los alumnos han aprendido que los procedimientos informales **no son válidos**, consecuentemente ya no los usan y por lo tanto, cuando se enfrentan a los muy numerosos problemas en los que todavía no logran identificar "la operación" con la que "se deben" resolver, recurren al descifrado de pistas (dadas por el maestro o por el texto mismo), o bien, a la selección al azar.

Una de las profesoras que participó en el proyecto de formación de maestros antes citado, planteó a sus alumnos de 3er. grado (42 niños) un problema de diferencia, advirtiéndoles que lo podían resolver como ellos quisieran. El problema era el siguiente:

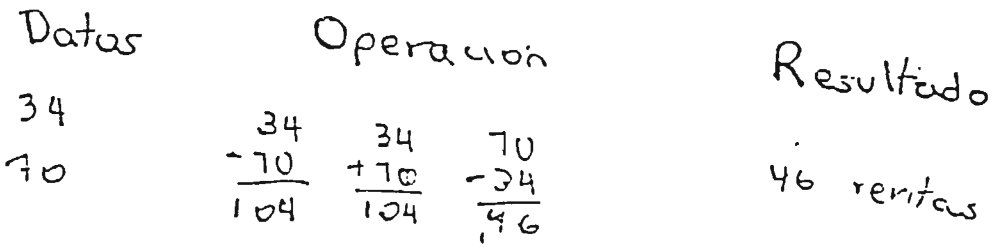
"Chayo está juntando revistas usadas para luego llevarlas a vender. Quería juntar 70 y apenas tiene 34. ¿Cuántas revistas necesita para completar 70?

De las 42 resoluciones de los alumnos, en seis no se supo lo que hicieron para resolver el problema. Sólo habían anotado el resultado, algunos correcto y otros no. Diecisiete niños lo resolvieron con resta, obteniendo el resultado correcto.

Cinco niños intentaron resolverlo con la resta, pero no lo lograron ya que no supieron cuál era el minuendo, o se equivocaron al restar. Probaron varias formas sin llegar al resultado, por ejemplo:

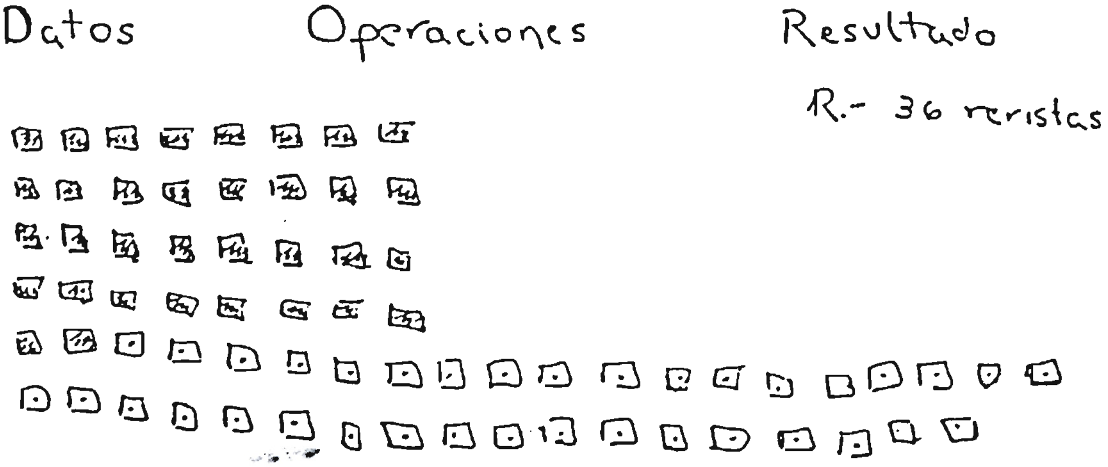
Datos	Operación	Resultado
34 70	$\begin{array}{r}34\\-70\\\hline 104\end{array}$ $\begin{array}{r}34\\+70\\\hline 104\end{array}$ $\begin{array}{r}70\\-34\\\hline 46\end{array}$	46 revistas

Dos niños resolvieron el problema por complemento aditivo, es decir, buscaron un número que, sumado al 34, dé 70. Hacen lo siguiente:



Tres niños resolvieron el problema también por complemento aditivo, pero a través de dibujos o números. Estos niños partieron del 34, sabían que ya tenían esas revistas así que completaron las que les faltaban para tener 70 y luego las contaron. Por ejemplo:

Otros dos niños resolvieron el problema también por complemento aditivo, pero éstos no podían todavía partir del 34 como los anteriores. Para ellos era necesario dibujar las setenta revistas o escribir la serie del 1 al 70, separar las 34 que ya tenían y contar las revistas que les faltaban para llegar al 70. Por ejemplo:



Y por último, siete niños utilizaron una suma y escribieron como respuesta al problema el resultado de la misma. De estos siete niños, cinco manejaron el algoritmo correctamente y dos se equivocaron al sumar. Por ejemplo:

DATOS	OPERACION	RESULTADO
34 revistas y 70	- 34 + 70 104	R= 104 revistas

Al ver estos resultados, los participantes en el taller se mostraron, en general, desalentados:

> ". . . *No saben leer*"
>
> "*Todos tienen la idea o será que no saben hacer operaciones*"
>
> "*Es que la mayoría está en la calle de la amargura . . .*"
>
> "*Yo sólo pasaba a los 17 que restaron convencionalmente*"
>
> Están mal, "*porque se supone que ya se les dio el concepto de la resta, ya saben qué es la diferencia, se supone que ya saben porque han practicado en segundo año con problemas bien sencillos y ya saben cómo hacerla, colocar el mayor arriba porque es al mayor al que se le va a quitar, y son niños de tercer año los que lo hicieron, ya deberían de saber*"
>
> "*Tienen una resolución muy infantil porque usan los dedos, y aquí siguen en esta etapa . . .*"
>
> "*Para estar en tercer año los niños no deberían de trabajar de esa manera; lo que les falla a estos niños es usar números . . .*"

Estos comentarios expresan de manera clara la expectativa, con respecto a la resolución de problemas, de que los alumnos utilicen desde el primer momento "la operación" que los resuelve. Se considera que los que llegaron al resultado correcto a través de procedimientos no convencionales están atrasados en su aprendizaje. Se subvalora el hecho de que esos niños hicieron un razonamiento adecuado para resolver el problema, relacionaron los datos correctamente, y que los procedimientos informales que utilizaron son una parte del proceso que los llevaría, más adelante, a aplicar un algoritmo. Seguramente, si se les hubiera limitado a usar "la operación", estos niños no hubieran logrado llegar a ningún resultado, o bien, hubieran dado uno sin relación con el problema.

El valor de los procedimientos informales. Algunos ejemplos.

En el proyecto de investigación sobre formación de maestros antes mencionado, se solicitó a los maestros que aplicaran a sus alumnos un problema que no les hubieran enseñado a resolver, con el objeto de que éstos se vieran en la necesidad de echar mano de sus propios recursos para su resolución.

Una maestra de 1er. grado comentó ante esta petición, que a los niños de 1° no se les podía poner todavía problemas porque aún no tenían el concepto de número, y que todavía no podían identificar los números del 1 al 10, puesto que apenas se iniciaba el año escolar.

Finalmente, por insistencia de los coordinadores, la maestra accedió a poner a sus alumnos un problema de compras. Veamos algunos fragmentos del desarrollo de la clase:

Maestra: "*Vamos a guardar todo lo que tenemos en la mesa* (repite varias veces), *los brazos cruzados*". (Ayuda a varios niños a acomodar sus sillas). "*Vamos a platicar de cómo debemos hacer al comprar, fíjense para que sepan comprar y no los hagan tontos*". (Pregunta algo acerca de lo que necesitan saber para poder comprar)

Alumnos: "*Debemos saber multiplicar y comprar*" (los niños platican y hacen mucho ruido)

(. . . . .)

M.: "*¿Quién trae dinero para comprar en el recreo?*"

A.: (Algunos niños sacan su dinero, otros levantan la manó. Todos hablan)

M.: "*El que quiera que yo lo escuche necesita levantar el dedo, debemos aprender a escuchar y respetar a los niños que están hablando*"

A.: (Levantan las manos)

M.: "*Ricardo, ¿cuánto dinero tienes?*"

Ricardo: "*Una moneda de cien y . . .*" (tiene otra moneda en las manos, pero parece que desconoce su denominación)

M.: (Se acerca, toma la moneda que Ricardo no identifica y la muestra al grupo) "*¿Esta moneda de cuánto es?, ¿esta moneda cuánto vale?*"

A.: (A coro responden) "*¡De doscientos!*"

M.: "*¿Doscientos y cien cuánto es?*"

A.: . . . (A coro) "*¡Trescientos!*"

Alumna: (Una niña se acerca a la maestra y le enseña su dinero)

M.: (Ve el dinero que le muestra la niña) "*Vamos a ver cuánto trae su compañera; ella tiene dos monedas de a cien ¿cuánto es?*

Alumnos: (A coro) "*¡Doscientos!*"

M.: "*¿Dos monedas de a cincuenta, ¿cuánto es?*

A.: (Contestan inmediatamente a coro) "¡*Cien*!"

(. . . . .)

La maestra inició la clase de problemas utilizando como material el dinero que los mismos niños llevan a la escuela. Las primeras preguntas que les hace implican sumar 200 + 100; 50 + 50 y 100 + 100, números redondos mucho mayores que 10. Las respuestas de los niños son acertadas, no tienen ninguna dificultad para obtener el resultado.

Maestra: (Va con otra niña, ve el dinero que tiene y pregunta al grupo): "*Si ella tiene trescientos pesos y quince pesos, ¿cuánto es?*"

Alumnos: (La mayoría) "¡*Trescientos quince*!" (Algunos niños cuentan su dinero)

M.: (Toma una moneda de quinientos de una niña, la muestra al grupo y pregunta): "*¿Esta moneda de cuánto es?*"

A.: (A coro) "¡*Quinientos pesos*!"

M.: "*Lety trae quinientos pesos, ¿qué va a comprar?*" (pregunta a la niña, hablándole de usted)

Lety: "*Un chocolate*"

M.: (Pregunta al grupo). "*¿Aquí en la escuela venden chocolates?*"

A.: (A coro) "¡*Siiii*!, *en la cooperativa*"

M.: "*¿A cómo son los chocolates?*"

Alumno: "*A cien pesos*"

(. . . . .)

M.: "*¿Cuántos chocolates va a comprar?*" (pregunta a Lety)

Lety: "*Tres chocolates*"

M.: "*Si Lety va a comprar tres chocolates, ¿cuánto le van a tener que dar de cambio? . . . . Los chocolates cuestan cien pesos. ¿Cuántas monedas de cien le van a regresar?*"

Lety: (No contesta)

M.: (Comenta a Lety que la van a hacer tonta al comprar. Pregunta a otra niña). "*Elena, ¿cuánto le van a dar de cambio?*

Elena: "*Doscientos pesos*"

(. . . . .)

Observemos que la maestra ha complejizado las preguntas. Las operaciones implicadas ahora son:

$$300 + 15 \quad y \quad 500 - (100 \times 3) \div 2$$

Aunque Elena no llega a contestar cuántas monedas de a cien le van a devolver, el resultado que da es correcto.

(. . . . .)

Erika plantea que quiere comprar un *"boing"*.

M.: *"¿Cuánto cuesta el boing?"*

A.: (Algunos contestan) *"Dan dos por quinientos pesos"*

M.: *"Si le dan dos boings por quinientos pesos ¿cuánto cuesta cada uno?"*

Ricardo: *"Doscientos cincuenta pesos"*

Alumna: (Se acerca a la maestra y le muestra su dinero)

M.: (Ve el dinero de la niña y dice al grupo) *"Aquí son doscientos cincuenta pesos; si Claudia compra un boing, ¿cuánto le queda?"*

A.: (A coro) *"¡Nada!"*

Alumno: (Se acerca a la maestra y le enseña su dinero)

Maestra: (Cuenta el dinero que le muestra el niño en voz alta y dice): *"Tiene quinientos pesos. ¿Qué va a comprar?"* (pregunta al niño hablándole de usted)

Alumno: *"Un boing"*

M.: (Pregunta al grupo) *"¿Le va a quedar dinero o no? Va a pagar doscientos cincuenta pesos del boing y le quedan . . ."* (Espera que los alumnos respondan)

A.: (La mayoría a coro) *"Doscientos cincuenta pesos"*

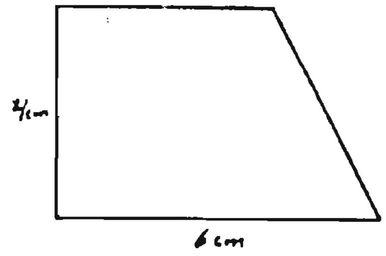
En esta ocasión la maestra planteó otros tres problemas que implicaban hacer división (500 entre 2), resta (250 − 250 y 500 − 250). Como podemos ver, los alumnos de primer año pudieron resolver los problemas echando mano de los conocimientos adquiridos en la vida cotidiana; demuestran conocer el valor de varias monedas, leen cantidades formadas con monedas de $50, $100 y $200, conocen los costos de los productos que se venden en la escuela y a través de cálculos mentales suman, restan y dividen aun cuando en la escuela no se les ha enseñado a hacerlo. ¿No es impresionante?

Sin embargo, después de esta experiencia, la maestra continuó enseñando a sus alumnos los números y las igualdades 5 = 4 + 1, tal como lo había venido haciendo.

Plantear situaciones como la anterior en la escuela implica cambios profundos. Necesitamos primero reconocer que los alumnos han aprendido "cosas" fuera de la escuela que nosotros no les hemos enseñado y, sobre todo, reconocer en esas "cosas" saberes matemáticos. Después, necesitamos encontrar formas de propiciar que esos saberes de los alumnos evolucionen hacia conocimientos más formales. Esto tampoco es fácil, implica una tarea ardua para los maestros y los investigadores.

Veamos ahora cómo enfrenta un grupo de alumnos de 6° grado un típico problema de geometría: calcular el área de un trapecio.[4]

El maestro entregó a los alumnos una hoja en la que venía dibujado el trapecio que se muestra a continuación y les pidió que calcularan el área.

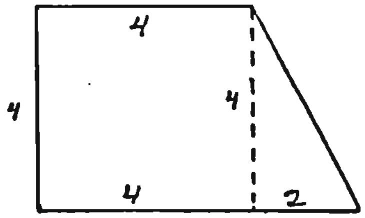


Maestro: "*Voy a entregarles esta ficha para que trabajemos en el tema de medición. . .*"

(Trabajo individual de los alumnos)

M.: En la confrontación pide a sus alumnos expliquen los procedimientos que utilizaron para resolver el problema planteado.

Paul: "*Primero dividí la figura en un cuadrado y un triángulo, así que busqué un ángulo recto, así:* (muestra el siguiente dibujo).



---

[4] Proyecto de Investigación: "**Un programa experimental de matemáticas en la escuela primaria**". Saiz, I. (responsable). Álvarez, Ma. C., Balbuena, H., Domínguez, R. (equipo de investigación). Financiado parcialmente por CONACYT, DIE-CINVESTAV-IPN. México, 1984.

Como era un cuadrado, hice cuatro por cuatro igual a dieciséis; luego, para sacar el área del triángulo vi que medía dos de base y cuatro de altura, y tenía que ser base por altura sobre dos, o sea dos por cuatro entre dos igual a cuatro, luego sumé las dos áreas: dieciséis más cuatro, igual a veinte centímetros cuadrados".

$$4 \times 4 = 16 \qquad 2 \times 4 = 8 \qquad \begin{array}{r} 4 \\ 2\overline{)8} \\ 0 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 16 \\ +\ 4 \\ \hline 20\ \text{cm}^2 \end{array}$$

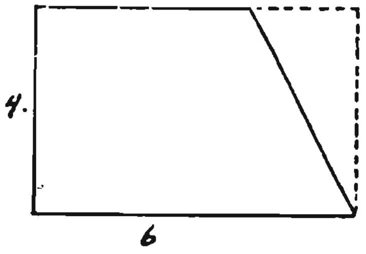
M.: "*¿Ahí, en ese procedimiento, hubo una fórmula para calcular el área de toda la figura? Quiero decir que primero usó base por altura para calcular la del cuadrado, y base por altura sobre dos para la del triángulo. Pero, ¿y para toda la figura?*"

Pablo: "*No, mira yo tengo otro procedimiento*"

Oswaldo: "*Y yo también*"

M.: "*A ver Oswaldo*"

Oswaldo: "*Yo hice otro triángulo, así* (muestra lo siguiente):

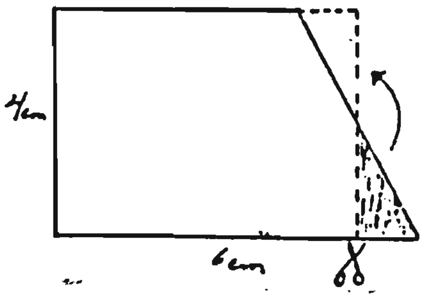


$$\begin{array}{r} 6 \\ \times\ 4 \\ \hline 24 \\ -\ 4 \\ \hline 20 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2 \\ \times\ 4 \\ \hline 8 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 4 \\ 2\overline{)8} \\ 0 \end{array} \qquad \text{R } 20\text{cm}^2$$

y luego hice seis por cuatro igual a veinticuatro, pero le quité el pedazo imaginario que eran dos por cuatro igual a ocho, entre dos, igual a cuatro. Luego hice veinticuatro menos cuatro, igual a veinte centímetros cuadrados"

M.: "*Bueno, es otro procedimiento*"

Pablo: "*Yo tengo otro, ve* (muestra lo siguiente)":

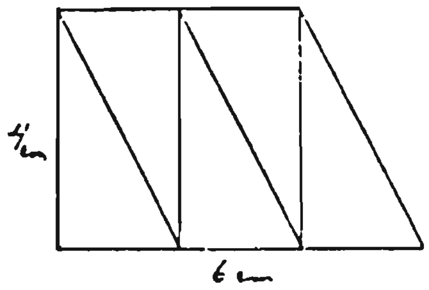


$$\begin{array}{r} 5 \\ \times\ 4 \\ \hline 20\ \text{cm}^2 \end{array}$$

"Así ya nos queda un rectángulo y hacemos base por altura, o sea cinco por cuatro igual a veinte centímetros cuadrados"

M.: *"Bueno, es otro. ¿Alguien tiene otro más?"*

Valentina: *"Yo me fijé que había un cuadrado de cuatro centímetros; lo dividí a la mitad en dos rectángulos de cuatro por dos, y luego hice* (muestra cuatro triángulos que obtuvo de los dos rectángulos de la siguiente forma):



$$\begin{array}{r} 6 \\ \times 4 \\ \hline 24 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 4 \\ 6\overline{)24} \\ 0 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 24 \\ -\ 4 \\ \hline 20 \end{array}$$

$R = 20\ cm^2$

"Entonces hice base por altura menos un sexto de base por altura"

¿Qué hay detrás de esta creatividad, de esta capacidad de buscar soluciones a un problema?

— Que los alumnos aún no disponen de una fórmula para sacar el área del trapecio.

— Que saben que su maestro **no** espera de ellos que apliquen una fórmula específica. Saben que apreciará las distintas maneras en que logran resolver el problema.

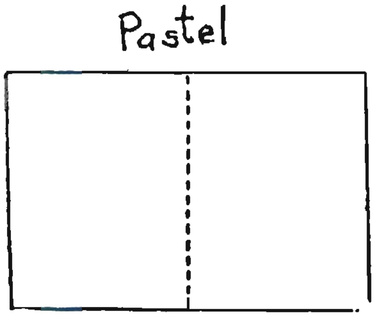
— Estos alumnos pertenecen a un grupo experimental que, durante los cinco años que llevan en la escuela, se han habituado a enfrentar problemas sin enseñanza previa y a perfeccionar poco a poco sus propios procesos de solución. Se han tardado más que otros niños en conocer el lenguaje formal de las matemáticas, así como los algoritmos y las fórmulas, pero han desarrollado una actitud, una disposición creativa y de búsqueda frente a problemas.

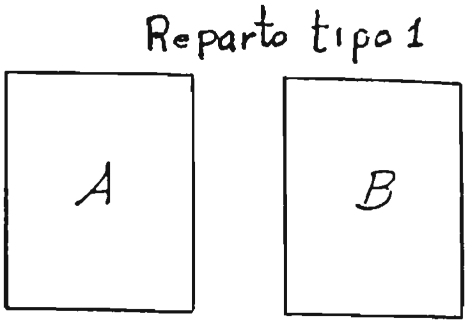
Como último ejemplo, mostraremos un fragmento de una clase de fracciones[5], en un grupo de alumnos de primer año. Lo que quisiéramos destacar esta vez, es otro aspecto de las matemáticas tradicionalmente desterradas de la escuela. Se dice que esta disciplina plantea verdades que no admiten discusión. ¿O alguien pensaría que puede discutirse si 1/2 es igual a 2/4?

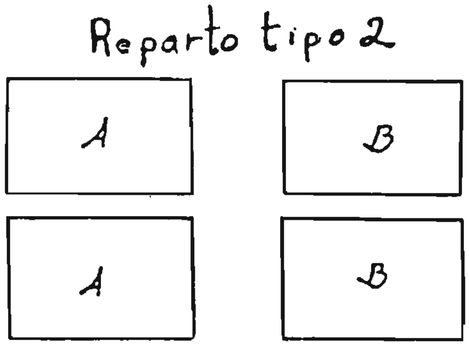
---

[5] Dávila, M. (1991). "Situaciones de reparto: una introducción a las fracciones". Tesis de Licenciatura. Universidad Pedagógica Nacional. México.

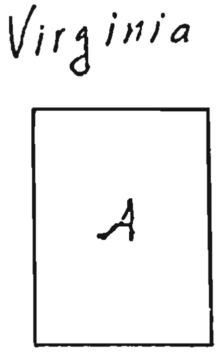
La maestra pidió a los niños que realizaran como ellos quisieran el siguiente reparto: 1 pastel entre 2 niños. El pastel estaba representado por una hoja de papel tamaño carta. En el grupo se generaron los siguientes tipos de reparto:

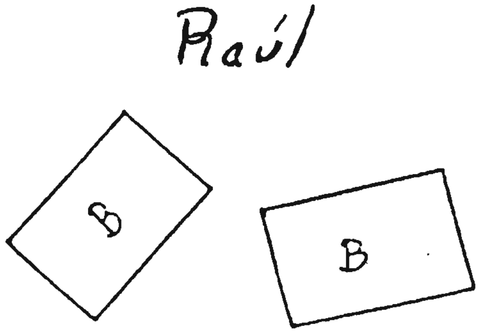






Una vez que los niños demostraron cómo habían hecho su reparto, se pegaron en el pizarrón los pedazos que les tocaron a cada uno de los niños, con los dos tipos de reparto que se habían generado:





Maestra: "*¿Les tocó igual a los dos equipos? A Raúl y a Virginia les tocó igualito de pastel?*"

Observador: La mayoría de los niños gritan que le tocó más a Raúl.

Antonio: "*No, no, no tienen lo mismo*"

M.: "*A ver Antonio. ¿Por qué no les tocó igual?*"

Antonio: "*Porque Raúl tiene dos (pedazos) y Virginia uno* (un pedazo)"

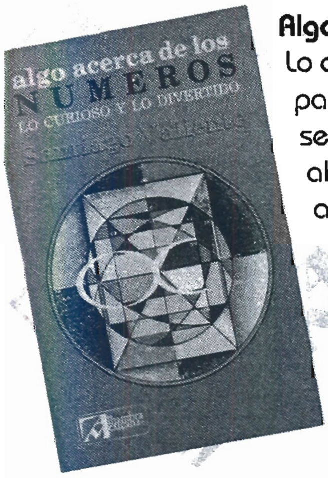
Erika: "*Les tocó lo mismo, sólo que lo cortaron a la mitad y salieron dos pedazos*"

Niños: (Algunos gritan) "*Les tocó lo mismo*" (otros gritan) "*No, tiene más el que tiene dos pedazos*" "*Tiene menos Virginia*"

M.: (Pregunta a Erika): "*Cómo podemos saber si les tocó lo mismo?*"

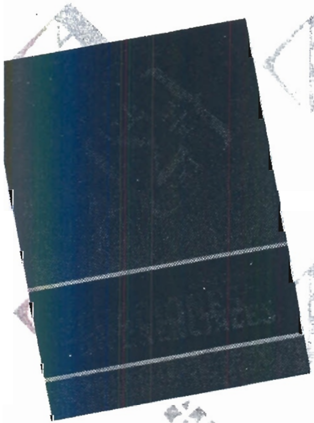
Alhambra Mexicana · LONGMAN

Matemáticas



Algo acerca de los números. Lo curioso y lo divertido. Santiago Valiente.
Lo curioso y lo divertido de las matemáticas es el tema central de este libro, apropiado tanto para maestros y alumnos como para aficionados a esta interesante ciencia. El autor selecciona algunos temas de la aritmética con el afán de hacerlos agradables, de jugar con algunos conceptos, de elaborar entretenimiento y mostrar que esta ciencia no es difícil, aburrida ni rígida.

Diccionario de matemáticas (nivel bachillerato). Santiago Valiente.
A través de un sencillo método de manejo, auxilia a alumnos de bachillerato y a todos aquellos interesados en las matemáticas a aclarar dudas y adquirir conocimientos interrelacionando conceptos y presentando tablas, formularios, gráficas e ilustraciones.



Ecuaciones diferenciales. Isabel Carmona Jover.
Excelente obra que permite al lector introducirse a las ecuaciones diferenciales en forma sencilla y amena.
Resumen, examen de autoevaluación, comentarios, curiosidades y pasatiempos así como problemas resueltos y ejercicios son algunos de los beneficios didácticos que se presentan para facilitar el aprendizaje de esta rama sumamente útil de las matemáticas.

Geometría y experiencias. Jesús García Arenas y Celestí Bertran Infante.
"La enseñanza debe ser tal que pueda recibirse como un regalo, no como una amarga obligación" dijo Einstein y este texto es un claro ejemplo de ello. En cada tema expuesto aparecen cuatro estilos didácticos: experiencias, contenido teórico, actividades y ejercicios que conducen al lector de lo particular a lo general y lo promueven a participar en el descubrimiento matemático.
Compuesto de dos partes bien diferenciadas: Geometría del plano y Geometría del espacio condensa toda la Geometría elemental en un sólo libro.

Relaciones y geometría analítica. Antonio López Quiles, María Eugenia Regueiro, Ceres Santa Muñoz y Emanuel Jinich Charney.
Concebido por sus autores como libro de texto para nivel medio superior, **Relaciones y geometría analítica** aborda en cinco unidades los temas básicos de esta materia aciendo énfasis en las relaciones algebraicas, exponenciales, logarítmicas y trigonométricas. El estudio parte de lo oncreto a lo abstracto por lo que existen en él más de 500 ejemplos resueltos, 700 ejercicios con soluciones y ráficas que permiten su sencilla utilización y refrendan su valía didáctica.

Editorial Alhambra Mexicana, s.a. de c.v.
Amores 2027, colonia Del Valle • Delegación Benito Juárez • 03100 México, D.F.
Teléfonos: 660 00 21 • 660 28 96 • 534 68 28 • 534 69 08 • 524 86 45 • 524 86 65 • 524 85 25 Fax: 669 22 75

Erika: "*Porque tenían la hoja y luego la partieron, y tienen más chiquitos, pero es lo mismo*"

Observador: El grupo se queda un momento en silencio.

M.: "*Si Raúl se come estos dos pedazos* (2/4) *y Virginia éste* (1/2), *¿se comen lo mismo?*"

N.: (Algunos) "*Sí, se comen lo mismo*" (otros gritan): "*No, Raúl va a comer más pastel*" "*Sí porque tiene dos pedazos*"

M.: (Pregunta a los niños que dicen que sí se comen lo mismo): "*¿Seguros que se comen lo mismo?*"

Antonio: "*Sí*" (anteriormente había dicho que tenía más el que tenía dos pedazos)

M.: "*¿Cómo podremos estar seguros de que es lo mismo?*"

Erika: "*Porque estos dos* (señala 2/4) *es igual a éste* (señala 1/2)

M.: "*Fíjense en lo que dice Erika: dice que éstos* (señala 2/4), *es lo mismo que éste* (señala 1/2). *¿Estará bien?*"

N.: (Algunos dicen): "*El que tiene dos* (pedazos) *tiene más*", (otros dicen): "*Es lo mismo*". (Algunos de estos niños lo dicen muy convencidos y otros como dudando)

Erika: (Corre al pizarrón, toma los dos cuartos y los sobrepone sobre el medio diciendo): "*Es lo mismo nada más que están más chiquitos*"

Posteriormente, se le entregó a cada equipo lo que le había tocado a cada uno de los niños, para que buscaran la forma de demostrar a sus compañeros sus hipótesis. Erika fue la única en esta sesión que, a través del material, demostró la equivalencia de los repartos, recortando y superponiendo los pedazos. Los demás no se convencieron con esta demostración; estaban convencidos que dos pedazos eran más que uno, sin tomar en cuenta el tamaño y la forma de los mismos.

La discusión, el debate, la formulación de hipótesis y la **necesidad** de probar o refutar, están fuera de las prácticas matemáticas escolares.

Si la matemática es una colección de relaciones formales y establecidas, no hay lugar a discutir; cuando mucho, sólo a preguntar o a equivocarse. Pero si matemáticas son también **las ideas y producciones de los alumnos,** generadas a raíz de un problema, entonces puede haber lugar al debate y a la demostración. En ese debate, y en los intentos de probar y refutar, los alumnos aprenden a explicitar sus ideas, socializan sus hallazgos y se forman, poco a poco, en el arte de demostrar.

En el ejemplo anterior, la clave estuvo en plantear un problema a los niños adecuado a su nivel, lo que implicó, por supuesto, no plantearlo en términos simbólicos y, como en los otros casos, en hacer sentir a los niños que lo que importa es que hagan y digan lo que **ellos creen que deben hacer y decir.**

Consideramos que una de las causas importantes de las dificultades que numerosos alumnos padecen en nuestras clases de matemáticas, está en nuestra concepción misma de lo que son las matemáticas y de cómo se aprenden. Nuestra visión de las matemáticas, como lenguaje formal y reglas sintácticas, *ha expulsado de la escuela* y de lo que aceptamos como saber legítimo, a la matemática informal. Junto con ella, han salido de la escuela los procesos que en ella cristalizan: la capacidad de pensar matemáticamente, de buscar soluciones a los problemas, y de inventar procedimientos de solución.

Tal expulsión se ha revertido contra nosotros. Ahora empezamos a comprender que esa matemática de las personas, de los alumnos, también es una base a partir de la cual puede accederse a la matemática más formal, y constituye una parte importante del sentido que tendrán, para los alumnos, los algoritmos que les enseñamos.

Bibliografía

Algunos trabajos de investigación que, desde distintas perspectivas, estudian un acercamiento a la enseñanza de las matemáticas a partir de la problematización son:

Balbuena, H. (1988). **Análisis de una secuencia didáctica para la enseñanza de la suma de fracciones en la escuela primaria.** Tesis de Maestría. Sección de Matemática Educativa, CINVESTAV-IPN, México.

Bishop, A. (1988). *Mathematical en culturation. A cultural perspective on mathematics education.* Clumer Academia Publishers, Netherlands.

Block, D. (1987). **Estudio didáctico sobre la enseñanza y el aprendizaje de la noción de fracción en la escuela primaria.** Tesis de Maestría. Departamento de Investigaciones Educativas, CINVESTAV-IPN, México.

Brousseau, G. (1981). "Problemes de didactique des décimaux", en *Recherches en didactique des mathematiques*. La Pensé Sauvage, Vol. 21, France.

Dávila, M. (1991). **Situaciones de reparto: una introducción a las fracciones.** Tesis de Licenciatura. SEP, Universidad Pedagógica Nacional. México.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Reidel, The Netherlands.

Fuenlabrada, I., Saiz, I. (1981). **Sistemas de numeración, suma y resta. Un estudio experimental.** Tesis de Maestría. Sección de Matemática Educativa, CINVESTAV-IPN, México.

Gálvez, G. (1985) **El aprendizaje de la orientación en el espacio urbano. Una proposición para la enseñanza de la geometría en la escuela primaria.** Tesis de Doctorado. Departamento de Investigaciones Educativas, CINVÊSTAV-IPN, México.

Gravemeijer, K., et al. (1990). *Contexts Free Productions. Tests and Geometry in Realistic Mathematics Education.* Research Group for Mathematical Education and Educational Computer Center. State University of Utrecht, The Netherlands.

Vergnaud, G. (1991). *El niño, la matemática y la realidad.* Ed. Trillas, México.


Cálculo
JAMES STEWART
Grupo Editorial Iberoamérica