



UNIVERSITÀ DI PISA

---

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali  
Corso di Laurea Specialistica in Matematica

Tesi di Laurea

# SHADOWING LEMMA E DETERMINAZIONE ORBITALE CAOTICA

Relatore:  
Prof. ANDREA MILANI COMPARETTI

Laureanda:  
FEDERICA SPOTO

Controrelatore:  
Dott. GIOVANNI FEDERICO GRONCHI

---

ANNO ACCADEMICO 2009-2010



*We live in a rainbow of chaos.*

P. Cezanne



# Introduzione

Lo Shadowing o pedinamento si riferisce alla relazione che lega le soluzioni matematiche di un'equazione differenziale (o di una mappa) e le soluzioni approssimate che si ottengono in presenza di un errore dovuto all'approssimazione. Vogliamo quindi studiare la situazione in cui un'orbita reale di un sistema dinamico si trovi uniformemente vicino (da cui il termine "shadows") ad una pseudo orbita (o orbita approssimata).

Per capire quale sia il problema, consideriamo ad esempio una soluzione matematica di un sistema deterministico caotico con condizione iniziale  $x$ . Dal momento che nel computer i numeri hanno una rappresentazione con precisione finita abbiamo necessariamente una differenza tra il reale valore di  $x$  e la rappresentazione di  $x$  stesso all'interno del computer. Tale differenza viene amplificata inoltre dalla natura caotica del sistema, durante l'evolvere dello stesso per tempi  $t > 0$ , in più l'errore di arrotondamento ad ogni passo tende ad aggravare notevolmente il problema. Quello che ci interessa esaminare è quindi se e in quale modo le soluzioni di un sistema caotico generate dal computer siano in relazione con le vere soluzioni.

Lo scopo principale di questa tesi è quello di enunciare e dimostrare il teorema che prende il nome di *Shadowing Lemma* e di studiare le sue applicazioni al caso della determinazione orbitale caotica.

Iniziamo il primo capitolo riportando tutte le definizioni e le condizioni necessarie per poter arrivare alla dimostrazione del teorema in questione, quindi:

- definizioni di base, tra le quali quella di  $\delta$ -pseudotraiettoria e quella di  $\varepsilon$ -pedinamento e studio di alcune proprietà connesse a tali definizioni;
- definizione di insieme iperbolico e studio delle proprietà principali ad esso connesse;
- enunciato e dimostrazione dello "Shadowing Lemma"

Riportiamo giusto l'enunciato dello Shadowing Lemma.

*Se  $\Lambda$  è un insieme iperbolico per un diffeomorfismo  $\Phi$ , allora esiste  $W$  intorno di  $\Lambda$  tale che  $\Phi$  gode della POTP su  $W$ .*

*Inoltre possiamo trovare  $W_1$  intorno di  $\Lambda$  tale che  $\Phi$  gode della SUP su  $W_1$ .* Il capitolo si conclude infine con un'applicazione del teorema nel caso di punti omoclinici.

Nel secondo capitolo vogliamo cercare di applicare il risultato emerso dallo Shadowing Lemma alla determinazione orbitale caotica. Per farlo trattiamo il caso di sistemi dinamici discreti in cui compaiono sia orbite ordinate che orbite caotiche.

Apriamo il capitolo con la definizione di esponente di Lyapunov, con quella di mappa standard e con lo studio delle proprietà fondamentali associate a quest'ultima.

L'importanza fondamentale della mappa standard è che possiamo utilizzarla come esempio nello studio della determinazione caotica.

Nel corso del capitolo utilizziamo la mappa standard del pendolo, la cui espressione è data da:

$$S = \begin{cases} x_{k+1} & = & x_k + y_{k+1} \\ y_{k+1} & = & y_k - \mu \sin(x_k). \end{cases}$$

L'idea su cui si basa il capitolo è la seguente: nel 1987 Wisdom ha congetturato che la conoscenza acquisita dalle osservazioni su un sistema dinamico caotico cresce esponenzialmente con l'intervallo di tempo coperto dalle osservazioni. Lo scopo di questo capitolo è quello di mostrare che in alcuni casi tale congettura è falsa. A tal fine, come controesempio, consideriamo il procedimento dei minimi quadrati e delle correzioni differenziali applicato alla mappa standard e mostriamo tramite i risultati degli esperimenti numerici che l'accuratezza delle condizioni iniziali e del parametro dinamico  $\mu$  non cresce esponenzialmente nel tempo se cerchiamo di determinarle contemporaneamente.

Concludiamo il capitolo mostrando una generalizzazione dell'esempio numerico data dallo Shadowing Lemma: in questo modo stiamo dicendo che la congettura di Wisdom è falsa anche in un caso più generale.

Il secondo capitolo rappresenta solo un primo passo verso uno sviluppo della teoria descritta in questa tesi: da una parte potrebbe esserci il possibile utilizzo dello Shadowing Lemma nel caso della monitoraggio degli impatti, mentre dall'altra si potrebbe tentare una sua generalizzazione a sistemi non caotici, cioè dove l'incertezza in generale non cresce esponenzialmente.

# Indice

<b>1</b>	<b>Lo Shadowing Lemma per insiemi invarianti</b>	<b>1</b>
1.1	Definizioni di base . . . . .	1
1.2	Insiemi iperbolici . . . . .	6
1.3	La versione classica dello Shadowing Lemma . . . . .	12
1.3.1	Un'applicazione dello Shadowing Lemma nel caso di punti omoclinici . . . . .	21
<b>2</b>	<b>Determinazione caotica</b>	<b>23</b>
2.1	Ordine e caos . . . . .	23
2.1.1	Esponenti di Lyapunov . . . . .	23
2.2	La mappa standard . . . . .	25
2.2.1	La mappa standard del pendolo . . . . .	26
2.3	Determinazione caotica: l'esempio della mappa standard . . . . .	28
2.3.1	I minimi quadrati: matrice di transizione ed equazione alle variazioni . . . . .	29
2.3.2	I minimi quadrati: il procedimento e le correzioni differenziali . . . . .	32
2.3.3	La congettura di Wisdom ed i risultati degli esperimenti numerici . . . . .	34
2.3.4	La congettura di Wisdom e lo Shadowing Lemma . . . . .	51
	<b>Conclusioni</b>	<b>55</b>
	<b>Bibliografia</b>	<b>57</b>
	<b>Ringraziamenti</b>	<b>59</b>





# Capitolo 1

## Lo Shadowing Lemma per insiemi invarianti

Lo Shadowing o pedinamento si riferisce alla relazione che lega le soluzioni matematiche di un'equazione differenziale (o di una mappa) e le soluzioni approssimate che si ottengono in presenza di un errore dovuto all'approssimazione. Vogliamo quindi studiare la situazione in cui un'orbita reale di un sistema dinamico si trovi uniformemente vicino (da cui il termine "shadows") ad una pseudo orbita (o orbita approssimata): è proprio da questa idea che nasce la traduzione italiana di pedinamento. Per capire quale sia il problema, consideriamo ad esempio una soluzione matematica di un sistema deterministico caotico con condizione iniziale  $x$ . Dal momento che nel computer i numeri hanno una rappresentazione con precisione finita abbiamo necessariamente una differenza tra il reale valore di  $x$  e la rappresentazione di  $x$  stesso all'interno del computer. Tale differenza viene amplificata inoltre dalla natura caotica del sistema, durante l'evolvere dello stesso per tempi  $t > 0$ , in più l'errore di arrotondamento ad ogni passo tende ad aggravare notevolmente il problema. Quello che ci interessa esaminare è quindi se e in quale modo le soluzioni di un sistema caotico generate dal computer siano in relazione con le vere soluzioni.

### 1.1 Definizioni di base

Sia  $(X, d)$  uno spazio metrico. Sia  $\Phi : X \rightarrow X$  un omeomorfismo. Diciamo che  $\Phi$  genera un sistema dinamico discreto

$$\Phi : \mathbb{Z} \times X \rightarrow X$$

se vale la formula

$$\Phi(m, x) = \Phi^m(x), \quad m \in \mathbb{Z}, \quad x \in X.$$

Definiamo anche la traiettoria di un punto  $x \in X$  nel sistema dinamico  $\Phi$  come l'insieme

$$O(x) = \{\Phi(m, x) : m \in \mathbb{Z}\}$$

Da ora in avanti identifichiamo il sistema dinamico  $\Phi$  con l'omomorfismo  $\Phi$  che lo genera e chiamiamo sistema dinamico  $\Phi$  stesso.

Analogamente a quanto già visto, possiamo definire anche un semi-sistema dinamico nel seguente modo: consideriamo una mappa continua  $\Psi : X \rightarrow X$  e diciamo che genera un semi-sistema dinamico se vale la formula

$$\Psi(m, x) = \Psi^m(x), \quad m \in \mathbb{Z}_+, \quad x \in X.$$

Possiamo quindi scrivere la definizione di traiettoria anche in questo caso, senza ulteriori spiegazioni: la traiettoria di un punto  $x \in X$  di un semi-sistema dinamico  $\Psi$  è l'insieme

$$O^+(x) = \{\Psi(m, x) : m \in \mathbb{Z}_+\}.$$

Come già visto, identifichiamo  $\Psi$  con  $\Psi$ .

Per fissare le notazioni poniamo  $\mathbb{K} = \mathbb{Z}$  o  $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_+$ .

Sia  $\delta > 0$  fissato.

**Definizione 1.1.1.** ( $\delta$ -pseudo orbita) Diciamo che una successione  $\xi$  definita da  $\xi = \{x_k \in X : k \in \mathbb{K}\}$  è una  $\delta$ -pseudo orbita o  $\delta$ -pseudo traiettoria di un sistema dinamico  $\Phi$  su  $\mathbb{K}$  se vale la disuguaglianza

$$d(\Phi(x_k), x_{k+1}) < \delta, \quad k \in \mathbb{K} \quad (1.1)$$

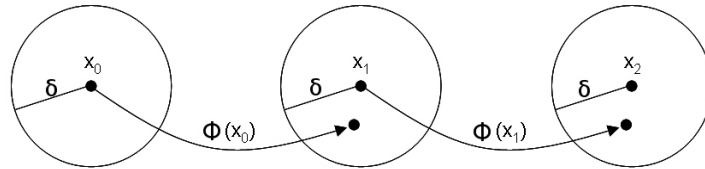


Figura 1.1: Esempio di una  $\delta$ -pseudo traiettoria.

Fissiamo  $\varepsilon > 0$ .

**Definizione 1.1.2.** ( $\varepsilon$ -pedinamento) Diciamo che un punto  $x \in X$  è un  $\varepsilon$ -pedinamento di una  $\delta$ -pseudotraiettoria  $\xi = \{x_k\}$  su  $\mathbb{K}$  se vale la disuguaglianza

$$d(\Phi^k(x), x_k) < \varepsilon, \quad k \in \mathbb{K}. \quad (1.2)$$

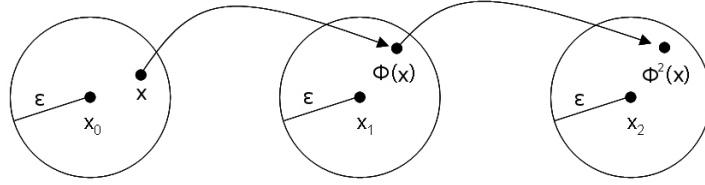


Figura 1.2: Esempio di un  $\varepsilon$ -pedimento.

**Osservazione 1.1.1.** Indichiamo con  $\varepsilon$ -pedimento il punto  $x$  dal quale ha inizio l'orbita che gode della proprietà (1.2) e non l'intera orbita.

Il seguente disegno chiarisce quanto espresso dalla definizione (1.1.2).

**Definizione 1.1.3. (Pseudo-orbit tracing property)** Diciamo che un sistema dinamico  $\Phi$  gode della **POTP** (Pseudo-Orbit Tracing Property) su  $Y \subset X$  se  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$  tale che per ogni  $\delta$ -pseudotraiettoria  $\xi$  su  $\mathbb{Z}$ , con  $\xi \subset Y$ , esiste un punto  $x$  che è un  $\varepsilon$ -pedimento di  $\xi$  su  $\mathbb{Z}$ .

Se questa proprietà vale anche nel caso in cui  $Y = X$ , diciamo semplicemente che  $\Phi$  gode della POTP.

Quello che ci interessa è quindi studiare sistemi dinamici che godono della definizione *POTP*.

**Osservazione 1.1.2.** Vediamo praticamente quale sia il significato della proprietà appena descritta.

Molto spesso considereremo una  $\delta$ -pseudotraiettoria di un sistema dinamico  $\Phi$  come il risultato di una piccola perturbazione casuale su  $\Phi$  stesso. In questo caso con la POTP intendiamo il fatto che "vicino" alle traiettorie di un sistema dinamico perturbato casualmente ci siano le reali traiettorie del sistema dinamico  $\Phi$ .

**Osservazione 1.1.3.** Anche in questo caso, come già mostrato in precedenza, indicheremo la proprietà analoga alla POTP su  $\mathbb{Z}_+$  con  $POTP_+$ .

Mostriamo l'esempio di un sistema dinamico che non possiede la POTP.

**Esempio 1.1.1.** Consideriamo il cerchio unitario  $\mathbb{S}^1$  e siano  $x \in [0, 1)$  e  $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$  tale che  $f(x) \equiv x$ . Fissiamo  $\delta > 0$  e prendiamo una successione  $\xi = \{x_k : k \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{S}^1$  tale che

$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ x_{k+1} = x_k + \frac{\delta}{2} \pmod{1}, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Proprio dalla definizione discende che  $\xi$  è una  $\delta$ -pseudotraiettoria per  $f$ . Osserviamo ora che ogni traiettoria è un punto fisso, infatti  $p = \{f^m(x) : m \in \mathbb{Z}\} = \{x\}$ . Inoltre per ogni  $d < \frac{2}{3}$  e per ogni  $p$  traiettoria di  $f$ ,  $\xi$  non è contenuto nell'intorno di  $p$  ingrassato di  $\frac{1}{3}$ . Quest'ultima considerazione implica che per  $\varepsilon = \frac{1}{3}$  non esiste alcun  $\delta$  in modo che sia soddisfatta la POTP.

Introduciamo ora una proprietà dei sistemi dinamici più forte della POTP, la cui utilità risulterà più evidente in seguito.

**Definizione 1.1.4. (Lipschitz shadowing property)** Diciamo che un sistema dinamico  $\Phi$  gode della **LpSP** (Lipschitz Shadowing Property) su  $Y \subset X$  se esistono due costanti positive  $L, m_0$  tali che per ogni successione  $\{x_k \in Y : k \in \mathbb{Z}\}$  con

$$d(\Phi(x_k), x_{k+1}) \leq m \leq m_0, \quad k \in \mathbb{Z},$$

esiste un punto  $x$  tale per cui vale la disuguaglianza

$$d(\Phi^k(x), x_k) \leq Lm, \quad k \in \mathbb{Z} \tag{1.3}$$

Se questa proprietà vale anche nel caso  $Y = X$ , diciamo che il sistema dinamico  $\Phi$  gode della LpSP.

Concentriamoci infine sul problema dell'unicità per le traiettorie che godono della proprietà di pedinamento.

Diamo quindi la seguente definizione.

**Definizione 1.1.5. (Shadowing uniqueness property)** Diciamo che il sistema dinamico  $\Phi$  soddisfa la **SUP** (Shadowing Uniqueness Property) su un insieme  $Y \subset X$  se esiste  $\varepsilon > 0$  tale che ogni  $\delta$ -pseudotraiettoria  $\xi = \{x_k : k \in \mathbb{Z}\} \subset Y$  ha come  $\varepsilon$ -pedinamento al più un punto  $x \in X$ .

La proprietà di unicità è sostanzialmente equivalente a quella di espansività e questo fatto è mostrato proprio dal lemma seguente. Prima di enunciarlo e di darne una dimostrazione vediamo la definizione di espansività.

**Definizione 1.1.6. (Espansività)** Diciamo che il sistema dinamico  $\Phi$  è **espansivo** su un insieme  $Y \subset X$  se esiste  $\Delta > 0$  tale che se per  $x, y$  valgono le seguenti proprietà:

$$\begin{aligned} \Phi^k(x), \Phi^k(y) &\in Y, \quad k \in \mathbb{Z} \\ d(\Phi^k(x), \Phi^k(y)) &\leq \Delta, \quad k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

allora  $x = y$ .

Se  $Y = X$ , il sistema  $\Phi$  si dice **espansivo**

**Osservazione 1.1.4.** Nella definizione precedente chiamiamo  $\Delta$  *costante di espansività*.

**Lemma 1.1.1.** (a) *Supponiamo che  $\Phi$  goda della SUP su un insieme  $Y \subset X$  con costante  $\varepsilon$ . Allora  $\Phi$  è espansivo su  $Y$  e ogni  $\Delta \in (0, \varepsilon)$  è una costante di espansività di  $\Phi$  su  $Y$ .*

(b) *Supponiamo che per un insieme  $Y$  esistano un numero  $\Delta > 0$  e un insieme  $Y_1$  tale che  $\Phi$  sia espansivo su  $Y$  con costante di espansività  $\Delta$  e che il  $\Delta$ -intorno di  $Y_1$  sia un sottoinsieme di  $Y$ . Allora  $\Phi$  soddisfa la SUP su  $Y_1$  con  $\varepsilon = \Delta/2$ .*

*Dimostrazione.* Proviamo il punto (a).

Supponiamo che per  $x, y$  abbiamo:

- $\Phi^k(x), \Phi^k(y) \in Y, k \in \mathbb{Z}$
- $d(\Phi^k(x), \Phi^k(y)) \leq \Delta, k \in \mathbb{Z}$

Visto che  $\xi = \{\Phi^k(x)\}$  è una traiettoria di  $\Phi$ , allora è una  $\delta$ -pseudotraiettoria per  $\Phi$  per ogni  $\delta > 0$  e naturalmente ha  $x$  come  $\varepsilon$ -pedinamento. Dalle relazioni appena scritte segue che  $\xi \subset Y$  e che il suo  $\varepsilon$ -pedinamento è  $y$ . Questo implica che  $x = y$  dal momento che per ipotesi  $\Phi$  gode della SUP.

Proviamo il punto (b).

Supponiamo che per una  $\delta$ -pseudotraiettoria  $\xi = \{x_k : k \in \mathbb{Z}\} \subset Y_1$  esistano due punti  $x, y$  tali che

- $d(\Phi^k(x), x_k) < \varepsilon, k \in \mathbb{Z}$
- $d(\Phi^k(y), x_k) < \varepsilon, k \in \mathbb{Z}$

Quindi  $\{\Phi^k(x)\}, \{\Phi^k(y)\} \subset Y$  e

$$d(\Phi^k(x), \Phi^k(y)) < 2\varepsilon = \Delta, k \in \mathbb{Z}.$$

Pertanto sono verificate le ipotesi per l'espansività e questo implica che  $x = y$ , da cui la tesi, cioè il fatto che  $\Phi$  soddisfa la SUP.  $\square$

**Osservazione 1.1.5.** Abbiamo appena mostrato che se un diffeomorfismo  $\Phi$  gode della SUP, allora è espansivo. Questo perciò implica che la classe degli omeomorfismi che soddisfano sia la POTP che la SUP coincide con la classe degli omeomorfismi espansivi che godono solamente della POTP.

## 1.2 Insiemi iperbolici

Lo scopo di questa sezione è quella di dare tutte le premesse necessarie per poter poi enunciare e dimostrare quello che prende il nome di *Shadowing Lemma* e che rappresenta forse il più importante risultato riguardante la proprietà di shadowing di insiemi iperbolici nel caso di diffeomorfismi.

La dimostrazione che riporteremo è dovuta ad Anosov e seguendo il suo metodo ricondurremo il problema di shadowing alla risoluzione di un problema di punto fisso in uno spazio di Banach.

Da ora in avanti considereremo diffeomorfismi di  $\mathbb{R}^n$ . Ci accingiamo a dare la definizione di insiemi iperbolici, per poi studiare alcune proprietà che li caratterizzano.

**Definizione 1.2.1. (Insiemi iperbolici)** Sia  $M$  una varietà  $C^\infty$  e  $\Phi$  un diffeomorfismo di classe  $C^1$  su  $M$ . Diciamo che  $\Lambda \subseteq M$  è un insieme iperbolico per  $\Phi$  se

- (a)  $\Lambda$  è compatto e  $\Phi$ -invariante;
- (b) per ogni metrica Riemanniana su  $M$  esistono  $C > 0$ ,  $\lambda_0 \in (0, 1)$  costanti tali che  $\forall x \in \Lambda$  esistono due famiglie di sottospazi lineari di  $M$  che indichiamo con  $S_x$  e  $U_x$  e che soddisfano i seguenti punti:
  - (b.1)  $S_x \oplus U_x = T_x M$  (dove  $T_x M$  è lo spazio tangente alla varietà  $M$  nel punto  $x$ );
  - (b.2)  $d\Phi_x(S_x) = S_{\Phi(x)}$ ,  $d\Phi_x(U_x) = U_{\Phi(x)}$   $\forall x \in \Lambda$ ;
  - (b.3)

$$\|d\Phi_x^m v\| \leq C\lambda_0^m \|v\| \quad \forall x \in \Lambda, v \in S_x, m \geq 0 \quad (1.4)$$

$$\|d\Phi_x^{-m} v\| \leq C\lambda_0^{-m} \|v\| \quad \forall x \in \Lambda, v \in U_x, m \geq 0. \quad (1.5)$$

In questo caso le famiglie di sottospazi  $S_x$  e  $U_x$  prendono il nome di *strutture iperboliche* su  $\Lambda$ , mentre le costanti  $C$  e  $\lambda_0$  vengono solitamente chiamate *costanti iperboliche*.

Da ora in avanti al posto di una generica varietà  $M$  consideriamo lo spazio  $\mathbb{R}^n$  e di conseguenza anche i diffeomorfismi saranno di classe  $C^1$  su  $\mathbb{R}^n$ .

Indichiamo con  $|\cdot|$  la norma euclidea su questo stesso spazio.

Vogliamo introdurre adesso una nuova norma su un intorno di un insieme iperbolico che prende il nome di *norma di Lyapunov*.

**Lemma 1.2.1.** *Sia  $\Lambda$  un insieme iperbolico per  $\Phi$  con costanti di iperbolicità  $C$  e  $\lambda_0$ . Dato  $\varepsilon > 0$ ,  $\lambda \in (\lambda_0, 1)$  esiste  $W = W(\varepsilon, \lambda)$  intorno di  $\Lambda$  che gode delle seguenti proprietà.*

Esistono due costanti positive  $N', \delta$ , una norma  $C^\infty |\cdot|_x$ , con  $x \in W$  e due estensioni continue (non necessariamente  $d\Phi$ -invarianti)  $S'$  e  $U'$  di  $S$  e  $U$  su  $W$  tali che

$$(1) S'_x \oplus U'_x = \mathbb{R}^n;$$

(2) per  $x, y \in W$  con  $|y - \Phi(x)| < \delta$ , la mappa  $\Pi_y^s d\Phi_x$  ( $\Pi_y^u d\Phi_x$ ) è un isomorfismo tra  $S'_x$  e  $S'_y$  (rispettivamente  $U'_x$  e  $U'_y$ ) e valgono le disuguaglianze

$$|\Pi_y^s d\Phi_x(v)|_y \leq \lambda |v|_x \quad , \quad |\Pi_y^u d\Phi_x(v)|_y \leq \varepsilon |v|_x \quad , \quad v \in S'_x; \quad (1.6)$$

$$|\Pi_y^u d\Phi_x(v)|_y \geq \frac{1}{\lambda} |v|_x \quad , \quad |\Pi_y^s d\Phi_x(v)|_y \leq \varepsilon |v|_x \quad , \quad v \in U'_x \quad (1.7)$$

dove  $\Pi_x^s$  è la proiezione su  $S'_x$  parallela ad  $U'_x$  e  $\Pi_x^u = 1 - \Pi_x^s$ ;

(3)

$$\frac{1}{N'} |v|_x \leq |v| \leq N' |v|_x \quad \text{per } x \in W, v \in \mathbb{R}^n. \quad (1.8)$$

*Dimostrazione.* Costruiamo una norma continua  $|\cdot|$  con le proprietà desiderate. Fissato  $\mu \in (\lambda_0, \lambda)$  troviamo  $\nu \in \mathbb{N}$  tale che

$$C \left( \frac{\lambda_0}{\mu} \right)^{\nu+1} < 1.$$

Sia  $p \in \Lambda$  e  $v \in \mathbb{R}^n$  e dal momento che  $\Lambda$  è un insieme iperbolico per  $\Phi$ , possiamo rappresentare  $v$  come  $v = v^s + v^u \in S_p \oplus U_p$  e poniamo:

$$|v|_p^2 = (|v^s|_p^2 + |v^u|_p^2)^{\frac{1}{2}}$$

dove

$$|v^s|_p = \sum_{j=0}^{\nu} \mu^{-j} |d\Phi_p^j(v^s)|$$

$$|v^u|_p = \sum_{j=0}^{\nu} \mu^{-j} |d\Phi_p^{-j}(v^u)|$$

Per  $v^s$  otteniamo la seguente stima:

$$\begin{aligned}
|d\Phi_p(v^s)|_{\Phi(p)} &= \sum_{j=0}^{\nu} \mu^{-j} |d\Phi_{\Phi(p)}^j d\Phi_p(v^s)| \\
&= \mu \left( \sum_{j=1}^{\nu} \mu^{-j} |d\Phi_p^j(v^s)| + \mu^{-\nu-1} |d\Phi_p^{\nu+1}(v^s)| \right) \\
&\leq \mu \left( \sum_{j=1}^{\nu} \mu^{-j} |d\Phi_p^j(v^s)| + \mu^{-\nu-1} C \lambda_0^{\nu+1} |v^s| \right) \\
&\leq \mu |v^s|_p
\end{aligned}$$

dove il secondo uguale discende da (1.4) e la seconda disuguaglianza dalla scelta di  $\nu$  e dalla definizione di  $|v^s|_p$ .

In modo analogo, per  $v^u$  abbiamo:

$$\begin{aligned}
|d\Phi_p(v^u)|_{\Phi(p)} &= \sum_{j=0}^{\nu} \mu^{-j} |d\Phi_{\Phi(p)}^{-j} d\Phi_p(v^u)| \\
&= \mu \left( \sum_{j=0}^{\nu-1} \mu^{-j} |d\Phi_p^{-j}(v^u)| + \mu |d\Phi_p(v^u)| \right)
\end{aligned}$$

Poniamo  $w := d\Phi_p^{-\nu}(v^u) = d\Phi_{\Phi(p)}^{-\nu-1} d\Phi_p(v^u)$  da cui la seguente stima:

$$|w| = |d\Phi_{\Phi(p)}^{-(\nu+1)} d\Phi_p(v^u)| \leq C \lambda_0^{\nu+1} |d\Phi_p(v^u)|$$

Grazie a queste considerazioni, otteniamo la seguente disuguaglianza:

$$\begin{aligned}
|d\Phi_p(v^u)|_{\Phi(p)} &\geq \mu^{-1} \left( \sum_{j=0}^{\nu-1} \mu^{-j} |d\Phi_p^{-j}(v^u)| + \mu^{-\nu} \frac{\mu^{\nu+1}}{C \lambda_0^{\nu+1}} |d\Phi_p^{-\nu}(v^u)| \right) \\
&\geq \frac{1}{\mu} |v^u|_p
\end{aligned}$$

Dal momento che, per la definizione di insieme iperbolico,  $S$  e  $U$  sono continui, allora per costruzione la norma  $|\cdot|_p$  così ottenuta è continua su  $\Lambda$ .

Inoltre, in questo modo, se consideriamo un intorno chiuso di  $\Lambda$ , che indichiamo con  $W_0$ , possiamo estendere  $S$  ed  $U$  a famiglie di sottospazi lineari  $S'$  e  $U'$  di  $W_0$  (non necessariamente  $d\Phi$ -invarianti) e così risulta soddisfatta la proprietà (1) del lemma.  $\square$

**Osservazione 1.2.1.** Se dotiamo lo spazio di tale metrica abbiamo che le disuguaglianze (1.4) e (1.5) valgono con  $C = 1$ .



Osserviamo inoltre che, grazie alla costruzione utilizzata nella dimostrazione, l'intorno  $W$  è limitato.

Prendiamo quindi un intorno limitato  $V$  dell'insieme iperbolico  $\Lambda$  e sia  $\Psi$  un diffeomorfismo di classe  $C^1$  su  $\mathbb{R}^n$  e definiamo

$$\rho_{1,V}(\Phi, \Psi) = \sup_{x \in V} |\Phi(x) - \Psi(x)| + \sup_{x \in V} \|d\Phi_x - d\Psi_x\|.$$

La dimostrazione del Lemma 1.2.1 rende vere le seguenti affermazioni.

**Lemma 1.2.2.** *L'intorno  $W$ , la norma  $|\cdot|_x$  e le estensioni  $S', U'$  della struttura iperbolica su  $\Lambda$  godono delle seguenti proprietà. Esiste  $\delta_1 > 0$  tale che se per un diffeomorfismo  $\Psi$  vale la disuguaglianza*

$$\rho_{1,V}(\Phi, \Psi) < \delta_1$$

allora per  $x, y \in W$  con  $|y - \Psi(x)| < \delta_1$  abbiamo:

$$|\Pi_y^s d\Psi_x(v)|_y \leq \lambda |v|_x \quad , \quad |\Pi_y^u d\Psi_x(v)|_y \leq \varepsilon |v|_x \quad , \quad v \in S'_x; \quad (1.9)$$

$$|\Pi_y^u d\Psi_x(v)|_y \geq \frac{1}{\lambda} |v|_x \quad , \quad |\Pi_y^s d\Psi_x(v)|_y \leq \varepsilon |v|_x \quad , \quad v \in U'_x \quad (1.10)$$

Possiamo ora descrivere le principali strutture geometriche generate da un insieme iperbolico e tali strutture prendono il nome di *varietà stabile*  $W_\Phi^s$  e di *varietà instabile*  $W_\Phi^u$ .

Iniziamo dandone la definizione generale.

**Definizione 1.2.2. (Insieme stabile)** Sia  $(X, d)$  uno spazio metrico e  $\Phi$  un sistema dinamico. Definiamo **insieme stabile** di un punto  $x \in X$

$$W_\Phi^s(x) = \left\{ y \in X : \lim_{k \rightarrow +\infty} d(\Phi^k(x), \Phi^k(y)) = 0 \right\}$$

In altre parole,  $y \in W_\Phi^s$  se e soltanto se l'orbita di  $y$  è asintotica all'orbita di  $x$ .

Se non ci saranno confusioni, scriveremo  $W^s$  al posto di  $W_\Phi^s$ .

Come possiamo vedere direttamente dalla definizione, due insiemi stabili o sono disgiunti o coincidono, perciò  $X$  è unione disgiunta dei suoi insiemi stabili.

Inoltre  $\Phi(W^s(x)) \subset W^s(\Phi(x)) \quad \forall x \in X$ .

La definizione di *insieme instabile* per omeomorfismi è analoga.

**Definizione 1.2.3. (Insieme instabile)** Sia  $\Phi : X \rightarrow X$  un omeomorfismo da uno spazio metrico  $X$  in sé. Definiamo **insieme instabile** di un punto  $x \in X$

$$W_\Phi^u(x) = \left\{ y \in X : \lim_{k \rightarrow +\infty} d(\Phi^{-k}(x), \Phi^{-k}(y)) = 0 \right\}$$

Come nel caso precedente, anche gli *insiemi instabili* degli omeomorfismi formano una partizione dello spazio  $X$ .

Può capitare, inoltre, che la varietà stabile e quella instabile si intersechino, dando luogo a dei fenomeni che analizzeremo più avanti.

**Osservazione 1.2.2.** Dalle definizioni possiamo subito vedere che  $W_{\Phi}^u(x) = W_{\Phi^{-1}}^s(x)$ . L'unico problema che potrebbe nascere è dato dal fatto che  $\Phi$  non sia invertibile, ma nelle nostre condizioni, cioè  $\Phi$  diffeomorfismo di classe  $C^1$  su  $\mathbb{R}^n$ , il problema non sussiste.

**Definizione 1.2.4. (Insieme localmente stabile)** Sia  $(X, d)$  uno spazio metrico e  $\Phi$  un sistema dinamico su  $X$ . Sia  $p$  un punto fisso di  $\Phi$  e  $\mathcal{B}(p, \delta)$  la palla aperta di raggio  $\delta$  centrata in  $p$ . Allora l'**insieme localmente stabile** per  $\Phi$  in  $p$  di raggio  $\delta$  è

$$W_{\Phi}^s(p, \delta) = \{x \in \mathcal{B}(p, \delta) : x \in W_{\Phi}^s(p) \text{ e } \Phi^k(x) \in \mathcal{B}(p, \delta) \forall k \geq 0\}.$$

Analogamente diamo la seguente definizione.

**Definizione 1.2.5. (Insieme localmente instabile)** Sia  $\Phi : X \rightarrow X$  un omeomorfismo da uno spazio metrico  $X$  in sé. Definiamo **insieme localmente instabile** di un punto per  $\Phi$  in  $p$  di raggio  $\delta$

$$W_{\Phi}^u(p, \delta) = \{x \in \mathcal{B}(p, \delta) : x \in W_{\Phi}^u(p) \text{ e } \Phi^{-k}(x) \in \mathcal{B}(p, \delta) \forall k \geq 0\}.$$

Quello che vogliamo arrivare ad affermare è che, se  $p$  è un punto fisso iperbolico di un sistema dinamico  $(M, \Phi)$  con  $M$  varietà  $C^\infty$  e  $\Phi$  diffeomorfismo di classe  $C^\infty$ , allora l'insieme stabile e quello instabile sono varietà  $C^\infty$  che si intersecano trasversalmente in  $p$ .

**Osservazione 1.2.3.** Abbiamo appena introdotto il concetto di intersezione trasversale. Spieghiamo brevemente cosa intendiamo.

Due sottovarietà di una varietà  $C^\infty$  di dimensione finita si intersecano trasversalmente se in ogni punto dell'intersezione i rispettivi spazi tangente generano lo spazio tangente della varietà nel punto stesso.

Abbiamo bisogno di alcune definizioni preliminari per arrivare al risultato cercato.

**Definizione 1.2.6. (Sottospazio stabile e instabile)** Sia  $T : V \rightarrow V$  un operatore lineare da uno spazio vettoriale di dimensione finita su  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  o  $\mathbb{C}$ , e sia  $\lambda \in sp(T)$  (dove  $sp(T)$  è lo spettro di  $T$ , cioè l'insieme dei suoi autovalori (complessi)). Se  $\lambda \in \mathbb{K}$ , indichiamo con  $V_\lambda$  l'autospazio relativo all'autovalore  $\lambda$  e con  $E_\lambda$  l'autospazio generalizzato relativo a  $\lambda$  e dato da tutti i vettori  $v \in V$  tali che  $(T - \lambda I)^k(v) = 0$  per qualche  $k \geq 1$ .

Se  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  e  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ , indichiamo con  $V_\lambda \subseteq V^{\mathbb{C}}$  l'autospazio relativo a  $\lambda$  dato dall'azione di  $T$  sul complessificato  $V^{\mathbb{C}} = V \oplus iV$  e con  $E_\lambda \subseteq V^{\mathbb{C}}$  il corrispondente autospazio generalizzato. In questo caso poniamo  $V_{\lambda, \bar{\lambda}} = (V_\lambda \oplus V_{\bar{\lambda}}) \cap V$  e  $E_{\lambda, \bar{\lambda}} = (E_\lambda \oplus E_{\bar{\lambda}}) \cap V$ . Possiamo quindi definire:

- il **sottospazio stabile** di  $T$  come:

$$S = S(T) = \bigoplus_{|\lambda| < 1, \lambda \in \mathbb{K}} E_\lambda \oplus \bigoplus_{|\lambda| < 1, \lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{K}} E_{\lambda, \bar{\lambda}};$$

- il **sottospazio instabile** di  $T$  come:

$$U = U(T) = \bigoplus_{|\lambda| > 1, \lambda \in \mathbb{K}} E_\lambda \oplus \bigoplus_{|\lambda| > 1, \lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{K}} E_{\lambda, \bar{\lambda}};$$

**Definizione 1.2.7. (Punto fisso iperbolico)** Dato  $(M, \Phi)$  sistema dinamico di classe  $C^1$  con  $M$  varietà  $C^\infty$ , diciamo che un punto periodico  $p$  di periodo  $n$  è **iperbolico** se la forma lineare  $d\Phi_p : T_p M \rightarrow T_p M$  è iperbolica, cioè se  $d\Phi_p$  non ha autovalori di modulo 1 (o analogamente  $sp(d\Phi_p) \cap \mathbb{S}^1 = \emptyset$ ).

**Teorema 1.2.3. (Teorema della varietà stabile)** Sia  $\Phi : M \rightarrow M$  un diffeomorfismo di classe  $C^r$ , con  $r \geq 1$  su una varietà Riemanniana  $M$ . Sia  $p \in M$  un punto fisso iperbolico per  $\Phi$ . Allora esiste  $\delta > 0$  tale che:

- l'insieme localmente stabile  $W^s(p, \delta)$  è una sottovarietà immersa di classe  $C^r$  tale che  $T_p W^s(p, \delta) = S_{df_p}$ ;
- $\Phi(W^s(p, \delta)) \subseteq W^s(p, \delta)$ ;
- per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste  $C_\varepsilon > 0$  tale che

$$d(\Phi^k(y), p) \leq C_\varepsilon [\lambda(d\Phi_p) + \varepsilon]^k d(y, p)$$

per ogni  $y \in W^s(p, \delta)$ ,  $k \in \mathbb{N}$  e dove  $d$  è la distanza indotta dalla metrica Riemanniana;

- $y \in W^s(p, \delta)$  se e solo se  $\Phi^k(y) \in \mathcal{B}(p, \delta)$  per ogni  $k \in \mathbb{N}$ ;
- l'insieme stabile globale è dato da  $\cup_{k \in \mathbb{N}} \Phi^{-k}(W^s(p, \delta))$  e perciò è una sottovarietà immersa di classe  $C^r$ .

**Osservazione 1.2.4.** Grazie al Teorema 1.2.3 possiamo dire che l'insieme stabile/instabile di un punto fisso iperbolico  $p$  è la varietà stabile/instabile del punto stesso.

**Osservazione 1.2.5.** La dimostrazione del Teorema 1.2.3 non viene riportata, in quanto si allontana troppo dallo scopo principale di questa parte della tesi, che è quello enunciare e dimostrare lo Shadowing Lemma. Per un trattazione completa dell'argomento rimandiamo ad [1] (in particolare Capitolo 3, pag. 47 e segg.).

### 1.3 La versione classica dello Shadowing Lemma

Riportiamo subito l'enunciato del teorema meglio conosciuto come *Shadowing Lemma*.

**Teorema 1.3.1. (*Shadowing Lemma*)** *Se  $\Lambda$  è un insieme iperbolico per un diffeomorfismo  $\Phi$ , allora esiste  $W$  intorno di  $\Lambda$  tale che  $\Phi$  gode della POTP su  $W$ .*

*Inoltre possiamo trovare  $W_1$  intorno di  $\Lambda$  tale che  $\Phi$  gode della SUP su  $W_1$ .*

In realtà quello che andremo a fare è dimostrare un teorema con una proprietà di shadowing più forte, mostreremo infatti che nelle stesse ipotesi del Teorema 1.3.1 il diffeomorfismo  $\Phi$  gode della proprietà LpSP. Osserviamo per prima cosa che tale affermazione non deve risultare strana, dal momento che sia Anosov che Bowen, nelle loro dimostrazioni, provano che la dipendenza di  $\delta$  da  $\varepsilon$  è Lipschitziana (dove ricordiamo che  $\delta$  ed  $\varepsilon$  sono le costanti che emergono dalla dimostrazione che il sistema dinamico  $\Phi$  soddisfa la POTP).

Il passo successivo sarà quello di provare il seguente teorema, a partire dallo Shadowing Lemma.

**Teorema 1.3.2.** *Se  $\Lambda$  è un insieme iperbolico per un diffeomorfismo  $\Phi$ , allora esiste  $W$  intorno di  $\Lambda$  tale che  $\Phi$  gode della LpSp su  $W$ . Inoltre, possiamo scegliere  $m_0$  tale che  $\forall m \leq m_0$  esiste un unico  $x \in \Lambda$  che soddisfa la (1.3).*

Accingiamoci ora a dimostrare il Teorema 1.3.1 utilizzando la versione di Anosov, ma prima di passare ai dettagli della dimostrazione, abbiamo bisogno di un lemma tecnico che riguarda l'invertibilità di operatori lineari su spazi di Banach.

**Lemma 1.3.3.** *(1) Sia  $\mathcal{B}$  uno spazio di Banach. Consideriamo un operatore lineare  $A : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$  tale che  $\|A\| = \lambda < 1$  (dove  $\|\cdot\|$  è la classica norma degli operatori, cioè  $\|A\| = \sup_{|v|=1} |Av|$ ). Allora l'operatore  $I - A$  è invertibile e vale la seguente disuguaglianza:*

$$\|(I - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \lambda}.$$

(2) Sia  $\mathcal{B}$  uno spazio di Banach, rappresentato come

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}^s \oplus \mathcal{B}^u.$$

In accordo con tale rappresentazione di  $\mathcal{B}$ , consideriamo un operatore lineare  $A : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$  nella forma

$$A = \begin{bmatrix} A^{ss} & A^{su} \\ A^{us} & A^{uu} \end{bmatrix}$$

e supponiamo che, per tale operatore, abbiamo le stime

$$\|A^{ss}\|, \|(A^{uu})^{-1}\| \leq \lambda \quad (1.11)$$

per qualche  $\lambda \in (0, 1)$ .

Supponiamo inoltre che esista  $\nu > 0$  tale per cui valgano le disuguaglianze

$$\nu_1 = \nu \frac{1}{1 - \lambda} < 1$$

e

$$\|A^{su}\|, \|A^{us}\| \leq \nu.$$

Allora l'operatore  $I - A$  è invertibile e

$$\|(I - A)^{-1}\| \leq R(\lambda, \nu) = \frac{1}{(1 - \lambda)(1 - \nu_1)}.$$

*Dimostrazione.* Proviamo il punto (1).

Consideriamo l'operatore  $C$  definito da

$$C = \sum_{k=0}^{+\infty} A^k.$$

Dal momento che  $\|A\| = \lambda < 1$ , la serie converge e vale la seguente stima

$$\|C\| \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \|A\|^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda^k = \frac{1}{1 - \lambda}.$$

Vogliamo provare che  $C = (I - A)^{-1}$  in modo tale da ottenere così che l'operatore  $I - A$  è invertibile, che il suo inverso è proprio  $C$  e che vale la stima richiesta sulla norma.

Verifichiamo quindi che  $(I - A)C = I = C(I - A)$ :

$$(I - A)C = C - AC = \sum_{k=0}^{+\infty} A^k - \sum_{k=1}^{+\infty} A^k = I$$

e analogamente  $C(I - A) = I$ , da cui la tesi.

Proviamo il punto (2).

Per prima cosa consideriamo l'operatore  $A_0$  dato da:

$$A_0 = \begin{bmatrix} A^{ss} & 0 \\ 0 & A^{uu} \end{bmatrix}$$

Mostriamo che  $I - A_0$  è invertibile e che

$$(I - A_0)^{-1} = C_0 \tag{1.12}$$

dove  $C_0$  è rappresentato come

$$C_0 = \begin{bmatrix} C_0^s & 0 \\ 0 & C_0^u \end{bmatrix}$$

con

$$C_0^s = \sum_{k=0}^{+\infty} (A^{ss})^k$$

$$C_0^u = - \sum_{k=1}^{+\infty} (A^{uu})^{-k}.$$

Dal fatto che  $\|A^{ss}\| \leq \lambda < 1$  e  $\|(A^{uu})^{-1}\| \leq \lambda < 1$  segue che le due serie  $C_0^s$  e  $C_0^u$  sono convergenti e vale

$$\|C_0^s\| \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \|A^{ss}\|^k \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda^k = \frac{1}{1 - \lambda}.$$

Analogamente abbiamo anche la seguente stima

$$\|C_0^u\| \leq \frac{1}{1 - \lambda}.$$

Quindi:

$$\|C_0\| \leq \frac{1}{1 - \lambda}. \tag{1.13}$$

In modo analogo a quanto visto nella dimostrazione del punto (1), troviamo le seguenti uguaglianze:

$$(I - A^{ss})C_0^s = \sum_{k=0}^{+\infty} (A^{ss})^k - \sum_{k=1}^{+\infty} (A^{ss})^k = I$$

$$(I - A^{uu})C_0^u = - \sum_{k=1}^{+\infty} (A^{uu})^{-k} + \sum_{k=0}^{+\infty} (A^{uu})^{-k} = I$$

Analogamente possiamo mostrare che  $C_0^s(I - A^{ss}) = I$  e  $C_0^u(I - A^{uu}) = I$ , quindi l'operatore  $I - A^0$  è invertibile e vale (1.12).

Siano ora

$$A' = A_0 - A = \begin{bmatrix} 0 & -A^{su} \\ -A^{us} & 0 \end{bmatrix}$$

e

$$A'' = \begin{bmatrix} I^{ss} - A^{ss} & 0 \\ 0 & I^{uu} - A^{uu} \end{bmatrix}$$

allora segue che  $\|A'\| \leq \nu$  per le ipotesi e

$$\|A'C_0\| \leq \|A'\| \|C_0\| \leq \nu \frac{1}{1 - \lambda} = \nu_1 < 1. \quad (1.14)$$

Definiamo l'operatore:

$$C = C_0 \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k (A'C_0)^k.$$

Da (1.14) si ha che la serie converge e che vale

$$\|C\| \leq \|C_0\| \frac{1}{1 - \nu_1} \leq R(\lambda, \nu)$$

perchè

$$\|C\| \leq \|C_0\| \left( \sum_{k=0}^{+\infty} \|A'C_0\|^k \right) \leq \frac{1}{1 - \lambda} \left( \sum_{k=0}^{+\infty} \nu_1^k \right) = \frac{1}{1 - \lambda} \frac{1}{1 - \nu_1} = R(\lambda, \nu)$$

Mostriamo ora che  $(I - A)C = I$ .

Dal momento che  $A' = A_0 - A$  e  $A'' = I - A_0$ , otteniamo che  $I - A = A' + A''$  e inoltre abbiamo che  $A''C_0 = I$ , quindi:

$$\begin{aligned} (I - A)C &= (A' + A'')C = (A' + A'')C_0 \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k (A'C_0)^k = \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k (A'C_0)^{k+1} + \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k (A'C_0)^k = I \end{aligned}$$

Resta solo da dimostrare che  $C : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$ .

Infatti se  $C$  soddisfa tale proprietà ed è tale che  $(I - A)C = I$ , allora  $C = (I - A)^{-1}$ . Questo perchè, se supponiamo che  $C : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$ , allora  $\forall y \in \mathcal{B} \exists x \in \mathcal{B}$  tale che  $y = Cx$ . Dal momento che:

$$(I - A)y = (I - A)Cx = x$$

vediamo che

$$C(I - A)y = Cx = y$$

quindi  $C(I - A) = I$ .

Mostriamo quindi che  $C : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$ .

Rappresentiamo  $C$  nel seguente modo:  $C = C_0C_1$  e poniamo  $C_2 = A'C_0$ . Per costruzione  $C_0 : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$ . Poichè  $\|C_2\| \leq \nu_1 < 1$  la serie converge e abbiamo

$$(I + C_2)C_1 = C_1 + \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k C_2^{k+1} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k C_2^k + \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k C_2^{k+1} = I$$

e analogamente  $C_1(I + C_2) = I$ , quindi

$$C_1 = (I + C_2)^{-1}$$

pertanto anche  $C_1 : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$ , da cui la tesi.  $\square$

Abbiamo ora tutte le conoscenze per passare alla dimostrazione dello *Shadowing Lemma*.

*Dimostrazione.* Sia  $\Lambda$  un insieme iperbolico con costanti di iperbolicità  $C, \lambda_0$ . Prendiamo  $\lambda \in (\lambda_0, 1)$  ed  $\varepsilon > 0$  in modo tale che valga la disuguaglianza

$$\frac{\varepsilon}{1 - \lambda} < 1$$

Sia  $R = R(\lambda, \varepsilon)$  che è proprio quello dato dal Lemma 1.3.3. Dal Lemma 1.2.1, fissati  $\lambda, \varepsilon$ , troviamo  $W = W(\lambda, \varepsilon)$  intorno di  $\Lambda$ ,  $|\cdot|_x$  una norma e una famiglia di sottospazi  $S', U'$  tali che valgano le disuguaglianze (1.6), (1.7). Vogliamo mostrare che  $\Phi$  gode della LpSP su  $W$ .

Vediamo prima quale sia l'idea base della dimostrazione, cioè come sia strutturata, per poi scendere nei dettagli.

Consideriamo una successione  $\xi = \{x_k\}$  in  $W$ , tale che

$$|\Phi(x_k) - x_{k+1}| \leq m$$

Dalla disuguaglianza (1.8) abbiamo:

$$|\Phi(x_{k-1}) - x_k|_{x_k} \leq N' |\Phi(x_k) - x_{k+1}| \leq N'm$$

Se supponiamo di poter trovare  $\mu_0, L_0$  tale che per ogni successione  $\xi = \{x_k\}$  che soddisfi la disuguaglianza precedente con  $N'm \leq \mu_0$ , allora esiste un punto  $x$  con la proprietà seguente:

$$|\Phi^k(x) - x_k|_{x_k} \leq L_0 N'm, \quad k \in \mathbb{Z}$$



Perciò:

$$|\Phi^k(x) - x_k| \leq L_0(N')^2 d, \quad k \in \mathbb{Z}$$

e questo significa proprio che  $\Phi$  gode della LpSP su  $W$  con  $m_0 = \mu_0/N'$ ,  $L = L_0(N')^2$ .

Senza perdita di generalità, possiamo supporre che la norma euclidea  $|\cdot|$  sia la norma di Lyapunov su  $W$ . Per semplificare le notazioni scriveremo  $S, U$  al posto delle loro estensioni  $S', U'$ .

Passiamo quindi alla dimostrazione vera e propria del teorema.

Fissiamo una successione  $\xi = \{x_k\}$  tale che

$$|\Phi(x_k) - x_{k+1}| \leq m,$$

prendiamo inoltre una successione  $\eta = \{y_k \in \mathbb{R}^n : k \in \mathbb{Z}\}$  e poniamo

$$y_k = x_k + v_k.$$

Osserviamo subito che  $\eta$  è una traiettoria di  $\Phi$  se e solo se

$$v_{k+1} = \Phi(x_k + v_k) - x_{k+1}, \quad k \in \mathbb{Z} \quad (1.15)$$

Se inoltre consideriamo lo sviluppo in serie di Taylor di  $\Phi(x_k + v_k)$  nel punto  $x_k$  troviamo:

$$\Phi(x_k + v_k) - x_{k+1} = [\Phi(x_k) - x_{k+1}] + d\Phi_{x_k}(v_k) + h_k(v_k) \quad (1.16)$$

con  $h_k(0) = 0$  e  $dh_k(0) = 0$ .

Sia  $\mathcal{B}$  lo spazio di Banach delle successioni  $\bar{v} = \{v_k \in \mathbb{R}^n : k \in \mathbb{Z}\}$  con la norma  $\|\bar{v}\| = \sup_{k \in \mathbb{Z}} |v_k|$ .

Se  $r > 0$ , denotiamo con  $\mathcal{B}(r)$  l'insieme

$$\mathcal{B}(r) = \{\bar{v} \in \mathcal{B} : \|\bar{v}\| \leq r\}.$$

Abbiamo ora che  $W$  è limitato e  $D\Phi$  è continua, quindi  $\exists C_1 > 0$  tale che

$$\|d\Phi_x\| \leq C_1, \quad \forall x \in W$$

inoltre esistono  $m_1 > 0$  e una funzione  $b(s) \rightarrow 0$  per  $s \rightarrow 0$  tali che

$$|h_k(v_k) - h_k(v'_k)| \leq b(\max\{\|v\|, \|v'\|\})|v_k - v'_k| \quad \text{per } \|v\|, \|v'\| \leq m_1.$$

Per  $\bar{v} \in \mathcal{B}$  poniamo  $F(\bar{v}) = \bar{v}'$ , dove

$$v'_k = \Phi(x_{k-1} + v_{k-1}) - x_k.$$

Poiché  $|\Phi(x_k) - x_{k+1}| \leq m$ , segue da (1.16) e dalle stime appena viste che, se  $\bar{v} \in \mathcal{B}(d_1)$ , abbiamo:

$$|\Phi(x_k + v_k) - x_{k+1}| \leq d + C_1|v_k| + b(d_1)|v_k| = d + (C_1 + b(d_1))|v_k|,$$

perciò  $F$  è un operatore da  $\mathcal{B}(d_1)$  in  $\mathcal{B}$ .

Per quanto detto, inoltre,  $\eta$  è una traiettoria di  $\Phi$  se e soltanto se  $\bar{v}$  è un punto fisso di  $F$ .

Dati  $S, U$  come dal Lemma 1.2.1, rappresentiamo  $\mathcal{B}$  come segue

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}^s \oplus \mathcal{B}^u \quad (1.17)$$

dove

$$\begin{aligned} \mathcal{B}^s &= \{\bar{v} \in \mathcal{B} : v_k \in S(x_k), k \in \mathbb{Z}\} \\ \mathcal{B}^u &= \{\bar{v} \in \mathcal{B} : v_k \in U(x_k), k \in \mathbb{Z}\} \end{aligned}$$

Dalla definizione di  $F$  e dalla (1.16) segue che  $F$  è differenziabile in 0 con  $(dF_0(\bar{v}))_{k+1} = d\Phi_{x_k}(v_k)$ . Prendiamo

$$v_k = v_k^s + v_k^u, \quad v_k^s \in S_{x_k}, \quad v_k^u \in U_{x_k}$$

e rappresentiamo  $w_{k+1} = d\Phi_{x_k}(v_k)$  come

$$w_{k+1} = w_{k+1}^s + w_{k+1}^u, \quad w_{k+1}^s \in S_{x_{k+1}}, \quad w_{k+1}^u \in U_{x_{k+1}}.$$

Allora abbiamo:

$$w_{k+1}^s = w_{k+1}^{ss} + w_{k+1}^{su}$$

dove (ponendo  $z = x_{k+1}$ )

$$\begin{aligned} w_{k+1}^{ss} &= \Pi_z^s d\Phi_{x_k}(v_k^s) \\ w_{k+1}^{su} &= \Pi_z^s d\Phi_{x_k}(v_k^u) \end{aligned}$$

Analogamente:

$$w_{k+1}^u = w_{k+1}^{us} + w_{k+1}^{uu}$$

con

$$\begin{aligned} w_{k+1}^{us} &= \Pi_z^u d\Phi_{x_k}(v_k^s) \\ w_{k+1}^{uu} &= \Pi_z^u d\Phi_{x_k}(v_k^u) \end{aligned}$$

Prendiamo  $m < \delta$  ( $\delta$  è quello dato dal Lemma 1.2.1 una volta fissati  $\lambda, \varepsilon$ ), in modo tale che valga la disuguaglianza  $|z - \Phi(x_k)| < \delta$ . Segue quindi dallo stesso lemma che:

$$\begin{aligned} |w_{k+1}^{ss}| &\leq \lambda |v_k^s|, \quad |w_{k+1}^{su}| \leq \varepsilon |v_k^u| \\ |w_{k+1}^{uu}| &\geq \frac{1}{\lambda} |v_k^u|, \quad |w_{k+1}^{us}| \leq \varepsilon |v_k^s|. \end{aligned}$$

Se poniamo  $\bar{v}^s = \{v_k^s\}$ ,  $\bar{w}^{ss} = \{w_k^{ss}\}$ , dalle stime appena viste abbiamo

$$\|w^{ss}\| \leq \lambda \|v^s\|, \|w^{uu}\| \geq \frac{1}{\lambda} \|v^u\|, \|w^{su}\| \leq \varepsilon \|v^u\|, \|w^{us}\| \leq \varepsilon \|v^s\|.$$

Possiamo quindi rappresentare  $dF_0$  rispetto alla decomposizione dello spazio di Banach  $\mathcal{B}$  nel seguente modo:

$$dF_0 = \begin{bmatrix} A^{ss} & A^{su} \\ A^{us} & A^{uu} \end{bmatrix}$$

dove

$$\|A^{ss}\|, \|(A^{uu})^{-1}\| \leq \lambda, \|A^{su}\|, \|A^{us}\| \leq \varepsilon.$$

Grazie alla scelta di  $\varepsilon$  e  $\lambda$ , per il lemma (1.3.3) l'operatore  $I - dF_0$  è invertibile in  $\mathcal{B}$  e

$$\|(I - dF_0)^{-1}\| \leq R. \quad (1.18)$$

Poniamo

$$G(\bar{v}) = (I - dF_0)^{-1}(F(\bar{v}) - dF_0(\bar{v})).$$

L'equazione  $F(\bar{v}) = \bar{v}$  è equivalente a  $G(\bar{v}) = \bar{v}$ , infatti se  $F(\bar{v}) = \bar{v}$  allora  $G(\bar{v}) = (I - dF_0)^{-1}(I - dF_0)\bar{v} = \bar{v}$ . Sia  $H(\bar{v}) = F(\bar{v}) - dF_0(\bar{v})$ , cioè  $H(\bar{v})_k = [\Phi(x_{k-1}) - x_k] + h_{k-1}(v_{k-1})$ , allora

$$\|H(0)\| \leq m \quad (1.19)$$

Segue inoltre dalle proprietà viste per  $h_k$  che se  $v, v' \in \mathcal{B}(m_1)$ , allora

$$\|H(\bar{v}) - H(\bar{v}')\| \leq b(\max\{\|v\|, \|v'\|\})\|v - v'\|. \quad (1.20)$$

Deduciamo dalle stime (1.18), (1.19), (1.20) che, se  $m < \mu$ , allora

$$\|G(0)\| \leq \|(I - dF_0)^{-1}\| \|H(0)\| \leq Rm$$

e

$$\|G(\bar{v}) - G(\bar{v}')\| \leq \|(I - dF_0)^{-1}\| \|H(\bar{v}) - H(\bar{v}')\| \leq Rb(\max\{\|v\|, \|v'\|\})\|v - v'\|$$

per  $\bar{v}, \bar{v}' \in \mathcal{B}(m_1)$ .

Prendiamo  $m_2 \in (0, \min(\delta, m_1))$  tale che  $Rb(m_2) < 1/2$ . Ne segue che:

$$\|G(\bar{v}) - G(\bar{v}')\| \leq \frac{1}{2} \|\bar{v} - \bar{v}'\|$$

per  $\bar{v}, \bar{v}' \in \mathcal{B}(m_2)$ . Perciò  $G$  è una contrazione sulla palla  $\mathcal{B}(m_2)$ .

Siano

$$m_0 = \frac{m_2}{2R}, \quad L = 2R.$$

Prendiamo  $m \leq m_0$  (osserviamo anche che  $R > 1$ , quindi  $m_0 < m_2$ ). Per  $\bar{v} \in \mathcal{B}(Lm)$  abbiamo:

$$\|G(\bar{v})\| \leq \|G(0)\| + \|G(\bar{v} - G(0))\| \leq Rm + \frac{1}{2}2Rm = Lm.$$

Quindi  $G : \mathcal{B}(Lm) \rightarrow \mathcal{B}(Lm)$  e su tale palla è una contrazione, perciò esiste ed è unico  $\bar{v}^*$  punto fisso di  $G$  ( e quindi anche di  $F$ ) in  $\mathcal{B}(Lm)$ .

Il punto  $x = x_0 + v_0^*$  soddisfa la disuguaglianza (1.3), infatti:

$$|\Phi^k(x) - x_k| = |\Phi^k(x_0 + v_0^*) - x_k| = |F(v_0^*)| \leq Lm, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

L'unicità del punto fisso implica l'unicità della traiettoria di shadowing.  $\square$

**Osservazione 1.3.1.** Possiamo vedere che, per  $m \geq m_0$ ,  $G$  ha un unico punto fisso non solo nella palla  $\mathcal{B}(Lm)$ , ma anche nella palla più grande  $\mathcal{B}(Lm_0)$ .

Sia  $\varepsilon > 0$  e consideriamo un intorno  $W_0$  di  $\Lambda$  tale che  $2\varepsilon < Lm_0$  e tale che  $N_\varepsilon(W_0) \subset W$  (dove  $N_\varepsilon(W_0)$  è l' $\varepsilon$  intorno di  $W_0$ ).

Vogliamo dimostrare che  $\Phi$  ha la SUP su  $W_0$  con costante  $\varepsilon$ .

Supponiamo quindi che per una  $\delta$ -pseudotraiettoria  $\xi = \{x_k\} \subset W_0$  esistano  $x, y$  tali che

$$\begin{aligned} |\Phi^k(x) - x_k| &< \varepsilon \\ |\Phi^k(y) - x_k| &< \varepsilon. \end{aligned}$$

Quindi:

$$|\Phi^k(x) - \Phi^k(y)| \leq |\Phi^k(x) - x_k| + |\Phi^k(y) - x_k| \leq 2\varepsilon < Lm_0.$$

La successione  $\xi' = \{\Phi^k(x)\}$  è una  $\delta$ -pseudotraiettoria per ogni  $\delta > 0$  e abbiamo inoltre che  $\xi' \subset W$ . Tale  $\delta$ -pseudotraiettoria risulta quindi  $\varepsilon$ -shadowed sia da  $x$  che da  $y$  e l'unicità di un punto fisso di  $G$  in  $\mathcal{B}(Lm_0)$  implica che  $x = y$ . Abbiamo così mostrato che  $\Phi$  gode della SUP su  $W_0$ .

Ora, seguendo quanto detto, possiamo ricavare il Teorema 1.3.2 dal Teorema 1.3.1.

Osserviamo che la prima parte dell'enunciato discende direttamente, visto che nella dimostrazione abbiamo mostrato che il diffeomorfismo  $\Phi$  soddisfa la Lp-SP.

La parte sull'unicità non possiamo vederla come un corollario dello Shadowing Lemma, ma possiamo provarla direttamente utilizzando il Lemma 1.1.1.

Dall'osservazione precedente, il sistema dinamico  $\Phi$  gode della SUP su  $W_0$  con costante  $\varepsilon$ . Segue perciò dal punto (a) del Lemma 1.1.1 che  $\Phi$  è espansivo su  $W_0$  con costante di espansività  $\Delta \in (0, \varepsilon)$ . Possiamo quindi trovare un intorno  $W_1$  di  $\Lambda$  e una costante  $\delta \in (0, \Delta/2)$  tale che  $N_{2\delta}(W_1) \subset W_0$ . Dal punto (b) dello stesso lemma troviamo che  $\Phi$  soddisfa la SUP su  $W_1$  con costante  $\delta$ .

### 1.3.1 Un'applicazione dello Shadowing Lemma nel caso di punti omoclinici

Vogliamo descrivere un'applicazione del Teorema 1.3.1 in un caso particolare. Per prima cosa, osserviamo che se  $p$  è un punto fisso iperbolico, allora  $\Lambda = \{p\}$  è un insieme iperbolico.

Il nostro scopo è quello di introdurre i punti omoclinici e mostrare, come già osservato da Poincaré, che l'esistenza di tali punti implica strutture complicate delle traiettorie in un intorno dell'insieme  $\Gamma = \overline{O(q)}$  con  $q$  punto omoclinico. Partiamo quindi dalla definizione.

**Definizione 1.3.1. (Punto omoclinico)** Sia  $p$  un punto fisso per un diffeomorfismo  $\Phi$  e sia  $q \neq p$ . Diciamo che  $q$  è un **punto omoclinico** se

$$\Phi^k(q) \rightarrow p \text{ per } |k| \rightarrow +\infty.$$

Segue dal teorema della varietà stabile (1.2.3) che fissato  $\delta > 0 \exists k \in \mathbb{N}$  tale che

$$q \in \Phi^k(W^s(p, \delta)) \cap \Phi^{-k}(W^u(p, \delta)).$$

**Definizione 1.3.2. (Punto omoclinico trasversale)** Diciamo che  $q$  è un **punto omoclinico trasversale** se è punto di intersezione trasversale di  $W_\delta^s$  e  $W_\delta^u$ .

**Osservazione 1.3.2.** Abbiamo spiegato il significato di intersezione trasversale nell'Osservazione 1.2.3. Riportando tale definizione al caso in cui sia la varietà stabile che quella instabile siano curve, abbiamo che  $q$  si dice punto omoclinico trasversale se le curve non sono tangenti in  $q$ , o meglio se i vettori velocità nel punto stesso sono linearmente indipendenti.

Introduciamo ora l'insieme

$$\Gamma = \overline{O(q)}.$$

$\Gamma$  risulta compatto e invariante, proprio per definizione. Osserviamo inoltre che la varietà stabile e la varietà instabile sono invarianti, perciò  $\Phi^q \in W_\delta^s \cap W_\delta^u \forall k$ , quindi l'intera orbita di un punto omoclinico trasversale ha la sua stessa proprietà. Pertanto  $\Gamma$  è un insieme iperbolico. Possiamo ora dimostrare un'importante proprietà degli intorni di traiettorie omocliniche trasversali.

**Teorema 1.3.4.** *Se  $q$  è un punto omoclinico trasversale, allora ogni intorno di  $\Gamma$  contiene una famiglia numerabile di punti periodici differenti di  $\Phi$ .*

*Dimostrazione.* Sia  $U$  un generico intorno di  $\Gamma$ . Grazie allo Shadowing Lemma, possiamo scegliere  $U$  limitato in modo tale che  $\Phi$  goda sia della POTP che della SUP. Allora  $\Phi$  soddisfa le stesse proprietà anche su  $\Gamma$ .

Sia quindi  $\Delta > 0$  tale che ogni  $\delta$ -pseudotraiettoria  $\xi \subset \Gamma$  sia  $\Delta$ -pedinata da al più un punto. Sia  $\varepsilon \in (0, \Delta)$  tale che  $N_\varepsilon(\Gamma) \subset U$  e inoltre supponiamo che

$$2\varepsilon < |p - q| \quad (1.21)$$

con  $p$  punto fisso per  $\Phi$ .

Fissiamo  $\delta$  in corrispondenza di  $\varepsilon$  proprio come nella Definizione 1.1.3.

Sia  $L$  la costante di Lipschitz di  $\Phi$  su  $U$ .

Dal fatto che  $q$  è un punto trasversale omoclinico, esistono  $l < 0$  e  $m > 0$  tale che, per i punti  $q_0 = \Phi^l(q)$  e  $q_1 = \Phi^m(q)$ , valgono le disuguaglianze

$$|q_0 - p| < \delta, \quad |q_1 - p| < \frac{\delta}{L} \quad (1.22)$$

e inoltre abbiamo  $q_1 \in U$ .

Poniamo  $N = m - l + 2$  e definiamo la successione  $\xi = \{x_k : k \in \mathbb{Z}\}$  nel modo seguente: scriviamo  $k \in \mathbb{Z}$  nella forma  $k = k_0 + k_1 N$  con  $0 \leq k_1 < N$  e poniamo  $x_0 = p$  se  $k_0 = 0$  e  $x_k = \Phi^{k_0 - 1}(q_0)$  se  $k_0 \neq 0$ . Otteniamo così una successione periodica di periodo  $n$ :

$$\dots x_0 = p, \quad x_1 = q_0, \quad \dots, \quad x_{N-1} = q_1, \quad x_N = p, \quad x_{N+1} = q_0, \quad \dots$$

Segue dalle stime (1.22) che

$$|\Phi(x_0 - x_1)| = |p - q_0| < \delta$$

e

$$|\Phi(x_{N-1} - x_N)| \leq L|q_1 - p| = \delta$$

quindi  $\xi$  è una  $\delta$ -pseudotraiettoria su  $\Phi$ . Grazie alla scelta di  $\delta$  esiste  $x$  tale che  $x$  sia un  $\varepsilon$ -pedinamento di  $\xi$ .

Poniamo  $y = \Phi^N(x)$  e  $x_k = x_{k+N} \forall k$  e abbiamo:

$$|\Phi^k(y) - x_k| = |\Phi^{k+N}(x) - x_{k+N}| \leq \varepsilon, \quad k \in \mathbb{Z}$$

e questo significa che anche il punto  $y$  è un  $\varepsilon$ -pedinamento di  $\xi$ . Il fatto che  $\xi \subset \Gamma$  e che  $\Phi$  gode della SUP su  $\Gamma$  implica che  $x = y$ , cioè  $x$  è un punto periodico di  $\Phi$ .

Allora  $\exists k$  tale che  $|\Phi^k(x) - q| < \varepsilon$  e da (1.21) segue che  $x \neq p$ .

Le stime (1.22) implicano che  $\Gamma$  non contiene punti periodici di  $\Phi$  diversi da  $p$ , perciò per l'insieme  $O(x)$  abbiamo  $O(x) \cap \Gamma = \emptyset$ . Abbiamo così trovato un intorno  $U'$  di  $\Gamma$  tale che  $O(x) \cap U' = \emptyset$ .

Allo stesso modo possiamo dimostrare che  $U'$  contiene un punto periodico  $x' \neq p$  e così per gli altri intorni. Perciò esiste una famiglia numerabile di punti periodici differenti di  $\Phi$  in  $U$  le traiettorie dei quali sono ancora in  $U$ .  $\square$

# Capitolo 2

## Determinazione caotica

### 2.1 Ordine e caos

Un sistema dinamico può essere discreto o continuo. Nel caso discreto il sistema dinamico è definito da una mappa  $F : M \rightarrow M$ , con  $M$  varietà  $C^\infty$  e  $F$  diffeomorfismo su  $M$ . Abbiamo già definito l'orbita  $O(p)$  di un punto  $p \in M$ . I sistemi dinamici discreti sono molto utili per rappresentare dei problemi modello e possiamo ottenerli dal caso continuo se osserviamo lo stato del sistema in modo discontinuo, o se consideriamo una discretizzazione del tempo, come  $t_n = hn$  oppure ogni volta in cui intersecano una data sezione (mappa di Poincaré).

Nel caso continuo un sistema dinamico è definito da un flusso  $\Phi_t : M \rightarrow M$  definito  $\forall t$ . Un sistema dinamico continuo possiamo ottenerlo come soluzione di equazioni differenziali ordinarie, come ad esempio quelle che descrivono l'orbita di qualche oggetto nello spazio.

Ci sono due classi principali per quanto riguarda il comportamento delle orbite di un sistema dinamico: il caso ordinato e quello caotico. Un'orbita ordinata è tale che l'errore nel calcolo dell'orbita stessa cresce polinomialmente nel tempo, sia per  $t \rightarrow +\infty$ , che per  $t \rightarrow -\infty$ . In molti casi numerici che possiamo incontrare l'errore cresce come  $ct^2 + dt$  con  $c, d > 0$  dipendenti sia dall'orbita che dai metodi usati per calcolarla.

Un'orbita caotica è invece tale per cui l'errore nel calcolarla cresce esponenzialmente nel tempo sia per  $t \rightarrow +\infty$  che per  $t \rightarrow -\infty$ .

#### 2.1.1 Esponenti di Lyapunov

Siano:  $F$  un sistema dinamico discreto su  $\mathbb{R}^2$  (o su  $\mathbb{T}^2$ ),  $x_0$  una condizione iniziale e  $x_k = F^k(x_0)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  la sua orbita. Possiamo considerare il linearizzato di  $F$  dato dalla matrice  $A(x) = DF(x)$  e il linearizzato di ciascuna iterazione

della mappa:

$$A^{(k)}(x_0) = DF^k(x_0) = A(x_{k-1})A(x_{k-2}) \cdot \dots \cdot A(x_1)A(x_0).$$

Dato un vettore  $V$  applicato ad un punto  $x$ , cioè stiamo considerando  $V$  come una variazione infinitesima della condizione iniziale, possiamo prendere le immagini di  $V$  mediante le linearizzazioni delle mappe iterate  $V$ ,  $A(x)V$ ,  $A^{(2)}(x)V$ ,  $\dots$ ,  $A^{(k)}V$ ,  $\dots$  e studiare l'andamento della lunghezza di questi vettori in funzione di  $k$ . Nel caso per esempio che  $x$  sia un punto fisso iperbolico, con autovalori reali  $0 < \lambda_1 < 1 < \lambda_2$ , se  $V = V_1$  è l'autovettore corrispondente a  $\lambda_1$  si avrà

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \|A^{(k)}(x)V_1\| = \lim_{k \rightarrow +\infty} |\lambda_1|^k \|V_1\| = 0$$

mentre per  $V = V_2$

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \|A^{(k)}(x)V_2\| = \lim_{k \rightarrow +\infty} |\lambda_2|^k \|V_2\| = +\infty$$

cioè l'andamento di queste successioni di lunghezze del vettore variazione dipende dai moltiplicatori di Lyapunov<sup>1</sup> e dagli esponenti di Lyapunov.<sup>2</sup> Grazie a quest'idea, possiamo generalizzare la definizione di esponente di Lyapunov ad un'orbita qualsiasi, non necessariamente periodica.

**Definizione 2.1.1. (Esponente di Lyapunov)** Dati la mappa  $F$ , la condizione iniziale  $x$  e il vettore variazione  $V$  di lunghezza 1, se esiste il limite

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{k} \log (\|A^{(k)}(x)V\|) = \chi(x, V)$$

prende il nome di **esponente di Lyapunov** per  $F$  in  $x$ .

Un esponente di Lyapunov misura il carattere esponenziale della divergenza di orbite con condizioni iniziali vicine (in effetti infinitamente vicine, nel senso che si usano le derivate parziali contenute nelle matrici jacobiane). Il vettore variazione cresce di lunghezza come  $\exp(\chi k)$ ; ovvero  $T_L = \frac{1}{\chi}$  è il **tempo di Lyapunov**, tempo in cui la lunghezza tende ad aumentare di un fattore  $\exp(1)$ . Quindi nel caso di orbite caotiche esiste un numero positivo  $\chi$  tale che la parte principale dell'errore è  $c \exp(\chi t)$ , con  $c$  che dipende dal metodo utilizzato.

**Osservazione 2.1.1.** Per quanto detto, quello che praticamente vogliamo calcolare è il tempo di Lyapunov: se questo è minore dell'intervallo di tempo durante il quale abbiamo bisogno di calcolare l'orbita, non possiamo ignorare il comportamento caotico; se invece l'intervallo di tempo è minore o dello stesso ordine di grandezza del tempo di Lyapunov, possiamo ignorare la natura caotica dell'orbita.

<sup>1</sup>I moltiplicatori di Lyapunov sono i moduli degli autovalori delle iterate della matrice  $A$ .

<sup>2</sup>In questo caso gli esponenti di Lyapunov sono i logaritmi naturali dei moltiplicatori di Lyapunov.



## 2.2 La mappa standard

In questa sezione vogliamo dare una definizione generale di mappa standard nel caso di un sistema conservativo.

Consideriamo un sistema newtoniano ad un grado di libertà:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = f(x).$$

Riconduciamo l'equazione differenziale del secondo ordine ad un sistema di due equazioni differenziali del primo ordine:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = f(x). \end{cases}$$

Se usiamo le differenze centrali<sup>3</sup> otteniamo la discretizzazione

$$\Delta_0^2 x_k = h^2 f(x_k).$$

Però, per essere in grado di usare le condizioni iniziali  $x(0) = x_0$ ,  $y_0 = 0$  dobbiamo trovare una discretizzazione anche per l'equazione  $\dot{x} = y$ . Se usiamo la differenza all'indietro<sup>4</sup>

$$hy_k = \Delta_- x_k \Leftrightarrow hy_{k+1} = \Delta_+ x_k$$

si ottiene un sistema dinamico discreto decomponendo  $\Delta_0^2 = \Delta_+ - \Delta_-$

$$x_{k+1} - x_k = x_k - x_{k-1} + h^2 f(x_k),$$

quindi sostituendo  $y_{k+1}$ ,  $y_k$  si ha  $hy_{k+1} = hy_k + h^2 f(x_k)$ ; dividendo per  $h$  questa equazione e aggiungendoci  $x_{k+1} = x_k + hy_{k+1}$  si trova il sistema dinamico discreto nonlineare

$$\begin{cases} x_{k+1} = x_k + hy_{k+1} \\ y_{k+1} = y_k + hf(x_k). \end{cases}$$

che si chiama **mappa standard** del sistema newtoniano  $\ddot{x} = f(x)$ .

**Osservazione 2.2.1.** La mappa standard costituisce una discretizzazione conservativa che trasforma un sistema dinamico continuo conservativo in un sistema dinamico discreto pure conservativo.

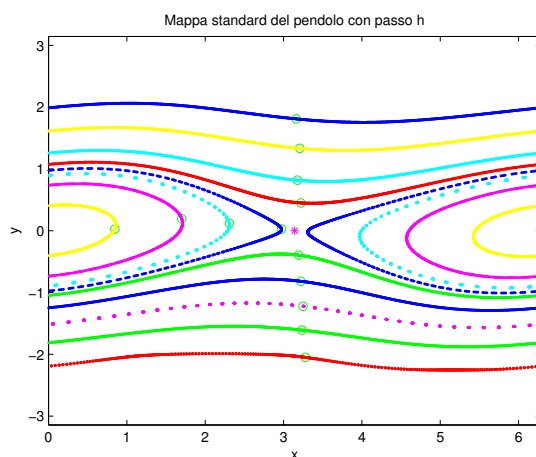
<sup>3</sup>Data una funzione  $f(t)$  definita per ogni  $t$  e fissato un passo  $h > 0$ , l'operatore differenza centrale è definito da:  $\Delta_0 f(t) = f(t + \frac{h}{2}) - f(t - \frac{h}{2})$ .

<sup>4</sup>Data una funzione  $f(t)$  definita per ogni  $t \in \mathbb{R}$  e fissato un passo  $h > 0$ , gli operatori spostamento  $(Sf)(t) = f(t + h)$ , differenza in avanti  $\Delta_+ f(t) = f(t + h) - f(t)$ , differenza all'indietro  $\Delta_- f(t) = f(t) - f(t - h)$  ed identità  $(If)(t) = f(t)$  mandano lo spazio di tali funzioni in sé. Valgono le relazioni  $\Delta_+ = S - I$  e  $\Delta_- = I - S^{-1}$ .

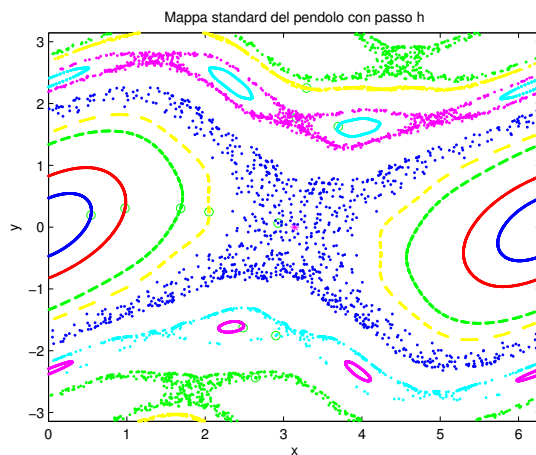
### 2.2.1 La mappa standard del pendolo

La mappa standard del pendolo si ottiene a partire dal sistema newtoniano  $\ddot{x} = -\sin(x)$ , cioè dal pendolo nonlineare conservativo:

$$\begin{cases} x_{k+1} = x_k + hy_{k+1} \\ y_{k+1} = y_k - h \sin(x_k). \end{cases}$$



(a) *Mappa standard del pendolo con  $h = 0.5$ .*



(b) *Mappa standard del pendolo con passo  $h = 1$ .*

Figura 2.1: *Mappa standard del pendolo al variare del passo  $h$ .*

La mappa è periodica di periodo  $2\pi$  nella variabile  $x$ , che può essere interpretata come una variabile angolo. Per semplificare la descrizione delle

proprietà rispetto alla variabile  $y$  conviene cambiare variabile sostituendo  $hy$  con  $y$ :

$$\begin{cases} x_{k+1} &= x_k + y_{k+1} \\ y_{k+1} &= y_k - h^2 \sin(x_k). \end{cases}$$

In questo modo la mappa risulta periodica di periodo  $2\pi$  anche rispetto ad  $y$  e quindi in conclusione la mappa può essere interpretata come un diffeomorfismo del toro  $\mathbb{T}^2$  su se stesso.

La mappa standard del pendolo dipende quindi da un solo parametro  $\mu = h^2 \geq 0$ . Intuitivamente possiamo vedere che per  $\mu$  molto piccolo il sistema discreto approssimerà il sistema continuo, la funzione energia  $E(x, y) = y^2/2 - \cos(x)$  cambierà di poco ad ogni passo e la successione  $(x_k, y_k)$  si muoverà quasi lungo le curve di livello di  $E$ , cioè vicino alla soluzione del sistema continuo. Invece per valori grandi di  $\mu$ , i due sistemi non potranno neanche essere paragonati. Per osservare che cosa succede per valori intermedi di  $\mu$ , osserviamo le orbite della mappa standard per i valori  $\mu = 1/4$  (quindi  $h = 0.5$ ) e  $\mu = 1$  (analogo ad  $h = 1$ ) in Figura 2.1.

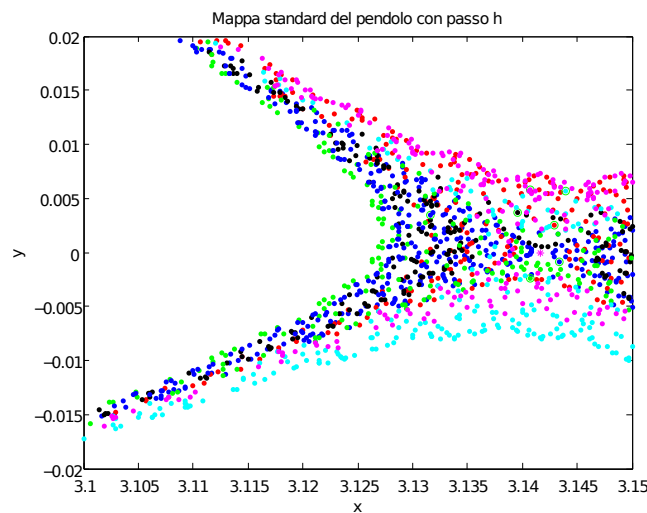


Figura 2.2: *Mappa standard del pendolo con passo  $h = 0.5$ , un ingrandimento della Figura 2.1(a), che mostra alcune orbite del sistema dinamico discreto, con condizioni iniziali molto vicine al punto di sella.*

Per valori relativamente piccoli di  $\mu$ , come nella Figura 2.1(a), sembra quasi che il sistema dinamico discreto ammetta un integrale primo, anche se con le curve di livello distorte rispetto a quelle della funzione energia del corrispondente sistema dinamico continuo. Se però guardiamo più in dettaglio, per

esempio ingrandendo la figura, possiamo notare che il comportamento qualitativo delle orbite del sistema dinamico discreto è molto diverso ed in particolare alcune curve invarianti scompaiono: questi fenomeni di caos si verificano in modo più appariscente vicino alle separatrici che escono dal punto di sella (come si può vedere in Figura 2.2), ma sono presenti anche vicino alle separatrici delle isole di risonanza. Per valori più grandi di  $\mu$ , come in Figura 2.1(b), l'illusione che la mappa standard possa avere un integrale primo scompare del tutto. Per il valore  $\mu = 1$  l'ultima curva invariante corrispondente ad una circolazione è scomparsa e le orbite caotiche possono muoversi liberamente lungo tutto l'asse  $y$ .

### 2.3 Determinazione caotica: l'esempio della mappa standard

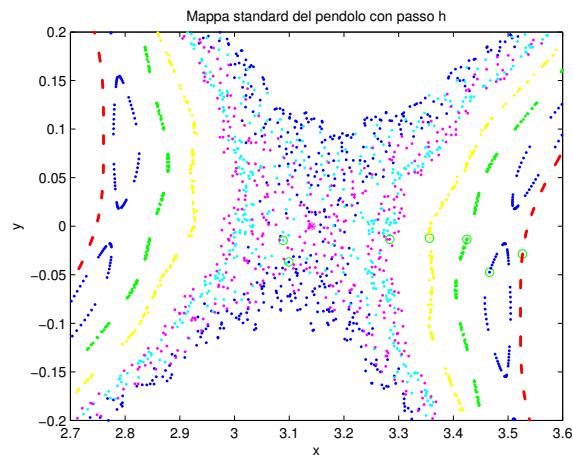


Figura 2.3: *Orbite della mappa standard per il parametro perturbativo  $\mu = 0.5$ . Questo è uno zoom della regione centrale attorno al punto fisso iperbolico e mostra come siano presenti orbite regolari e caotiche.*

Nella sezione precedente abbiamo visto la costruzione della mappa standard che ci fornisce l'esempio di un sistema dinamico conservativo, le cui orbite sono sia regolari che caotiche e che può essere descritto da una mappa da una varietà bidimensionale in sé che conserva l'area.

Da ora in avanti consideriamo la mappa standard del pendolo:

$$S = \begin{cases} x_{k+1} = x_k + y_{k+1} \\ y_{k+1} = y_k - \mu \sin(x_k). \end{cases} \quad (2.1)$$

Il parametro perturbativo o parametro dinamico è  $\mu$ , quindi, come abbiamo visto, il sistema ha orbite regolari per valori piccoli di  $\mu$ , mentre ha orbite caotiche per valori più grandi del parametro perturbativo.

Utilizzeremo il valore 0.5 per il parametro perturbativo  $\mu$  in modo tale che siano presenti sia orbite caotiche che regolari. La Figura 2.3 mostra la situazione appena descritta dove, ad esempio, abbiamo orbite visibilmente regolari, orbite non ancora regolari ma chiuse in risonanze di ordine alto e orbite fortemente caotiche (come quella che ha condizioni iniziali  $x_0 = 3.1, y_0 = 0$ )

### 2.3.1 I minimi quadrati: matrice di transizione ed equazione alle variazioni

Il vantaggio nell'utilizzo di questo semplice esempio della mappa standard risiede nel fatto che possiamo utilizzare una formula esplicita per il procedimento dei minimi quadrati.

Iniziamo calcolando la matrice:

$$DS = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_{k+1}}{\partial x_k} & \frac{\partial x_{k+1}}{\partial y_k} \\ \frac{\partial y_{k+1}}{\partial x_k} & \frac{\partial y_{k+1}}{\partial y_k} \end{pmatrix}$$

che rappresenta proprio il Jacobiano della mappa  $S$ . Se consideriamo la sua espressione data da (2.1), abbiamo:

$$DS = \begin{pmatrix} 1 - \mu \cos(x_k) & 1 \\ -\mu \cos(x_k) & 1 \end{pmatrix}$$

Tale matrice è necessaria per la risoluzione dell'equazione alle variazioni in funzione della matrice di transizione (che indichiamo con  $A_k$ ), perciò:

$$A_k = \frac{\partial(x_k, y_k)}{\partial(x_0, y_0)} \quad (2.2)$$

e (2.2) risolve la

$$A_{k+1} = DS A_k.$$

Analogamente dobbiamo risolvere anche l'equazione alle variazioni nelle derivate parziali rispetto al parametro  $\mu$  e otteniamo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(x_{k+1}, y_{k+1})}{\partial\mu} &= DS \frac{\partial(x_k, y_k)}{\partial\mu} + \frac{\partial S}{\partial\mu} \\ &= DS \frac{\partial(x_k, y_k)}{\partial\mu} + \begin{pmatrix} -\sin(x_k) \\ -\sin(x_k) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Vogliamo iterare il processo appena descritto sia per tempi positivi che per tempi negativi, questo significa iterare la mappa standard (2.1) e la sua inversa lo stesso numero di volte.

Per rendere possibile quanto chiesto, dobbiamo ovviamente calcolare l'inversa della mappa standard  $S$  e le equazioni variazionali per quest'ultima. Indichiamo con un ' tutto ciò che si riferisce a tale inversa.

La mappa è data da:

$$S' = \begin{cases} x'_{k+1} &= x'_k - y'_k \\ y'_{k+1} &= y'_k + \mu \sin(x'_{k+1}). \end{cases} \quad (2.3)$$

Calcoliamo il Jacobiano di  $S'$

$$DS' = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ \mu \cos(x'_{k+1}) & 1 - \mu \cos(x'_{k+1}) \end{pmatrix}$$

Poniamo  $A'_k$  la matrice soluzione dell'equazione variazionale per le derivate parziali:

$$A'_{k+1} = DS' A'_k$$

con

$$A'_k = \frac{\partial(x'_k, y'_k)}{\partial(x'_0, y'_0)}$$

Cerchiamo anche la soluzione dell'equazione variazionale rispetto al parametro  $\mu$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial(x'_{k+1}, y'_{k+1})}{\partial\mu} &= DS' \frac{\partial(x'_k, y'_k)}{\partial\mu} + \frac{\partial S'}{\partial\mu} \\ &= DS' \frac{\partial(x'_k, y'_k)}{\partial\mu} + \begin{pmatrix} 0 \\ \sin(x'_{k+1}) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

La Figura 2.4 mostra l'andamento del determinante e degli autovalori, in scala semilogaritmica, delle matrici di transizione  $A_k$  e  $A'_k$  in funzione del numero di iterate. I grafici riflettono il caso in cui  $\mu = 0.5$  e le condizioni iniziali sono date da  $x_0 = 3$  e  $y_0 = 0$ . Indichiamo inoltre con  $n$  il numero di iterate della mappa.

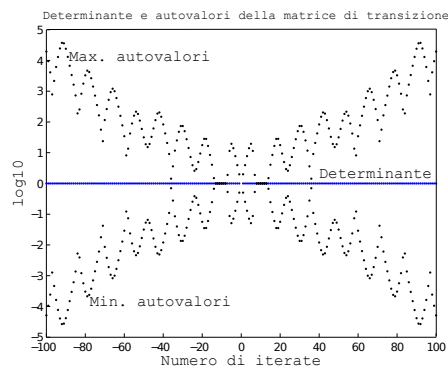
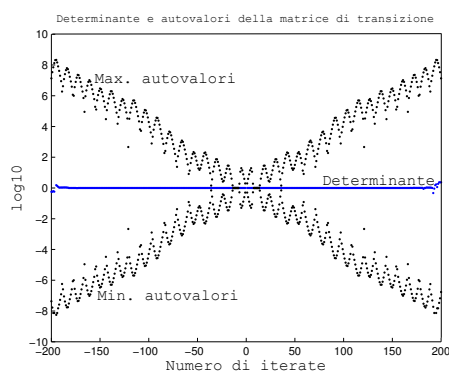
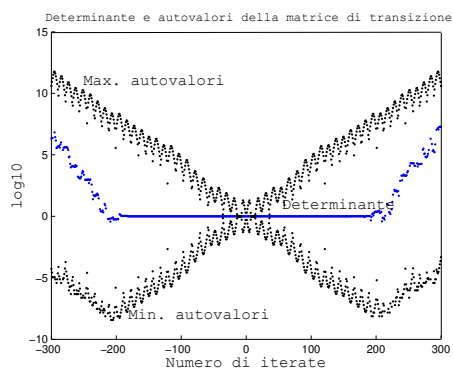
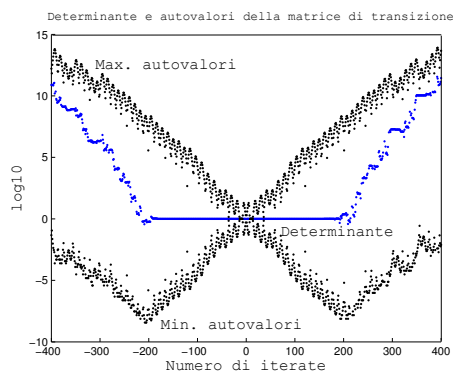
(a)  $n = 100$ .(b)  $n = 200$ .(c)  $n = 300$ .(d)  $n = 400$ .

Figura 2.4: Calcolo del determinante e degli autovalori delle matrici di transizione  $A_k$  e  $A'_k$  al variare del numero di iterate e in scala semilogaritmica.

### 2.3.2 I minimi quadrati: il procedimento e le correzioni differenziali

Vogliamo ora spiegare quale procedimento seguiamo per applicare i minimi quadrati e come vengono utilizzate le correzioni differenziali al suo interno. Partiamo considerando un processo di osservazioni nel quale le coordinate  $x$  e  $y$  sono osservate ad ogni iterazione. Le osservazioni sono dei vettori costruiti nel seguente modo:

$$\begin{cases} xx_k = x_k + \sigma * randn \\ yy_k = y_k + \sigma * randn \end{cases} \quad (2.4)$$

dove  $(x_k, y_k)$  sono i punti della mappa standard e  $\sigma * randn$  esprime il fatto che stiamo introducendo un errore gaussiano.

Nei nostri esempi numerici il valore di  $\sigma$  è stato posto uguale a  $10^{-8}$ .

**Osservazione 2.3.1.** La funzione *randn* che compare in (2.4) rappresenta l'implementazione di una variabile aleatoria gaussiana con media  $x_k$  ( $y_k$  rispettivamente) e deviazione standard  $\sigma$ . Quindi ciascuna delle due componenti del vettore delle osservazioni  $xx_k$  e  $yy_k$  si comporta come una variabile aleatoria gaussiana centrata in  $x_k$  ( $y_k$  risp.) e con ampiezza  $\sigma$ .

Riportiamo in Figura 2.5 l'orbita vera ottenuta con la mappa standard  $S$  in cui le condizioni iniziali sono  $x_0 = 3$ ,  $y_0 = 0$  e  $\mu = 0.5$ . La Figura 2.5 è ottenuta per 300 iterazioni della mappa.

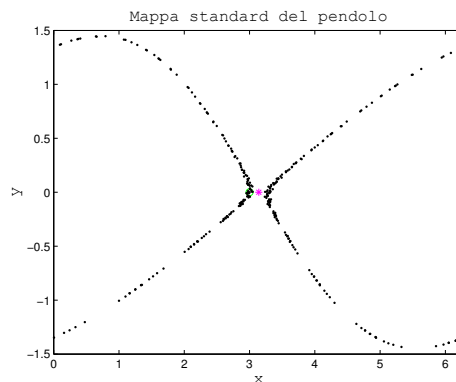


Figura 2.5: Grafico della mappa standard per  $x_0 = 3$ ,  $y_0 = 0$ ,  $\mu = 0.5$  e  $n = 300$ .



Supponiamo ora di non conoscere le condizioni iniziali, questo significa che introduciamo quello che in inglese prende il nome di *first guess*. Costruiamo così un'orbita di prima approssimazione che parte da condizioni iniziali  $x_0+dx_0$ ,  $y_0 + dy_0$ , dove  $dx_0$  e  $dy_0$  vengono determinati ad ogni passo delle correzioni differenziali.

Osserviamo subito che più la determinazione è caotica e più piccolo è il dominio di convergenza delle correzioni differenziali, quindi minori saranno i valori di  $dx_0$  e  $dy_0$  utilizzati come first guess.

Il nostro scopo è quello di innescare il processo delle correzioni differenziali che ci permetta di risolvere il problema nelle 3 incognite che sono le due condizioni iniziali e il parametro  $\mu$ . Introduciamo quindi anche un fattore perturbativo per  $\mu$ , indichiamo con  $d\mu$  tale fattore perturbativo e pertanto, al primo passo delle correzioni differenziali, il valore del parametro dinamico sarà dato da  $\mu_0 + d\mu$ .

I residui di queste osservazioni sono:

$$\begin{cases} \xi_k &= xx_k(\mu_0) - x_k(\mu) \\ \bar{\xi}_k &= yy_k(\mu_0) - y_k(\mu). \end{cases} \quad (2.5)$$

per  $k = 1, \dots, n$  e dove:

- con  $(xx_k(\mu_0), yy_k(\mu_0))$ , come già visto, indichiamo le osservazioni;
- con  $(x_k(\mu), y_k(\mu))$  indichiamo l'orbita ottenuta durante il processo delle correzioni differenziali.

Otteniamo il fit ai minimi quadrati risolvendo le equazioni normali date da:

$$C = \sum_{k=1}^n B_k^T B_k \quad (2.6)$$

$$D = - \sum_{k=1}^n B_k^T \begin{pmatrix} \xi_k \\ \bar{\xi}_k \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

dove

$$B_k = \frac{\partial(\xi_k, \bar{\xi}_k)}{\partial(x_0, y_0, \mu)} = - \left( A_k \middle| \frac{\partial(x_k, y_k)}{\partial\mu} \right).$$

e  $C$  prende il nome di *matrice normale*.

Ad ogni passo applichiamo il metodo delle *correzioni differenziali*, cioè ad ogni passo operiamo la correzione data da:

$$\begin{pmatrix} dx_0 \\ dy_0 \\ d\mu \end{pmatrix} = \Gamma D$$

con  $\Gamma = C^{-1}$  e  $\Gamma$  prende il nome di *matrice di covarianza*.

Introduciamo anche un controllo sui residui, calcoliamo infatti

$$nor(\boldsymbol{\xi}) = \frac{std(\boldsymbol{\xi}^T)}{\sigma}$$

dove *std* rappresenta la deviazione standard. Interrompiamo le correzioni differenziali quando otteniamo un valore sufficientemente piccolo di  $nor(\boldsymbol{\xi})$  e quello che solitamente emerge dai risultati numerici è poco minore di 1. Nei casi in cui si verifica quanto descritto, abbiamo che il procedimento delle correzioni differenziali applicato ai minimi quadrati converge.

Il risultato del procedimento delle correzioni differenziali dipende dal first guess scelto e dal numero di iterazioni, cioè non dobbiamo superare la soglia del cattivo condizionamento della matrice di transizione. Se quindi il numero di iterate non supera tale soglia, troviamo un first guess per le condizioni differenziali che permette una convergenza del procedimento stesso.

### 2.3.3 La congettura di Wisdom ed i risultati degli esperimenti numerici

In questa sezione vogliamo riportare una congettura dovuta a Wisdom riguardante il comportamento di sistemi dinamici caotici. Per fare questo abbiamo bisogno di introdurre alcune considerazioni ed esempi dai quali Wisdom ha preso spunto per formulare la sua teoria.

In seguito mostreremo tramite i risultati degli esperimenti numerici che tale congettura è falsa.

#### Stima del parametro nel caso di sistemi caotici

Osserviamo per prima cosa che sistemi fortemente caotici si trovano in contesti geofisici o geodetici.

Ci sono varie situazioni in cui si verifica un caso caotico. Un esempio è dato da satelliti che orbitano attorno ad un corpo di forma irregolare: tali satelliti possono infatti avere un'orbita caotica. Nel caso in cui invece orbitano attorno ad un corpo di forma regolare (come ad esempio un corpo di forma quasi sferica), i satelliti hanno un'orbita regolare (a meno che non siano vicini al limite della sfera di influenza del pianeta, come il caso dei satelliti retrogradi di Giove). Abbiamo un altro esempio se cerchiamo di determinare il campo gravitazionale di satelliti artificiali che sono stati o che devono essere lanciati in orbita attorno a corpi piccoli e irregolari (come ad esempio NEAR, la missione NASA attorno all'asteroide 433 *Eros* o ROSETTA, la missione ESA che è stata lanciata nel marzo del 2004 e che orbiterà attorno ad una cometa a

corto periodo).

Le orbite attorno a tali corpi dalla forma irregolare sono caotiche quando la distanza del satellite è solo di pochi raggi [3]. Perciò vogliamo cercare di scoprire il comportamento del procedimento di stima di un parametro nel caso di condizioni caotiche. Tra gli esempi di sistemi caotici abbiamo quelli di corpi celesti fortemente asimmetrici che sono costretti, da forze esterne, a ruotare in modo caotico. Iperione, il satellite di Saturno, ha una forma molto irregolare e, come messo in evidenza da Wisdom e Peale (1984), non può avere uno stato di rotazione che si avvicini all'usuale stato di corotazione che possono avere i satelliti (come ad esempio la nostra Luna), dal momento che un tale stato è dinamicamente instabile. Lo stato di rotazione di Iperione è caotico, cioè il suo asse di rotazione si sposta in maniera imprevedibile. A causa di questo fatto, non conosciamo i valori dei momenti di inerzia. Nel 1987 Wisdom ha fatto notare che un'opportunità per la risoluzione del sistema, potrebbe essere quella di partire dai parametri indeterminati dati dai momenti di inerzia. Riportiamo ora quanto affermato da Wisdom stesso:

*In fact because of the exponential variety of trajectories which exists, the rotation state at the midpoint of the interval covered by the observations, and the principal moments of inertia, are determined with exponential accuracy.*

*Thus the knowledge gained from measurements on a chaotic dynamical system grows exponentially with the time span covered by the observations.*

Risulta strano che si possa pensare che le conoscenze acquisite dalle misurazioni sul sistema dinamico caotico aumentino esponenzialmente in funzione dell'intervallo di tempo coperto dalle osservazioni. Abbiamo introdotto la mappa standard e il processo delle correzioni differenziali proprio per mostrare un esempio che contraddica tale congettura. I risultati numerici renderanno evidente quanto appena affermato. Successivamente mostreremo anche che esiste un controesempio più generale a tale congettura che possiamo formulare proprio grazie allo Shadowing Lemma.

### Risultati degli esperimenti numerici

Riportiamo ora, come accennato, i risultati che abbiamo ottenuto con l'esempio della mappa standard. Come messo correttamente in evidenza da Wisdom, richiediamo che la simulazione e successivamente tutto il processo delle correzioni differenziali abbia inizio con le condizioni iniziali poste al centro dell'intervallo di osservazione, altrimenti, come è chiaro, invece di determinarle entrambe, ne determineremmo soltanto una delle due.

Abbiamo quindi effettuato l'esperimento con il numero di iterate  $n$  pari a 300 e questo vuol dire che, se consideriamo la mappa  $S$  e la sua inversa  $S'$ , stiamo facendo variare gli indici in un insieme che va da  $-300$  a  $300$ . Le condizioni

iniziali sono  $x_0 = 3$ ,  $y_0 = 0$  e  $\mu = 0.5$ .

In Figura 2.6 sono rappresentati il determinante delle matrici di transizione  $A_k$  e  $A'_k$  ( $k = 1, \dots, n$ ) e il valore assoluto degli autovalori di  $A_k$  (indicato con max. autovalori) e di  $A'_k$  (indicato con min. autovalori), in funzione del numero di iterate e in scala semilogaritmica (in particolare in  $\log_{10}$ ).

Sappiamo che, in aritmetica esatta, il prodotto di due autovalori dovrebbe essere 1. Vediamo però che questo non si verifica. Il problema nasce nel momento in cui il numero di condizionamento della matrice di transizione diventa maggiore dell'inverso dell'errore di arrotondamento e quindi diventa numericamente impossibile il calcolo della matrice.

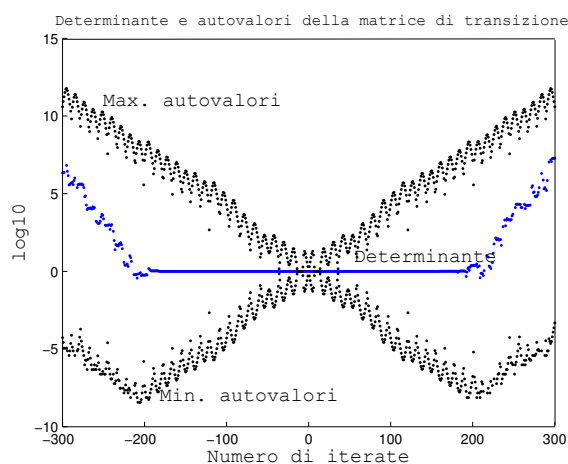


Figura 2.6: *Determinante e autovalori della matrice di transizione in scala semilogaritmica.*

**Osservazione 2.3.2.** La pendenza della curva degli autovalori ci fornisce il valore degli esponenti di Lyapunov. Il valore dell'esponente di Lyapunov è 0.1 e si riferisce all'orbita per cui si ha la convergenza del metodo. D'altra parte, sappiamo che la somma di due esponenti di Lyapunov deve fare 0 (visto che il prodotto dei moltiplicatori è 1), quindi il minimo valore che otteniamo per gli esponenti di Lyapunov è  $-0.1$ .

Sappiamo anche che il condizionamento della matrice di transizione ha come valore asintotico

$$\exp^2\left(\frac{k}{T_L}\right)$$

dove  $k$  è il numero di iterate e  $T_L$  il tempo di Lyapunov. Per  $k/T_L \sim 18$  abbiamo trovato numericamente che  $\exp^2(k/T_L) \sim 1/(2 * 10^{-16})$  e tale valore

è molto vicino alla precisione di macchina (nel caso dei computer che si utilizzano solitamente oggi). Quindi intorno a  $\pm 19T_L$  possiamo verificare il fenomeno dell'instabilità numerica per quanto riguarda il calcolo del determinante della matrice di transizione e dei suoi autovalori.

Come possiamo vedere dalla Figura 2.6, intorno alle 200 iterate, il massimo e il minimo degli autovalori sono molto distanti, ovviamente quindi il loro rapporto è molto alto e questo porta al cattivo condizionamento della matrice di transizione  $A_k$ , motivo in più che mostra come il suo calcolo diventi numericamente impossibile (osserviamo anche che, in tale situazione, il  $\det(A_k)$  non è più 1, come invece dovrebbe essere).

D'altra parte, mostriamo come quanto osservato non avviene se invece cambiamo il parametro dinamico e poniamo  $\mu = 0.25$  e non cambiamo le condizioni iniziali, cioè lasciamo  $x_0 = 3$  e  $y_0 = 0$ .

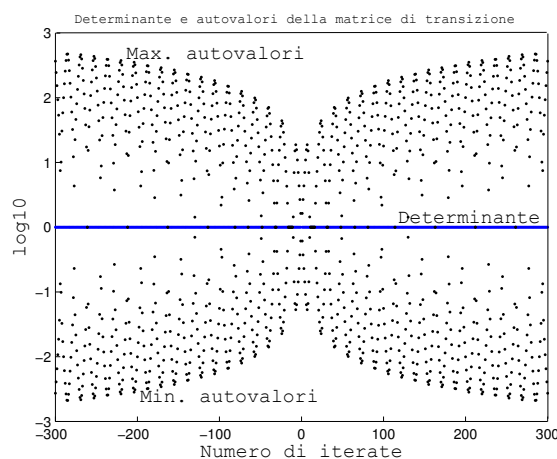


Figura 2.7: *Caso*  $x_0 = 3$ ,  $y_0 = 0$ ,  $\mu = 0.25$ .

La Figura 2.7 è quella che si ottiene dopo aver compiuto il primo passo delle correzioni differenziali. Vediamo numericamente che il valore dell'esponente di Lyapunov in questo caso è 0.0063. Come abbiamo già detto nell'Osservazione 2.3.2, non possiamo calcolare il valore reale degli esponenti di Lyapunov, dato che li otteniamo come un limite infinito delle iterate della mappa, ma la pendenza della curva degli autovalori ne rappresenta una buona approssimazione. Quindi, in questo caso, vediamo che sia il valore dell'esponente di Lyapunov, sia la Figura 2.7 mostrano una crescita non esponenziale degli autovalori della matrice di transizione, a differenza di quanto accade in Figura 2.6.

Il comportamento è lo stesso anche se cambiamo le condizioni iniziali lasciando

invariato il parametro perturbativo (abbiamo considerato  $x_0 = 2.8$ ,  $y_0 = 0$  e  $\mu = 0.5$ ), dal momento che abbiamo scelto le condizioni iniziali in modo tale da trovarci in una zona non caotica.

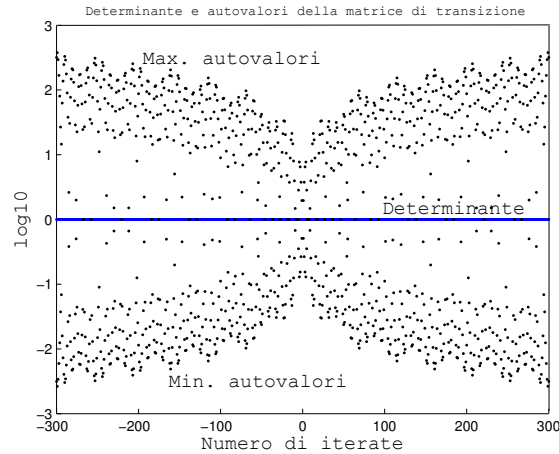


Figura 2.8: *Caso*  $x_0 = 2.8$ ,  $y_0 = 0$ ,  $\mu = 0.5$ .

In Figura 2.9 è rappresentata la derivata dei residui rispetto al parametro perturbativo  $\mu$ , in funzione del numero di iterate  $n$  e in scala semilogaritmica ( $\log_{10}$ ). Vediamo che anche in questo caso si ha una crescita esponenziale, anche se in misura minore rispetto a quanto visto in Figura 2.6.

**Osservazione 2.3.3.** Abbiamo riportato la Figura 2.9 perchè il fatto che la derivata dei residui rispetto al parametro dinamico  $\mu$  abbia una crescita esponenziale mostra che la congettura di Wisdom risulta vera nel caso unidimensionale, cioè se cerchiamo di determinare solo  $\mu$  e non le condizioni iniziali. Vogliamo mostrare che non possiamo basarci solo su questa considerazione per affermare, come fatto da Wisdom, che tanto più il sistema è caotico, quanto meglio riusciamo a determinarne i parametri.

Mettiamo nuovamente a confronto la Figura 2.9 con la figura della derivata dei residui rispetto al parametro  $\mu$  in casi non caotici, cioè se  $\mu = 0.25$  e le condizioni iniziali sono invariate ( $x_0 = 3$  e  $y_0 = 0$ ) come in Figura 2.10, oppure se le condizioni iniziali variano ( $x_0 = 2.8$ ,  $y_0 = 0$ ) e  $\mu$  rimane 0.5, come in Figura 2.11.

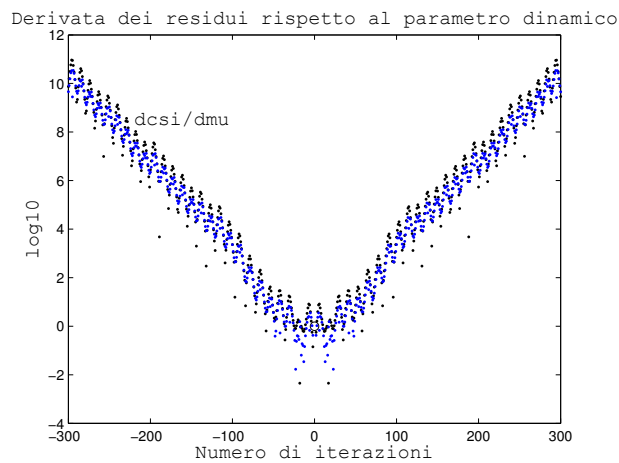


Figura 2.9: *Caso  $x_0 = 3$ ,  $y_0 = 0$ ,  $\mu = 0.5$ .*

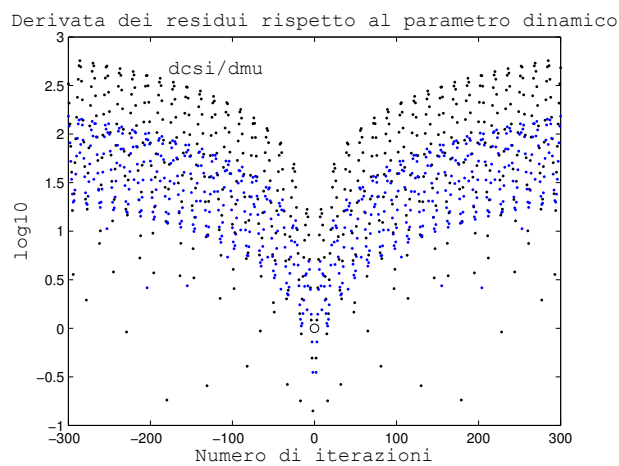


Figura 2.10: *Derivata dei residui rispetto al parametro  $\mu$  nel caso  $x_0 = 3$ ,  $y_0 = 0$ ,  $\mu = 0.25$ .*

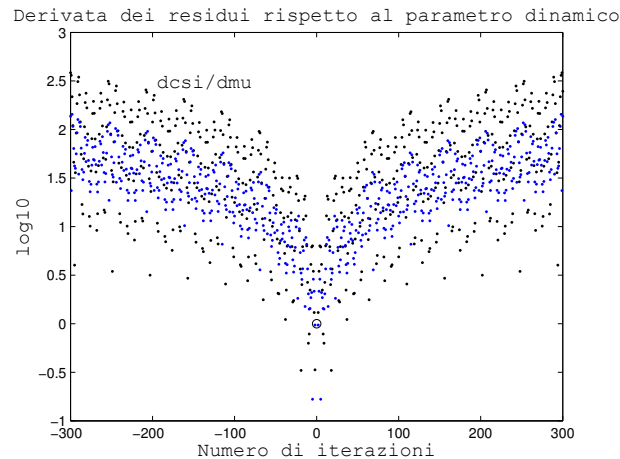


Figura 2.11: *Derivata dei residui rispetto al parametro  $\mu$  nel caso  $x_0 = 2.8$ ,  $y_0 = 0$ ,  $\mu = 0.5$ .*

Osserviamo che, come visto nel caso precedente del determinante e degli autovalori della matrice di transizione, non appena ci allontaniamo dalla situazione caotica, anche la derivata dei residui rispetto a  $\mu$  non diverge più esponenzialmente.

Andiamo ora a considerare il condizionamento delle matrici che sono intervenute nel procedimento descritto. Abbiamo già introdotto la matrice normale  $C$  in (2.6). Nella figura seguente considereremo il suo condizionamento ( $\text{cond}(C)$ ). Introduciamo inoltre  $G$  che rappresenta la matrice di ordine 2 del sistema normale relativo soltanto alle due coordinate  $x$  e  $y$ . Nella figura riporteremo anche il suo condizionamento ( $\text{cond}(G)$ ).

La Figura 2.12 è ottenuta a partire da condizioni iniziali  $x_0 = 3$ ,  $y_0 = 0$  e  $\mu = 0.5$  e mostra che il condizionamento di  $C$  cresce esponenzialmente fino a che il calcolo del sistema normale diventa numericamente impossibile. D'altra parte vediamo anche come la matrice  $G$  sia ben condizionata. Possiamo osservare che in questo caso, dal momento che è numericamente impossibile il calcolo di  $C$ , sarà numericamente impossibile anche il calcolo della sua inversa  $\Gamma$ .

Visto che la matrice  $C$  ha un cattivo condizionamento, permette di affermare che è molto difficile pensare di poter determinare contemporaneamente sia il parametro dinamico  $\mu$  che le condizioni iniziali in un sistema dinamico caotico, d'altra parte il fatto che invece il condizionamento di  $G$  non cresce esponenzialmente ci mostra che possiamo determinare con un certo grado di accuratezza le condizioni iniziali nel caso in cui fissiamo  $\mu$  e applichiamo il procedimento delle correzioni differenziali solo alle condizioni iniziali stesse.



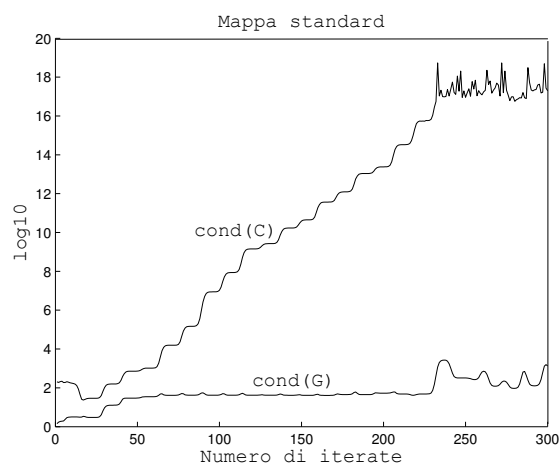


Figura 2.12: Condizionamento delle matrici normali  $C$  e  $G$  e delle loro inverse nel caso  $x_0 = 3$ ,  $y_0 = 0$ ,  $\mu = 0.5$ .

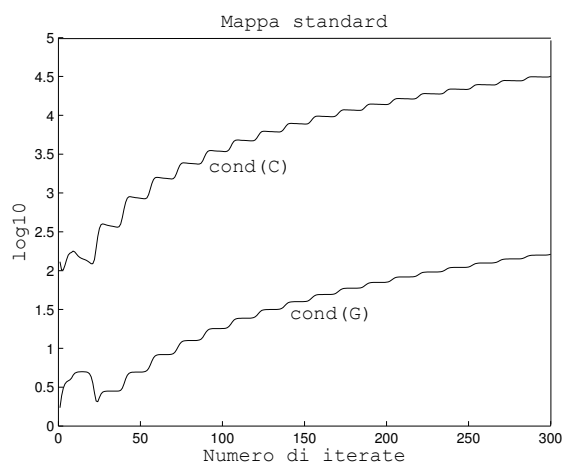


Figura 2.13: Condizionamento delle matrici normali  $C$  e  $G$  nel caso  $x_0 = 3$ ,  $y_0 = 0$ ,  $\mu = 0.25$ .

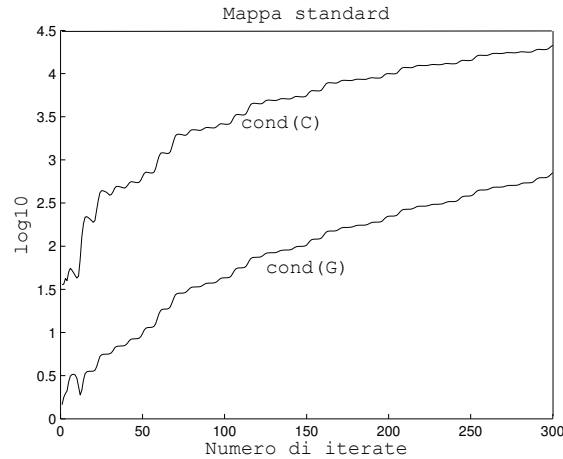


Figura 2.14: *Condizionamento delle matrici normali  $C$  e  $G$  nel caso  $x_0 = 2.8$ ,  $y_0 = 0$ ,  $\mu = 0.5$ .*

Come nei casi precedenti, le Figure 2.13 e 2.14 mostrano che il problema della crescita esponenziale non si verifica se lasciamo invariate le condizioni iniziali e variamo  $\mu$  ( $x_0 = 3$ ,  $y_0 = 0$ ,  $\mu = 0.25$ ) o se lasciamo il parametro dinamico  $\mu$  invariato e modifichiamo le condizioni iniziali ( $x_0 = 2.8$ ,  $y_0 = 0$ ,  $\mu = 0.5$ ).

Le Figure 2.15 e 2.17 mostrano i risultati generali riguardanti lo studio dell'incertezza del parametro dinamico e delle condizioni iniziali. Sono state ottenute entrambe a partire da  $x_0 = 3$ ,  $y_0 = 0$  e  $\mu = 0.5$ . Nelle figure, oltre al condizionamento delle matrici  $C$  e  $G$  di cui abbiamo appena parlato, sono riportati l'inverso dell'incertezza nella determinazione di  $\mu$  ( $1/\text{sigmu}$ ) e l'inverso dell'incertezza nella determinazione delle condizioni iniziali ( $1/\text{sigmx}$ ,  $1/\text{sigmy}$ ) tutti divisi per  $\sigma$ .

Ricordiamo la forma di queste matrici:

- $C$  è la matrice normale di ordine 3 e a partire dalla sua inversa calcoliamo:

- $\text{sigmx}_C = \sqrt{\Gamma_{11}^{-5}}$

- $\text{sigmy}_C = \sqrt{\Gamma_{22}^{-1}}$

- $\text{sigmu} = \sqrt{\Gamma_{33}^{-1}}$

- $G$  è la matrice normale di ordine 2 e a partire dalla sua inversa calcoliamo:

- $\text{sigmx}_G = \sqrt{G_{11}^{-1}}$

---

<sup>5</sup>In generale, se  $A$  è una matrice di ordine  $N$ , con  $A_{ij}$  indichiamo l'elemento della matrice  $A$  che si trova nell'intersezione tra l' $i$ -esima riga e la  $j$ -esima colonna, per  $i, j = 1, \dots, N$ .

$$- \text{sigmy}_G = \sqrt{G_{22}^{-1}}$$

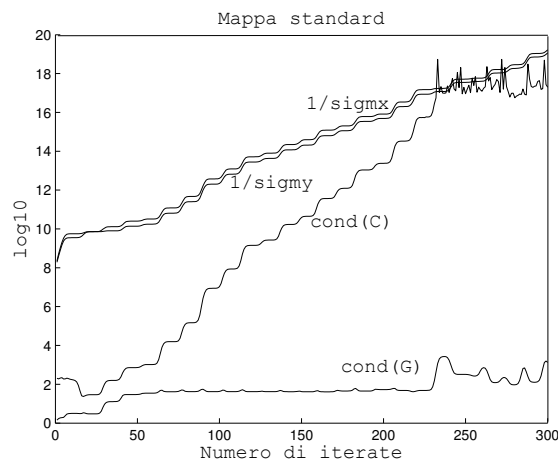


Figura 2.15: *Condizionamento delle matrici normali  $C$  e  $G$  e incertezza delle condizioni iniziali nel caso in cui la matrice normale sia  $G$ .*

La Figura 2.15 mostra cosa accade se lasciamo invariato il parametro dinamico, ma variamo le condizioni iniziali. In questo caso stiamo considerando un sistema di ordine 2 con matrice normale  $G$ . Come già detto, dall'inversa di  $G$  possiamo calcolare l'incertezza delle condizioni iniziali. Osserviamo quindi che l'inverso dell'incertezza, cioè l'accuratezza della determinazione delle condizioni iniziali, cresce esponenzialmente.

La Figura 2.16 si riferisce alle condizioni iniziali  $x_0 = 3$ ,  $y_0 = 0$  e  $\mu = 0.5$  e mostra il logaritmo (naturale) dell'inverso dell'incertezza di  $x$  e di  $y$  in funzione del logaritmo (naturale) del numero di iterate ( $ii = 1, \dots, 300$ ). Evidenziamo così la crescita esponenziale dell'accuratezza della determinazione delle condizioni iniziali nel caso in cui stiamo considerando la matrice normale  $G$ , che si riferisce al sistema normale di ordine 2.

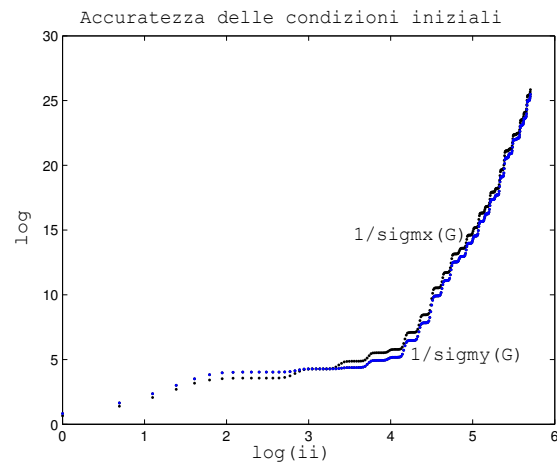


Figura 2.16: *Inverso dell'incertezza delle condizioni iniziali in scala logaritmica. Con  $ii$  intendiamo il numero di iterate.*

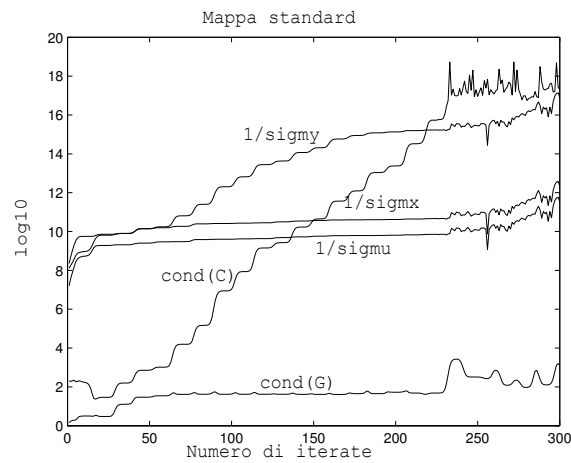


Figura 2.17: *Condizionamento delle matrici normali  $C$  e  $G$  e incertezza di  $\mu$  e delle condizioni iniziali nel caso in cui la matrice normale sia  $C$ .*

La Figura 2.17 mostra come, se cerchiamo di determinare simultaneamente  $\mu$  e le condizioni iniziali non abbiamo un'accuratezza esponenziale, infatti per  $x$  e  $y$  e  $\mu$  si vede che l'accuratezza della loro determinazione non cresce esponenzialmente. Quanto detto deriva dal fatto che la riga del sistema normale che si riferisce a  $\mu$  tende ad essere sempre più linearmente dipendente dalle altre due.

Dalla Figura 2.17 sembra che una delle due condizioni iniziali venga determinata meglio rispetto all'altra, ma questo è dovuto solo ai valori di  $x_0$ , cioè 3 e di  $y_0$ , cioè 0. Infatti  $x_0$  dovrebbe trovarsi lungo la varietà stabile, mentre  $y_0$  lungo la varietà instabile.

Riportiamo in Figura 2.18 l'andamento dell'inverso dell'incertezza di  $\mu$  e delle condizioni iniziali in scala logaritmica e originate dai dati  $x_0 = 3$ ,  $y_0 = 0$  e  $\mu = 0.5$ . Vogliamo mostrare che le tre funzioni hanno lo stesso andamento che non è esponenziale e quindi non possiamo cercare di determinarle simultaneamente.

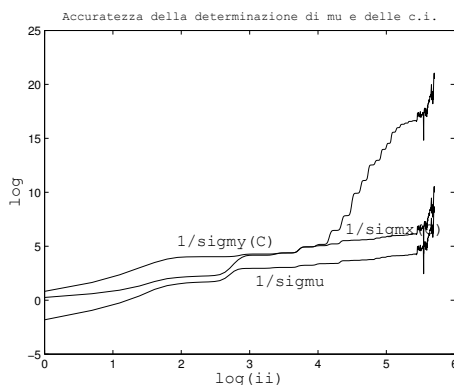


Figura 2.18: *Inverso dell'incertezza del parametro perturbativo  $\mu$  e delle condizioni iniziali nel caso in cui la matrice normale è  $C$ .*

Con le Figure 2.19(a), 2.20(a) e 2.20(b) vogliamo mostrare come, nel caso in cui cerchiamo di determinare simultaneamente le condizioni iniziali e il parametro dinamico  $\mu$ , le funzioni  $1/\text{sigmu}$ ,  $1/\text{sigmx}(C)$  e  $1/\text{sigmy}(C)$  non crescono esponenzialmente.

La Figura 2.19(a) rappresenta l'andamento in scala logaritmica dell'accuratezza della determinazione del parametro dinamico.

Osserviamo che alla base di queste figure non abbiamo una dimostrazione rigorosa, cioè stiamo trattando fatti puramente empirici. Dal momento che abbiamo osservato che l'andamento dell'inverso dell'incertezza di  $\mu$  e delle condizioni

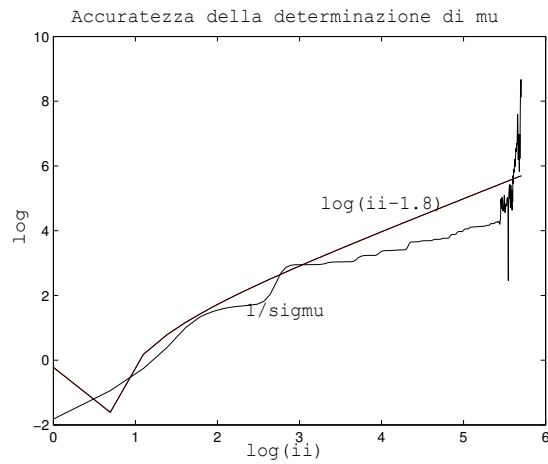
iniziali non decresce esponenzialmente, in modo puramente empirico abbiamo cercato delle curve il cui andamento potesse approssimare quello dell'accuratezza. Il tutto è in scala logaritmica. L'idea iniziale era quella di cercare una funzione il cui andamento fosse simile a quello della radice quadrata, perchè l'incertezza si comporta come una variabile aleatoria gaussiana. In realtà, da esempi numerici, abbiamo trovato che l'andamento di  $1/\text{sigmu}$  veniva approssimato meglio da una retta come  $\log(ii)$ , dove  $ii$  è il numero di iterate, espresso nella figura in scala logaritmica. Ancora numericamente, dopo alcune prove, abbiamo trovato che l'approssimazione migliore è data dalla curva  $\log(ii - 1.8)$ , che è proprio quella rappresentata in Figura 2.19(a).

Dalla Figura 2.19(b) potrebbe sembrare che l'accuratezza tenda a crescere esponenzialmente dopo una certa soglia, ma in realtà dobbiamo osservare che si tratta quasi della soglia in cui inizia il cattivo condizionamento della matrice di transizione e quindi i risultati ottenuti dipendono solo dagli errori di arrotondamento che intervengono nell'algoritmo.

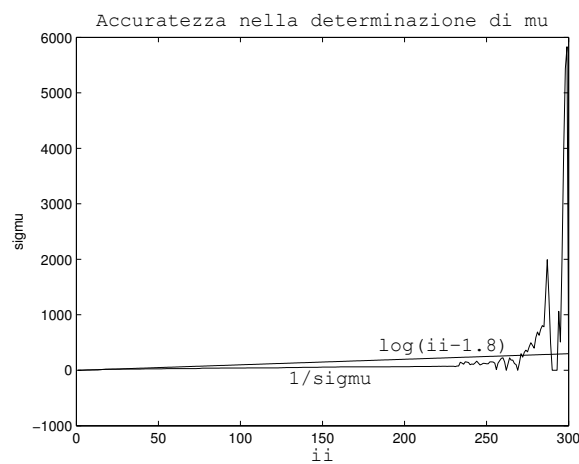
Riportiamo anche l'andamento dell'inverso dell'incertezza delle condizioni iniziali. Con un ragionamento analogo al precedente, abbiamo trovato le funzioni con l'andamento delle quali possiamo approssimare l'accuratezza della determinazione delle condizioni iniziali. Anche in questo caso, i dati iniziali sono stati  $x_0 = 3$ ,  $y_0 = 0$  e  $\mu = 0.5$ .

Nel caso in cui scegliamo delle condizioni iniziali non caotiche, abbiamo che non viene raggiunta la soglia di cattivo condizionamento e perciò il processo delle correzioni differenziali procede senza problemi, anche nel caso in cui vogliamo determinare  $\mu$  e le condizioni iniziali.

La scelta per  $x_0$ ,  $y_0$  e  $\mu$  è analoga a quella vista nei casi precedenti, cioè abbiamo  $x_0 = 3$ ,  $y_0 = 0$  e  $\mu = 0.25$  in Figura 2.21(a) e  $x_0 = 2.8$ ,  $y_0 = 0$  e  $\mu = 0.5$  in Figura 2.21(b).

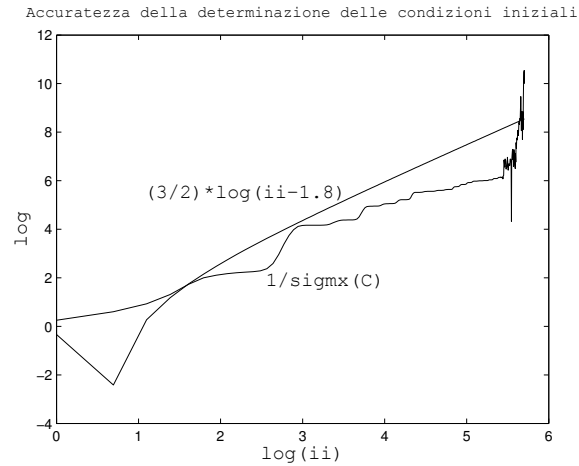


(a) Incertezza del parametro perturbativo  $\mu$  e retta  $\log(ii - 1.8)$ .

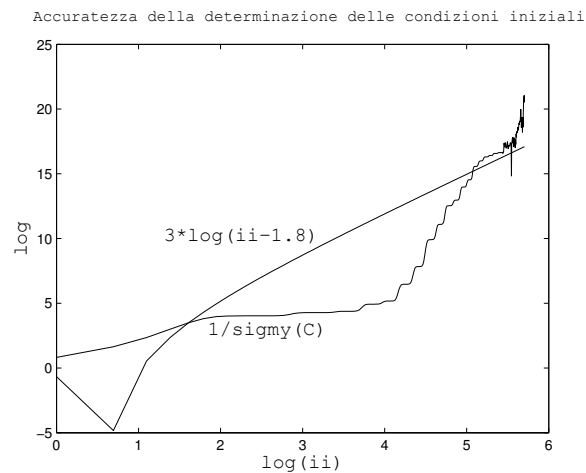


(b) Accuratezza nella determinazione di  $\mu$  e andamento approssimato dalla retta  $ii - 1.8$ .

Figura 2.19: La figura mostra l'accuratezza di  $\mu$  nel caso in cui la matrice è  $C$ . Viene anche riportata la funzione con cui tale accuratezza è confrontata e che ne approssima l'andamento per mostrare che l'accuratezza non cresce esponenzialmente.



(a) Accuratezza nella determinazione di  $x$  e andamento approssimato dalla retta  $(3/2) * \log(ii - 1.8)$ .



(b) Accuratezza nella determinazione di  $y$  e andamento approssimato dalla retta  $3 * \log(ii - 1.8)$ .

Figura 2.20: La figura mostra l'accuratezza delle condizioni iniziali nel caso in cui la matrice normale è  $C$ . Viene anche riportata la funzione con cui tali accuratezze sono confrontate e che ne approssimano l'andamento per mostrare che l'accuratezza delle condizioni iniziali non cresce esponenzialmente.



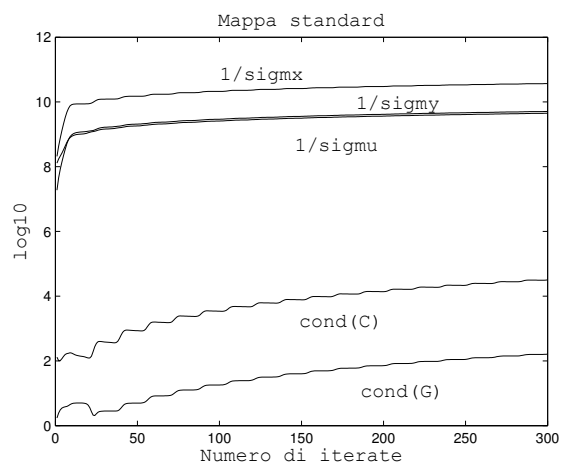
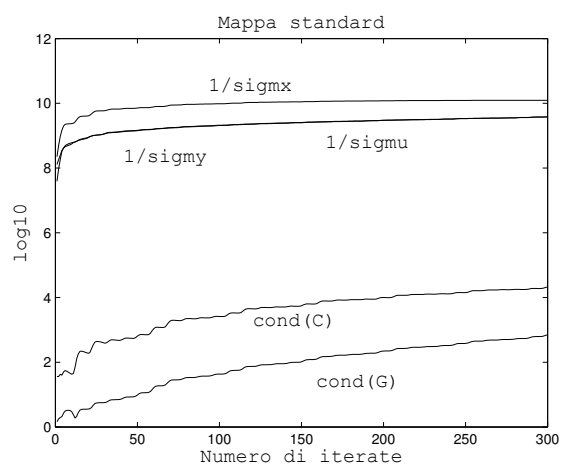
(a) *Caso*  $x_0 = 3, y_0 = 0, \mu = 0.25$ .(b) *Caso*  $x_0 = 2.8, y_0 = 0, \mu = 0.5$ .

Figura 2.21: *Condizionamento delle matrici normali C e G e incertezza di  $\mu$  e delle condizioni iniziali nel caso in cui vogliamo determinare simultaneamente il parametro dinamico e le condizioni iniziali.*

### Conclusioni

Abbiamo perciò mostrato che nel nostro caso la congettura di Wisdom è falsa. Se gli unici parametri da determinare, infatti, sono le condizioni iniziali, allora possiamo stimarli con un'accuratezza che decresce esponenzialmente in funzione del tempo, sempre nel caso in cui siano al centro dell'intervallo e non si sia raggiunta la soglia di cattivo condizionamento (all'incirca  $20 T_L$ ).

Al contrario, se cerchiamo di determinare contemporaneamente le condizioni iniziali e il parametro dinamico, l'accuratezza della determinazione delle condizioni iniziali e del parametro non sembra crescere esponenzialmente, almeno fino al momento in cui raggiungiamo la soglia dalla quale parte il cattivo condizionamento. In realtà, dopo il raggiungimento di tale soglia, potrebbe sembrare che l'incertezza di  $\mu$  decresca esponenzialmente, ma questo effetto è dovuto soltanto al cattivo condizionamento della matrice di transizione e l'algoritmo delle correzioni differenziali, in tali condizioni, diverge.

Nella Figura 2.22 abbiamo rappresentato contemporaneamente il condizionamento della matrice  $C$ , il condizionamento di  $G$ , l'inverso dell'incertezza di  $\mu$  e le curve che rappresentano l'incertezza delle condizioni iniziali sia se cerchiamo di determinare contemporaneamente i tre parametri, sia se fissiamo  $\mu$  e applichiamo il procedimento delle correzioni differenziali solo alle condizioni iniziali. La Figura 2.22 ha lo scopo conclusivo di riassumere in un unico grafico quanto mostrato fino ad ora.

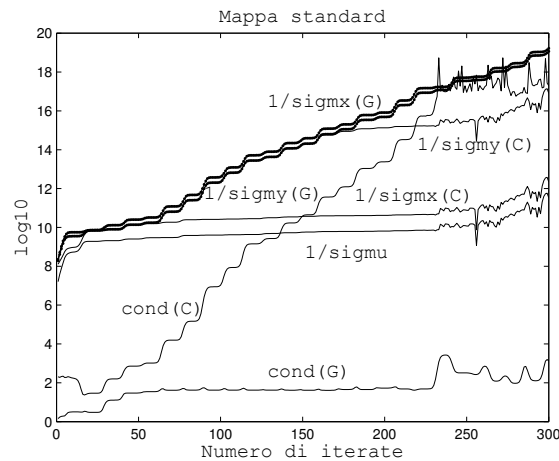


Figura 2.22: *Condizionamento delle matrici normali  $C$  e  $G$  e incertezza di  $\mu$  e delle condizioni iniziali.*

### 2.3.4 La congettura di Wisdom e lo Shadowing Lemma

Il processo delle correzioni differenziali applicato alla mappa standard ci è servito per portare un controesempio alla congettura di Wisdom. In realtà possiamo confutare tale congettura in un modo più generale e per farlo dobbiamo utilizzare lo Shadowing Lemma (Teorema 1.3.1).

Supponiamo che le condizioni iniziali si trovino su di un insieme iperbolico (Definizione 1.2.1)  $\Lambda$ , o che almeno si trovino su  $W$ , intorno di  $\Lambda$ , come richiesto dalle ipotesi del Teorema 1.3.1.

Ricordiamo che fino ad ora abbiamo utilizzato le seguenti notazioni:

- $(xx_k(\mu_0), yy_k(\mu_0))$  sono le osservazioni;
- $(x_k(\mu), y_k(\mu))$  rappresentano l'orbita a convergenza del processo delle correzioni differenziali applicato ai minimi quadrati. Poniamo  $x = x_0 + dx_0$ ,  $y = y_0 + dy_0$  e  $\mu = \mu_0 + d\mu$

per  $k = 1, \dots, n$ .

Ricordiamo inoltre che  $S$  è la mappa standard del pendolo ed è definita da (2.1).

Ora fissiamo il parametro dinamico al valore che otteniamo alla prima iterazione del processo delle correzioni differenziali, cioè  $\mu = \mu_0 + d\mu$  e indichiamo con  $S_\mu$  la mappa standard del pendolo che si riferisce a tale valore di  $\mu$ . Possiamo quindi porre

$$S_\mu^k(x, y) = (x_k(\mu), y_k(\mu)) \quad k = 1, \dots, n \tag{2.8}$$

Vogliamo applicare lo Shadowing Lemma prendendo come  $\delta$ -pseudotraiettoria la successione data dalle osservazioni e come  $\varepsilon$ -pedinamento l'orbita (2.8).

#### $\varepsilon$ -pedinamento

Sia  $\beta = \{(xx_k(\mu_0), yy_k(\mu_0)), k = 1, \dots, n\}$  la successione delle osservazioni. Mostriamo che  $(x, y)$  è un  $\varepsilon$ -pedinamento di  $\beta$ , cioè dobbiamo trovare  $\varepsilon$  tale che

$$d(S_\mu^k(x, y), (xx_k(\mu_0), yy_k(\mu_0))) < \varepsilon \quad k = 1, \dots, n \tag{2.9}$$

Dalla Definizione 2.5, poniamo

$$\varepsilon_k = \sqrt{\xi_k^2 + \bar{\xi}_k^2} \quad k = 1, \dots, n$$

e sia

$$\varepsilon = \max_{k=1, \dots, n} \varepsilon_k$$

Spieghiamo perchè ha senso poter considerare questi valori  $\varepsilon_k$ .

Ricordiamo che le osservazioni si comportano come variabili aleatorie gaussiane. Una variabile aleatoria gaussiana, per sua natura (dal momento che è una funzione analitica) è illimitata, non a supporto finito. Teoricamente quindi esiste un piccolo numero di osservazioni lontane, le quali potrebbero avere un valore  $\varepsilon_k$  molto maggiore rispetto agli altri, per un qualche valore di  $k$ . In realtà la probabilità che questo accada è infinitesimale anche per valori molto grandi della deviazione standard. Questo significa che a causa del numero finito e limitato di iterazioni, per ragioni di stabilità numerica, abbiamo che  $\varepsilon \sim \lambda\sigma$ , dove  $\lambda$  è una costante dell'ordine dell'unità. Al massimo, se si verifica che qualche valore di  $\varepsilon$  sia troppo grande, possiamo servirci di un procedimento di scarto che ci permette di eliminare valori troppo alti di  $\varepsilon$ , senza che questo influenzi il metodo utilizzato.

Abbiamo perciò mostrato che esiste  $\varepsilon$  tale per cui  $(x, y)$  è un  $\varepsilon$ -pedinamento di  $\beta$ .

### $\delta$ -pseudotraiettoria

Dal momento che abbiamo appena affermato che  $(x, y)$  è un  $\varepsilon$ -pedinamento di  $\beta$ , dobbiamo mostrare che  $\beta$  è una  $\delta$ -pseudotraiettoria. Questo significa far vedere che

$$d(S_\mu(xx_k, yy_k), (xx_{k+1}(\mu_0), yy_{k+1}(\mu_0))) < \delta \quad (2.10)$$

dove  $S_\mu(xx_k, yy_k) = (xx_k(\mu), yy_k(\mu))$  sono le osservazioni ottenute a partire dall'orbita vera in cui abbiamo modificato soltanto il parametro  $\mu$ , che indichiamo con  $(\bar{x}_k(\mu), \bar{y}_k(\mu))$ :

$$\begin{cases} xx_k(\mu) &= \bar{x}_k(\mu) + \sigma * randn \\ yy_k(\mu) &= \bar{y}_k(\mu) + \sigma * randn \end{cases}$$

In questo caso basta scegliere  $\delta \sim d\mu$  e abbiamo (2.10).

### Shadowing Lemma

Dal Teorema 1.3.1 abbiamo che, dato  $\varepsilon > 0$  esiste  $\delta > 0$  tale che per ogni  $\delta$ -pseudotraiettoria esiste  $(x, y)$  tale che  $(x, y)$  è un  $\varepsilon$ -pedinamento della  $\delta$ -pseudotraiettoria.

Questo si riporta al nostro caso nel modo seguente: una volta scelto  $\varepsilon$ , cioè una volta fissato un limite per i residui, troviamo un valore di  $\delta$ , quindi di  $d\mu$ , tale per cui, qualunque sia la scelta fatta delle osservazioni, possiamo determinare le condizioni iniziali  $(x, y)$  in modo da ottenere un'orbita  $(x_k(\mu), y_k(\mu))$  tale per cui i residui sono minori di  $\varepsilon$ , anche se tale orbita ha un valore sbagliato

del parametro dinamico  $\mu$  (dove il valore sbagliato è proprio  $\delta$ ).

In questo modo dimostriamo anche che per un tempo infinito l'incertezza di  $\mu$  non tende a zero per  $k \rightarrow +\infty$ , dove  $k$  sono le iterate della mappa standard. Quindi, da un parte stiamo dicendo che non possiamo determinare esponenzialmente l'accuratezza di  $\mu$ , mentre dall'altra stiamo anche dicendo che possiamo determinare con accuratezza esponenziale le condizioni iniziali.

L'applicazione del Teorema 1.3.1 richiede ovviamente che siano verificate le ipotesi. Questo significa che dobbiamo chiedere che le condizioni iniziali si trovino su un intorno aperto  $W$  di un insieme iperbolico  $\Lambda$ , come richiesto dal Lemma 1.2.1. L'esistenza di insiemi iperbolici è garantita dal teorema di Smale del punto omoclinico trasversale, quindi questo significa che tale ipotesi può sempre essere verificata.

Pertanto ci saranno sempre degli intorni aperti di insiemi iperbolici sui quali possiamo applicare lo Shadowing Lemma e quindi contraddire la congettura di Wisdom. Anche questo non è però un caso generale. Infatti tali intorni aperti non hanno misura zero, quindi questo significa che il loro complementare non ha misura uno (quindi la congettura di Wisdom non è vera in generale), ma non ha neanche misura zero, quindi ci possono essere delle zone in cui la congettura sia verificata.

Nel caso di insiemi non integrabili, a meno che non si tratti di sistemi di Anosov, non conosciamo quali siano gli insiemi iperbolici, ma sappiamo che esistono. Proprio per questo motivo non possiamo assumere che la congettura di Wisdom sia un risultato generale, come d'altra parte non possiamo assumere che lo sia il nostro. Guardando però i risultati ottenuti, possiamo però congetturare che quanto abbiamo dimostrato possa essere vero in generale.

**Osservazione 2.3.4.** Abbiamo visto dagli esperimenti numerici che l'accuratezza di  $\mu$  non sembra crescere esponenzialmente, ma l'incertezza sembra tendere a zero. Questo sembrerebbe contraddire quanto invece dimostrato con lo Shadowing Lemma. Dobbiamo però osservare che gli esperimenti sono effettuati in un intervallo finito e, come non sappiamo calcolare con precisione gli esponenti di Lyapunov (a causa del numero finito di passi che possiamo compiere iterando la mappa), così non possiamo calcolare con precisione

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{\text{sigma}^k}.$$

In conclusione quindi lo Shadowing Lemma contraddice la congettura di Wisdom anche per tempi infiniti. Nel caso di sistemi caotici, sotto opportune ipotesi, possiamo determinare con un'accuratezza che cresce esponenzialmente le condizioni iniziali, mentre non possiamo determinare con tale accuratezza il parametro dinamico.



# Conclusioni

Il lavoro di questa tesi è suddiviso in due parti fondamentali. Da una parte abbiamo cercato una dimostrazione dello Shadowing Lemma e sebbene il Teorema 1.3.1 sia un risultato degli anni '70, del quale si parla spesso, per la dimostrazione è stato necessario ricorrere agli articoli originali.

D'altra parte abbiamo voluto studiare la determinazione orbitale caotica. Per fare questo abbiamo preso in esame un particolare sistema dinamico in cui sono presenti sia orbite regolari che orbite caotiche e dove il caos è dovuto all'incertezza che si ha sulle condizioni iniziali e sul parametro dinamico  $\mu$ .

Abbiamo supposto di partire da alcune osservazioni che possiamo ottenere con diversi metodi e abbiamo confrontato tale sistema dinamico con queste osservazioni.

Il problema principale che ci troviamo davanti è quello di capire cosa possiamo estrarre da tale confronto.

A priori, infatti, non sappiamo se la dinamica caotica rappresenti una condizione favorevole o sfavorevole per lo studio del sistema dinamico.

Nel 1987 Wisdom, come già detto, occupandosi dello stato di rotazione caotico di Iperione, satellite di Saturno, ha congetturato che più il sistema è caotico e maggiori sono le informazioni che possiamo estrarre. In realtà tale congettura risulta falsa in alcuni casi. Abbiamo portato un controesempio alla congettura di Wisdom prima con un test numerico nel problema modello della mappa standard, poi come risultato più generale vedendolo come un corollario dello Shadowing Lemma, supponendo che l'orbita in questione parta da condizioni iniziali che si trovano su un intorno aperto di un insieme iperbolico.

Come capiamo da quanto detto, ci sono numerosi problemi nel caso di sistemi dinamici caotici.

Solitamente, di fronte ad un caso simile, possiamo ricevere due diverse risposte:

- si può pensare che il caos sia una situazione dalla quale è impossibile ricavare qualunque informazione (in questo modo però sarebbe inutile lo studio di tali sistemi);
- si può pensare che più il sistema è caotico e migliori sono le conoscenze.

Da quanto visto, sappiamo che nessuna delle due risposte può essere totalmente giusta. Sotto determinate condizioni (insieme iperbolico) il Teorema 1.3.1 ci permette di ottenere alcune informazioni sul sistema caotico studiato.

L'idea di fondo è quindi quella che non sia inutile studiare i sistemi caotici, ma forse dovremmo cambiare alcune nozioni, tra le quali quella di predizione, per capire quali informazioni possiamo davvero estrarre da tali sistemi.

Un'applicazione di quanto visto nell'ultima parte della tesi, cioè l'utilizzo dello Shadowing Lemma all'interno della determinazione orbitale caotica, potrebbe essere sviluppato per la monitoraggio degli impatti. Ovviamente bisogna per prima cosa cercare di capire in quali casi sia possibile sviluppare tale teoria e in quali invece non possiamo dire nulla a partire da questi risultati.

Un altro scopo di tale studio è anche quello di capire quanta della teoria prodotta per sistemi caotici valga solo in tali casi: ad esempio, abbiamo visto che, se il sistema è caotico, l'accuratezza della determinazione delle condizioni iniziali cresce esponenzialmente nel tempo, quello che vogliamo fare è cercare di capire se i risultati ottenuti in questo caso possono anche verificarsi se la crescita dell'inverso dell'incertezza è polinomiale, il che significa cercare di capire se sia possibile una generalizzazione dello Shadowing Lemma.



# Bibliografia

- [1] Abate, M.: *Sistemi dinamici discreti*, Appunti del corso, (2005).
- [2] Anosov, D. V.: *Geodesic flows on closed Riemann manifolds with negative curvature.*, Proc. Steklov Institute Math. 90 (1967), Amer. Math. Society, Providence, RI (1969).
- [3] Chauvineau, B., Farinella, P., Mignard, F.: *Planar orbits about a triaxial body: Application to asteroidal satellites*, Icarus 105, 370–384, (1993).
- [4] Guckenheimer J., Moser J., Newhouse S.E.: *Dynamical Systems*, CI. M. E. Lectures, Bressanone, Italy (June 1978), Birkhauser-Verlag (1980).
- [5] Meyer, K.R., Hall, G.R.: *Introduction to Hamiltonian Dynamical Systems and the N-Body Problem*, Springer Verlag (1992).
- [6] Milani, A.C.: *Introduzione ai sistemi dinamici*, Edizioni Plus, Università di Pisa (2002).
- [7] Milani, A.C.: *Accuracy of orbit computation for geodetic satellites: the ordered and the chaotic case*, Geodetic Theory Today, F.Sansò editor, Springer, 71-82, (1995).
- [8] Palis, J.: *On Morse-Smale dynamical systems*, Topology 8 (1969), 385-404.
- [9] Peale, S., Wisdom, J.: Bull. Am. Astron. Soc. 16, 707, (1984).
- [10] Pesin, Ya.B.: *Characteristic Lyapunov exponents and smooth ergodic theory*, Russ. Math. Surv. 3255, 1977
- [11] Pilyugin, S.Yu.: *Shadowing in Dynamical Systems*, Lectures Notes in Math 1706, Springer-Verlag (1999).
- [12] Wisdom, J.: Icarus 72, 241, (1987).



# Ringraziamenti

*“Ho avuto il raro privilegio di riuscire a realizzare nella mia vita adulta quello che era stato il mio sogno d’infanzia.”*

*(Andrew Wiles)*

Non sono la ragazza che nei suoi ringraziamenti si metterà ad elencare tutte le persone importanti nella sua vita. Non perchè io non voglia, ma forse solo perchè abbia davvero paura di non saperlo fare, di dimenticare qualcuno o di non riuscire a riassumere in poche righe emozioni e sensazioni provate e a volte irripetibili.

Spero che voi che state leggendo questi ringraziamenti riusciate a vedere, nascosto tra le righe, il vostro nome.

Chiunque conosca la mia storia sa che se ho scelto di venire a Pisa, di lasciare un ambiente in cui mi ero trovata bene e che sinceramente non avrei mai abbandonato, è stato solo per inseguire un sogno.

Il sogno che porto avanti fin da bambina.

Non sono ancora arrivata a realizzarlo, ma spero che questa tesi sia soltanto un inizio.

Non so cosa riuscirò a fare e ora non so nemmeno dove sarò fra qualche mese, ma sono certa del fatto che senza il vostro aiuto non sarei mai arrivata a questo punto.

Immaginatevi piccoli, impotenti e spaventati. Alcuni di voi sono stati come una grande mano che mi ha sollevato e senza stringermi mi ha fatto superare periodi difficili, aiutandomi a portare avanti ciò in cui credevo, anche se spesso sembrava troppo difficile anche per una testa dura come la mia.

Altri mi hanno fatto capire che ho un valore, magari come persona, magari come studentessa, magari semplicemente come Federica.

So che molti di voi avranno saltato l’intera tesi per arrivare a leggere i ringraziamenti, curiosi di sapere cosa ci sia scritto (ovviamente non vi chiederei mai di leggerla tutta). Per tutti quelli che l’hanno letta davvero, spero che sia stato un buon lavoro e che possiate essere orgogliosi di quanto ho scritto.

Mi piacerebbe che foste davvero così felici di conoscermi, come io lo sono di avervi incontrato. Vorrei davvero che tutti voi, guardandomi, possiate essere

felici ed orgogliosi di vedere cosa ho fatto e questa pagina è per dimostrare che senza di voi tutto questo non sarebbe stato possibile.

Fortunatamente il mio sogno d'infanzia è così grande che per realizzarlo tutto ci vuole molto tempo e soprattutto ancora la vostra presenza ed il vostro appoggio.

Per tutto quello che avete fatto e che potrete ancora fare, vi ringrazio immensamente.