

UNIVERSITÀ DI PISA



FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI
CORSO DI LAUREA SPECIALISTICA IN SCIENZE FISICHE

Anno accademico 2009/2010

TESI DI LAUREA SPECIALISTICA

Metodi Non Perturbativi in Teorie di Gauge Supersimmetriche

Candidato

Lorenzo Di Pietro

Relatore

Prof. Kenichi Konishi

Indice

1	Introduzione	3
2	Teorie di gauge supersimmetriche	6
2.1	L'idea della supersimmetria	6
2.1.1	Modello di WZ	8
2.1.2	Superspazio e supercampi	11
2.2	Versione supersimmetrica della teorie di gauge	15
2.2.1	Teoria abeliana	15
2.2.2	Super-Yang-Mills	17
2.2.3	Accoppiamento con la materia	19
2.3	Spazio dei moduli classico in SQCD	21
3	Risultati non perturbativi in SQCD $\mathcal{N} = 1$	26
3.1	Identità di Ward supersimmetriche	26
3.2	Anomalia di Konishi	29
3.3	Olomorfia	33
3.3.1	Super-Yang-Mills	33
3.3.2	$N_f < N_c$: Superpotenziale ADS	37
3.3.3	Spazio dei moduli quantistico per $N_f = N_c$, $N_f = N_c + 1$	45
4	Soluzione di Seiberg-Witten della teoria $\mathcal{N} = 2$	51
4.1	Algebra supersimmetrica $\mathcal{N} = 2$ e cariche centrali	51
4.2	$\mathcal{N} = 2$ Super-Yang-Mills	53
4.2.1	Simmetrie globali	54
4.2.2	Spazio dei moduli	55
4.2.3	Carica centrale e cariche elettromagnetiche	57
4.2.4	Forma delle correzioni al prepotenziale	58
4.2.5	Dualità	60
4.2.6	Massa dei dioni	62
4.2.7	Singolarità e monodromie	63
4.2.8	Confinamento nella teoria $\mathcal{N} = 1$	66
4.2.9	Soluzione del modello	67

4.3	Teoria con materia: cenni.	69
4.3.1	Singularità e stati massless	71
5	SQCD con materia nell'aggiunta	75
5.1	Simmetrie globali e spazio dei moduli della teoria classica	76
5.2	Teoria quantistica	78
5.2.1	Simmetrie della teoria quantistica	81
5.2.2	$N_f = 1$	83
5.2.3	$N_f = 2$	85
5.2.4	$N_f = 3$	87
6	Conclusioni	90
	Bibliografia	92

Capitolo 1

Introduzione

L'obiettivo di questa tesi è studiare alcuni risultati non perturbativi in teorie di gauge supersimmetriche.

La motivazione per questo tipo di studi viene dai molti problemi non ancora risolti riguardo la dinamica delle teorie di gauge non abeliane, la cui soluzione analitica richiederebbe un controllo di queste teorie oltre il regime perturbativo che finora non è stato possibile ottenere per le teorie realistiche come la QCD (Cromodinamica Quantistica). Da questo punto di vista i modelli supersimmetrici godono di uno *status* privilegiato: i vincoli imposti dalla maggiore simmetria (che in un certo senso è la massima simmetria possibile per una teoria di campo quantistica [4]) hanno portato in molti casi a soluzioni analitiche che sono inaccessibili per le ordinarie teorie di campo in quattro dimensioni.

Le prime ricerche in questa direzione, che risalgono agli anni '80 ([6]-[11]), hanno mostrato come le teorie con supersimmetria (SUSY), oltre alle note proprietà di cancellazione delle divergenze nello sviluppo perturbativo, permettano anche di ottenere risultati esatti a livello non perturbativo, ad esempio il calcolo esatto di contributi instantonici.

Gli anni '90 hanno visto un grande sviluppo nella comprensione della dinamica di queste teorie. Sfruttando ampiamente i vincoli derivanti dall'olomorfia dell'azione efficace Wilsoniana nei parametri e dalle simmetrie globali, Seiberg in una serie di lavori ([13]-[15], si veda anche la review [12]) ha analizzato esattamente il comportamento a basse energie della versione supersimmetrica della QCD (SQCD) mettendo in luce una varietà di fenomeni interessanti al variare del numero di flavor e di colori. Una parziale panoramica di questi risultati occupa la seconda parte del capitolo 3: vedremo come la quantizzazione possa rimuovere la degenerazione continua di vuoti gauge inequivalenti esistente a livello classico e come sia possibile mostrare che queste teorie sono confinanti e possono esibire una rottura dinamica della simmetria di flavor.

Un ulteriore e fondamentale passo avanti è stato ottenuto grazie alla soluzione

da parte di Seiberg e Witten della teoria $SU(2)$ (con e senza materia) con supersimmetria estesa $\mathcal{N} = 2$ ([19], [20]): sfruttando una particolare forma di dualità elettromagnetica valida per la teoria a basse energie è stato possibile determinare esattamente l'azione effettiva. Uno studio delle singolarità sullo spazio dei moduli quantistico rivela che quest'ultime sono generate dall'annullarsi della massa di configurazioni solitoniche che portano carica magnetica (monopoli, dioni). Se perturbiamo la teoria con un termine di massa per il campo nella rappresentazione aggiunta rompendo $\mathcal{N} = 2$ in $\mathcal{N} = 1$ la degenerazione continua di vuoti è rimossa: rimangono solo due vuoti in corrispondenza delle singolarità e il monopolo o il dione condensano in questi vuoti. In questo modello è stata dunque realizzata per la prima volta l'idea di 't Hooft sul confinamento come conseguenza della condensazione di cariche magnetiche ([18]). Quando a questa teoria vengono aggiunti dei quark, un'analisi analoga mostra che anche la rottura dinamica della simmetria di flavor può essere messa in relazione alla condensazione di cariche magnetiche, che in questo caso a loro volta portano indici di flavor.

Lo studio originale portato avanti per questo lavoro, che è oggetto del capitolo 5, analizza una teoria $SU(2)$ con SUSY $\mathcal{N} = 1$ caratterizzata dalla presenza, oltre ai quark, di un campo di materia Φ nella rappresentazione aggiunta del gruppo di gauge. La particolarità di questa teoria è che, variando la massa μ del campo nell'aggiunta e il parametro dell'accoppiamento di Yukawa, essa interpola tra la SQCD $\mathcal{N} = 2$ ($\mu = 0$), per cui disponiamo della soluzione di Seiberg-Witten, e una versione della SQCD $\mathcal{N} = 1$ modificata dalla presenza di un'interazione quartica tra i quark ($\mu \rightarrow \infty$). Dato che conosciamo esattamente le correzioni quantistiche al superpotenziale nel regime in cui il campo nell'aggiunta è disaccoppiato, siamo in grado di calcolare i VEV degli squark in questo limite semiclassico. L'idea è di sfruttare quindi l'anomalia di Konishi per calcolare il condensato del campo nell'aggiunta $u = \langle \text{Tr} \Phi^2 \rangle$ in termini di quelli degli squark. Per olomorfia nel parametro μ , i risultati così ottenuti per μ grande devono rimanere validi anche per μ piccolo. In questo regime però la teoria ha la forma di una SQCD $\mathcal{N} = 2$ rotta dal termine di massa in $\mathcal{N} = 1$. I vuoti di questa teoria sono in corrispondenza con le singolarità sulla branch di Coulomb della teoria $\mathcal{N} = 2$ ed è noto dalla teoria di Seiberg-Witten come siano organizzati sul piano u . È pertanto possibile effettuare un controllo di consistenza dei due approcci o, in altre parole, riprodurre i risultati che derivano dalla soluzione di Seiberg-Witten mediante un calcolo in approssimazione semiclassica.

Questa analisi è stata portata avanti da Gorsky, Vainshtein e Yung ([27]) per la teoria con un flavor. Nella tesi presentiamo un'estensione alle teorie con due e tre flavor. Questa generalizzazione permette di studiare anche il comportamento dei vuoti dal punto di vista della simmetria di flavor. In particolare è interessante studiare il comportamento dei vuoti al variare delle masse dei quark: per valori generici

delle masse la simmetria di flavor è rotta esplicitamente ma se facciamo coincidere i valori $m_i \rightarrow m$ allora c'è una simmetria $SU(N_f)$ e possiamo verificare che i vuoti in questo limite vanno a coincidere in modo da organizzarsi in multipletti di $SU(N_f)$. Analogamente passando al limite $m \rightarrow 0$ l'intera simmetria di flavor $SO(2N_f)$ è ripristinata ed è possibile vedere che i vuoti si spostano e si organizzano in multipletti di questo gruppo più grande. Un altro controllo interessante consiste nell'analizzare il limite in cui un flavor diventa molto più pesante degli altri e verificare che i vuoti fluiscono in quelli della teoria con un flavor in meno.

Un possibile sviluppo di questo studio, che è anche la motivazione che ci ha portato a considerare questo tipo di teoria, consisterebbe nell'estendere l'approccio semiclassico alla teoria con un numero arbitrario di colori e di flavor tramite la versione generalizzata dell'anomalia di Konishi ([28]). L'interesse nella teoria generale (*i.e.* $SU(N_c)$ con N_f flavor di quark e una rottura $\mathcal{N} = 2 \rightarrow \mathcal{N} = 1$ tramite un termine di massa per il campo nell'aggiunta) risiede nelle proprietà dei suoi vuoti quantistici, che sono stati completamente classificati ([29]). In particolare la fisica di alcuni di questi vuoti è caratterizzata dal fatto che per $\mu = 0$ sono punti superconformi interagenti, e contrariamente agli altri vuoti in questo caso non disponiamo di una descrizione a basse energie in termini di gradi di libertà debolmente accoppiati: i condensati di cariche elettriche e magnetiche si annullano quando ci si avvicina a questi punti. Dato che il punto di vista ordinario fallisce in questo caso, lo studio di questi vuoti potrebbe rivelare meccanismi nuovi per il confinamento e la rottura dinamica della simmetria, potenzialmente rilevanti anche per le teorie più realistiche, come ad esempio la Cromodinamica Quantistica.

Capitolo 2

Teorie di gauge supersimmetriche

In questo capitolo affrontiamo la definizione dell'algebra supersimmetrica e le sue rappresentazioni locali, per poi passare alla costruzione della versione supersimmetrica delle teorie di gauge.

2.1 L'idea della supersimmetria

Le simmetrie di una teoria di campo quantistica sono vincolate dal teorema di Coleman-Mandula [4], secondo cui la simmetria può estendere quella spazio-temporale di Poincaré solo aggiungendo una simmetria interna (*i.e.* che commuti con lo stessa algebra di Poincaré) se si vuole una matrice S non banale. In altre parole il teorema afferma l'impossibilità di avere cariche conservate con spin diverso da zero in aggiunta al quadrimpulso P_μ e al tensore momento angolare $M_{\mu\nu}$, perché fornirebbero vincoli troppo forti sulla dinamica della teoria rendendola banale.

Una possibile scappatoia a questo *no-go theorem* si basa sull'osservazione che la sua validità è limitata al caso in cui i generatori della simmetria formino un'algebra di Lie. Questo ci spinge a considerare anche generatori che rispettino regole di anti-commutazione. Più precisamente, motivati dall'esempio dei campi anticommutanti di spin semi-intero, ammettiamo una struttura più generale di algebra graduata per l'algebra \mathcal{A} dei generatori delle simmetrie:

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 \oplus \mathcal{A}_1$$

ove $\mathcal{A}_0 = \{\text{elementi di grado 0, bosonici}\}$ e $\mathcal{A}_1 = \{\text{elementi di grado 1, fermionici}\}$ e i termini "bosonico" e "fermionico" si riferiscono alle differenti proprietà di simmetria sotto scambio delle operazioni binarie definite sulle sottoalgebre:

$$[\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_0] \subseteq \mathcal{A}_0, \quad [\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_1] \subseteq \mathcal{A}_1, \quad \{\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_1\} \subseteq \mathcal{A}_0$$

$$[A_{(0)}, A] = -[A, A_{(0)}], \quad \{A_{(1)}, A'_{(1)}\} = \{A'_{(1)}, A_{(1)}\}$$

Questa estensione della definizione di simmetria permette in effetti di “evadere” il teorema di Coleman-Mandula, ma solo in un modo molto particolare. È possibile dimostrare¹, infatti, che i generatori fermionici in \mathcal{A}_1 possono avere solo spin $\frac{1}{2}$. Utilizzeremo la convenzione di esprimerli come spinori di Weyl con chiralità left² e li indicheremo con Q . Richiederemo anche che l'algebra contenga gli operatori coniugati hermitiani $\bar{Q} \equiv Q^\dagger$. Le regole di (anti)commutazione che coinvolgono questi operatori definiscono l'estensione supersimmetrica dell'algebra di Poincaré:

$$\begin{aligned} \{Q_\alpha^I, \bar{Q}_\beta^J\} &= 2\delta^{IJ}\sigma_{\alpha\dot{\beta}}^\mu P_\mu & [P_\mu, Q_\alpha^I] &= 0 = [P_\mu, \bar{Q}_{\dot{\alpha}}^I] \\ \{Q_\alpha^I, Q_\beta^J\} &= \epsilon_{\alpha\beta} Z^{IJ} & \{\bar{Q}_{\dot{\alpha}}^I, \bar{Q}_{\dot{\beta}}^J\} &= \epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} Z^{*IJ}, [Z^{IJ}, \mathcal{A}] = 0 \end{aligned}$$

$$I, J = 1, \dots, \mathcal{N}$$

Notiamo che in generale abbiamo ammesso la possibilità di avere \mathcal{N} generatori fermionici indipendenti, indicizzati da I, J . Per $\mathcal{N} > 1$ si parla di *supersimmetria estesa* e in questo caso l'algebra può avere un centro non banale dato dagli anti-commutatori $Z^{IJ} = -Z^{JI}$. Come vedremo trattando il caso $\mathcal{N} = 2$, le Z possono ricevere contributo da cariche conservate associate a simmetrie interne della teoria. Per il momento tratteremo il caso minimale $\mathcal{N} = 1$ per il quale non si hanno cariche centrali.

La sola forma dell'algebra delle supercariche permette di trarre delle conseguenze rilevanti sulle teorie SUSY invarianti: ad esempio si può vedere che in una qualsiasi rappresentazione dell'algebra, gli stati ad impulso non nullo fissato devono essere ugualmente ripartiti tra stati bosonici e fermionici. Per una trattazione più dettagliata dell'algebra SUSY e delle sue rappresentazioni si veda [1].

¹L'estensione del teorema di Coleman-Mandula al caso di algebre di Lie graduate è dovuta a Haag, Lopuszanski e Sohnius [5], si veda anche l'esposizione in [1].

²Indichiamo con α, β, \dots posti in basso gli indici della rappresentazione spinoriale $(\frac{1}{2}, 0)$, ovvero quella con chiralità left, e con $\dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dots$ posti in basso quelli della rappresentazione coniugata $(\frac{1}{2}, 0)^* = ((0, \frac{1}{2})^T)^{-1}$. Il tensore antisimmetrico 2×2 $\epsilon^{\alpha\beta}$ o $\epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}$ e il suo inverso $\epsilon_{\alpha\beta}$ o $\epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}$ si usano per alzare e abbassare gli indici. Gli indici in alto non puntati e puntati danno rispettivamente le rappresentazioni $(0, \frac{1}{2})^* = ((\frac{1}{2}, 0)^T)^{-1} = \epsilon(\frac{1}{2}, 0)\epsilon^{-1}$ e $(0, \frac{1}{2}) = \epsilon(\frac{1}{2}, 0)^*\epsilon^{-1}$. Dati ψ_α e χ_β spinori left anticommutanti, definiamo le contrazioni:

$$\begin{aligned} \psi\chi &\equiv (\epsilon\psi)^T\chi = \epsilon^{\alpha\beta}\psi_\beta\chi_\alpha = \psi^\alpha\chi_\alpha = \chi\psi \\ \bar{\psi}\bar{\chi} &\equiv \bar{\psi}^T\epsilon\bar{\chi} = \bar{\psi}_{\dot{\alpha}}\epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\bar{\chi}_{\dot{\beta}} = \bar{\psi}_{\dot{\alpha}}\bar{\chi}^{\dot{\alpha}} = \bar{\chi}\bar{\psi} \end{aligned}$$

e i quadri-vettori controvarianti:

$$\begin{aligned} \psi\sigma^\mu\bar{\chi} &\equiv (\epsilon\psi)^T\sigma^\mu\epsilon\bar{\chi} = \psi^\alpha\sigma_{\alpha\dot{\beta}}^\mu\bar{\chi}^{\dot{\beta}} \\ \bar{\psi}\bar{\sigma}^\mu\chi &\equiv \bar{\psi}^T\bar{\sigma}^\mu\chi = \bar{\psi}_{\dot{\alpha}}\bar{\sigma}^{\mu\dot{\alpha}\beta}\chi_\beta \end{aligned}$$

ove $\sigma^\mu \equiv (1, \vec{\sigma})$ e $\bar{\sigma}^\mu \equiv (1, -\vec{\sigma})$.

2.1.1 Modello di WZ

Per costruire delle teorie di campo supersimmetriche è necessario rappresentare l'algebra supersimmetrica su dei campi locali facendo agire le supercariche Q, \bar{Q} in modo da associare ad ogni grado di libertà bosonico il suo "partner" fermionico e viceversa, lasciando invariata l'azione della teoria. In questo paragrafo illustreremo come questo sia possibile nel modello più semplice, che è anche il primo ad essere stato studiato da parte di Wess e Zumino. Seguiremo la trattazione in [1], [3].

Partendo da un campo scalare complesso ϕ e un fermione di Weyl ψ potremmo definire le trasformazioni come:

$$\begin{aligned}\delta_{\epsilon, \bar{\epsilon}} \phi &\equiv [\epsilon Q + \bar{\epsilon} \bar{Q}, \phi] = \sqrt{2} \epsilon \psi \\ \delta_{\epsilon, \bar{\epsilon}} \psi_\alpha &\equiv [\epsilon Q + \bar{\epsilon} \bar{Q}, \psi_\alpha] = -\sqrt{2} i (\sigma^\mu \bar{\epsilon})_\alpha \partial_\mu \phi\end{aligned}$$

dove con ϵ e $\bar{\epsilon}$ si sono indicati dei parametri spinoriali anticommutanti. La corrispondente variazione della lagrangiana libera:

$$\mathcal{L}_0 = |\partial_\mu \phi|^2 + i \bar{\psi} \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi \Rightarrow \delta_{\epsilon, \bar{\epsilon}} \mathcal{L}_0 = \partial_\mu (\epsilon \sigma^\mu \bar{\sigma}^\nu \psi \partial_\nu \phi^* - \epsilon \psi \partial^\mu \phi^* + \bar{\epsilon} \bar{\psi} \partial^\mu \phi)$$

è una derivata totale e pertanto l'azione è invariata. Per verificare che le trasformazioni assegnate costituiscano in effetti una rappresentazione dell'algebra è però necessario considerare i commutatori di due trasformazioni:

$$\begin{aligned}[\delta_{\epsilon, \bar{\epsilon}}, \delta_{\eta, \bar{\eta}}] \phi &= -2i (\eta \sigma^\mu \bar{\epsilon} - \epsilon \sigma^\mu \bar{\eta}) \partial_\mu \phi \\ [\delta_{\epsilon, \bar{\epsilon}}, \delta_{\eta, \bar{\eta}}] \psi_\alpha &= -2i (\eta \sigma^\mu \bar{\epsilon} - \epsilon \sigma^\mu \bar{\eta}) \partial_\mu \psi_\alpha + 2i (\eta_\alpha \bar{\epsilon} \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi - \epsilon_\alpha \bar{\eta} \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi)\end{aligned}$$

Mentre per lo scalare otteniamo correttamente solo un termine proporzionale all'operatore quadrimpulso applicato al campo, nel caso dello spinore abbiamo ottenuto un termine aggiuntivo che è zero solo imponendo le equazioni del moto: $\bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi = 0$. Dunque le trasformazioni definite sui campi ϕ e ψ costituiscono una rappresentazione solo *on-shell*.

In effetti un semplice conteggio dei gradi di libertà mostra che abbiamo un pareggio tra quelli bosonici e quelli fermionici solo per campi che rispettano le equazioni del moto: il campo ψ off-shell ha due gradi di libertà, uno dei quali è proiettato via dall'equazione del moto. Un metodo per estendere anche off-shell la rappresentazione è quello dei *campi ausiliari*, che consiste nell'introdurre dei gradi di libertà aggiuntivi che non propagano, e dunque "scompaiono" on-shell, in termini dei quali si riesce a scrivere una vera e propria rappresentazione dell'algebra indipendentemente dalle equazioni del moto. Nel caso in esame questo è realizzato dall'introduzione di un altro campo scalare complesso F con lagrangiana algebrica:

$$\mathcal{L}_F = |F|^2$$

che dà come equazione del moto semplicemente $F = 0$. Notiamo che in questo modo il numero di gradi di libertà bosonici pareggia quello dei fermionici sia on-shell che off-shell.

La definizione delle trasformazioni dopo l'introduzione di F va cambiata in:

$$\begin{aligned}\delta_{\epsilon, \bar{\epsilon}} \phi &= \sqrt{2} \epsilon \psi \\ \delta_{\epsilon, \bar{\epsilon}} \psi_\alpha &= -\sqrt{2} i (\sigma^\mu \bar{\epsilon})_\alpha \partial_\mu \phi - \sqrt{2} \epsilon_\alpha F \\ \delta_{\epsilon, \bar{\epsilon}} F &= -\sqrt{2} i \bar{\epsilon} \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi\end{aligned}\tag{2.1}$$

Con queste definizioni si verifica che per ogni elemento del multipletto $X = \phi, \psi_\alpha, F$ vale la proprietà:

$$[\delta_{\epsilon, \bar{\epsilon}}, \delta_{\eta, \bar{\eta}}] X = -2i (\eta \sigma^\mu \bar{\epsilon} - \epsilon \sigma^\mu \bar{\eta}) \partial_\mu X$$

che esprime esattamente la regola di anticommutazione $\{Q, \bar{Q}\} = 2\sigma^\mu P_\mu$ e ci assicura che abbiamo ottenuto una rappresentazione off-shell dell'algebra SUSY.

La teoria che abbiamo considerato finora è una teoria libera. La supersimmetria dà anche dei vincoli sulla forma dei possibili termini di interazione. Consideriamo infatti un certo numero di copie del multipletto (ϕ_i, ψ_i, F_i) indicizzate da i . Dato che F_i ha dimensione 2 una lagrangiana di interazione rinormalizzabile sarà della forma

$$\mathcal{L}_{int} = -\frac{1}{2} \mathcal{W}^{ij} \psi_i \psi_j + \mathcal{W}^i F_i + c.c.$$

ove $\mathcal{W}^{ij} = \mathcal{W}^{ji}$ e \mathcal{W}^i sono funzioni di ϕ e ϕ^* . La supersimmetria esclude la possibilità di aggiungere un termine di potenziale funzione solo del campo scalare. Isoliamo in $\delta_{\epsilon, \bar{\epsilon}} \mathcal{L}_{int}$ i termini che sono di ordine tre in ψ :

$$\sqrt{2} \frac{\partial \mathcal{W}^{ij}}{\partial \phi_k} (\epsilon \psi_k) (\psi_i \psi_j) + \sqrt{2} \frac{\partial \mathcal{W}^{ij}}{\partial \phi_k^*} (\bar{\epsilon} \bar{\psi}_k) (\psi_i \psi_j) + c.c.$$

Usando l'identità spinoriale:

$$(\epsilon \psi_k) (\psi_i \psi_j) + (\epsilon \psi_i) (\psi_j \psi_k) + (\epsilon \psi_j) (\psi_k \psi_i) = 0$$

si può annullare il primo termine richiedendo che la derivata di \mathcal{W}^{ij} sia completamente simmetrica nei tre indici. Per il secondo termine invece l'unica possibilità è che la derivata si annulli, ovvero che \mathcal{W}^{ij} sia una funzione olomorfa di ϕ . La condizione di simmetria e olomorfia permettono di esprimere \mathcal{W}^{ij} come derivata seconda di una funzione olomorfa dei ϕ^i :

$$\mathcal{W}^{ij} = \frac{\partial^2 \mathcal{W}}{\partial \phi^i \partial \phi^j}$$

Per una teoria rinormalizzabile \mathcal{W} potrà essere al più un polinomio di grado tre:

$$\mathcal{W} = E^i \phi_i + M^{ij} \phi_i \phi_j + y^{ijk} \phi_i \phi_j \phi_k$$

dove y^{ijk} sarà il coefficiente dell'interazione di Yukawa tra ϕ e ψ e M è la matrice di massa degli spinori. I termini di $\delta_{\epsilon, \bar{\epsilon}} \mathcal{L}_{int}$ che contengono una derivata sono:

$$\sqrt{2} i \mathcal{W}^{ij} \psi_i \sigma^\mu \bar{\epsilon} \partial_\mu \phi_j - \sqrt{2} i \mathcal{W}^i \bar{\epsilon} \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi$$

Affinché questo termine possa essere una derivata totale, deve essere verificata la condizione:

$$\mathcal{W}^{ij} \partial_\mu \phi_j = \partial_\mu \mathcal{W}^i \Rightarrow \mathcal{W}^i = \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial \phi_i}$$

Con questa forma dei coefficienti \mathcal{W}^{ij} e \mathcal{W}^i si trova in effetti che l'azione con il termine di interazione è SUSY invariante. Notiamo che tutta l'informazione sulla forma dell'interazione è contenuta nell'unica funzione olomorfa \mathcal{W} . Con l'aggiunta di \mathcal{L}_{int} le equazioni del moto per F_i diventano:

$$F_i = -\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial \phi_i}, \quad F_i^* = -\frac{\partial \mathcal{W}^*}{\partial \phi_i^*}$$

e integrandolo via troviamo che \mathcal{L}_{int} contiene un potenziale per i campi scalari:

$$V(\phi, \phi^*) = \left| \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial \phi_i} \right|^2 \geq 0 \quad (2.2)$$

Notiamo che tale potenziale è sempre non-negativo: questa proprietà è una conseguenza dall'algebra supersimmetrica. È inoltre possibile mostrare che i vuoti supersimmetrici (*i.e.* quelli in cui la supersimmetria non è rotta spontaneamente) hanno energia nulla. Classicamente questa condizione identifica le configurazioni per cui $F_i = -\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial \phi_i} = 0$.

Sostituendo in (2.2) la forma esplicita della funzione \mathcal{W} , si trovano delle relazioni che legano i coefficienti dell'interazione di Yukawa e la massa dei fermioni ai coefficienti delle self-interazioni dello scalare. In particolare notiamo che vale $(M_{scalare}^2)^{ij} = M^{ik} M^{*kj}$ e di conseguenza le masse di bosoni e fermioni hanno gli stessi autovalori, anche questa è una proprietà che deriva direttamente dall'algebra supersimmetrica.

La rappresentazione che abbiamo costruito è detta *rappresentazione chirale* dell'algebra supersimmetrica $\mathcal{N} = 1$ e il corrispondente multipletto di campi (ϕ, ψ_α, F) *multipletto chirale*.

2.1.2 Superspazio e supercampi

Una formulazione particolarmente efficace ed elegante delle teorie di campo supersimmetriche è realizzata mediante l'introduzione del cosiddetto *superspazio*. L'idea è di far corrispondere all'estensione dell'algebra delle simmetrie spazio-temporali un'opportuna estensione dello stesso spazio-tempo: alla coordinata quadridimensionale su cui agiscono le ordinarie traslazioni e trasformazioni di Lorentz, aggiungiamo delle coordinate su cui le supercariche agiscano come operatori di traslazione.

Per rendere più precisa questa idea notiamo che una trasformazione del gruppo di Poincaré può essere espressa almeno localmente in termini dei generatori nella forma:

$$\exp(-ia^\mu P_\mu + \frac{i}{2}\omega^{\mu\nu} M_{\mu\nu}) : x \rightarrow x' + a, \quad x'^\mu \simeq x^\mu + \omega^\mu{}_\nu x^\nu + \mathcal{O}(\omega^2)$$

La naturale identificazione dello spazio di Minkowski con il sottogruppo delle traslazioni $\omega = 0$ ci permette di rappresentare l'azione delle traslazioni come la moltiplicazione di elementi del gruppo:

$$\exp(-ia^\mu P_\mu) \exp(-ix^\mu P_\mu) = \exp(-i(x+a)^\mu P_\mu)$$

Analogamente una trasformazione dell'estensione supersimmetrica del gruppo di Poincaré si potrà esprimere in termini dei generatori come:

$$\exp(-ia^\mu P_\mu + \epsilon Q + \bar{\epsilon} \bar{Q} + \frac{i}{2}\omega^{\mu\nu} M_{\mu\nu})$$

e la generalizzazione dello spazio di Minkowski che chiamiamo superspazio può essere vista come il sottogruppo di tali trasformazioni con $\omega = 0$. In aggiunta all'usuale coordinata spazio-temporale, un punto del superspazio sarà dunque identificato dai parametri aggiuntivi $(\theta, \bar{\theta})$ delle trasformazioni supersimmetriche: questi parametri sono spinori di Weyl le cui componenti sono variabili di Grassmann anticommutanti.

L'azione di una "supertraslazione" su un punto del superspazio sarà generata dalla moltiplicazione degli esponenziali come per le ordinarie traslazioni:

$$\begin{aligned} & \exp(-ia^\mu P_\mu + \epsilon Q + \bar{\epsilon} \bar{Q}) \exp(-ix^\mu P_\mu + \theta Q + \bar{\theta} \bar{Q}) \\ &= \exp(-i(x+a + i\epsilon\sigma\bar{\theta} - i\theta\sigma\bar{\epsilon})^\mu P_\mu + (\theta + \epsilon)Q + (\bar{\theta} + \bar{\epsilon})\bar{Q}) \end{aligned}$$

Il prodotto è stato calcolato mediante la formula di Baker-Campbell-Hausdorff e notando che $[\epsilon Q + \bar{\epsilon} \bar{Q}, \theta Q + \bar{\theta} \bar{Q}] = \epsilon\{Q, \bar{Q}\}\bar{\theta} - \theta\{Q, \bar{Q}\}\bar{\epsilon}$. Pertanto:

$$\exp(\epsilon Q + \bar{\epsilon} \bar{Q}) : (x, \theta, \bar{\theta}) \rightarrow (x + i\epsilon\sigma\bar{\theta} - i\theta\sigma\bar{\epsilon}, \theta + \epsilon, \bar{\theta} + \bar{\epsilon})$$

In analogia alle rappresentazioni del gruppo di Poincaré in termini di campi sullo spazio dei Minkowski, le rappresentazioni locali dell'algebra supersimmetrica saranno costruite su delle funzioni definite sul superspazio, dette *supercampi*. La natura di variabile di Grassmann delle componenti di $(\theta, \bar{\theta})$ fa sì che una generica funzione sia in realtà un polinomio in queste variabili. Pertanto ad esempio un supercampo scalare $\Phi(x, \theta, \bar{\theta})$ ammetterà uno sviluppo della forma:

$$\begin{aligned}\Phi(x, \theta, \bar{\theta}) = & \phi(x) + \chi(x)\theta + \bar{\psi}(x)\bar{\theta} + F(x)\theta^2 + G(x)\bar{\theta}^2 \\ & + V_\mu(x)\theta\sigma^\mu\bar{\theta} + \bar{\tau}(x)\bar{\theta}\theta^2 + \lambda(x)\theta\bar{\theta}^2 + D(x)\theta^2\bar{\theta}^2\end{aligned}$$

in cui i coefficienti dello sviluppo sono campi ordinari, i cosiddetti campi componenti. Notiamo che le componenti di Φ sono ripartite in 8 gradi di libertà (complessi) bosonici (ϕ, F, G, D, V_μ) e in altrettanti gradi di libertà fermionici ($\chi_\alpha, \bar{\psi}_{\dot{\alpha}}, \bar{\tau}_{\dot{\alpha}}, \lambda_\alpha$).

Possiamo definire la derivazione “graduata” dei supercampi rispetto alle variabili di Grassmann partendo dalle seguenti regole:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial\theta^\alpha}\theta^\beta &= \delta_\alpha^\beta & \frac{\partial}{\partial\theta^\alpha}\bar{\theta}^{\dot{\beta}} &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}}\bar{\theta}^{\dot{\beta}} &= \delta_{\dot{\alpha}}^{\dot{\beta}} & \frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}}\theta^\beta &= 0\end{aligned}$$

La versione graduata della regola di Leibniz adatta per due monomi f_1, f_2 nelle variabili anticommutanti sarà:

$$\frac{\partial}{\partial\theta^\alpha}(f_1 f_2) = \frac{\partial f_1}{\partial\theta^\alpha} f_2 + (-1)^{\deg(f_1)} f_1 \frac{\partial f_2}{\partial\theta^\alpha}$$

ove “deg” indica il grado del monomio.

Come per le ordinarie traslazioni, una trasformazione supersimmetrica agisce sul supercampo cambiandone il punto di valutazione:

$$\begin{aligned}e^{-\epsilon Q - \bar{\epsilon}\bar{Q}}\Phi(x, \theta, \bar{\theta})e^{\epsilon Q + \bar{\epsilon}\bar{Q}} &= \Phi(x - i\epsilon\sigma\bar{\theta} + i\theta\sigma\bar{\epsilon}, \theta - \epsilon, \bar{\theta} - \bar{\epsilon}) \\ \Rightarrow [\epsilon Q + \bar{\epsilon}\bar{Q}, \Phi(x, \theta, \bar{\theta})] &= \epsilon\frac{\partial}{\partial\theta}\Phi(x, \theta, \bar{\theta}) - \bar{\epsilon}\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}}\Phi(x, \theta, \bar{\theta}) \\ &\quad + (i\epsilon\sigma^\mu\bar{\theta} - i\theta\sigma^\mu\bar{\epsilon})\partial_\mu\Phi(x, \theta, \bar{\theta})\end{aligned}$$

da cui deriviamo la forma dei generatori per questa rappresentazione:

$$\begin{aligned}(\epsilon Q\Phi)(x, \theta, \bar{\theta}) &= [\epsilon Q, \Phi(x, \theta, \bar{\theta})] \Rightarrow Q_\alpha = \frac{\partial}{\partial\theta^\alpha} + i(\sigma^\mu\bar{\theta})_\alpha\partial_\mu \\ (\bar{\epsilon}\bar{Q}\Phi)(x, \theta, \bar{\theta}) &= [\bar{\epsilon}\bar{Q}, \Phi(x, \theta, \bar{\theta})] \Rightarrow \bar{Q}_{\dot{\alpha}} = -\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}} - i(\theta\sigma^\mu)_{\dot{\alpha}}\partial_\mu\end{aligned}$$

che verificano le corrette regole di anticommutazione³:

$$\{Q_\alpha, \bar{Q}_{\dot{\alpha}}\} = -2i\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu \partial_\mu \quad , \quad \{Q_\alpha, Q_\beta\} = \{\bar{Q}_{\dot{\alpha}}, \bar{Q}_{\dot{\beta}}\} = 0$$

È conveniente introdurre degli operatori differenziali che siano invarianti sotto supersimmetria. Questi operatori sono detti *derivate (super)covarianti* e sono dati da:

$$D_\alpha = \frac{\partial}{\partial\theta^\alpha} - i(\sigma^\mu\bar{\theta})_\alpha\partial_\mu \quad , \quad \bar{D}_{\dot{\alpha}} = -\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}} + i(\theta\sigma^\mu)_{\dot{\alpha}}\partial_\mu$$

e rispettano la seguente algebra:

$$\{D_\alpha, \bar{D}_{\dot{\alpha}}\} = 2i\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu \partial_\mu \quad , \quad \{D_\alpha, D_\beta\} = \{\bar{D}_{\dot{\alpha}}, \bar{D}_{\dot{\beta}}\} = 0$$

La proprietà di invarianza sotto supersimmetria è espressa dai seguenti anticommutatori:

$$\{D, Q\} = \{\bar{D}, Q\} = \{D, \bar{Q}\} = \{\bar{D}, \bar{Q}\} = 0$$

La rappresentazione dell'algebra supersimmetrica realizzata mediante un generico supercampo scalare è riducibile. Per ottenere rappresentazioni irriducibili è necessario proiettare via alcune componenti del supercampo, richiedendo che rispetti dei vincoli compatibili con la supersimmetria. Ad esempio possiamo richiedere che verifichi:

$$\bar{D}_{\dot{\alpha}}\Phi(x, \theta, \bar{\theta}) = 0 \tag{2.3}$$

Un supercampo per cui vale questa condizione è detto *supercampo chirale*. Per studiare le componenti del supercampo chirale è conveniente introdurre il cambio di variabile:

$$y \equiv x - i\theta\sigma\bar{\theta}$$

che ha la proprietà che $\bar{D}y = 0$. Pertanto introducendo $\tilde{\Phi}(y, \theta, \bar{\theta}) = \Phi(x, \theta, \bar{\theta})$ la condizione (2.3) si riscrive:

$$\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}}\tilde{\Phi}(y, \theta, \bar{\theta}) = 0$$

da cui deduciamo immediatamente lo sviluppo in componenti di $\tilde{\Phi}$:

$$\tilde{\Phi}(y, \theta) = \phi(y) + \sqrt{2}\psi(y)\theta + F(y)\theta^2 \tag{2.4}$$

³L'azione sul supercampo, strettamente parlando, è l'inverso di una rappresentazione, perché deve agire come una vera e propria rappresentazione sugli stati. Pertanto è corretto che al membro destro compaia il generatore delle traslazioni $\mathcal{P}_\mu\Phi = [P_\mu, \Phi] = i\partial_\mu\Phi$ con un segno meno. Nota che l'azione delle traslazioni spazio-temporali sul supercampo è:

$$e^{ia^\mu P_\mu}\Phi(x, \theta, \bar{\theta})e^{-ia^\mu P_\mu} = \Phi(x - a, \theta, \bar{\theta})$$

e risostituendo x siamo in grado di scrivere lo sviluppo in componenti del supercampo Φ di partenza:

$$\begin{aligned}\Phi(x, \theta, \bar{\theta}) &= \phi(x) + \sqrt{2}\psi(x)\theta + F(x)\theta^2 \\ &\quad - i\theta\sigma^\mu\bar{\theta}\partial_\mu\phi(x) + \frac{i}{\sqrt{2}}\partial_\mu\psi(x)\sigma^\mu\bar{\theta}\theta^2 - \frac{1}{4}\square\phi(x)\theta^2\bar{\theta}^2\end{aligned}$$

Notiamo che le componenti del supercampo chirale hanno esattamente gli stessi gradi di libertà del multipletto chirale introdotto nel paragrafo precedente. In effetti si tratta della stessa rappresentazione, come si può vedere applicando una trasformazione supersimmetrica a Φ e guardando come trasformano le componenti:

$$\begin{aligned}(\epsilon Q + \bar{\epsilon}\bar{Q})\Phi(x, \theta, \bar{\theta}) &= \left(\epsilon\frac{\partial}{\partial\theta} - 2i\theta\sigma^\mu\bar{\epsilon}\frac{\partial}{\partial y^\mu}\right)\tilde{\Phi}(y, \theta, \bar{\theta}) \\ &= \sqrt{2}\epsilon\psi(y) + 2\epsilon\theta F(y) - 2i\theta\sigma^\mu\bar{\epsilon}\partial_\mu\phi(y) - \sqrt{2}i\partial_\mu\psi(y)\sigma^\mu\bar{\epsilon}\theta^2\end{aligned}$$

Confrontando con (2.4) otteniamo che le componenti hanno esattamente le trasformazioni (2.1).

In maniera analoga partendo da un supercampo *antichirale* $\bar{\Phi}$, ovvero che rispetti il vincolo $D_\alpha\bar{\Phi} = 0$, otteniamo un multipletto con gli stessi gradi di libertà e regole di trasformazione del complesso coniugato di un multipletto chirale. In particolare se Φ è un supercampo chirale, Φ^* è antichirale e viceversa. I vincoli di chiralità e antichiralità contengono una sola derivazione, pertanto grazie alla regola di Leibniz i prodotti di supercampi (anti)chirali sono ancora (anti)chirali.

I supercampi possono essere sfruttati anche per costruire delle azioni invarianti “a vista” sotto supersimmetria. A tal fine definiamo un’integrazione sulle variabili di Grassmann per generici supercampi così definita:

$$\int d^2\theta\Phi(x, \theta, \bar{\theta}) \equiv \Phi|_{\theta^2}, \quad \int d^2\bar{\theta}\Phi(x, \theta, \bar{\theta}) \equiv \Phi|_{\bar{\theta}^2}$$

ove con $|_{\theta^2}$ e $|_{\bar{\theta}^2}$ indichiamo le rispettive componenti nello sviluppo del supercampo. Notiamo che $\int d^2\theta = (\int d^2\bar{\theta})^*$. Come si può facilmente verificare abbiamo che:

- la componente $|_{\theta^2\bar{\theta}^2}$ di un generico supercampo
- la componente $|_{\theta^2}$ di un supercampo chirale
- la componente $|_{\bar{\theta}^2}$ di un supercampo antichirale

sono invarianti sotto supersimmetria a meno di derivate (spaziali) totali. Pertanto una generica azione reale e invariante sotto supersimmetria è data da:

$$S_{SUSY} = \int d^4 x \left[\int d^2 \theta d^2 \bar{\theta} \mathcal{K}(x, \theta, \bar{\theta}) + \left(\int d^2 \theta \mathcal{W}(x, \theta, \bar{\theta}) + \int d^2 \bar{\theta} \mathcal{W}^*(x, \theta, \bar{\theta}) \right) \right] \quad (2.5)$$

dove $\mathcal{K}^* = \mathcal{K}$ e \mathcal{W} è un supercampo chirale.

In particolare l'azione invariante trovata nel paragrafo precedente per il modello di WZ si scrive nella forma (2.5) in termini di una collezione Φ_i di supercampi chirali con le scelte:

$$\mathcal{K}^{WZ} \equiv \sum_i \Phi_i^* \Phi_i, \quad \mathcal{W}^{WZ} \equiv \mathcal{W}(\Phi) = E^i \Phi_i + M^{ij} \Phi_i \Phi_j + y^{ijk} \Phi_i \Phi_j \Phi_k$$

Tra le possibili azioni SUSY invarianti costruite a partire dai Φ_i , queste scelte sono anche le uniche compatibili con il vincolo di avere termini al più quadratici nelle derivate e con la rinormalizzabilità. Se si rilassa la richiesta di rinormalizzabilità, ad esempio nel caso in cui stiamo trattando il limite di basse energie di una teoria rinormalizzabile, allora possiamo ammettere una dipendenza arbitraria di \mathcal{W} da Φ_i , purché sia una funzione olomorfa:

$$\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial \Phi_i^*} = 0$$

in modo che \mathcal{W} rimanga un supercampo chirale: $\bar{D}_{\dot{\alpha}} \mathcal{W} = \partial_{\Phi_i} \mathcal{W} \bar{D}_{\dot{\alpha}} \Phi_i = 0$. \mathcal{W} è detto *superpotenziale*.

2.2 Versione supersimmetrica della teorie di gauge

2.2.1 Teoria abeliana

Le teorie di gauge supersimmetriche sono costruite a partire da un *supercampo reale* $V(x, \theta, \bar{\theta})$, ovvero che rispetti il vincolo di realtà: $V^* = V$. Questo vincolo è compatibile con la supersimmetria perchè l'operatore $\epsilon Q + \bar{\epsilon} \bar{Q}$ che genera le trasformazioni supersimmetriche è reale. Un tale supercampo ammette il seguente sviluppo in componenti:

$$\begin{aligned} V(x, \theta, \bar{\theta}) &= C(x) + i\chi(x)\theta - i\bar{\chi}(x)\bar{\theta} \\ &+ \frac{i}{2}H(x)\theta^2 - \frac{i}{2}H^*(x)\bar{\theta}^2 + V_{\mu}(x)\theta\sigma^{\mu}\bar{\theta} \\ &+ i\theta^2\bar{\theta}(\bar{\lambda}(x) - \frac{i}{2}\bar{\sigma}^{\mu}\partial_{\mu}\chi(x)) - i\bar{\theta}^2\theta(\lambda(x) + \frac{i}{2}\sigma^{\mu}\partial_{\mu}\bar{\chi}(x)) \\ &+ \frac{1}{2}\theta^2\bar{\theta}^2(D(x) - \frac{1}{2}\square C(x)) \end{aligned}$$

dove C , D e V_μ sono campi reali e abbiamo scelto questa particolare combinazione delle componenti per convenienza futura.

Vogliamo costruire un'azione supersimmetrica e che abbia un'invarianza di gauge. A tal fine definiamo a partire da V il supercampo fermione di Weyl:

$$W_\alpha(x, \theta, \bar{\theta}) \equiv -\frac{1}{4}\bar{D}^2 D_\alpha V(x, \theta, \bar{\theta})$$

Dato che W_α contiene due derivate \bar{D} , $\bar{D}_{\dot{\beta}}W_\alpha = 0$, ovvero W è un supercampo chirale. Pertanto l'azione:

$$S = \frac{1}{4} \int d^4x \left[\int d^2\theta W^2 + \int d^2\bar{\theta} \bar{W}^2 \right]$$

è SUSY invariante. Inoltre comunque assegnato un supercampo chirale $\Lambda(x, \theta, \bar{\theta})$ quest'azione è invariante sotto le trasformazioni locali:

$$V(x, \theta, \bar{\theta}) \rightarrow V(x, \theta, \bar{\theta}) + \Lambda(x, \theta, \bar{\theta}) + \Lambda^*(x, \theta, \bar{\theta}) \quad (2.6)$$

perché $W_\alpha \rightarrow W_\alpha - \frac{1}{4}\bar{D}^2 D_\alpha \Lambda = W_\alpha - \frac{1}{4}\bar{D}\{\bar{D}, D_\alpha\}\Lambda = W_\alpha$. Sviluppando in componenti Λ :

$$\begin{aligned} \Lambda(x, \theta, \bar{\theta}) = & A(x) + \sqrt{2}\eta(x)\theta + F(x)\theta^2 \\ & - i\theta\sigma^\mu\bar{\theta}\partial_\mu A(x) + \frac{i}{\sqrt{2}}\partial_\mu\eta(x)\sigma^\mu\bar{\theta}\theta^2 - \frac{1}{4}\square A(x)\theta^2\bar{\theta}^2 \end{aligned}$$

troviamo che la trasformazione (2.6) agisce sulle componenti di V come:

$$\begin{array}{ll} C \rightarrow C + A + A^* & \chi \rightarrow \chi - i\sqrt{2}\eta \\ H \rightarrow H - 2iF & V_\mu \rightarrow V_\mu - i\partial_\mu(A - A^*) \\ \lambda \rightarrow \lambda & D \rightarrow D \end{array}$$

Fissiamo la gauge di Wess-Zumino in cui η , F e la parte reale del campo A vengono scelti in modo da cancellare C , χ e H . Con questo gauge-fixing lo sviluppo del supercampo reale diventa:

$$V^{WZ}(x, \theta, \bar{\theta}) = V_\mu(x)\theta\sigma^\mu\bar{\theta} + i\theta^2\bar{\theta}\bar{\lambda}(x) - i\bar{\theta}^2\theta\lambda(x) + \frac{1}{2}\theta^2\bar{\theta}^2 D(x)$$

e abbiamo l'invarianza residua:

$$V_\mu \rightarrow V_\mu + \partial_\mu f$$

dove $f = 2\text{Im}A$ è un campo reale e λ e D rimangono invariati sotto questa trasformazione. Notiamo che V_μ trasforma esattamente con il bosone di gauge di una teoria abeliana. Nella gauge di Wess-Zumino possiamo scrivere le componenti di W

in termini di V , λ e D , sfruttando il cambio di variabile $y \equiv x - i\theta\sigma\bar{\theta}$, come segue:

$$W_\alpha^{WZ}(y, \theta) = -i\lambda_\alpha(y) + D(y)\theta_\alpha - i(\sigma^{\mu\nu}\theta)_\alpha F_{\mu\nu}(y) - (\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\lambda}(y))_\alpha\theta^2 \quad (2.7)$$

dove $\sigma^{\mu\nu} = \frac{1}{4}(\sigma^\mu\bar{\sigma}^\nu - \sigma^\nu\bar{\sigma}^\mu)$ e $F_{\mu\nu} = \partial_\mu V_\nu - \partial_\nu V_\mu$ è la field-strength abeliana associata a V_μ . Per questo il supercampo W viene detto *field-strength supersimmetrica*. Sostituendo questa forma per W vediamo che l'azione SUSY invariante è scritta in termini delle componenti come:

$$S = \int d^4x \left[-\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + i\bar{\lambda}(x)\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\lambda(x) + \frac{1}{2}D^2(x) \right]$$

Dunque D è un campo ausiliario non dinamico fissato a 0 dalle equazioni del moto e i gradi di libertà della teoria sono un bosone di gauge abeliano e il corrispondente partner supersimmetrico λ_α , detto *gaugino*.

Osserviamo che il gauge fixing di Wess-Zumino non è invariante sotto trasformazioni supersimmetriche: applicando l'operatore $\delta_{\epsilon, \bar{\epsilon}} = \epsilon Q + \bar{\epsilon}\bar{Q}$ al supercampo esso non sarà più scrivibile nella forma (2.7). È però sempre possibile comporre la trasformazione supersimmetrica con un opportuna trasformazione di gauge per tornare alla gauge di Wess-Zumino. Fissati i parametri $\epsilon, \bar{\epsilon}$ il corrispondente supercampo chirale della trasformazione di gauge è dato da:

$$\Lambda_{\bar{\epsilon}}(y, \theta) = -\theta\sigma^\mu\bar{\epsilon}V_\mu(y) - i\bar{\epsilon}\bar{\lambda}(y)\theta^2$$

In definitiva possiamo definire una trasformazione supersimmetrica “gauge-modificata” del supercampo che preserva la gauge di Wess-Zumino mediante:

$$\hat{\delta}_{\epsilon, \bar{\epsilon}}V^{WZ} = \delta_{\epsilon, \bar{\epsilon}}V^{WZ} + \Lambda_{\bar{\epsilon}} + \Lambda_\epsilon^*$$

che induce le seguenti trasformazioni sulle componenti:

$$\begin{aligned} \hat{\delta}_{\epsilon, \bar{\epsilon}}V^\mu &= i\epsilon\sigma^\mu\bar{\lambda} + i\bar{\epsilon}\bar{\sigma}^\mu\lambda \\ \hat{\delta}_{\epsilon, \bar{\epsilon}}\lambda_\alpha &= (\sigma^{\mu\nu}\epsilon)_\alpha F_{\mu\nu} + i\epsilon_\alpha D \\ \hat{\delta}_{\epsilon, \bar{\epsilon}}D &= -\epsilon\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\lambda} + \bar{\epsilon}\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\lambda \end{aligned}$$

Queste trasformazioni forniscono una rappresentazione off-shell dell'algebra supersimmetrica solo a meno della residua invarianza di gauge: $V_\mu \rightarrow V_\mu + \partial_\mu f$. Il corrispondente multipletto (V_μ, λ, D) è detto *multipletto vettoriale*.

2.2.2 Super-Yang-Mills

Vogliamo costruire una teoria supersimmetrica invariante sotto trasformazioni locali a valori in un gruppo non abeliano \mathcal{G} . Scrivendo un elemento del gruppo in termini

dei generatori T^a come $e^{-\lambda^a T^a}$, il modo corretto per promuovere la trasformazione a una trasformazione locale in una teoria supersimmetrica è quello di considerare i parametri λ^a come dei supercampi chirali:

$$\lambda^a \rightarrow \Lambda^a(x, \theta, \bar{\theta}), \quad \bar{D}_{\dot{\alpha}} \Lambda^a = 0, \quad \Lambda \equiv \Lambda^a T^a$$

Il supercampo reale V viene promosso a campo nell'algebra di Lie del gruppo: $V \equiv V^a T^a$, dove i V^a sono ordinari supercampi reali, e l'azione delle trasformazioni locali su di esso è data da:

$$e^V \rightarrow e^{\Lambda^\dagger} e^V e^\Lambda \quad (2.8)$$

Usando la formula di Baker-Campbell-Hausdorff si trova che la trasformazione linearizzata è :

$$V \rightarrow V + \Lambda + \Lambda^\dagger + \frac{1}{2}[V, \Lambda - \Lambda^\dagger]$$

Notiamo che questa trasformazione generalizza quella del caso abeliano. Generalizziamo anche la definizione delle field strength supersimmetrica:

$$W_\alpha(x, \theta, \bar{\theta}) \equiv -\frac{1}{4} \bar{D}^2 (e^{-V} D_\alpha e^{2V}) = W_\alpha^a T^a$$

Il supercampo così definito è ancora un supercampo chirale. Inoltre sotto trasformazioni di gauge:

$$\begin{aligned} W_\alpha &\rightarrow -\frac{1}{4} \bar{D}^2 \left(e^{-\Lambda} e^{-V} e^{-\Lambda^\dagger} D_\alpha \left(e^{\Lambda^\dagger} e^V e^\Lambda \right) \right) \\ &= e^{-\Lambda} W_\alpha e^\Lambda - \frac{1}{4} e^{-\Lambda} \bar{D} \{ \bar{D}, D_\alpha \} e^\Lambda \\ &= e^{-\Lambda} W_\alpha e^\Lambda \end{aligned}$$

Pertanto:

$$S_{SYM} = \int d^4 x 2\text{Tr} \left[\int d^2 \theta \frac{1}{4} \text{Tr}(W^2) + \int d^2 \bar{\theta} \frac{1}{4} \text{Tr}(\bar{W}^2) \right]$$

è un azione gauge e SUSY invariante. Nota che stiamo considerando la normalizzazione: $\text{Tr}(T^a T^b) = \frac{1}{2} \delta^{ab}$ per i generatori.

Come nel paragrafo precedente scegliamo di fissare la gauge di Wess-Zumino in cui le componenti del supercampo V sono semplicemente:

$$V^{WZ}(x, \theta, \bar{\theta}) = \theta \sigma^\mu \bar{\theta} V_\mu(x) + i \bar{\theta} \bar{\lambda}(x) \theta^2 - i \theta \lambda(x) \bar{\theta}^2 + \frac{1}{2} D(x) \theta^2 \bar{\theta}^2$$

dove tutti i campi componenti sono a valori nell'algebra di Lie: $V_\mu \equiv V_\mu^a T^a$, $\lambda \equiv \lambda^a T^a$, $D \equiv D^a T^a$. Nel caso non-abeliano l'invarianza residua dopo il gauge-fixing di Wess-Zumino è data dalle trasformazioni in cui il supercampo Λ è della forma $\Lambda(x, \theta, \bar{\theta}) = \frac{i}{2} f(x) + \frac{1}{2} \theta \sigma^\mu \bar{\theta} \partial_\mu f(x) - \frac{i}{8} \square f(x) \theta^2 \bar{\theta}^2$, ove $f \equiv f^a T^a$ è arbitraria. Sulle

componenti questa trasformazione si scrive, in forma linearizzata, come:

$$\begin{cases} V_\mu & \rightarrow V_\mu + \partial_\mu f + i[V_\mu, f] \\ \lambda_\alpha & \rightarrow i[\lambda_\alpha, f] \\ D & \rightarrow i[D, f] \end{cases}$$

Notiamo che λ e D sono campi nella rappresentazione aggiunta e V_μ si comporta come un bosone di gauge. Vale che $(V^{WZ})^3 = 0$, e così pure tutte le potenze più alte si annullano in questa gauge, pertanto non è difficile esprimere la field-strength in termini delle componenti. Per ottenere una normalizzazione più usuale delle componenti di W_α è opportuno effettuare il riscalamento $V \rightarrow 2V$ e conseguentemente dividere l'azione per un fattore 4. Si ottiene il seguente risultato:

$$W_\alpha^{WZ}(y, \theta) = -i\lambda_\alpha(x) + D(y)\theta_\alpha - i(\sigma^{\mu\nu}\theta)_\alpha G_{\mu\nu}(y) - 2(\sigma^\mu \mathcal{D}_\mu \bar{\lambda}(y))_\alpha \theta^2$$

dove:

$$G_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu V_\nu - \partial_\nu V_\mu + i[V_\mu, V_\nu], \quad \mathcal{D}_\mu \equiv \partial_\mu + i[V_\mu, \cdot]$$

sono le ordinarie field-strength e derivata covariante (per campi nella rappresentazione aggiunta) della teoria di Yang-Mills con gruppo \mathcal{G} .

È conveniente organizzare la costante di accoppiamento g e l'angolo theta θ_{YM} della teoria in un unico parametro complesso $\tau \equiv \frac{\theta_{YM}}{2\pi} + i\frac{4\pi}{g^2}$ che inseriamo a moltiplicare il termine cinetico. In questo modo l'azione scritta in componenti ha la seguente forma:

$$\begin{aligned} S_{SYM} &= \int d^4x \, 2\text{Tr} \left[\frac{\tau}{4\pi i} \int d^2\theta \frac{1}{4} \text{Tr}(W^2) - \frac{\tau^*}{4\pi i} \int d^2\bar{\theta} \frac{1}{4} \text{Tr}(\bar{W}^2) \right] \\ &= \int d^4x \, 2\text{Tr} \left[-\frac{1}{4g^2} G^{\mu\nu} G_{\mu\nu} + \frac{i}{g^2} \lambda \sigma^\mu \mathcal{D}_\mu \bar{\lambda} + \frac{1}{2g^2} D^2 + \frac{\theta_{YM}}{32\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} G_{\mu\nu} G_{\rho\sigma} \right] \end{aligned}$$

2.2.3 Accoppiamento con la materia

Nella teoria vista precedentemente l'unico campo di materia dinamico è il gaugino, il partner supersimmetrico λ del bosone di gauge, nella rappresentazione aggiunta del gruppo di gauge. Aggiungendo altri multipletti è possibile introdurre anche accoppiamenti con campi di materia in rappresentazioni arbitrarie del gruppo di gauge. Consideriamo un certo numero di supercampi chirali Φ_i . Come abbiamo visto il loro termine cinetico canonico è dato da:

$$\mathcal{K}(\Phi, \Phi^*) = \sum_i \Phi_i^* \Phi_i \equiv \Phi^\dagger \Phi$$

dove abbiamo organizzato i supercampi in un vettore Φ . Questo termine è invariante sotto una generica rappresentazione unitaria R del gruppo \mathcal{G} :

$$\begin{aligned} \mathcal{G} \ni g : \Phi &\rightarrow \Phi' = R(g)\Phi, & R^\dagger &= R^{-1} \\ g = e^{-\lambda^a T^a} &\Rightarrow R(g) = e^{-\lambda^a T_R^a}, & (T_R^a)^\dagger &= -T_R^a \end{aligned}$$

Promuoviamo questa simmetria a una simmetria locale rendendo i parametri reali λ^a della trasformazioni dei supercampi chirali:

$$\lambda^a \rightarrow \Lambda^a(x, \theta, \bar{\theta}), \quad \bar{D}_{\dot{\alpha}} \Lambda^a = 0, \quad \Lambda_R \equiv \Lambda^a T_R^a$$

Notiamo che $\Lambda_R^\dagger \neq -\Lambda_R$ e pertanto il termine cinetico deve essere modificato per avere invarianza sotto trasformazioni locali. Ricordando la (2.8) si vede subito che:

$$\tilde{\mathcal{K}}(\Phi, \Phi^\dagger, V) \equiv \Phi^\dagger e^{V_R} \Phi, \quad V_R \equiv V^a T_R^a$$

è invariante sotto trasformazioni locali. All'ordine quadratico $\tilde{\mathcal{K}}$ riproduce l'ordinario termine cinetico dei supercampi chirali e contiene in più le interazioni tra il multipletto reale e quelli chirali. Come nelle ordinarie teorie di gauge, la prescrizione di invarianza sotto trasformazioni locali determina la forma degli accoppiamenti.

Nel caso in cui R sia una rappresentazione riducibile, può essere possibile costruire degli invarianti contraendo tra loro in modo opportuno le parti olomorfe dei supercampi chirali: ad esempio se avessimo $\Phi = (Q, \tilde{Q})$ con Q nella rappresentazione fondamentale e \tilde{Q} nell'antifondamentale di $SU(N)$, $Q^T \tilde{Q}$ sarebbe una funzione olomorfa dei supercampi chirali invariante di gauge. Pertanto in generale possiamo anche ammettere una self-interazione della materia data da un superpotenziale olomorfo $\mathcal{W}(\Phi)$ tale che $\mathcal{W}(R(g)\Phi) = \mathcal{W}(\Phi)$.

Fissando la gauge di Wess-Zumino e passando alla normalizzazione più usuale $V \rightarrow 2V$ l'azione per la parte di materia si scrive come:

$$\begin{aligned} S_M &= \int d^4 x \left[\int d^2 \theta d^2 \bar{\theta} \Phi^\dagger e^{2V} \Phi + \left(\int d^2 \theta \mathcal{W}(\Phi) + \int d^2 \bar{\theta} \mathcal{W}^*(\Phi^\dagger) \right) \right] \\ &= \int d^4 x \left[(\mathcal{D}_{R\mu} \phi)^\dagger \mathcal{D}_R^\mu \phi + i \bar{\psi} \bar{\sigma}^\mu \mathcal{D}_{R\mu} \psi + F^\dagger F + \phi^\dagger D_R \phi \right. \\ &\quad \left. + \left(\sqrt{2} i \phi^\dagger \lambda_R \psi + \mathcal{W}'(\phi) F - \frac{1}{2} \psi \mathcal{W}''(\phi) \psi + c.c. \right) \right] \end{aligned}$$

Notiamo che l'interazione con il multipletto reale, oltre a fornire le corrette derivate covarianti nella rappresentazione R , $\mathcal{D}_R^\mu = \partial^\mu + i V_R^\mu$, dà anche delle interazioni di Yukawa tra i campi di materia e il gaugino e l'interazione tra gli scalari ϕ e D_R .

L'azione completa SUSY e gauge invariante sarà data da $S = S_{SYM} + S_M$, che fornisce la più generale teoria di gauge con $\mathcal{N} = 1$ supersimmetria. Integrando via i

campi non dinamici D^a e F , ovvero sostituendoli con i valori dati dalle loro equazioni del moto algebriche:

$$\begin{cases} F = -\mathcal{W}'(\phi), & F^\dagger = -\mathcal{W}'^\dagger(\phi^\dagger) \\ D^a = -g\phi^\dagger T_R^a \phi \end{cases}$$

troviamo il seguente potenziale per i campi scalari:

$$V(\phi, \phi^*) = |\mathcal{W}'(\phi)|^2 + \frac{g^2}{2} \sum_a \phi^\dagger T_R^a \phi \geq 0$$

Pertanto delle configurazioni classiche dei campi scalari che sicuramente minimizzano l'energia sono quelle per cui:

$$\begin{cases} F = -\mathcal{W}'(\phi) = 0 \\ D^a = -g\phi^\dagger T_R^a \phi = 0 \end{cases} \quad (2.9)$$

I due funzionali che sono stati messi a zero vengono detti *termini F* e *termini D*. Le configurazioni che verificano (2.9) sono anche gli unici punti stazionari del potenziale ad essere invarianti sotto supersimmetria.

Imponendo la condizione che il potenziale si annulli troviamo un continuo di soluzioni parametrizzate dal valore (costante) dei campi scalari nella configurazione di minimo. Una parte di questa degenerazione continua è una conseguenza inevitabile dell'invarianza di gauge: essendo la lagrangiana simmetrica, se agiamo su una soluzione con il gruppo di gauge abbiamo un'orbita di soluzioni gauge-equivalenti. È possibile però che rimanga una degenerazione continua nello spazio delle soluzioni anche considerando solo le configurazioni gauge-inequivalenti (*i.e.* quozientando rispetto all'azione del gruppo di gauge). Tale famiglia di soluzioni è detta *spazio dei moduli* della teoria. Dal punto di vista della teoria quantistica i punti distinti dello spazio dei moduli corrispondono a vuoti fisicamente inequivalenti. Chiaramente le correzioni quantistiche al potenziale classico in generale modificheranno la struttura delle soluzioni e potranno anche rimuovere un'eventuale degenerazione esistente a livello classico: è pertanto necessario distinguere tra lo spazio dei moduli classico, che leggiamo direttamente dalla forma del potenziale al tree-level, e quello quantistico, che come vedremo spesso può essere indagato sfruttando metodi non perturbativi.

2.3 Spazio dei moduli classico in SQCD

Una teoria di particolare interesse è quella con gruppo di gauge $SU(N_c)$ e la materia data da N_f coppie (Q^i, \tilde{Q}_i) , $i = 1, \dots, N_f$ di supercampi chirali rispettivamente nella rappresentazione fondamentale e antifondamentale. Questa teoria è infatti la versione supersimmetrica della QCD (SQCD) con N_c colori e N_f flavor di quark. Dato

che i quark sono fermioni di Dirac, per ogni flavor abbiamo bisogno di due supercampi chirali che forniscano separatamente la parte left e la parte right (coniugata). La teoria supersimmetrica contiene in più i partner supersimmetrici dei gluoni, i *gluini* λ^a , fermioni di Weyl nella rappresentazione aggiunta del gruppo di gauge, e i partner dei quark, gli *squark* $(\phi^i, \tilde{\phi}_i)$, scalari complessi nella rappresentazione fondamentale/antifondamentale.

Possiamo dare una massa di Dirac ai quark mediante il superpotenziale gauge invariante $\mathcal{W} = \sum_i m_i \tilde{Q}_i Q^i$, che produce anche il termine di massa per gli squark $|m_i|^2 |\phi^i|^2 + |m_i|^2 |\tilde{\phi}_i|^2$. Se i quark sono massless, le simmetrie globali di questa teoria sono date dalla simmetria di flavor $U(N_f)_L \times U(N_f)_R$ e da una simmetria $U(1)_X$ che non commuta con la supersimmetria ed è data da:

$$U(1)_X \begin{cases} (\psi^i, \tilde{\psi}_i) & \rightarrow (e^{i\alpha} \psi^i, e^{i\alpha} \tilde{\psi}_i) \\ (\phi^i, \tilde{\phi}_i) & \rightarrow (\phi^i, \tilde{\phi}_i) \\ \lambda & \rightarrow e^{-i\alpha} \lambda \end{cases}$$

A livello quantistico questa simmetria è anomala, come pure il sottogruppo $U(1)_A$ della simmetria di flavor. È però possibile individuare una combinazione non anomala delle due simmetrie che chiamiamo $U(1)_R$ ed è data da:

$$U(1)_R \begin{cases} (\psi^i, \tilde{\psi}_i) & \rightarrow (e^{i\frac{N_c}{N_f}\alpha} \psi^i, e^{i\frac{N_c}{N_f}\alpha} \tilde{\psi}_i) \\ (\phi^i, \tilde{\phi}_i) & \rightarrow (e^{i\frac{N_c-N_f}{N_f}\alpha} \phi^i, e^{i\frac{N_c-N_f}{N_f}\alpha} \tilde{\phi}_i) \\ \lambda & \rightarrow e^{-i\alpha} \lambda \end{cases}$$

Dunque la simmetria globale della teoria a livello quantistico è data da:

$SU(N_f)_L \times SU(N_f)_R \times U(1)_V \times U(1)_R$. Nei vari punti dello spazio dei moduli si avranno differenti pattern di rottura della simmetria globale che sono facilmente determinabili dalla forma dei condensati.

Dato che la teoria è massless e non abbiamo alcun superpotenziale, lo spazio dei moduli classico è definito solo dalla condizione di annullamento dei termini D a meno di trasformazioni di gauge. Per scrivere questa condizione è conveniente organizzare i campi degli squark in matrici $(\phi, \tilde{\phi})$ $N_c \times N_f$ e $N_f \times N_c$ rispettivamente. In questo modo la condizione si scrive:

$$0 = D^a = \text{Tr} \left[(\phi \phi^\dagger - \tilde{\phi}^\dagger \tilde{\phi}) T^a \right], \quad a = 1, \dots, N_c^2 - 1$$

Dato che i generatori T^a di $SU(N_c)$ sono una base completa di matrici a traccia nulla, abbiamo che:

$$\phi \phi^\dagger - \tilde{\phi}^\dagger \tilde{\phi} = \rho \mathbf{1}_{N_c \times N_c}, \quad \rho \in \mathbb{C} \quad (2.10)$$

Le matrici $\phi\phi^\dagger$ e $\tilde{\phi}^\dagger\tilde{\phi}$ sono invarianti sotto trasformazioni del gruppo di flavor mentre sotto trasformazioni di gauge: $\phi\phi^\dagger, \tilde{\phi}^\dagger\tilde{\phi} \rightarrow U\phi\phi^\dagger U^\dagger, U\tilde{\phi}^\dagger\tilde{\phi}U^\dagger$. Pertanto a meno di trasformazioni di gauge possiamo diagonalizzare una delle due matrici, e in seguito alla relazione (2.10) anche l'altra sarà diagonale.

Caso $N_f < N_c$: Dato che il rango delle due matrici è $\leq N_f$ e che sono entrambe semidefinite positive, in questo caso deve essere $\rho = 0$, e pertanto $\phi\phi^\dagger = \tilde{\phi}^\dagger\tilde{\phi}$. Pertanto fissato il rango $r \leq N_f$, a meno di trasformazioni del gruppo di flavor $SU(N_f)_L \times SU(N_f)_R$, possiamo prendere:

$$\phi = \left(\begin{array}{ccc|c} a_1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & a_r & \\ \hline & & & 0 \\ 0 & & & 0 \end{array} \right), \quad \tilde{\phi} = \left(\begin{array}{ccc|c} \tilde{a}_1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & \tilde{a}_r & \\ \hline & & & 0 \\ 0 & & & 0 \end{array} \right)$$

con $|a_i|^2 = |\tilde{a}_i|^2$. Usando $SU(N_f)_L \times SU(N_f)_R$ posso assorbire $r-1$ fasi dai parametri e mi rimangono solo due fasi overall che posso mettere a zero con $U(1)_V \times U(1)_R$. Pertanto a meno di simmetrie globali $a_i = \tilde{a}_i \equiv v_i \in \mathbb{R}$.

Fissato r i VEV degli squark rompono la simmetria di gauge: $SU(N_c) \rightarrow SU(N_c - r)$. In un punto generico la simmetria residua sarà $SU(N_c - N_f)$ e avremo:

$$N_c^2 - 1 - ((N_c - N_f)^2 - 1) = 2N_c N_f - N_f^2$$

Pertanto degli originali $2N_c N_f$ multipletti chirali, sono N_f^2 rimangono senza massa mentre gli altri vengono “assorbiti” dai multipletti vettoriali per formare dei multipletti vettoriali massivi, il cosiddetto *super* meccanismo di Higgs.

Notiamo che gli N_f^2 multipletti chirali leggeri sono formati dai bosoni di Goldstone associati al pattern di rottura della simmetria di flavor $U(N_f) \times U(N_f) \rightarrow U(N_f)$ insieme ai rispettivi partner supersimmetrici.

Caso $N_f \geq N_c$: In questo caso ρ non è necessariamente nullo. Con argomenti analoghi al caso precedente posso ridurmi alla seguente forma per le matrici, a meno di simmetrie globali:

$$\phi = \left(\begin{array}{ccc|c} v_1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & v_{N_c} & \\ \hline & & & 0 \end{array} \right), \quad \tilde{\phi} = \left(\begin{array}{ccc|c} \tilde{v}_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \tilde{v}_{N_c} & \\ \hline & & & 0 \end{array} \right)$$

con $v_i^2 = \tilde{v}_i^2 + \rho$.

In questo caso per valori generici di ρ la simmetria di gauge è rotta completamente e abbiamo $2N_c N_f - (N_c^2 - 1)$ multipletti chirali che rimangono massless.

Parametrizzazione gauge-invariante dello spazio dei moduli: È conveniente parametrizzare lo spazio dei moduli mediante gradi di libertà che siano evidentemente invarianti sotto trasformazioni di gauge. Il modo di costruire questi invarianti è contrarre in tutti i modi possibili gli indici di colore degli squark.

- $N_f < N_c$: L'unico invariante che si può costruire è il *mesone*:

$$M_j^i = \tilde{\phi}_j^\alpha \phi_\alpha^i$$

Il mesone è una matrice $N_f \times N_f$ negli indici di flavor e raggruppa gli N_f^2 multipletti chirali leggeri.

- $N_f \geq N_c$: In questo caso oltre al mesone possiamo costruire i *barioni*:

$$B^{i_{N_c+1} \dots i_{N_f}} = \frac{1}{N_c!} \epsilon_{i_1 \dots i_{N_f}} \epsilon^{\alpha_1 \dots \alpha_{N_c}} \phi_{\alpha_1}^{i_1} \dots \phi_{\alpha_{N_c}}^{i_{N_c}}$$

$$\tilde{B}_{j_{N_c+1} \dots j_{N_f}} = \frac{1}{N_c!} \epsilon^{j_1 \dots j_{N_f}} \epsilon_{\beta_1 \dots \beta_{N_c}} \tilde{\phi}_{j_1}^{\beta_1} \dots \tilde{\phi}_{j_{N_c}}^{\beta_{N_c}}$$

che sono tensori antisimmetrici di ordine $N_f - N_c$ negli indici di flavor. In questo caso barioni e mesoni parametrizzano gli $2N_c N_f - (N_c^2 - 1)$ gradi di libertà leggeri.

I gradi di libertà dei mesoni e dei barioni non sono completamente indipendenti perchè sono entrambi costruiti a partire dai VEV degli squark, sarà dunque necessario imporre dei vincoli aggiuntivi che li leghino. Ad esempio per $N_f = N_c$ abbiamo come unico vincolo:

$$\det M - B\tilde{B} = 0$$

mentre per $N_f = N_c + 1$ abbiamo i tre vincoli:

$$\det M (M^{-1})_i^j - B_i \tilde{B}^j = 0$$

$$B_i M_j^i = 0$$

$$\tilde{B}^j M_j^i = 0$$

A livello quantistico queste relazioni, intese come relazioni tra i condensati, possono ricevere correzioni.

In un punto generico dello spazio dei moduli classico la simmetria di gauge è rotta a $SU(N_c - N_f)$ ed è rotta completamente per $N_f \geq N_c + 1$. Nei punti in cui $B = \tilde{B} = 0$ e M ha rango minore di $N_c - 1$ allora la simmetria di gauge residua si

allarga e lo spazio dei moduli classico ha delle singolarità. Analogamente il pattern di rottura della simmetria di flavor in un punto generico dello spazio dei moduli si ottiene analizzando la forma dei parametri gauge invarianti M , B e \tilde{B} .

Notiamo che può essere opportuno pensare a barioni e mesoni come componenti di ordine più basso di supercampi chirali costruiti a partire da (Q, \tilde{Q}) :

$$\begin{aligned}
 M_j^i &= \tilde{Q}_j^\alpha Q_\alpha^i \\
 B^{i_{N_c+1} \dots i_{N_f}} &= \frac{1}{N_c!} \epsilon_{i_1 \dots i_{N_f}} \epsilon^{\alpha_1 \dots \alpha_{N_c}} Q_{\alpha_1}^{i_1} \dots Q_{\alpha_{N_c}}^{i_{N_c}} \\
 \tilde{B}_{j_{N_c+1} \dots j_{N_f}} &= \frac{1}{N_c!} \epsilon_{j_1 \dots j_{N_f}} \epsilon_{\beta_1 \dots \beta_{N_c}} \tilde{Q}_{j_1}^{\beta_1} \dots \tilde{Q}_{j_{N_c}}^{\beta_{N_c}}
 \end{aligned}$$

Capitolo 3

Risultati non perturbativi in SQCD $\mathcal{N} = 1$

Le teorie di gauge con supersimmetria permettono di calcolare esplicitamente i condensati gauge-invarianti e di studiare la struttura dei vuoti in modo non perturbativo, fornendo informazioni sulle fasi e sulla rottura delle simmetrie globali in regime quantistico. Queste stesse informazioni nelle teorie ordinarie come la QCD si hanno solo numericamente.

In questo capitolo mostreremo le caratteristiche peculiari delle teorie supersimmetriche con $\mathcal{N} = 1$ supersimmetria che sono alla base di questi risultati esatti: discuteremo le identità di Ward fornite dalla supersimmetria e l'anomalia di Konishi ([7], [8]), poi mostreremo in che modo si possano sfruttare l'olomorfia e le simmetrie non anomale per studiare lo spazio dei moduli quantistico della SQCD ([9]). I metodi che descriviamo saranno alla base dell'analisi semiclassica che confronteremo con i risultati $\mathcal{N} = 2$.

3.1 Identità di Ward supersimmetriche

Sui campi componenti di un generico multipletto (χ, Ψ, F) l'azione delle supercariche è data da:

$$\begin{aligned} [\bar{Q}_{\dot{\alpha}}, \chi] &= 0 & \{\bar{Q}_{\dot{\alpha}}, \Psi_{\alpha}\} &= \sqrt{2}\bar{\sigma}_{\dot{\alpha}\alpha}^{\mu}\partial_{\mu}\chi \\ [Q_{\alpha}, F] &= 0 & \{Q_{\alpha}, \Psi_{\beta}\} &= \sqrt{2}\epsilon_{\alpha\beta}F \end{aligned}$$

Vogliamo determinare i vincoli imposti dalla supersimmetria su una funzione di Green della forma:

$$G_{i_1 \dots i_n}(x_1, \dots, x_n) = \langle \chi_{i_1}(x_1) \dots \chi_{i_n}(x_n) \rangle \equiv \langle 0|T(\chi_{i_1}(x_1) \dots \chi_{i_n}(x_n))|0\rangle$$

ove χ_i sono componenti scalari di supercampi chirali, non necessariamente elementari. Assumeremo che la supersimmetria non sia rotta spontaneamente e che quindi le supercariche annichilino il vuoto: $Q|0\rangle = \bar{Q}|0\rangle = 0$.

Dipendenza dallo spazio-tempo e fattorizzazione: Notiamo che $[\bar{Q}, \chi_i] = 0$ e $\{\bar{Q}_{\dot{\alpha}}, \Psi_{i\alpha}\} = \sqrt{2}\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^{\mu}\partial_{\mu}\chi_i$. Pertanto:

$$0 = \langle \chi_{i_1}(x_1) \dots \{\bar{Q}_{\dot{\alpha}}, \Psi_{i\alpha}(x_i)\} \dots \chi_{i_n}(x_n) \rangle = \sqrt{2}\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^{\mu} \frac{\partial}{\partial x_i^{\mu}} G_{i_1 \dots i_n}(x_1, \dots, x_n)$$

Quando la derivata agisce sulle funzioni θ della definizione del T-ordinamento si generano dei commutatori a tempi uguali che sono nulli. In definitiva abbiamo ottenuto che G è indipendente dai punti dello spazio-tempo.

Questo ci permette di derivare un'importante proprietà di fattorizzazione delle funzioni di Green. Infatti per la cluster property se si passa al limite in cui punti x_1, \dots, x_n sono a distanza space-like infinita, allora la funzione di Green tende al prodotto delle funzioni di Green dei singoli operatori locali. D'altra parte per la proprietà appena dimostrata questo limite è banale perchè la funzione di Green non ha alcuna dipendenza dai punti, e abbiamo ottenuto che:

$$\langle \chi_{i_1}(x_1) \dots \chi_{i_n}(x_n) \rangle = \langle \chi_{i_1} \rangle \dots \langle \chi_{i_n} \rangle \quad (3.1)$$

Questa proprietà è fondamentale per molte delle manipolazioni algebriche che usereemo nel seguito, perchè permette di calcolare VEV di funzioni razionali di supercampi chirali (o meglio delle loro componenti più basse) semplicemente calcolando il valore della funzione nei VEV dei singoli supercampi.

Dipendenza dai parametri: Una generica azione di interazione supersimmetrica sarà della forma $\int d^4x (\alpha F + \alpha^* F^*)$, ove F è la componente θ^2 di un supercampo chirale e α un parametro complesso. Abbiamo che:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \alpha^*} G_{i_1 \dots i_n} &= \langle \chi_{i_1}(x_1) \dots \chi_{i_n}(x_n) \int d^4x F^* \rangle \\ &= \langle \chi_{i_1}(x_1) \dots \chi_{i_n}(x_n) \int d^4x \frac{1}{2\sqrt{2}} \{\bar{Q}_{\dot{\alpha}}, \bar{\Psi}^{\dot{\alpha}}\} \rangle = 0 \end{aligned}$$

Dunque la funzione di Green è una funzione olomorfa del coupling. Analogamente se avessimo considerato una funzione di Green delle componenti scalari di supercampi antichirali, avremmo trovato che è antiolomorfa.

Funzioni di Green in SQCD: Applichiamo questi risultati nel caso della SQCD con N_c colori e N_f flavor di quark con masse m_i , $i = 1, \dots, N_f$. Consideriamo i

seguenti campi chirali gauge invarianti:

$$\begin{cases} M_j^i = \tilde{Q}_j^\alpha Q_\alpha^i = \tilde{\phi}_j^\alpha \phi_\alpha^i + \dots \\ \mathcal{S} = \frac{1}{32\pi^2} \text{Tr}(W^2) = \frac{1}{32\pi^2} \text{Tr}(\lambda^2) + \dots \end{cases}$$

In termini delle loro componenti scalari, che indicheremo per brevità con le stesse lettere, costruiamo la generica funzione di Green:

$$G^{(p,q)}_{j_1 \dots j_p}{}^{i_1 \dots i_p} = \langle M_{j_1}^{i_1}(x_1) \dots M_{j_p}^{i_p}(x_p) \mathcal{S}(x_{p+1}) \dots \mathcal{S}(x_{p+q}) \rangle$$

Per quanto abbiamo visto $G^{(p,q)}$ non dipende dai punti dello spazio tempo x_1, \dots, x_{p+q} e dipende in maniera olomorfa dai parametri complessi m_i , $i = 1, \dots, N_f$. In particolare ponendo $m_i = |m_i|e^{i\alpha_i}$ abbiamo:

$$m_i \frac{\partial}{\partial m_i} G^{(p,q)} = \left(m_i \frac{\partial}{\partial m_i} - m_i^* \frac{\partial}{\partial m_i^*} \right) G^{(p,q)} = -i \frac{\partial}{\partial \alpha_i} G^{(p,q)}$$

Per sfruttare la relazione ottenuta, definiamo la seguente simmetria $U(1)_i$ non anomala rotta soltanto dalla massa m_i :

$$\begin{cases} (\psi^i, \tilde{\psi}_i) \rightarrow e^{i\frac{\alpha_i}{2}} (\psi^i, \tilde{\psi}_i) \\ (\phi^i, \tilde{\phi}_i) \rightarrow e^{i\frac{\alpha_i}{2}(1-\frac{1}{N_c})} (\phi^i, \tilde{\phi}_i) \\ (\psi^j, \tilde{\psi}_j) \rightarrow (\psi^j, \tilde{\psi}_j), \quad j \neq i \\ (\phi^j, \tilde{\phi}_j) \rightarrow e^{-i\frac{\alpha_i}{2N_c}} (\phi^j, \tilde{\phi}_j), \quad j \neq i \\ \lambda \rightarrow e^{-i\frac{\alpha_i}{2N_c}} \lambda \end{cases}$$

Sotto questa trasformazione l'azione S della teoria rimane invariata tranne che per il termine di massa del flavor i dei quark che trasforma secondo:

$$\begin{aligned} (m_i \tilde{\psi}_i \psi^i + c.c.) &\rightarrow (e^{i\alpha_i} m_i \tilde{\psi}_i \psi^i + c.c.) \\ \Rightarrow S &\rightarrow S' \simeq S + \alpha_i \delta S + \dots, \quad \delta S = (i m_i \tilde{\psi}_i \psi^i + c.c.) \end{aligned}$$

Pertanto la derivata rispetto ad α_i della funzione di Green può essere interpretata come la derivata nel parametro di questa trasformazione e possono essere usate le corrispondenti identità di Ward:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \alpha_i} G^{(p,q)}_{j_1 \dots j_p}{}^{i_1 \dots i_p} &= \langle (i\delta S) M_{j_1}^{i_1} \dots M_{j_p}^{i_p} \mathcal{S} \dots \mathcal{S} \rangle \\ &= -\langle (\delta M_{j_1}^{i_1}) \dots M_{j_p}^{i_p} \mathcal{S} \dots \mathcal{S} \rangle \\ &\quad + \dots + \langle M_{j_1}^{i_1} \dots M_{j_p}^{i_p} \mathcal{S} \dots (\delta \mathcal{S}) \rangle \\ &= -i Q_i G^{(p,q)}_{j_1 \dots j_p}{}^{i_1 \dots i_p} \end{aligned}$$

ove Q_i è la somma di tutte le cariche $U(1)_i$ dei campi che compaiono in $G^{(p,q)}$. Le equazioni differenziali risultanti $m_i \frac{\partial}{\partial m_i} G^{(p,q)} = -Q_i G^{(p,q)}$, $i = 1, \dots, N_f$ permettono di determinare completamente la dipendenza della funzione di Green dai parametri di massa:

$$\prod_{r=1}^p (m_{i_r} m_{j_r})^{\frac{1}{2}} G_{j_1 \dots j_p}^{(p,q)}{}_{i_1 \dots i_p} = C^{(p,q)}{}_{j_1 \dots j_p}{}_{i_1 \dots i_p} \prod_{i=1}^{N_f} m_i^{\frac{(p+q)}{N_c}}$$

ove $C^{(p,q)}$ è una costante che dipende dalla scala di rinormalizzazione e dalla costante di accoppiamento ma non dalle masse.

3.2 Anomalia di Konishi

In questo paragrafo discutiamo la regolarizzazione quantistica di alcuni operatori composti in SQCD e le relazioni esatte che ne derivano, nella forma di identità di Ward anomale. Trattiamo per definitezza il caso della SQCD con un flavor:

$$Q = \phi + \sqrt{2}\psi\theta + F\theta^2 + \dots, \quad \tilde{Q} = \tilde{\phi} + \sqrt{2}\tilde{\psi}\theta + \tilde{F}\theta^2 + \dots$$

con un termine di massa $m\tilde{Q}Q$, ma il risultato è valido per generiche teorie di gauge supersimmetriche anche con materia in rappresentazioni chirali del gruppo di gauge.

In particolare mostreremo che regolarizzando in maniera gauge e SUSY invariante il prodotto di operatori nello stesso punto, si ottiene la seguente relazione operatoriale:

$$\frac{1}{2\sqrt{2}} \{ \bar{Q}_{\dot{\alpha}}, \bar{\psi}^{\dot{\alpha}}(x)\phi(x) \} = -m\tilde{\phi}(x)\phi(x) + \frac{g^2}{16\pi^2} \text{Tr}[\lambda^2(x)] \quad (3.2)$$

dove la contrazione negli indici di colore dei campi $\tilde{\phi}$ e ϕ è sottintesa. Dunque come conseguenza della regolarizzazione dell'operatore $\bar{\psi}(x)\phi(x)$ abbiamo che la sua trasformazione supersimmetrica differisce dal risultato naive per un termine che contiene il campo del gaugino.

Si possono scegliere diverse procedure di regolarizzazione per ottenere il risultato, che è indipendente da tale scelta. Un modo per definire il prodotto di operatori preservando la gauge invarianza è il point-splitting: si calcolano gli operatori in punti con una certa separazione inserendo un operatore non locale per rendere il prodotto gauge invariante, successivamente si passa al limite di separazione nulla. Nelle ordinarie teorie di gauge l'operatore non locale è la linea di Wilson. È possibile mantenere una notazione manifestamente SUSY invariante definendo un'opportuna generalizzazione supersimmetrica:

$$\begin{aligned}
U(x_1, x_2, \theta, \bar{\theta}) &\equiv \text{P exp} \left(\frac{i}{4} \int_{x_2}^{x_1} dx^\mu \bar{D} e^{-V} \bar{\sigma}_\mu D e^V \right) \\
&= \text{P exp} \left(-\frac{i}{2} \int_{x_2}^{x_1} dx^\mu V_\mu \right) + \dots
\end{aligned}$$

Come abbiamo messo in evidenza la componente più bassa nelle variabili di Grassmann dell'operatore U nella gauge di Wess-Zumino è l'ordinaria linea di Wilson $W(x_1, x_2)$ espressa in termini della connessione V_μ . Sotto trasformazioni di gauge:

$$Q \longrightarrow e^{-\Lambda} Q, \quad \tilde{Q} \longrightarrow \tilde{Q} e^\Lambda, \quad e^V \longrightarrow e^{\Lambda^\dagger} e^V e^\Lambda$$

dove $\Lambda = \Lambda^a T^a$ e Λ^a sono supercampi chirali, pertanto:

$$\begin{aligned}
G_\mu \equiv \bar{D} e^{-V} \bar{\sigma}_\mu D e^V &\longrightarrow G'_\mu = e^{-\Lambda} (\bar{D} e^{-V} \bar{\sigma}_\mu D e^V) e^\Lambda + e^{-\Lambda} \bar{\sigma}_\mu^{\dot{\alpha}\alpha} \{ \bar{D}_{\dot{\alpha}}, D_\alpha \} e^\Lambda \\
&= e^{-\Lambda} G_\mu e^\Lambda - 4i e^{-\Lambda} \partial_\mu e^\Lambda
\end{aligned}$$

Osserviamo che U è univocamente identificato dall'equazione differenziale:

$$\frac{\partial}{\partial x_1^\mu} U(x_1, x_2, \theta, \bar{\theta}) = \frac{i}{4} G_\mu(x_1, \theta, \bar{\theta}) U(x_1, x_2, \theta, \bar{\theta}), \quad U(x, x, \theta, \bar{\theta}) = 1 \quad (3.3)$$

Pertanto otteniamo che la trasformazione di gauge di U è data da:

$$U(x_1, x_2, \theta, \bar{\theta}) \longrightarrow U'(x_1, x_2, \theta, \bar{\theta}) = e^{-\Lambda(x_1, \theta, \bar{\theta})} U(x_1, x_2, \theta, \bar{\theta}) e^{\Lambda(x_2, \theta, \bar{\theta})}$$

come si vede semplicemente dal fatto che U' risolve l'equazione (3.3) con la sostituzione $G_\mu \longrightarrow G'_\mu$.

Utilizzando U possiamo definire la regolarizzazione del prodotto direttamente a livello dei supercampi:

$$(\tilde{Q}Q)(x, \theta, \bar{\theta}) \equiv \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \tilde{Q}(x - \epsilon, \theta, \bar{\theta}) U(x - \epsilon, x + \epsilon, \theta, \bar{\theta}) Q(x + \epsilon, \theta, \bar{\theta})$$

La regola di trasformazione di U rende gauge invariante il prodotto in punti separati e ci assicura che il risultato del limite sia anch'esso gauge invariante. Prendiamo la componente più bassa del termine di massa regolarizzato, sempre fissando la gauge

di Wess Zumino:

$$\begin{aligned}
(m\tilde{\phi})(x) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[m\tilde{\phi}(x - \epsilon)W(x - \epsilon, x + \epsilon)\phi(x + \epsilon) \right] \\
&= - \lim_{\epsilon \rightarrow 0} [F^*(x - \epsilon)W(x - \epsilon, x + \epsilon)\phi(x + \epsilon)] \\
&= - \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\frac{1}{2\sqrt{2}} \{ \bar{Q}_{\dot{\alpha}}, \bar{\psi}^{\dot{\alpha}}(x - \epsilon) \} W(x - \epsilon, x + \epsilon)\phi(x + \epsilon) \right] \\
&= - \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\sqrt{2}} [\{ \bar{Q}_{\dot{\alpha}}, \bar{\psi}^{\dot{\alpha}}W\phi \} + \bar{\psi}_{\dot{\alpha}}[\bar{Q}^{\dot{\alpha}}, W]\phi]
\end{aligned}$$

dove abbiamo sfruttato che $[\bar{Q}, \phi] = 0$. Dato che:

$$\begin{aligned}
[\bar{Q}^{\dot{\alpha}}, W(x - \epsilon, x + \epsilon)] &= [\bar{Q}^{\dot{\alpha}}, 1 + i\epsilon^\mu V_\mu(x) + \mathcal{O}(\epsilon^2)] \\
&= -\epsilon^\mu (\bar{\sigma}_\mu \lambda(x))^{\dot{\alpha}} + \mathcal{O}(\epsilon^2)
\end{aligned}$$

otteniamo:

$$(m\tilde{\phi})(x) = - \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\sqrt{2}} [\{ \bar{Q}_{\dot{\alpha}}, \bar{\psi}^{\dot{\alpha}}W\phi \} - \epsilon^\mu \bar{\psi}(x - \epsilon) \bar{\sigma}_\mu \lambda(x) \phi(x + \epsilon)] \quad (3.4)$$

Consideriamo l'operatore definito dal limite:

$$O(x) \equiv \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon^\mu \bar{\psi}(x - \epsilon) \bar{\sigma}_\mu \lambda(x) \phi(x + \epsilon)$$

A livello classico $O(x)$ si annulla ma nella teoria quantistica possono esserci delle singolarità $\sim \frac{1}{\epsilon}$ nel prodotto degli operatori che danno luogo a un risultato non nullo. Per dimostrare che in effetti è così, è opportuno considerare la trasformata di Fourier dell'operatore:

$$\begin{aligned}
\tilde{O}(k) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int \frac{d^4 p_1}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 p_2}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 p_3}{(2\pi)^4} (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 + p_3 - k) \\
&\quad \frac{i}{2} \left[\frac{\partial}{\partial p_1^\mu} \bar{\psi}(p_1) \bar{\sigma}^\mu \lambda(p_2) \phi(p_3) - \bar{\psi}(p_1) \bar{\sigma}^\mu \lambda(p_2) \frac{\partial}{\partial p_3^\mu} \phi(p_3) \right] e^{-i(p_3 - p_1)\epsilon}
\end{aligned}$$

dove per semplicità abbiamo indicato le trasformate dei campi con la stessa lettera.

Se abbiamo un'inserzione di $\tilde{O}(k)$ in una generica funzione di Green, l'interazione di Yukawa $\sqrt{2}i\phi^\dagger \lambda \psi$ ci permette di costruire un diagramma a un loop che dà un contributo non nullo proporzionale all'inserzione dell'operatore λ^2 , come rappresentato graficamente in figura 3.1.

Per effettuare il calcolo esplicito notiamo che nel limite $\epsilon \rightarrow 0$ contribuiscono solo i termini dell'integrando che dominano nel limite $p_3 - p_1 \rightarrow \infty$. Pertanto si ottiene:

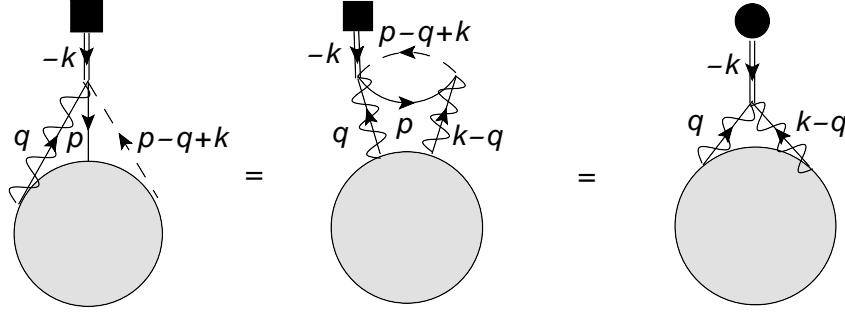


Figura 3.1: Il quadrato e il cerchio rappresentano rispettivamente l'inserzione degli operatori O e $\text{Tr}[\lambda^2]$, la linea continua corrisponde al quark, la linea tratteggiata allo squark e la linea continua/ondulata al gaugino.

$$\begin{aligned}
\langle \tilde{O}(k) \dots \rangle &= i(-\sqrt{2}) \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \langle \text{Tr}[\lambda_\gamma(q) \lambda^\alpha(k-q)] \dots \rangle \\
&\left\{ \left[\frac{\partial}{\partial p_1^\mu} \frac{-ip_{1\rho} \sigma_{\alpha\dot{\beta}}^\rho}{p_1^2 - m^2} \bar{\sigma}^{\mu\dot{\beta}\gamma} \frac{i}{p_3^2 - m^2} - \frac{-ip_{1\rho} \sigma_{\alpha\dot{\beta}}^\rho}{p_1^2 - m^2} \bar{\sigma}^{\mu\dot{\beta}\gamma} \frac{\partial}{\partial p_3^\mu} \frac{i}{p_3^2 - m^2} \right] e^{-i(p_3 - p_1)\epsilon} \right\}_{p_1 = -p, p_3 = p - q + k} \\
&= i\sqrt{2} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{\partial}{\partial p^\mu} \frac{p_\rho}{(p^2 - m^2)^2} \sigma_{\alpha\dot{\beta}}^\rho \bar{\sigma}^{\mu\dot{\beta}\gamma} \langle \text{Tr}[\lambda_\gamma(q) \lambda^\alpha(k-q)] \dots \rangle \\
&= \frac{1}{4\sqrt{2}\pi^2} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \langle \text{Tr}[\lambda(q) \lambda(k-q)] \dots \rangle
\end{aligned}$$

Dato che abbiamo preso in considerazione una generica funzione di Green che contiene l'operatore, vale la relazione operatoriale:

$$O(x) = \frac{1}{4\sqrt{2}\pi^2} \text{Tr}[\lambda(x)^2]$$

Sostituendo nella (3.4) e riscaldando il supercampo reale $V \rightarrow gV$ otteniamo il risultato voluto.

La relazione operatoriale deve essere indipendente dalla procedura di regolarizzazione, purchè essa preservi l'invarianza di gauge e la supersimmetria: come verifica di consistenza si può vedere che una regolarizzazione di Pauli-Villars dell'operatore composto $m\tilde{\phi}\phi$ porta alla stessa relazione ([8]).

L'equazione (3.2) ha la seguente interpretazione: la componente θ^2 del prodotto di supercampi $Q^\dagger e^V Q$ differisce dal risultato classico $F^\dagger \phi = -m\tilde{\phi}\phi$ per una correzione $\frac{g^2}{16\pi^2} \text{Tr}[\lambda^2]$ dovuta alle singolarità nel prodotto di campi nello stesso punto. In effetti è possibile estendere la relazione operatoriale all'intero multipletto supersimmetrico e scriverla in termini di supercampi in gauge di Wess Zumino nella forma:

$$Q^\dagger e^V Q = (Q^\dagger e^V Q)_{\text{naive}} - \frac{g^2}{16\pi^2} \text{Tr}[\bar{\theta}^2 W^2 + \theta^2 \bar{W}^2 - \frac{1}{2} \bar{\theta}^2 \theta^2 (W^2|_{\theta^2} + \bar{W}^2|_{\bar{\theta}^2})]$$

come si può verificare regolarizzando allo stesso modo le altre componenti dei multipletti. Una relazione analoga vale per $\tilde{Q}^\dagger e^{-V} \tilde{Q}$. Applicando l'operatore \bar{D}^2 a entrambi i membri troviamo:

$$\frac{1}{4} \bar{D}^2 (Q^\dagger e^V Q) = Q \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial Q} + \frac{g^2}{16\pi^2} \text{Tr}[W^2]$$

dove abbiamo ammesso un generico superpotenziale \mathcal{W} che descriva l'autointerazione dei quark. In questa forma la relazione esprime la correzione anomala della teoria quantistica alla relazione classica $\frac{1}{4} \bar{D}^2 (Q^\dagger e^V Q)_{\text{naive}} = Q \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial Q}$.

Come conseguenza abbiamo che in un vuoto supersimmetrico della teoria, essendo nullo il valore di aspettazione della derivata covariante $\bar{D}^2(\dots)$, il condensato del gaugino è legato a quello dei campi di materia:

$$\left\langle Q \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial Q} + \frac{g^2}{16\pi^2} \text{Tr}[W^2] \right\rangle = 0$$

dove si intende che prendiamo il valore di aspettazione della componente più bassa del supercampo.

La generalizzazione al caso di più flavor è immediata. Nella SQCD ordinaria in cui il superpotenziale è dato dal termine di massa $m_i^j \tilde{Q}_j Q^i$ se non fosse per la correzione anomala avremmo trovato che il VEV $\langle \tilde{Q}_j Q^i \rangle$ avrebbe dovuto annullarsi ogniqualvolta $m_i^j \neq 0$, mentre il risultato ottenuto mostra che se il gaugino condensa nel vuoto anche il condensato dei quark può essere diverso da zero. Notiamo però che, essendo l'interazione di Yukawa diagonale negli indici di flavor, avremo una correzione anomala solo per i condensati della forma $\langle m_i^i \tilde{Q}_i Q^i \rangle$. Pertanto in un vuoto supersimmetrico continua a valere il risultato "naive" $\langle m_i^j \tilde{Q}_i Q^j \rangle = 0$ se $i \neq j$ e sono solo gli elementi diagonali a ricevere contributo dal condensato del gaugino.

3.3 Olomorfia

In questa sezione vedremo come il vincolo di olomorfia del superpotenziale, unito alle considerazioni sulle simmetrie globali, possa determinare la dinamica a basse energie della teoria in termini dei gradi di libertà leggeri. Con questo approccio calcoleremo esattamente l'azione effettiva Wilsoniana in alcuni casi concreti e vedremo esempi di come lo spazio dei moduli quantistico possa differire anche drasticamente da quello classico. La nostra trattazione seguirà quella di [3], [12], [15].

3.3.1 Super-Yang-Mills

Consideriamo la teoria supersimmetrica di pura gauge descritta classicamente dall'azione ricavata nel capitolo precedente:

$$\begin{aligned}
S_{SYM} &= \int d^4x \, 2\text{Tr} \left[\frac{\tau}{4\pi i} \int d^2\theta \frac{1}{4} \text{Tr}(W^2) - \frac{\tau^*}{4\pi i} \int d^2\bar{\theta} \frac{1}{4} \text{Tr}(\bar{W}^2) \right] \\
&= \int d^4x \, 2\text{Tr} \left[-\frac{1}{4g^2} G^{\mu\nu} G_{\mu\nu} + \frac{i}{g^2} \lambda\sigma^\mu \mathcal{D}_\mu \bar{\lambda} + \frac{1}{2g^2} D^2 + \frac{\theta_{YM}}{32\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} G_{\mu\nu} G_{\rho\sigma} \right]
\end{aligned}$$

ove $\tau = \frac{\theta_{YM}}{2\pi} + i\frac{4\pi}{g^2}$. Notiamo che questa azione è data soltanto da un termine di superpotenziale:

$$\mathcal{W}_{\text{tree}} = \frac{\tau}{8\pi i} \text{Tr} [W^2] \quad (3.5)$$

Il running della costante di accoppiamento g a un loop è dato da:

$$\mu \frac{dg}{d\mu} = -\frac{b_1}{16\pi^2} g^3$$

dove nel caso che stiamo considerando in cui la materia è data solo dal gaugino nella rappresentazione aggiunta del gruppo di gauge, abbiamo: $b_1 = 3N_c$, nel caso più generale in cui ci siano anche N_f flavor di quark avremmo $b_1 = 3N_c - N_f$. La soluzione dell'equazione di evoluzione è data da:

$$\frac{1}{g^2(\mu)} = -\frac{b_1}{8\pi^2} \log \left(\frac{|\Lambda|}{\mu} \right)$$

ove $|\Lambda|$ è la scala intrinseca dinamicamente generata. Pertanto il running a un loop del parametro τ sarà dato da:

$$\tau_{1\text{loop}} = \frac{\theta_{YM}}{2\pi} + \frac{4\pi i}{g^2(\mu)} = \frac{1}{2\pi i} \log \left[\left(\frac{|\Lambda|}{\mu} \right)^{b_1} e^{i\theta_{YM}} \right]$$

Quest'espressione suggerisce di definire la variabile complessa $\Lambda \equiv |\Lambda| e^{i\frac{\theta_{YM}}{b_1}}$, detta *scala intrinseca olomorfa*, in termini della quale $\tau_{1\text{loop}} = \frac{b_1}{2\pi i} \log(\Lambda/\mu)$. Il vantaggio nell'aver introdotto questo parametro sta nella possibilità di considerare Λ al pari di un supercampo chirale aggiuntivo della teoria: in questo modo possiamo sfruttare le simmetrie della teoria "estesa" e la proprietà di olomorfa del superpotenziale efficace per determinarne esattamente l'andamento in funzione di Λ .

Consideriamo l'azione effettiva che si ottiene integrando via le fluttuazioni al di sopra di una certa scala μ . Essa sarà data da un termine di superpotenziale analogo a (3.5) in cui le fluttuazioni quantistiche sono state assorbite nel running esatto della costante di accoppiamento:

$$\mathcal{W}_{\text{eff}} = \frac{\tau(\Lambda/\mu)}{8\pi i} \text{Tr} [W^2]$$

Notiamo che il limite $\Lambda \rightarrow 0$ è il limite di accoppiamento debole, quindi in questo limite deve essere valido il risultato perturbativo: $\tau = \frac{1}{2\pi i} \log(\Lambda/\mu)$. Il fatto che il superpotenziale sia olomorfo in Λ in questo limite ci permette, come accennato sopra, di promuovere Λ a un supercampo chirale e concludere che, se le fluttuazioni quantistiche preservano la supersimmetria, \mathcal{W}_{eff} dovrà rimanere una funzione olomorfa di Λ anche al di fuori del regime perturbativo.

Dato che la fisica è 2π -periodica nel parametro θ_{YM} la seguente trasformazione discreta è una simmetria :

$$\Lambda \rightarrow e^{\frac{2\pi i}{b_1}} \Lambda$$

Pertanto $\tau(\Lambda/\mu)$ dovrà essere esprimibile nella forma:

$$\tau(\Lambda/\mu) = \frac{b_1}{2\pi i} \log(\Lambda/\mu) + f(\Lambda/\mu)$$

dove f dovrà avere le seguenti proprietà

- (i) essere olomorfa
- (ii) tendere a zero nel limite di weak coupling $\Lambda \rightarrow 0$
- (iii) $f\left(e^{\frac{2\pi i}{b_1}} \Lambda/\mu\right) = f(\Lambda/\mu)$

Per (i) e (ii) f ammetterà uno sviluppo in serie di Taylor con potenze positive attorno a $\Lambda = 0$, e per (iii) potrò avere solo le potenze che sono multipli interi di b_1 . In definitiva abbiamo ottenuto:

$$\tau(\Lambda/\mu) = \frac{b_1}{2\pi i} \log(\Lambda/\mu) + \sum_{k=1}^{\infty} a_k (\Lambda/\mu)^{kb_1} \quad (3.6)$$

in cui solo i coefficienti a_k rimangono da determinare.

Notiamo che:

$$e^{-S_{1inst}^E} = e^{-\frac{8\pi^2}{g(\mu)^2} + i\theta_{YM}} = (\Lambda/\mu)^{b_1}$$

dove con S_{1inst}^E abbiamo indicato l'azione euclidea di una configurazione instantonica con numero di avvolgimento unitario. Pertanto lo sviluppo (3.6) si può vedere come uno sviluppo semiclassico in cui l'unico contributo della teoria perturbativa viene dalla correzione a un loop $\tau_{1\text{loop}}$ e il termine non perturbativo dato dalla serie di potenze è una somma di correzioni k-instantoniche.

Condensato del gaugino: Come ulteriore applicazione dell'olomorfia e delle simmetrie spurioniche, vediamo come con questo approccio si possa anche dimostrare che nella teoria in esame abbiamo un condensato del gaugino non nullo e determinarne il valore a meno di una costante moltiplicativa indipendente dai parametri. A tal fine consideriamo la simmetria $U(1)_R$ che corrisponde all'automorfismo dell'algebra

supersimmetrica che moltiplica la supercarica per una fase arbitraria:

$$Q \rightarrow e^{-i\alpha} Q, \quad \bar{Q} \rightarrow e^{i\alpha} \bar{Q} \quad (3.7)$$

Sulle componenti del multipletto vettoriale l'azione di $U(1)_R$ è :

$$V_\mu \rightarrow V_\mu, \quad \lambda \rightarrow e^{i\alpha} \lambda$$

ovvero in termini del supercampo W_β :

$$W_\beta(x, \theta, \bar{\theta}) \rightarrow e^{i\alpha} W_\beta(x, e^{i\alpha} \theta, e^{-i\alpha} \bar{\theta})$$

ed è immediato verificare che classicamente questa è una simmetria di S_{SYM} . A livello quantistico, però, a causa dell'anomalia questa trasformazione non lascia la Lagrangiana invariata ma trasla il valore del coefficiente θ_{YM} . Tenendo conto che λ è un fermione di Weyl nella rappresentazione aggiunta del gruppo di gauge, questa traslazione è data da:

$$\theta_{YM} \rightarrow \theta_{YM} - 2N_c \alpha$$

e come conseguenza l'invarianza residua si ha per $2N_c \alpha = 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$, ovvero l'anomalia rompe la simmetria classica continua nella simmetria discreta \mathbb{Z}_{2N_c} .

Analogamente a quanto visto con il parametro Λ , considerare τ come un supercampo chirale ci permette di recuperare la simmetria $U(1)_R$ facendola agire in modo da riassorbire la traslazione del parametro θ_{YM} :

$$\tau \rightarrow \tau + \frac{N_c \alpha}{\pi}$$

Dato che sotto la trasformazione (3.7) anche la coordinata Grassman viene moltiplicata per una fase $\theta \rightarrow e^{i\alpha} \theta$, $d^2\theta \rightarrow e^{-2i\alpha} d^2\theta$, il superpotenziale dovrà avere carica 2:

$$\mathcal{W}_{eff} \rightarrow e^{2i\alpha} \mathcal{W}_{eff}$$

Se facciamo l'ipotesi aggiuntiva che la teoria abbia un mass gap, e che quindi integrando tutte le fluttuazioni al di sopra di una certa scala il superpotenziale Wilsoniano efficace dipenda solo dal campo non dinamico τ , allora le condizioni di olomorfia e simmetria $U(1)_R$ individuano univocamente il superpotenziale a basse energie:

$$\mathcal{W}_{eff} = a\mu^3 e^{\frac{2\pi i \tau}{N_c}}$$

dove a è una costante adimensionale indeterminata e abbiamo usato che nella teoria in esame $b_1 = 3N_c$.

Notiamo che la sorgente per il campo composto $\text{Tr}[\lambda^2]$ è la componente θ^2 del supercampo $\frac{1}{8\pi i} \tau$, dunque il condensato del gaugino sarà dato dalla derivata funzionale

del potenziale efficace $\int d^2\theta \mathcal{W}_{eff}$ rispetto a $\frac{1}{8\pi i}\tau|_{\theta^2}$:

$$\begin{aligned}\langle \text{Tr}[\lambda^2] \rangle &= 8\pi i \frac{\partial}{\partial \tau|_{\theta^2}} \left(\int d^2\theta \mathcal{W}_{eff} \right) \\ &= 8\pi i \frac{\partial}{\partial \tau|_{\theta^2}} \left(\frac{\partial \mathcal{W}_{eff}}{\partial \tau} \Big|_1 \tau|_{\theta^2} \right) \\ &= 8\pi i \frac{\partial \mathcal{W}_{eff}}{\partial \tau} \Big|_1 \\ &= -\frac{16\pi^2}{N_c} a \mu^3 e^{\frac{2\pi i \tau}{N_c}}\end{aligned}$$

Se si trascurano le correzioni non perturbative a τ e si tiene conto che nella teoria in esame $b_1 = 3N_c$ il risultato si può riscrivere:

$$\langle \text{Tr}[\lambda^2] \rangle = -\frac{16\pi^2}{N_c} a \Lambda^3$$

Il fatto che l'espressione per il condensato sia data da una radice N_c -esima produce un'ambiguità nel risultato tra N_c possibili scelte. L'interpretazione corretta è che la teoria ha N_c vuoti fisicamente inequivalenti con valori diversi del condensato. In effetti una traslazione di 2π del parametro θ_{YM} fa passare da un valore all'altro del condensato: questo significa che i vuoti non rispettano la simmetria residua \mathbb{Z}_{2N_c} ma abbiamo una rottura spontanea $\mathbb{Z}_{2N_c} \rightarrow \mathbb{Z}_2$ e N_c vuoti associati a questo pattern di rottura, con il condensato del gaugino che fornisce il parametro d'ordine.

Notiamo come, già in questo primo esempio, considerazioni legate all'olomorfia e alle simmetrie globali ci hanno permesso di determinare la struttura dei vuoti quantistici, che in questo caso formano un insieme discreto con N_c elementi.¹

3.3.2 $N_f < N_c$: Superpotenziale ADS

Consideriamo la SQCD con N_c colori ed N_f flavor senza massa, di cui abbiamo studiato lo spazio dei moduli classico nel capitolo precedente. Nel caso $N_f < N_c$ abbiamo visto che classicamente gli N_f^2 gradi di libertà leggeri possono essere parametrizzati dal supercampo gauge invariante del mesone:

$$M_j^i = \tilde{Q}_j^\alpha Q_\alpha^i$$

che è una matrice $N_f \times N_f$.

Come nell'esempio di SYM, anche in questo caso per sfruttare l'olomorfia in maniera efficace dobbiamo individuare delle simmetrie globali che restringano i possibili termini del superpotenziale efficace. Se queste simmetrie sono U(1) affetti da anomalia, allora promuoviamo la scala intrinseca olomorfa Λ a un supercampo chirale

¹Questo conteggio dei vuoti è in accordo con il risultato per l'indice di Witten che è pari a N_c per $SU(N_c)$ SYM ([11], si veda anche la trattazione in [2]).

e recuperiamo la simmetria assegnandogli un'opportuna carica.

La simmetria $U(1)_R$ può essere estesa al caso con materia in modo da avere una cancellazione dell'anomalia. Infatti comunque assegnata la carica R dei supercampi Q e \tilde{Q} è immediato notare che la trasformazione:

$$Q^i(x, \theta, \bar{\theta}) \rightarrow e^{iR\alpha} Q^i(x, e^{i\alpha}\theta, e^{-i\alpha}\bar{\theta}), \quad \tilde{Q}_j(x, \theta, \bar{\theta}) \rightarrow e^{iR\alpha} \tilde{Q}_j(x, e^{i\alpha}\theta, e^{-i\alpha}\bar{\theta})$$

è una simmetria dell'azione della materia S_M . La carica corrispondente dei fermioni di Weyl sarà $R - 1$ e dunque avremo $2N_f$ fermioni di Weyl nella rappresentazione fondamentale con carica $R - 1$ in aggiunta al gaugino nella rappresentazione aggiunta e con carica unitaria. L'anomalia totale sarà perciò proporzionale a:

$$N_c + 2N_f(R - 1) \frac{1}{2}$$

La cancellazione è realizzata scegliendo: $R = -\frac{N_c - N_f}{N_f}$.

L'altra simmetria che consideriamo è la simmetria $U(1)_A$ che commuta con la supersimmetria e trasforma Q e \tilde{Q} moltiplicandoli per la stessa fase, mentre lascia invariato il multipletto vettoriale:

$$Q(x, \theta, \bar{\theta}) \rightarrow e^{i\alpha} Q(x, \theta, \bar{\theta}), \quad \tilde{Q}(x, \theta, \bar{\theta}) \rightarrow e^{i\alpha} \tilde{Q}(x, \theta, \bar{\theta})$$

Questa volta manca il contributo del gaugino e quindi non è possibile cancellare l'anomalia. La rotazione chirale dei quark dovuta a una trasformazione $U(1)_A$ produce una traslazione della variabile θ_{YM} :

$$\theta_{YM} \rightarrow \theta_{YM} - 2N_f\alpha$$

che può essere riassorbita assegnando una carica $2N_f/b_1$ a Λ sotto $U(1)_A$.

Riassumiamo in una tabella le cariche $U(1)_R$ e $U(1)_A$ dei supercampi chirali da cui può dipendere il superpotenziale efficace:

	$U(1)_R$	$U(1)_A$
$\text{Tr}[W^2]$	2	0
Λ^{b_1}	0	$2N_f$
$\det M$	$2(N_f - N_c)$	$2N_f$

Abbiamo considerato $\det M$ perchè è l'unica combinazione invariante sotto trasformazioni di flavor $SU(N_f)_V \times SU(N_f)_A$ e Λ elevato alla potenza b_1 per assicurare 2π -periodicità in θ_{YM} . Oltre al termine dato dalla correzione perturbativa $-\frac{b_1}{16\pi^2} \log(\Lambda/\mu) \text{Tr}[W^2]$, un termine generico del superpotenziale potrà essere della forma:

$$\text{Tr}[W^2]^n \Lambda^{b_1 m} (\det M)^p$$

e le condizioni che \mathcal{W}_{eff} sia scarico sotto $U(1)_A$ e abbia carica 2 sotto $U(1)_R$ si traducono nelle relazioni tra gli esponenti:

$$\begin{aligned} 2N_f m + 2N_f p &= 0 \\ 2(N_f - N_c)p + 2n &= 2 \end{aligned}$$

Da cui:

$$n = 1 - (N_c - N_f)m$$

Ricordiamo che il termine $\text{Tr}[W^2]$ comprende i termini cinetici dei campi del multipletto vettoriale e dunque per località il potenziale efficace potrà contenere solo termini con n intero positivo (in altre parole, l'azione effettiva è da vedere come uno sviluppo di Taylor nelle potenze dell'impulso e quindi arrestandosi a un certo ordine si avrà sempre un polinomio nelle derivate). D'altra parte m deve essere strettamente positivo per assicurarci che nel limite di accoppiamento debole $\Lambda \rightarrow 0$ il risultato tenda correttamente a quello perturbativo.

Pertanto l'unica possibilità, oltre a $n = 1$ e $m = 0$ che è proprio la correzione perturbativa, è data da $n = 0$ e $m = \frac{1}{N_c - N_f}$. Ricordando che in questa teoria $b_1 = 3N_c - N_f$ abbiamo ottenuto che:

$$\mathcal{W}_{ADS} = C_{N_c, N_f} \left(\frac{\Lambda^{3N_c - N_f}}{\det M} \right)^{\frac{1}{N_c - N_f}}$$

dove C_{N_c, N_f} è una costante adimensionale da determinare che dipende dallo schema di rinormalizzazione. Il superpotenziale ottenuto è il cosiddetto *superpotenziale di Affleck-Dine-Seiberg* ed è l'unico risultato compatibile con la simmetria e l'olomorfia nella SQCD con $N_f < N_c$.

Verifiche di consistenza e determinazione della costante: Un modo per verificare la consistenza del superpotenziale ADS e dare dei vincoli sul parametro C_{N_c, N_f} è studiare il caso in cui uno dei flavor ha un VEV grande rispetto agli altri, e quindi in un certo range di energia la simmetria di gauge è rotta a $SU(N_c - 1)$. Il VEV più grande rompe $2N_c - 1$ generatori e i corrispondenti supercampi vettoriali acquistano massa "assorbendo" $2N_c - 1$ supercampi chirali, con la conseguenza che un flavor diventa massivo e viene integrato via quando scendiamo al di sotto della scala del VEV. In effetti:

$$2N_c N_f - (2N_c - 1) - (2N_f - 1) = 2(N_c - 1)(N_f - 1)$$

quindi eliminati i $2N_c - 1$ multipletti che diventano massivi, abbiamo la teoria con $N_c - 1$ colori e $N_f - 1$ flavor a meno di altri $2N_f - 1$ gradi di libertà che però sono singoli del gruppo di gauge residuo e quindi disaccoppiano dalla teoria a basse

energie.

Il modo di correlare la teoria $(N_c - 1, N_f - 1)$ alla teoria di partenza con un grande VEV v è imporre che le costanti di accoppiamento running coincidano alla scala v , perchè è a questa scala che le predizioni delle due teorie sono confrontabili. Indicando esplicitamente con degli indici il numero di flavor e colori, il matching delle costanti di accoppiamento ci dà la relazione:

$$\left(\frac{\Lambda_{N_c, N_f}}{v}\right)^{3N_c - N_f} = \left(\frac{\Lambda_{N_c - 1, N_f - 1}}{v}\right)^{3N_c - N_f - 2} \Rightarrow \Lambda_{N_c, N_f}^{3N_c - N_f} = v^2 \Lambda_{N_c - 1, N_f - 1}^{3N_c - N_f - 2}$$

Detta a sua volta \tilde{M} la matrice mesonica $(N_f - 1) \times (N_f - 1)$ che raggruppa gli $(N_f - 1)^2$ gradi di libertà leggeri della teoria sotto la scala v , abbiamo chiaramente:

$$\det M = v^2 \det \tilde{M}$$

Sostituendo queste espressioni per Λ_{N_c, N_f} e $\det M$ nel superpotenziale ADS, troviamo il giusto andamento per interpretarlo come il superpotenziale nel caso $(N_c - 1, N_f - 1)$ e rimane solo da imporre la condizione che la costante moltiplicativa sia la stessa, il che ci dà la condizione che $C_{N_c, N_f} = C_{N_c - N_f}$.

Consideriamo ora la situazione in cui tutti gli N_f flavor hanno un VEV dell'ordine (o più grande) di una certa scala v : in questo caso la teoria a basse energie sarà puro $SU(N_c - N_f)$ Super-Yang-Mills e potremo fare un confronto con quanto ottenuto nel paragrafo precedente. Il matching tra le costanti di accoppiamento alla scala v dà:

$$\left(\frac{\Lambda_{N_c, N_f}}{v}\right)^{3N_c - N_f} = \left(\frac{\Lambda_{N_c - N_f, 0}}{v}\right)^{3(N_c - N_f)} \Rightarrow \Lambda_{N_c, N_f}^{3N_c - N_f} = v^{2N_f} \Lambda_{N_c - N_f, 0}^{3(N_c - N_f)}$$

Inoltre a basse energie:

$$\det M \sim v^{2N_f}$$

Con queste sostituzioni troviamo $\mathcal{W}_{eff} = C_{N_c - N_f} \Lambda_{N_c - N_f, 0}^3$, che è in accordo con quanto trovato per la teoria senza materia mediante considerazioni di olomorfa nel paragrafo precedente, in cui però avevamo assunto la presenza di un mass gap.

Come ulteriore verifica, modifichiamo il superpotenziale al tree-level assegnando una massa ad uno dei flavor $m M_{N_f}^{N_f}$. Le considerazioni su olomorfa e simmetria vanno leggermente modificate in questo caso perchè abbiamo anche il parametro aggiuntivo $m M_{N_f}^{N_f}$ che ha carica 2 sotto $U(1)_R$ ed è scarico sotto $U(1)_A$ ². La

²I due parametri m e $M_{N_f}^{N_f}$ devono sempre comparire nella combinazione $m M_{N_f}^{N_f}$ perchè è possibile definire un'altra simmetria $U(1)$ del superpotenziale al tree-level che dà cariche opposte a m e $M_{N_f}^{N_f}$ lasciando invariati tutti gli altri parametri.

forma più generale compatibile con le simmetrie che il superpotenziale può avere è :

$$\mathcal{W}_{eff} = \left(\frac{\Lambda^{3N_c - N_f}}{\det M} \right)^{\frac{1}{N_c - N_f}} f(t)$$

dove f è una funzione olomorfa del parametro scarico $t = mM_{N_f}^{N_f} (\det M / \Lambda^{3N_c - N_f})$. Notiamo che nel limite $m \rightarrow 0$ e $\Lambda \rightarrow 0$ di massa piccola e accoppiamento debole \mathcal{W}_{eff} deve riprodurre il risultato precedente con la piccola perturbazione $mM_{N_f}^{N_f}$, ovvero in questo limite:

$$f(t) = C_{N_c, N_f} + t \quad (3.8)$$

Dato che prendendo i due limiti contemporaneamente posso ottenere un qualsiasi valore del parametro t , ne deduciamo che la funzione f deve essere esattamente data da (3.8) indipendentemente dal range dei parametri. Dunque:

$$\mathcal{W}_{eff} = \mathcal{W}_{ADS} + mM_{N_f}^{N_f}$$

La condizione di stazionarietà di questo superpotenziale rispetto alle componenti (N_f, j) della matrice M ha come soluzione una forma a blocchi:

$$M = \left(\begin{array}{c|c} \tilde{M} & 0 \\ \hline 0 & M_{N_f}^{N_f} \end{array} \right)$$

dove \tilde{M} è una matrice $(N_f - 1) \times (N_f - 1)$ che raggruppa i flavor senza massa e $M_{N_f}^{N_f}$ verifica l'equazione:

$$mM_{N_f}^{N_f} = \frac{C_{N_c, N_f}}{N_c - N_f} \left(\frac{\Lambda_{N_c, N_f}}{\det M} \right)^{\frac{1}{N_c - N_f}}$$

Inoltre un matching delle costanti di accoppiamento alla scala m in cui il flavor N_f viene integrato via dà la relazione tra le scale intrinseche:

$$\left(\frac{\Lambda_{N_c, N_f}}{m} \right)^{3N_c - N_f} = \left(\frac{\Lambda_{N_c, N_f - 1}}{m} \right)^{3N_c - N_f + 1} \Rightarrow \Lambda_{N_c, N_f}^{3N_c - N_f} = m^{-1} \Lambda_{N_c, N_f - 1}^{3N_c - N_f - 1}$$

Sostituendo le espressioni per Λ e M nel superpotenziale ADS troviamo correttamente il termine per la teoria con N_c colori e $N_f - 1$ flavor a patto che la costante moltiplicativa rispetti la relazione di ricorsione:

$$C_{N_c, N_f - 1} = (N_c - N_f + 1) \left(\frac{C_{N_c, N_f}}{N_c - N_f} \right)^{\frac{N_c - N_f}{N_c - N_f + 1}}$$

Nel caso $N_c = N_f + 1$ il superpotenziale ADS può essere visto come una correzione 1-istantonica. In questo caso è possibile effettuare un calcolo in approssimazione

semiclassica e determinare la costante moltiplicativa nello schema di rinormalizzazione \overline{DR} ([10]). Si trova che $C_{N_c, N_c-1} = 1$ e mediante la relazione di ricorsione la costante rimane determinata in generale:

$$C_{N_c, N_f} = N_c - N_f$$

Pertanto possiamo riscrivere:

$$\mathcal{W}_{ADS} = (N_c - N_f) \left(\frac{\Lambda^{3N_c - N_f}}{\det M} \right)^{\frac{1}{N_c - N_f}}$$

Teoria massiva e condensato del gaugino: Se aggiungiamo una massa per tutti i flavor allora, analogamente a quanto visto per un solo flavor, olomorfia e simmetrie globali determinano il superpotenziale efficace:

$$\mathcal{W}_{eff} = \mathcal{W}_{ADS} + m_j^i M_i^j$$

L'equazione di stazionarietà del superpotenziale rispetto alle componenti della matrice M può essere risolta esplicitamente e dà il seguente risultato per $\langle M \rangle$:

$$\langle M_j^i \rangle = (m^{-1})_j^i (\det m \Lambda^{3N_c - N_f})^{\frac{1}{N_c}} \quad (3.9)$$

Anche in questo caso la presenza di una radice N_c -esima nel risultato e la conseguente ambiguità nella scelta della fase va interpretata come la presenza di N_c vuoti distinti nella SQCD massiva. Notiamo che se tutti i quark sono massivi a basse energie la teoria è puro $SU(N_c)$ SYM e quindi il risultato è consistente con gli N_c vuoti distinti dalla fase del condensato del gaugino che avevamo trovato trattando il caso senza quark.

Facendo coincidere le costanti di accoppiamento delle teorie con e senza quark alla scala delle masse troviamo:

$$\left(\frac{\Lambda_{N_c, N_f}}{(\det m)^{\frac{1}{N_f}}} \right)^{3N_c - N_f} = \left(\frac{\Lambda_{N_c, 0}}{(\det m)^{\frac{1}{N_f}}} \right)^{3N_c} \Rightarrow \Lambda_{N_c, N_f}^{3N_c - N_f} = (\det m)^{-1} \Lambda_{N_c, 0}^{3N_c}$$

Sostituendo le espressioni per M e Λ_{N_c, N_f} troviamo che il superpotenziale efficace per la teoria a basse energie è :

$$\mathcal{W}_{eff} = N_c \Lambda_{N_c, 0}^3$$

Confrontando con quanto ottenuto trattando SYM, questo risultato ci convalida l'ipotesi di mass gap che avevamo assunto e determina la costante moltiplicativa che era rimasta indeterminata $a = N_c$.

Pertanto il condensato del gaugino è dato da:

$$\langle \text{Tr}[\lambda^2] \rangle = -16\pi^2 \Lambda^3$$

In definitiva, grazie all'olomorfia, da un singolo calcolo instantonico nel caso $N_c = N_f + 1$ siamo in grado di determinare il superpotenziale efficace esatto della SQCD massless per tutti gli $N_c > N_f$ e il condensato del gaugino nella teoria di pura gauge supersimmetrica.

Superpotenziale generato dalla condensazione del gaugino ($N_c > N_f + 1$):

Come abbiamo accennato, nel caso $N_c = N_f + 1$ l'effetto dinamico che sta alla base della generazione di una correzione non perturbativa al superpotenziale è dato dagli instantoni, e questo è compatibile con l'osservazione che in questo caso:

$$\mathcal{W}_{ADS} \sim \Lambda^{\frac{3N_c - N_f}{N_c - N_f}} = \Lambda^{3N_c - N_f} \sim e^{-S_{1inst}^E}$$

Nel caso $N_c > N_f + 1$ però deve esistere un altro effetto che dia luogo alla densità di energia nel vuoto che corrisponde al superpotenziale \mathcal{W}_{ADS} .

Notiamo che in questo caso i VEV degli squark lasciano un'invarianza di gauge residua $SU(N_c - N_f)$, dunque se scendiamo ad energie più basse e integriamo via i gradi di libertà chirali abbiamo una teoria effettiva di puro SYM con $N_c - N_f$ colori. Facendo coincidere le costanti running alla scala dei VEV abbiamo la condizione:

$$\left(\frac{\Lambda_{N_c, N_f}}{(\det M)^{\frac{1}{N_f}}} \right)^{3N_c - N_f} = \left(\frac{\Lambda_{N_c - N_f, 0}}{(\det M)^{\frac{1}{N_f}}} \right)^{3(N_c - N_f)} \Rightarrow \Lambda_{N_c, N_f}^{3N_c - N_f} = \det M \Lambda_{N_c - N_f, 0}^{3(N_c - N_f)}$$

Ricordiamo che la correzione a 1 loop al superpotenziale della teoria di pura gauge supersimmetrica dava luogo a un termine del tipo $-\frac{b_1}{16\pi^2} \log(\Lambda_{N_c - N_f, 0}/\mu) \text{Tr}[W^2]$. Se sostituiamo in quest'espressione la dipendenza della scala intrinseca olomorfa da M , nell'azione abbiamo il seguente termine dipendente da M :

$$\int d^2\theta \frac{1}{16\pi^2} \log(\det M) \text{Tr}[W^2] + c.c. \quad (3.10)$$

$$= \left(-\frac{1}{16\pi^2} (M^{-1})^j_i F_{Mj}^i \text{Tr}[\lambda^2] + \dots \right) + c.c.$$

Abbiamo messo in evidenza la parte lineare in $F_M \equiv M|_{\theta^2}$ perchè in generale ha la forma:

$$\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial M_j^i} \Big|_1 F_{Mj}^i$$

Dunque da (3.3.2) leggiamo che:

$$\left. \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial M_j^i} \right|_1 = -\frac{1}{16\pi^2} (M^{-1})_i^j \text{Tr}[\lambda^2]$$

Utilizzando il risultato noto per la condensazione del gaugino nella teoria $SU(N_c - N_f)$, $\langle \text{Tr}[\lambda^2] \rangle = -16\pi^2 \Lambda_{N_c - N_f, 0}^3$, e riesprimendo la scala in termini di quella della teoria di partenza, si ottiene:

$$\left. \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial M_j^i} \right|_1 = (M^{-1})_i^j \left(\frac{\Lambda_{N_c, N_f}^{3N_c - N_f}}{\det M} \right)^{\frac{1}{N_c - N_f}} = \frac{\partial \mathcal{W}_{ADS}}{\partial M_j^i}$$

Pertanto per $N_c > N_f + 1$ la densità di energia nel vuoto che è associata al superpotenziale ADS viene generata dalla condensazione del gaugino nella teoria $SU(N_c - N_f)$ a bassa energia. Questo risultato può anche essere visto come un'ulteriore derivazione del valore del condensato del gaugino.

È interessante notare come l'interazione sia interpretabile come un termine di Wess-Zumino nella teoria effettiva [16]. Infatti, come abbiamo osservato, nella teoria con materia da cui siamo partiti la simmetria $U(1)_R$ è rotta spontaneamente dai VEV degli squark ma la corrispondente anomalia si cancella grazie ai contributi di segno opposto dei quark e del gaugino. Nella teoria di pura gauge supersimmetrica a basse energie è presente solo il contributo del gaugino e tale cancellazione non può avvenire. La cancellazione a livello della teoria effettiva viene riprodotta da un'accoppiamento del settore di gauge con il bosone di Goldstone tramite un operatore irrilevante. Nel nostro caso è proprio $\log(\det M)$ a fornire il bosone di Goldstone che sotto una trasformazione $U(1)_R$ trasforma in modo non lineare:

$$\log(\det M) \rightarrow \log(\det M) + 2i(N_c - N_f)\alpha$$

e cancella la corrispondente traslazione del parametro θ_{YM} della teoria a basse energie.

Struttura dei vuoti: Il potenziale scalare che deriva dal superpotenziale ADS è dato dai termini F:

$$V_{ADS} = \sum_i \left| \frac{\partial \mathcal{W}_{ADS}}{\partial Q^i} \right|^2 + \left| \frac{\partial \mathcal{W}_{ADS}}{\partial \tilde{Q}_i} \right|^2$$

Questo potenziale non si annulla per nessun valore di M e tende a zero solo per $\det M \rightarrow \infty$. Dunque la teoria massless non ha uno stato fondamentale: siamo partiti da una teoria classica con uno spazio infinitamente degenere di vuoti supersimmetrici gauge-inequivalenti e abbiamo ottenuto una teoria quantistica che non ha nessuno stato di vuoto.

Se aggiungiamo dei termini di massa per i supercampi dei quark abbiamo visto

che la teoria ammette N_c vuoti supersimmetrici, in accordo con quanto previsto dall'indice di Witten. Quando queste masse diventano piccole i vuoti si spostano verso valori sempre più grandi dei VEV degli squark, fino a scomparire dallo spettro per masse nulle.

La scoperta di questo fenomeno ([9]) è stata importante perchè ha fornito un primo esempio di come la supersimmetria, pur alleviando le divergenze della teoria perturbativa per via delle cancellazioni tra loops bosonici e fermionici, non impedisca che effetti non perturbativi modifichino drasticamente il comportamento quantistico da quello classico. Il vantaggio delle teorie supersimmetriche risiede nella possibilità di calcolare esattamente tali effetti non perturbativi, grazie alla proprietà di olomorfia.

3.3.3 Spazio dei moduli quantistico per $N_f = N_c$, $N_f = N_c + 1$

Per $N_f \geq N_c$ abbiamo visto che lo spazio dei moduli classico è parametrizzato in modo gauge-invariante dai mesoni e dai barioni:

$$\begin{aligned} M_j^i &= \tilde{Q}_j^\alpha Q_\alpha^i \\ B^{i_{N_c+1} \dots i_{N_f}} &= \frac{1}{N_c!} \epsilon_{i_1 \dots i_{N_f}} \epsilon^{\alpha_1 \dots \alpha_{N_c}} Q_{\alpha_1}^{i_1} \dots Q_{\alpha_{N_c}}^{i_{N_c}} \\ \tilde{B}_{j_{N_c+1} \dots j_{N_f}} &= \frac{1}{N_c!} \epsilon_{j_1 \dots j_{N_f}} \epsilon_{\beta_1 \dots \beta_{N_c}} \tilde{Q}_{j_1}^{\beta_1} \dots \tilde{Q}_{j_{N_c}}^{\beta_{N_c}} \end{aligned}$$

Classicamente i campi M , B e \tilde{B} sono legati da vincoli che esprimono il fatto che sono tutti dipendenti dalle componenti dei supercampi Q , \tilde{Q} .

In un punto generico dello spazio dei moduli classico la simmetria di gauge è rotta completamente, e lo spazio presenta delle singolarità nei punti in cui i VEV degli squark producono un allargamento della simmetria di gauge: questa singolarità si può mettere in corrispondenza con il fatto che in quel punto dei multipletti vettoriali diventano massless. Ad esempio nello spazio dei moduli classico è sempre presente una singolarità nel punto $M = 0$, $B = \tilde{B} = 0$ che corrisponde alla ripristino dell'intera simmetria di gauge $SU(N_c)$.

Vogliamo adesso affrontare il problema di come si modifica questo quadro nella teoria quantistica. Per questo range di N_f , N_c il superpotenziale ADS, che come abbiamo visto è l'unico superpotenziale per M che sia compatibile con olomorfia e simmetrie globali, non può essere generato perchè:

- per $N_f > N_c$, $\det M$ è identicamente nullo ($\text{rank} M \leq N_c$)
- per $N_f = N_c$ l'esponente diverge

e quindi in ogni caso l'espressione sarebbe mal definita.

D'altra parte la soluzione (3.9) per il VEV di M nel caso massivo è ancora valida.

Infatti consideriamo una configurazione di masse per cui $N_f - N_c + 1$ flavor sono più pesanti rispetto ai restanti $N_c - 1$, con delle matrici di massa che indichiamo rispettivamente con m_H e m_L . Al di sotto della scala m_H integriamo via i flavor pesanti e ci ritroviamo con una teoria effettiva con $N_c - 1$ flavor per cui è valido il superpotenziale ADS. Pertanto alla teoria effettiva possiamo applicare direttamente il risultato (3.9) e otteniamo, in termini della scala intrinseca per $N_c - 1$ flavor:

$$M_j^i = (m_L^{-1})_j^i \left(\det m_L \Lambda_{N_c, N_c-1}^{2N_c+1} \right)^{\frac{1}{N_c}}$$

dove i e j variano solo tra i flavor leggeri. Facendo coincidere la costante di accoppiamento running alla scala m_H in cui disaccoppiamo i flavor pesanti e risostituendo l'espressione che si ottiene per Λ_{N_c, N_c-1} nella formula dei VEV dei flavor leggeri, otteniamo:

$$M_j^i = (m_L^{-1})_j^i \left(\det m_L \det m_H \Lambda_{N_c, N_f}^{3N_c - N_f} \right)^{\frac{1}{N_c}}$$

ed essendo $\det m_L \det m_H = \det m$ almeno per i flavor leggeri abbiamo mostrato che vale ancora la (3.9). Dato che i VEV devono dipendere in maniera olomorfa dai parametri di massa, questo ci permette di concludere che la formula sia valida per tutti i range delle masse. Passando al limite $m \rightarrow 0$ di questa formula nel caso $N_f \geq N_c$ possiamo ottenere un generico valore finito o nullo di M a seconda di come prendiamo il limite.

Questo fatto suggerisce che la degenerazione continua di vuoti gauge inequivalenti che esiste a livello classico non venga rimossa quantisticamente e che esista in questo caso un vero e proprio spazio dei moduli quantistico. Vediamo che in effetti è così nei casi $N_f = N_c$ e $N_f = N_c + 1$. Questi valori di N_f , N_c sono anche quelli rilevanti per l'analisi che porteremo avanti generalizzando il lavoro di Gorsky, Vainshtein e Yung nella parte originale della tesi.

$N_f = N_c$: In questo caso il vincolo classico tra M e B , \tilde{B} è dato da:

$$\det M - B\tilde{B} = 0$$

Questo spazio dei moduli classico ha un sottospazio singolare che corrisponde ai punti in cui $B = \tilde{B} = 0$ e $\text{rank} M \leq N_c - 2$. Il significato fisico di questa singolarità è che nei punti corrispondenti ci sono gradi di libertà leggeri aggiuntivi, perchè una simmetria di gauge (almeno) $SU(2)$ è ripristinata e i corrispondenti gluoni diventano massless.

Quantisticamente questa condizione viene modificata in:

$$\det M - B\tilde{B} = \Lambda^{2N_c} \tag{3.11}$$

che ha il corretto limite di accoppiamento debole $\Lambda \rightarrow 0$. Per convincerci che questa sia il giusto vincolo quantistico notiamo che se aggiungiamo un termine di massa per il mesone da (3.9) abbiamo:

$$\langle \det M \rangle = \Lambda^{2N_c}$$

che è in accordo con (3.11) perchè se $\det m \neq 0$ allora deve essere $\langle B \rangle = \langle \tilde{B} \rangle = 0$ ³. Dato che Λ^{2N_c} è proporzionale all'azione di un instantone in questo caso, questa correzione può essere identificata come un contributo 1-instantonico.

La profonda differenza introdotta dalla correzione quantistica nello spazio dei moduli è che tutte le singolarità sono state regolarizzate dagli effetti quantistici. Oltre ai moduli parametrizzati da B , \tilde{B} e M non possono esserci altre eccitazioni massless nello spettro. Inoltre l'origine adesso è assente dallo spazio dei moduli e non esiste alcun punto in cui la simmetria di flavor sia completamente realizzata.

Quando i VEV di mesoni e barioni sono grandi rispetto alla scala Λ lo spazio dei moduli è ben approssimato da quello classico e la teoria è interpretabile naturalmente come in una fase di Higgs: i VEV degli squark rompono la simmetria di gauge dando massa ai gluoni e le cariche sono schermate. Quando invece ci avviciniamo all'origine dello spazio dei moduli le relazioni classiche tra i campi degli squark e i parametri gauge invarianti non sono più credibili e abbiamo semplicemente una teoria in cui i gradi di libertà leggeri sono mesoni e barioni che non hanno alcuna carica di colore: in questo caso la teoria è interpretabile come in una fase di confinamento. In questo esempio dunque si vede esplicitamente come la fase di Higgs e la fase di confinamento di una teoria di gauge possano essere connesse in maniera liscia ed essere in realtà la medesima fase: questo si realizza ogniqualvolta la teoria comprende dei campi scalari nella rappresentazione fondamentale del gruppo di gauge [17]. In figura 3.2 abbiamo rappresentato schematicamente la situazione.

Una descrizione di questo spazio dei moduli mediante un superpotenziale efficace può essere ottenuta introducendo un moltiplicatore di Lagrange X che forzi il vincolo quantistico:

$$\mathcal{W}_{eff} = X(\det M - B\tilde{B} - \Lambda^{2N_c})$$

Come controllo di consistenza verichiamo che aggiungendo un termine di massa per uno dei flavor $mM_{N_f}^{N_f}$ e disaccoppiando il flavor massivo alla scala m , riotteniamo per la teoria a basse energie con $N_c - 1$ flavor il superpotenziale ADS. Le equazioni di stazionarietà rispetto a $M_{N_f}^i$, $i = 1, \dots, N_f - 1$ sono risolte da $\langle M_{N_f}^i \rangle = 0$ e

³È possibile aggiungere anche dei termini di sorgente per B e \tilde{B} del tipo $bB + \tilde{b}\tilde{B}$ e in questo caso si trovano valori non nulli anche per il VEV dei barioni.

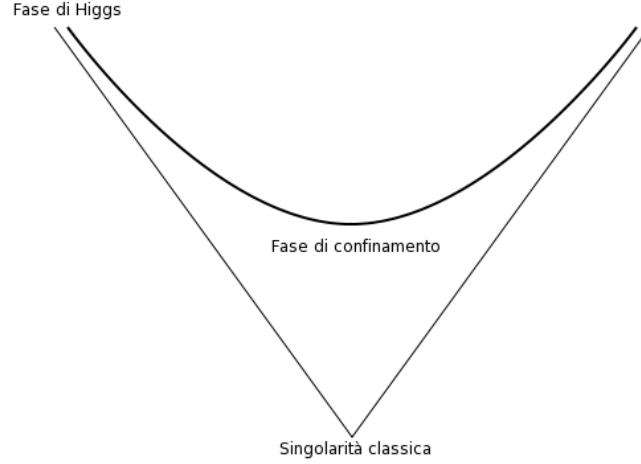


Figura 3.2: $N_f = N_c$: L'effetto della correzione quantistica può essere esemplificato mettendo a confronto i luoghi $X^2 - Y^2 = 0$ e $X^2 - Y^2 = \mu^2$. Analogamente alla correzione Λ^{2N_c} , il parametro μ^2 regolarizza la singolarità. Con il tratto più chiaro abbiamo rappresentato lo spazio dei moduli classico e col tratto più scuro quello quantistico.

quindi assumiamo per M una forma a blocchi:

$$M = \left(\begin{array}{c|c} \tilde{M} & 0 \\ \hline 0 & M_{N_f}^{N_f} \end{array} \right)$$

L'equazione di stazionarietà rispetto a $M_{N_f}^{N_f}$ dà:

$$X = -\frac{m M_{N_f}^{N_f}}{\det M}$$

Risostituendo $B = \tilde{B} = 0$ e questo valore per X in \mathcal{W}_{eff} e usando che $\det M = \det \tilde{M} M_{N_f}^{N_f}$ otteniamo:

$$\mathcal{W}_{eff} = \frac{m \Lambda^{2N_c}}{\det \tilde{M}} \quad (3.12)$$

Infine facciamo coincidere le costanti di accoppiamento alla scala m e otteniamo che la scala intrinseca della teoria a basse energie $\tilde{\Lambda}$ verifica $\tilde{\Lambda}^{2N_c+1} = m \Lambda^{2N_c}$, e pertanto (3.12) è come atteso il superpotenziale ADS per $N_c = N_f + 1$.

$N_f = N_c + 1$: In questo caso il vincolo classico è dato da:

$$\begin{aligned} \det M (M^{-1})_i^j - B_i \tilde{B}^j &= 0 \\ B_i M_j^i &= 0 \\ \tilde{B}^j M_j^i &= 0 \end{aligned}$$

Aggiungendo un termine di massa, dalle soluzioni (3.9) per il VEV del mesone troviamo che:

$$\det\langle M\rangle(\langle M\rangle^{-1})_i^j = \Lambda^{2N_c-1}m_i^j$$

e dato che con il termine di massa $\langle B\rangle = \langle \tilde{B}\rangle = 0$ concludiamo che la correzione quantistica al vincolo è data da:

$$\det M(M^{-1})_i^j - B_i\tilde{B}^j = \Lambda^{2N_c-1}m_i^j$$

A differenza di quanto visto per $N_f = N_c$, in questo caso se passiamo al limite massless ritroviamo il vincolo classico. Questo può essere visto anche notando che la formula (3.9) in questo caso può avere come limite $m \rightarrow 0$ un generico valore di M nello spazio dei moduli classico, e lo stesso vale per B e \tilde{B} se aggiungiamo dei termini di sorgente $bB + \tilde{b}\tilde{B}$ e poi passiamo al limite $b, \tilde{b} \rightarrow 0$.

Il fatto che lo spazio dei moduli sia lo stesso significa in particolare che abbiamo ancora una singolarità nell'origine $M = 0, B = \tilde{B} = 0$, ma non necessariamente anche a livello quantistico la singolarità è associata ai campi di gauge che diventano massless. In effetti è facile convincersi che in questo caso viene generato il superpotenziale efficace:

$$\mathcal{W}_{eff} = \frac{1}{\Lambda^{2N_c-1}} \left(B_i M_j^i \tilde{B}^j - \det M \right)$$

Questo superpotenziale, oltre a essere compatibile con olomorfia e simmetrie globali, riproduce correttamente i vincoli che definiscono lo spazio dei moduli come equazioni di stazionarietà.

Per dimostrare che è il corretto superpotenziale efficace, aggiungiamo un termine di massa per un flavor $mM_{N_f}^{N_f}$. Analogamente a quanto visto per $N_c = N_f$, le equazioni del moto per $M_{N_f}^i, B_i$ e \tilde{B}^i con $i = 1, \dots, N_f - 1$ implicano che i VEV di questi campi siano nulli, quindi possiamo considerare le seguenti forme per M, B e \tilde{B} :

$$M = \left(\begin{array}{c|c} M' & 0 \\ \hline 0 & M_{N_f}^{N_f} \end{array} \right), \quad B_i = (0, \dots, 0, B'), \quad \tilde{B}^j = (0, \dots, 0, \tilde{B}')$$

Sostituendo in \mathcal{W}_{eff} queste espressioni, troviamo:

$$\mathcal{W}_{eff} = -\frac{M_{N_f}^{N_f}}{\Lambda^{2N_c-1}} \left(\det M' - B'\tilde{B}' - m\Lambda^{2N_c-1} \right)$$

e tenendo conto che la scala Λ' della teoria a basse energie rispetta $\Lambda'^{2N_c} = m\Lambda^{2N_c-1}$ abbiamo esattamente il superpotenziale del caso $N_f = N_c$, in cui $-mM_{N_f}^{N_f}/\Lambda'^{2N_c}$ ha il ruolo di moltiplicatore di Lagrange.

Da questo superpotenziale leggiamo che la singolarità nell'origine è associata

ai campi M , B e \tilde{B} che diventano massless, piuttosto che ai campi di gauge. La teoria a basse energie in prossimità dell'origine dello spazio dei moduli non è dunque descritta da bosoni di gauge e rispettivi partner massless, come nel caso classico, ma da mesoni e barioni leggeri: la teoria è in fase di confinamento. A differenza del caso $N_f = N_c$, in questo caso il confinamento è realizzato senza che ci sia rottura della simmetria di flavor dato che i VEV dei campi con carica di flavor sono tutti nulli.

Questo caso ci fornisce un esempio di come il processo di quantizzazione possa intervenire non solo sulla struttura dei vuoti gauge-invarianti della teoria ma anche sull'interpretazione fisica delle singolarità, dando luogo a risultati profondamente diversi sulla fisica a basse energie.

Riepilogo: Il vincolo di olomorfia del superpotenziale efficace, unito alle simmetrie globali, ci ha permesso di dimostrare non perturbativamente diversi risultati fisicamente rilevanti:

- esistenza del mass gap e confinamento nella teoria di pura gauge supersimmetrica e con materia massiva
- confinamento e rottura della simmetria di flavor nella teoria non massiva con $N_f = N_c$
- confinamento con o senza rottura della simmetria di flavor per $N_f = N_c + 1$

Inoltre lo studio della SQCD $\mathcal{N} = 1$ ha messo in evidenza degli aspetti tecnici rilevanti nell'analisi che porteremo avanti anche nei prossimi capitoli. Abbiamo visto infatti che in queste teorie è possibile avere una degenerazione continua di vuoti gauge-inequivalenti, tanto a livello classico che a livello quantistico, ma che la struttura di questo *spazio dei moduli* può subire delle modifiche anche drastiche nel processo di quantizzazione. Inoltre abbiamo visto che le singolarità hanno un'interpretazione fisica in termini di particelle che diventano massless per particolari valori dei parametri, e anche questa interpretazione può differire tra la teoria classica e la sua versione quantizzata.

Capitolo 4

Soluzione di Seiberg-Witten della teoria $\mathcal{N} = 2$

In questo capitolo affrontiamo i risultati non perturbativi che si ottengono con la richiesta più forte di supersimmetria estesa $\mathcal{N} = 2$.

Nei due lavori di Seiberg e Witten ([19], [20], per una review si veda [21]) è stato mostrato come in questo caso oltre a determinare lo spazio dei moduli quantistico sia possibile calcolare esattamente l'azione effettiva in termini dei gradi di libertà a basse energie. L'ambiguità nella descrizione della fisica a basse energie prende la forma di una dualità elettro-magnetica ed è possibile mostrare esplicitamente che il confinamento e la rottura della simmetria chirale sono causati dalla condensazione di monopoli magnetici.

4.1 Algebra supersimmetrica $\mathcal{N} = 2$ e cariche centrali

Ricordiamo che l'algebra supersimmetrica nel caso in cui si abbiano \mathcal{N} supercariche è data da:

$$\begin{aligned} \{Q_\alpha^I, \bar{Q}_\beta^J\} &= 2\delta^{IJ}\sigma_{\alpha\beta}^\mu P_\mu \\ \{Q_\alpha^I, Q_\beta^J\} &= \epsilon_{\alpha\beta} Z^{IJ} & \{\bar{Q}_\alpha^I, \bar{Q}_\beta^J\} &= \epsilon_{\alpha\beta} Z^{*IJ} \end{aligned}$$
$$I, J = 1, \dots, \mathcal{N}$$

Le cariche centrali Z e Z^* sono matrici antisimmetriche negli indici I, J . Nel caso di \mathcal{N} pari è sempre possibile utilizzare una rotazione $U(\mathcal{N})$ tra le supercariche per portare la matrice Z nella forma $Z = \epsilon \otimes D$, dove ϵ è il tensore antisimmetrico 2×2 e D una matrice diagonale con $\mathcal{N}/2$ entrate. Inoltre D può essere presa reale.

Una volta effettuata questa diagonalizzazione, l'algebra $\mathcal{N} = 2$ assume la forma:

$$\begin{aligned} \{Q_\alpha^I, \bar{Q}_\beta^J\} &= 2\delta^{IJ}\sigma_{\alpha\dot{\beta}}^\mu P_\mu \\ \{Q_\alpha^I, Q_\beta^J\} &= \epsilon_{\alpha\beta}\epsilon^{IJ}Z \mathbf{1} & \{\bar{Q}_{\dot{\alpha}}^I, \bar{Q}_{\dot{\beta}}^J\} &= \epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\epsilon^{IJ}Z \mathbf{1} \\ I, J &= 1, 2 \end{aligned}$$

Il parametro reale Z è l'unico contributo dell'estensione centrale dell'algebra.

Definiamo:

$$a_\alpha = \frac{1}{2} \left(Q_\alpha^1 + \epsilon_{\alpha\beta} Q_\beta^{2*} \right), \quad b_\alpha = \frac{1}{2} \left(Q_\alpha^1 - \epsilon_{\alpha\beta} Q_\beta^{2*} \right)$$

Allora se andiamo nel sistema di riferimento del centro di massa in cui $P = (M, 0, 0, 0)$ in termini di a e b l'algebra si riscrive:

$$\{a_\alpha, a_\beta^*\} = \delta_{\alpha\beta} \left(M + \sqrt{2}Z \right), \quad \{b_\alpha, b_\beta^*\} = \delta_{\alpha\beta} \left(M - \sqrt{2}Z \right)$$

con tutti gli altri commutatori nulli.

Dalla positività degli operatori $a_1 a_1^*$ e $b_1 b_1^*$ deduciamo la disuguaglianza:

$$M \geq \sqrt{2}|Z|$$

Questa equazione ci dice che per un multipletto senza massa la carica centrale deve essere necessariamente nulla. Inoltre se il limite viene saturato $M = \sqrt{2}|Z|$ allora gli operatori a oppure i b sono rappresentati banalmente e la rappresentazione avrà dimensione più bassa, in modo analogo a quanto avverrebbe se non ci fosse la carica centrale e la massa si annullasse.

In effetti i multipletti che costituiscono una rappresentazione dell'algebra supersimmetrica vengono detti *multipletti corti* nel caso in cui abbiano massa nulla o che satura il limite dato dalla carica centrale, proprio perchè questi multipletti hanno un numero inferiore di gradi di libertà rispetto ai corrispondenti multipletti massivi con $M > \sqrt{2}|Z|$. Per maggiori dettagli riguardo le rappresentazioni dell'algebra supersimmetrica, con o senza supersimmetria, si veda ad esempio [1].

Un'osservazione importante per il seguito è che se la teoria a una certa scala è descritta in termini di gradi di libertà che saturano il limite, e quindi costituiscono un multipletto corto, e se la supersimmetria è una simmetria realizzata nella teoria quantistica, allora le correzioni quantistiche non possono modificare la relazione tra la massa e la carica centrale perchè questo modificherebbe il numero di gradi di libertà. Nel seguito vedremo che la carica centrale può essere messa in relazione a delle cariche conservate associate alla simmetria di gauge.

4.2 $\mathcal{N} = 2$ Super-Yang-Mills

Una rappresentazione locale dell'algebra supersimmetrica $\mathcal{N} = 2$ può essere realizzata estendendo il superspazio con l'aggiunta di un'ulteriore coordinata Grassman spinoriale, che corrisponda alla supercarica aggiuntiva. Il superspazio così esteso sarà dunque parametrizzato dalle coordinate $x_\mu, (\theta_\alpha, \bar{\theta}_{\dot{\alpha}}), (\vartheta_\alpha, \bar{\vartheta}_{\dot{\alpha}})$.

La versione $\mathcal{N} = 2$ della teoria di Yang-Mills si ottiene considerando un supercampo $\Psi(x_\mu, \theta, \bar{\theta}, \vartheta, \bar{\vartheta})$ che rispetta:

- (i) chiralità rispetto ad entrambe le variabili spinoriali: $\bar{D}_\alpha^I \Psi = 0$
- (ii) condizione di realtà: $D^{I\alpha} D^J_\alpha \Psi = \bar{D}_\alpha^I \bar{D}^{J\dot{\alpha}} \Psi^*$

dove abbiamo utilizzato degli indici I e J che scorrono tra θ e ϑ . Inoltre $\Psi = \Psi^a T^a$ prenderà valori nell'algebra di Lie del gruppo di gauge G i cui generatori abbiamo indicato con T^a .

Introducendo la variabile:

$$\tilde{y} \equiv x - i\theta\sigma\bar{\theta} - i\vartheta\sigma\bar{\vartheta} = y - i\vartheta\sigma\bar{\vartheta}$$

Per la condizione di chiralità Ψ dipenderà solo da \tilde{y} , θ e ϑ e ammetterà lo sviluppo:

$$\Psi(\tilde{y}, \theta, \vartheta) = \Phi(\tilde{y}, \theta) + \sqrt{2} W^\alpha(\tilde{y}, \theta) \vartheta_\alpha + G(\tilde{y}, \theta) \vartheta^2$$

dove Φ , W_α e G sono supercampi chirali sul superspazio $\mathcal{N} = 1$ parametrizzato da $(x_\mu, \theta, \bar{\theta})$. Imponendo la condizione di realtà, si trova che il campo W è esprimibile come la field-strength supersimmetrica di un supercampo reale V e il supercampo G è dipendente dagli altri due ([22]):

$$G(\tilde{y}, \theta) = \int d^2\bar{\theta} \left(e^{-2V} \Phi^\dagger e^{2V} \right) (\tilde{y} - i\vartheta\sigma\bar{\vartheta}, \theta, \bar{\theta})$$

I gradi di libertà contenuti nel supercampo Ψ sono dunque gli stessi di quelli contenuti in un supercampo chirale e uno reale $\mathcal{N} = 1$ e formano il cosiddetto *multipletto vettoriale* $\mathcal{N} = 2$. Dato che il campo Φ è nella rappresentazione aggiunta del gruppo di gauge, le componenti $\mathcal{N} = 1$ di Ψ hanno tutte lo stesso comportamento sotto trasformazioni di gauge:

$$(\Phi, W_\alpha, G) \rightarrow e^{-\Lambda} (\Phi, W_\alpha, G) e^\Lambda$$

Un'azione gauge e SUSY invariante e che sia al più quadratica nelle derivate dei campi sarà data da:

$$\begin{aligned}
S_{\mathcal{N}=2} &= \text{Re} \frac{\tau}{8\pi i} \int d^4 x \int d^2\theta d^2\vartheta \text{Tr}[\Psi^2] \\
&= \text{Re} \frac{\tau}{8\pi i} \int d^4 x \int d^2\theta 2\text{Tr}[W^2] + \frac{1}{g^2} \int d^4 x \int d^2\theta d^2\bar{\theta} 2\text{Tr}[\Phi^\dagger e^{2V} \Phi]
\end{aligned} \tag{4.1}$$

Dunque abbiamo ottenuto esattamente la forma di una teoria $\mathcal{N} = 1$ con materia nella rappresentazione aggiunta del gruppo di gauge. La supersimmetria estesa vincola la normalizzazione relativa tra il supercampo reale e quello chirale e impone che non ci sia nessun superpotenziale funzione del solo Φ . Per passare all'usuale normalizzazione della teoria perturbativa occorre il riscaldamento $(\Phi, V) \rightarrow g(\Phi, V)$.

Il vantaggio nell'aver introdotto il formalismo del superspazio $\mathcal{N} = 2$ sta nella possibilità di determinare facilmente la forma dell'azione se viene rilassata la condizione di rinormalizzabilità. Infatti affinché l'azione sia SUSY invariante ci basta richiedere che la lagrangiana sia la componente $\theta^2\vartheta^2$ di un supercampo chirale rispetto a entrambe le variabili Grassman. Questo ci lascia la libertà di rimpiazzare $\frac{\tau}{2}\text{Tr}[\Psi^2]$ con una generica funzione olomorfa $\mathcal{F}(\Psi)$, che viene detta *prepotenziale*.

In termini delle componenti $\mathcal{N} = 1$ l'azione effettiva corrispondente sarà:

$$\begin{aligned}
S_{\mathcal{N}=2}^{eff} &= \text{Re} \frac{1}{4\pi i} \left(\frac{1}{2} \int d^4 x \int d^2\theta \partial_a \partial_b \mathcal{F}(\Phi) W^a W^b \right. \\
&\quad \left. + \int d^4 x \int d^2\theta d^2\bar{\theta} \partial_a \mathcal{F}(\Phi) \left(\Phi^\dagger e^{2V} \right)^a \right)
\end{aligned} \tag{4.2}$$

La soluzione di Seiberg-Witten consiste proprio nella determinazione esatta della funzione olomorfa \mathcal{F} nella teoria con gruppo di gauge $SU(2)$. Nel seguito ci restringeremo al caso di $SU(2)$.

4.2.1 Simmetrie globali

Fissiamo la notazione per i campi componenti del multipletto vettoriale $\mathcal{N} = 2$: al supercampo chirale Φ corrispondono (ϕ, ψ_α) rispettivamente scalare complesso e fermione di Weyl e al supercampo reale V corrispondono (nella gauge di Wess Zumino) (V_μ, λ_α) vettore e fermione di Weyl. V_μ è il bosone di gauge della teoria e i suoi "partner" $(\psi_\alpha, \lambda_\alpha, \phi)$ sono tutti nella rappresentazione aggiunta del gruppo di gauge.

Come per tutte le teorie con supersimmetria $\mathcal{N} = 2$, una simmetria globale $SU(2)_R$ di questa teoria deriva dall'automorfismo dell'algebra supersimmetrica che ruota tra loro le due supercariche. A livello di campi componenti questa trasformazione lascia invariati i campi V_μ e ϕ mentre ruota tra loro i due spinori di Weyl ψ e λ . Abbiamo inoltre la simmetria globale $U(1)_R$ che moltiplica per la stessa fase le due cariche supersimmetriche.

Riportiamo l'azione di $U(1)_R$ e di $U(1)_J \subset SU(2)_R$ in termini dei supercampi

$\mathcal{N} = 1$:

$$\begin{array}{ll} \text{U}(1)_R & \text{U}(1)_J \\ \Phi \longrightarrow e^{2i\alpha}\Phi(e^{-i\alpha}\theta) & \Phi \longrightarrow \Phi(e^{-i\alpha}\theta) \\ V \longrightarrow V(e^{-i\alpha}\theta) & V \longrightarrow V(e^{-i\alpha}\theta) \end{array}$$

ovvero sulle componenti:

$$\begin{array}{ll} \text{U}(1)_R & \text{U}(1)_J \\ \phi \longrightarrow e^{2i\alpha}\phi & \phi \longrightarrow \phi \\ \psi \longrightarrow e^{i\alpha}\psi & \psi \longrightarrow e^{-i\alpha}\psi \\ V_\mu \longrightarrow V_\mu & V_\mu \longrightarrow V_\mu \\ \lambda \longrightarrow e^{i\alpha}\lambda & \lambda \longrightarrow e^{i\alpha}\lambda \end{array}$$

Notiamo che mentre per $\text{U}(1)_J$ i contributi di ψ e λ all'anomalia si cancellano, per $\text{U}(1)_R$ si sommano dando luogo a un risultato non nullo. Di conseguenza a livello quantistico la simmetria $\text{U}(1)_R$ è rotta dall'anomalia a un sottogruppo discreto. Per determinare il sottogruppo ricordiamo che la rotazione chirale di due fermioni di Weyl nella rappresentazione aggiunta del gruppo di gauge agisce sulla lagrangiana traslando il parametro θ_{YM} :

$$\theta_{YM} \rightarrow \theta_{YM} - 4N_c\alpha$$

La 2π -periodicità in θ_{YM} ci dice che quantisticamente possiamo restringerci ai valori di α della forma $2k\pi/4N_c$ con $k \in \mathbb{Z}$, ovvero la simmetria $\text{U}(1)_R$ è rotta a \mathbb{Z}_{4N_c} . Dato che $\text{SU}(2)_R$ e \mathbb{Z}_{4N_c} hanno uno \mathbb{Z}_2 in comune, la simmetria globale della teoria quantistica sarà:

$$\text{SU}(2) \otimes \mathbb{Z}_{4N_c}/\mathbb{Z}_2$$

Nel nostro caso $N_c = 2$ e abbiamo $\text{SU}(2) \otimes \mathbb{Z}_8/\mathbb{Z}_2$.

4.2.2 Spazio dei moduli

L'azione (4.1) contiene un potenziale per il campo scalare ϕ , che in assenza di superpotenziale sarà dato solo dai termini D :

$$V(\phi, \phi^\dagger) = \frac{1}{2g^2} \text{Tr} \left[[\phi, \phi^\dagger]^2 \right]$$

I vuoti classici supersimmetrici sono dati dalla condizione di annullamento del termine D :

$$[\phi, \phi^\dagger] = 0$$

A meno di trasformazioni di gauge questo ci permette di prendere ϕ della forma:

$$\phi = \frac{1}{2}a\sigma_3$$

dove a è un parametro in \mathbb{C} . Aver scelto questa forma per ϕ non fissa completamente la gauge perchè abbiamo ancora un'invarianza residua (*riflessione di Weyl*) che agisce come una simmetria discreta \mathbb{Z}_2 sul parametro: $a \rightarrow -a$. Come vero parametro che corrisponda in modo biunivoco ai vuoti (classici) gauge inequivalenti si può considerare:

$$u \equiv \frac{1}{2}\text{Tr}[\phi^2] = \frac{1}{2}a^2$$

Pertanto questa teoria almeno classicamente ha uno spazio dei moduli parametrizzato da u . Per $u \neq 0$ la simmetria di gauge è rotta a $U(1)$ e nel punto $u = 0$ viene ripristinato l'intero $SU(2)$. In questo punto dei bosoni di gauge diventano massless e ci aspettiamo una singolarità sullo spazio dei moduli classico.

Dato che la supersimmetria estesa impedisce che nel processo di quantizzazione vengano generati termini di superpotenziale, questa degenerazione di vuoti non può essere rimossa dalle correzioni e avremo anche uno spazio dei moduli quantistico, parametrizzato dal $u \equiv \langle \frac{1}{2}\text{Tr}[\phi^2] \rangle$. Come nel caso classico in un punto generico dello spazio dei moduli la simmetria di gauge residua sarà $U(1)$. Questo è piuttosto differente da quello che abbiamo visto per la SQCD $\mathcal{N} = 1$, in cui in un punto generico dello spazio dei moduli non c'era alcuna simmetria di gauge residua.

La teoria effettiva che descrive i gradi di libertà leggeri in un generico punto dello spazio dei moduli sarà pertanto una teoria $U(1)$ costruita in termini di un multipletto vettoriale $\mathcal{N} = 2$ le cui componenti $\mathcal{N} = 1$ indichiamo con (A, W_α) . Come abbiamo visto in (4.2) l'azione sarà determinata da una singola funzione olomorfa \mathcal{F} :

$$S_{eff} = \text{Re} \frac{1}{4\pi i} \left(\frac{1}{2} \int d^4x \int d^2\theta \mathcal{F}''(A) W^2 + \int d^4x \int d^2\theta d^2\bar{\theta} \mathcal{F}'(A) A^* \right) \quad (4.3)$$

Nella regione semiclassica di grande u una buona scelta per A è data dall'Higgs $A = \text{Tr}[\sigma_3\Phi]$, in modo che $\langle A \rangle = a$. La funzione \mathcal{F} induce la metrica con cui costruiamo i termini cinetici dei campi componenti:

$$ds^2 \equiv \text{Im}\tau(a) da d\bar{a}, \quad \tau(a) \equiv \mathcal{F}''(a)$$

Notiamo che il VEV non nullo $u = \langle \text{Tr}[\phi^2] \rangle$ rompe spontaneamente la simmetria discreta \mathbb{Z}_8 in \mathbb{Z}_4 . Questo ci dice che abbiamo una trasformazione di parità \mathbb{Z}_2 : $u \rightarrow -u$ sullo spazio dei moduli che, pur agendo in modo non banale sui vuoti, è una simmetria della teoria.

4.2.3 Carica centrale e cariche elettromagnetiche

Avendo fissato la rappresentazione dell'algebra supersimmetrica sul multipletto vettoriale, il valore della carica centrale nella nostra rappresentazione può essere calcolato direttamente a partire dall'espressione delle supercariche. Gli operatori che rappresentano le supercariche saranno dati da integrali spaziali di particolari funzionali dei campi componenti. Questi funzionali possono essere calcolati tramite il teorema di Noether come componenti temporali delle correnti associate alla supersimmetria (*supercorrenti*):

$$\begin{aligned}\delta_{\epsilon, \bar{\epsilon}}^I \mathcal{L} &= \partial^\mu S_\mu^I = \partial^\mu (S_\mu^{I\alpha} \epsilon_\alpha + c.c.) \\ Q_\alpha^I &= \int d^3x S_{0\alpha}^I\end{aligned}$$

dove $I = 1, 2$ è un indice che scorre tra le due supercariche, ovvero l'indice su cui agisce la trasformazione $SU(2)_R$.

Una volta individuata la forma funzionale delle supercariche nella rappresentazione fissata, i loro anticommutatori possono essere calcolati sfruttando le regole canoniche a tempi uguali per i campi componenti. Come mostrato in [23], il risultato di questo calcolo è che la carica centrale riceve contributo solo da termini di bordo:

$$\{Q_\alpha^1, Q_\beta^2\} = -2\sqrt{2}\epsilon_{\alpha\beta} \int d^3x \vec{\nabla} \cdot [(\vec{B}^a + i\vec{E}^a)\phi^{\dagger a}]$$

dove a è l'indice della rappresentazione aggiunta e E e B sono gli equivalenti non abeliani dei campi elettrici e magnetici definiti in termini della field-strength G come:

$$E_i^a = G_{0i}^a, \quad B_i^a = -\frac{1}{2}\epsilon_{ijk}G_{jk}^a$$

Le combinazioni:

$$\vec{\mathcal{E}} = \frac{1}{a}\vec{E}^a\phi^{\dagger a}, \quad \vec{\mathcal{B}} = \frac{1}{a}\vec{B}^a\phi^{\dagger a}$$

individuano il campo elettrico e magnetico della teoria $U(1)$ residua a basse energie nel punto dello spazio dei moduli classico dato da $\text{Tr}[\phi^2] = \frac{1}{2}a^2$.

Pertanto il termine di bordo che dà il valore di Z è una combinazione lineare dei flussi del campo elettrico e del campo magnetico a basse energie attraverso la superficie all'infinito, ovvero delle cariche elettrica q_e e magnetica q_m della soluzione:

$$Z = -ia(q_e + iq_m)$$

Stiamo ammettendo che la teoria $U(1)$ presenti dei *monopoli magnetici*, ovvero configurazioni dei campi con una carica magnetica netta non nulla. Se la teoria $U(1)$ descrive i gradi di libertà elementari, allora una tale configurazione deve incorrere necessariamente in una singolarità, perchè le equazioni $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ e $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} \neq 0$

sarebbero incompatibili se \vec{A} fosse ben definito globalmente.

Nel caso in esame si tratta però di una teoria effettiva di basse energie e i gradi di libertà aggiuntivi dei bosoni di gauge massivi permettono di evitare la singolarità. Per una trattazione dei monopoli magnetici nelle teorie di gauge rotte spontaneamente si veda [24]. In queste teorie possono esistere anche configurazioni che hanno sia una carica magnetica che una carica elettrica, che vengono dette *dioni*. Si può mostrare che la carica elettrica e magnetica di un dione non possono essere arbitrarie ma devono rispettare una condizione di quantizzazione ([25]):

$$(q_e + iq_m) = (n_e + \tau n_m), \quad n_e, n_m \in \mathbb{Z}$$

dove $\tau = \frac{\theta_{YM}}{2\pi} + \frac{4\pi i}{g^2}$ è il coupling complesso della teoria SU(2) che si rompe in U(1). Il limite che viene dall'algebra supersimmetrica vincola la massa del dione:

$$M \geq \sqrt{2}|a(n_e + \tau n_m)|$$

La relazione $Z = a(n_e + \tau n_m)$ ora è scritta in termini del parametro τ della teoria microscopica, nei prossimi paragrafi vedremo come correggerla a livello della teoria effettiva.

4.2.4 Forma delle correzioni al prepotenziale

Analogamente a quanto fatto nel capitolo precedente per $\mathcal{N} = 1$ SYM (vedi l'equazione (3.6)), vogliamo sfruttare la proprietà di olomorfia e di simmetria $U(1)_R$ per ottenere dei vincoli sulla forma della funzione olomorfa \mathcal{F} . Seguiamo l'approccio di Seiberg ([26]).

L'azione della simmetria $U(1)_R$ sul supercampo $\mathcal{N} = 2$ Ψ è :

$$\Psi \rightarrow e^{2i\alpha} \Psi(e^{-i\alpha}\theta, e^{-i\alpha}\vartheta)$$

Determiniamo dapprima le possibili correzioni perturbative. L'azione efficace perturbativa è invariante sotto $U(1)_R$ ma la lagrangiana, a causa dell'anomalia, viene traslata di una derivata totale:

$$\delta_\alpha \mathcal{L}_{eff}^{pert} = -8\alpha \left(\frac{1}{32\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma} \right) \quad (4.4)$$

Ricordando che la lagrangiana efficace è della forma $\mathcal{F}|_{\theta^2, \vartheta^2}$, la condizione su \mathcal{F}^{pert} è che abbia carica 4 sotto $U(1)_R$ e contenga un termine che trasforma in modo disomogeneo in modo da riprodurre la (4.4).

Questo fissa la forma di \mathcal{F}^{pert} :

$$\mathcal{F}^{pert} = \frac{2\pi i}{g^2} \Psi^2 \left[A_1 + A_2 \log \frac{\Psi^2}{\Lambda^2} \right]$$

La possibilità di ridefinire la costante Λ permette di scegliere $A_1 = 1$ (che equivale a fissare $\theta_{YM} = 0$ tramite una rotazione chirale) e per riprodurre il prefattore della (4.4) dobbiamo prendere $A_2 = \frac{g^2}{4\pi}$. Il primo di questi due termini è quello classico $\frac{\tau}{2} \Psi^2$ mentre il secondo è una correzione a un loop e non ci sono altre correzioni in teoria perturbativa.

Ricordiamo che la costante di accoppiamento efficace alla scala a è data da:

$$\tau(a) = \frac{4\pi i}{g^2(a)} = \mathcal{F}''(a)$$

e quindi differenziando due volte l'espressione per \mathcal{F}^{pert} possiamo ricavare la funzione beta esatta in teoria perturbativa:

$$\beta^{pert}(g) = -\frac{g^3}{4\pi^2}$$

che come atteso si esaurisce a un loop. La corrispondente scala dinamicamente generata è $\Lambda \equiv \mu e^{-\frac{2\pi^2}{g^2(\mu)}}$.

Oltre alle correzioni perturbative possiamo avere contributi non perturbativi al prepotenziale efficace, nella forma di correzioni k-instantoniche:

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}^{pert} + \sum_{k \geq 1} \mathcal{F}_k$$

dove abbiamo incluso solo una somma sui k positivi perchè il fattore instantonico $e^{-S_{inst}^E}$ è proporzionale a Λ^4 e vogliamo riottenere il risultato perturbativo nel limite di accoppiamento debole $\Lambda \rightarrow 0$. A livello non perturbativo la simmetria $U(1)_R$ è rotta dagli instantoni in \mathbb{Z}_8 , in particolare il termine k -esimo violerà la simmetria $U(1)_R$ di $8k$ unità:

$$\mathcal{F}_k \rightarrow e^{-8iak} e^{4i\alpha} \mathcal{F}_k$$

Questo fissa la dipendenza di \mathcal{F}_k da Ψ :

$$\mathcal{F}_k = c_k \Psi^2 \left(\frac{\Lambda}{\Psi} \right)^{4k}$$

e in definitiva abbiamo:

$$\mathcal{F} = \frac{2\pi i}{g^2} \Psi^2 \left[1 - \frac{g^2}{4\pi^2} \log \frac{\Psi^2}{\Lambda^2} \right] + \sum_{k \geq 1} c_k \Psi^2 \left(\frac{\Lambda}{\Psi} \right)^{4k}$$

La soluzione di Seiberg-Witten permette di determinare tutti i coefficienti c_k .

4.2.5 Dualità

Come abbiamo visto, la metrica con cui costruiamo i termini cinetici dei campi nella teoria $U(1)$ effettiva è data da:

$$ds^2 = \text{Im}\tau(a)da d\bar{a}, \quad \tau(a) = \mathcal{F}''(a)$$

Se $a = a(u)$ fosse definito globalmente sullo spazio dei moduli, allora avrei che $\text{Im}\tau(a(u))$ sarebbe una funzione armonica su tutto il piano u e di conseguenza non potrebbe essere definita positiva. Dunque per avere termini cinetici con il giusto segno è necessario che a sia singolare in qualche punto dello spazio dei moduli e la parametrizzazione non sia globale.

Per mettere in luce l'ambiguità nella definizione del parametro, ammettiamo che a sia una funzione generica della u e definiamo $a_D(u) = \mathcal{F}'(a(u))$. Da questa definizione segue che $\tau = \frac{da_D}{da}$ e possiamo riscrivere la metrica nella forma:

$$ds^2 = \text{Im}da_D d\bar{a} = -\frac{i}{2} \left(\frac{da_D}{du} \frac{d\bar{a}}{d\bar{u}} - \frac{da}{du} \frac{d\bar{a}_D}{d\bar{u}} \right) dud\bar{u} \quad (4.5)$$

Se scegliamo $u = a$ come parametro locale sullo spazio dei moduli, allora ritroviamo esattamente la versione precedente della metrica. Se però ad esempio decidiamo di usare $u = a_D$ come parametro, questo ammonta a fare una trasformata di Legendre del prepotenziale $\mathcal{F}(a) \rightarrow \mathcal{F}_D(a_D)$ e abbiamo $\tau_D = \mathcal{F}''_D = -\frac{1}{\tau}$.

Più in generale l'espressione (4.5) della metrica è invariante sotto la trasformazione:

$$\begin{pmatrix} a_D \\ a \end{pmatrix} \rightarrow M \begin{pmatrix} a_D \\ a \end{pmatrix}$$

con $M \in \text{SL}(2, \mathbb{R})$. Una generica matrice M di $\text{SL}(2, \mathbb{R})$ può essere scritta come un opportuno prodotto di matrici della forma:

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad T_b = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b \in \mathbb{R}$$

L'azione di queste due trasformazioni è data da:

$$\begin{aligned} T_b : \begin{pmatrix} a_D \\ a \end{pmatrix} &\rightarrow \begin{pmatrix} a_D + ba \\ a \end{pmatrix} &\Rightarrow \tau \rightarrow \tau + b \\ S : \begin{pmatrix} a_D \\ a \end{pmatrix} &\rightarrow \begin{pmatrix} a \\ -a_D \end{pmatrix} &\Rightarrow \tau \rightarrow -\frac{1}{\tau} \end{aligned}$$

La trasformazione T_b trasla il parametro θ_{YM} di $2\pi b$. Pertanto dobbiamo richiedere che sia $b \in \mathbb{Z}$ e questo riduce la libertà di riparametrizzazione da $\text{SL}(2, \mathbb{R})$ a $\text{SL}(2, \mathbb{Z})$.

La trasformazione S ha invece l'interpretazione di *dualità elettro-magnetica*, ovvero scambia cariche elettriche e cariche magnetiche e i rispettivi campi. Per vedere che in effetti è così concentriamoci sulla parte di pura gauge dell'azione e riscriviamola in termini della field-strength $F = dV$ e del suo duale \tilde{F} (con componenti $\tilde{F}_{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}F^{\rho\sigma}$) come:

$$S_G(V) = - \int \text{Im} \frac{\tau}{32\pi} (F - i\tilde{F})^2 = - \frac{1}{16\pi} \int \text{Im}(\tau(F^2 - i\tilde{F}F))$$

Vogliamo interpretare F come campo elementare. A tal fine per implementare il vincolo su F dato dall'identità di Bianchi $dF = 0$ dobbiamo introdurre un campo ausiliario V_D che ha il ruolo di moltiplicatore di Lagrange:

$$S_G(F) = - \int \text{Im} \frac{\tau}{32\pi} (F - i\tilde{F})^2 + C \int V_D dF = - \int \text{Im} \frac{\tau}{32\pi} (F - i\tilde{F})^2 - C \int (dV_D)F$$

Notiamo che per come è stato introdotto nell'azione, il campo V_D si accoppia alla corrente magnetica con un termine del tipo $V_D^\mu \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\nu F_{\rho\sigma}$ del tutto analogo all'usuale accoppiamento $V^\mu J_\mu$ con la corrente elettrica. Per avere una corretta normalizzazione della carica magnetica prediamo $C = \frac{1}{8\pi}$.

Definiamo $F_D = dV_D$ e all'interno dell'integrale funzionale svolgiamo l'integrale gaussiano in F . L'azione che troviamo è quadratica in F_D :

$$S_G(V_D) = \int d^4x \text{Im} \left[\frac{1}{32\pi\tau} (F_D - i\tilde{F}_D)^2 \right]$$

ed ha la stessa dipendenza da V_D che aveva l'azione di partenza, con la sostituzione:

$$\tau \rightarrow \tau_D = -\frac{1}{\tau}$$

Notiamo che la dualità elettromagnetica, invertendo la costante di accoppiamento, mappa una teoria fortemente accoppiata in una debolmente accoppiata e viceversa.

Se consideriamo l'azione (4.3) scritta in termini dei supercampi $\mathcal{N} = 1$, abbiamo che la trasformazione di dualità agisce sulla parte della field-strength supersimmetrica come:

$$\text{Re} \frac{1}{8\pi i} \int d^2\theta \tau(A) W^2 \longrightarrow \text{Re} \frac{1}{8\pi i} \int d^2\theta \left(-\frac{1}{\tau(A)} \right) W_D^2$$

dove W_D è la field-strength duale che contiene i campi di gauge che si accoppiano alle cariche magnetiche. Per la parte del supercampo chirale A la trasformazione S mappa A in $A_D = \mathcal{F}'(A)$. Considerando la trasformata di Legendre $\mathcal{F}_D(A_D)$ abbiamo che $\mathcal{F}'_D = -A$ e questo ci permette di riscrivere:

$$\text{Re} \frac{1}{4\pi i} \int d^2\theta d^2\bar{\theta} \mathcal{F}'(A) A^* = \text{Re} \frac{1}{4\pi i} \int d^2\theta d^2\bar{\theta} \mathcal{F}'_D(A_D) A_D^*$$

In definitiva abbiamo che il gruppo di dualità della teoria a basse energie è quello generato dalle trasformazioni:

- (i) traslazione di 2π di θ_{YM} : $\tau \rightarrow \tau + 1$
- (ii) dualità elettromagnetica: $\tau \rightarrow -\frac{1}{\tau}$

che insieme generano l'intero $SL(2, \mathbb{Z})$:

$$\tau \rightarrow \frac{a\tau + b}{c\tau + d}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{Z}, \quad ad - bc = 1$$

Mentre (i) è una vera e propria simmetria della teoria, la (ii) è il passaggio da una descrizione della teoria a un'altra descrizione equivalente. L'esistenza di questa dualità è dunque conseguenza dell'ambiguità nella scelta dei gradi di libertà per descrivere la fisica a basse energie.

4.2.6 Massa dei dioni

Come accennato in 4.2.3 nello spettro della teoria effettiva $U(1)$ a basse energie oltre ai gradi di libertà massless del multipletto vettoriale $\mathcal{N} = 2$ potremmo avere delle eccitazioni massive che portano una carica elettrica e/o magnetica. La supersimmetria estesa vincola queste eccitazioni a organizzarsi in multipletti $\mathcal{N} = 2$ che vengono detti *ipermultipletti*: a livello di supercampi $\mathcal{N} = 1$ un ipermultipletto è descritto da una coppia di supercampi chirali (Q, \tilde{Q}) con carica opposta.

Vogliamo discutere quali informazioni possiamo trarre sulla massa di queste eccitazioni in un punto generico dello spazio dei moduli rimanendo nell'ambito della teoria effettiva e sfruttando i vincoli della supersimmetria estesa. A tal fine supponiamo di avere nello spettro un tale ipermultipletto di materia che porta una carica elettrica n_e sotto l' $U(1)$ a basse energie. Il fatto che sia carico solo elettricamente ci dice che interagirà con i campi di gauge elettrici (A, W_α) . La supersimmetria estesa vincola l'interazione tra l'ipermultipletto e il multipletto vettoriale al seguente termine di superpotenziale:

$$\sqrt{2}n_e(A + c)Q\tilde{Q}$$

Se richiediamo anche che questa interazione si possa immergere nella teoria microscopica $SU(2)$ allora l'arbitrarietà di traslare il supercampo A viene eliminata e la costante c fissata a $c = 0$.

Da questo termine di interazione leggiamo che nel punto dello spazio dei moduli in cui $\langle A \rangle = a$ l'ipermultipletto acquista una massa:

$$M = \sqrt{2}n_e a$$

Analogamente se avessimo considerato dei gradi di libertà carichi magneticamente e avessimo scritto l'interazione con $(A_D, W_{D\alpha})$ avremmo trovato per la massa del

monopolo: $M = \sqrt{2}n_m a_D$.

Dato che questi gradi di libertà con cariche elettriche/magnetiche formano multipletti corti dell'algebra supersimmetrica, da queste espressioni per le masse possiamo leggere il valore della carica centrale in queste rappresentazioni, che nei due casi è rispettivamente dato da $Z = a n_e$ e $Z = a_D n_m$. Più in generale per un dione avremo perciò:

$$Z = a n_e + a_D n_m$$

Dato che come abbiamo osservato la relazione tra massa e carica centrale non può subire correzioni quantistiche, quella che abbiamo ottenuto è la forma esatta della carica centrale nella teoria effettiva. Notiamo che la carica centrale è invariante sotto una trasformazione del gruppo di dualità e da questo possiamo ricavare come trasformano le cariche:

$$\begin{pmatrix} a_D \\ a \end{pmatrix} \rightarrow M \begin{pmatrix} a_D \\ a \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} n_m \\ n_e \end{pmatrix} \rightarrow (M^{-1})^T \begin{pmatrix} n_m \\ n_e \end{pmatrix}$$

Questo ci permette di ridimostrare che, sebbene le trasformazioni che lasciano invariata la metrica siano tutte quelle della forma:

$$\begin{pmatrix} a_D \\ a \end{pmatrix} \rightarrow M \begin{pmatrix} a_D \\ a \end{pmatrix} + c, \quad M \in \text{SL}(2, \mathbb{R})$$

il vero gruppo di dualità sia solo il sottogruppo con $c = 0$ e $M \in \text{SL}(2, \mathbb{Z})$. Inoltre da come trasformano le cariche si vede che S agisce proprio come una dualità elettromagnetica.

4.2.7 Singolarità e monodromie

Come abbiamo accennato in 4.2.5, la parametrizzazione della metrica in termini di (a, a_D) non può essere estesa globalmente sul piano u ma viceversa dobbiamo aspettarci che le funzioni $a(u)$ e $a_D(u)$ presentino delle singolarità. Se ci spostiamo attorno al punto singolare lungo una curva sul piano u , passiamo da una parametrizzazione ad un'altra e questo cambio di variabili deve agire come una matrice di $\text{SL}(2, \mathbb{Z})$ su (a, a_D) . La trasformazione che subiscono le funzioni girando attorno alla singolarità viene detta *monodromia*.

Per convincerci dell'esistenza di singolarità con monodromia non banale, consideriamo la regione semiclassica $u \rightarrow \infty$ dello spazio dei moduli. In questa regione possiamo ritenere affidabili le relazioni perturbative:

$$u = \frac{1}{2}a(u)^2, \quad a_D(u) = \mathcal{F}^{\text{pert}}(a(u)) = a(u) \left(\frac{4\pi i}{g^2} + \frac{1}{2\pi} 4\pi i \log(a(u)) \right)$$

da cui leggiamo che girando una volta lungo il cerchio all'infinito sul piano u le funzioni subiscono la trasformazione:

$$\begin{pmatrix} a_D \\ a \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -a_D + 2a \\ -a \end{pmatrix} \equiv M_\infty \begin{pmatrix} a_D \\ a \end{pmatrix}$$

dove:

$$M_\infty = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in \text{SL}(2, \mathbb{Z})$$

è la matrice di monodromia attorno a infinito che correttamente è contenuta nel gruppo di dualità.

Il fatto di aver trovato una M_∞ non banale implica che necessariamente debbano esistere delle singolarità in qualche punto del piano u , le cui matrici di monodromia si dovranno comporre in modo da riprodurre M_∞ . Classicamente abbiamo una sola singolarità in $u = 0$ associata al fatto che l'intera simmetria di gauge è ripristinata e dei multipletti vettoriali diventano massless. Nella teoria quantistica però non è possibile avere una sola singolarità perchè questo permetterebbe di estendere la funzione a all'intero piano u privato della singolarità, e questo sarebbe incompatibile con la positività della metrica. Inoltre esistono argomenti, legati all'invarianza superconforme della teoria in cui la simmetria di gauge è ripristinata, che permettono di escludere la possibilità che anche a livello quantistico siano i campi di gauge a diventare massless nelle singolarità (si veda [19] per maggiori dettagli su questo punto). Questo ci porta a prendere in considerazione l'idea che ci siano altre eccitazioni leggere nella teoria a basse energie che diventino massless in corrispondenza delle singolarità, che devono essere almeno due e collegate dalla simmetria $\mathbb{Z}_2 : u \rightarrow -u$.

Sappiamo che nello spettro della nostra teoria esistono eccitazioni solitoniche che portano carica magnetica ed è quindi naturale ipotizzare che siano questi gradi di libertà a diventare massless causando la singolarità. L'ansatz di Seiberg e Witten è che esistano due singolarità di questo tipo in u_0 e $-u_0$ (il valore di u_0 dipende dallo schema). Supponendo che la singolarità in u_0 sia dovuta a un monopolo con carica $(n_m, n_e) = (1, 0)$, possiamo sfruttare la libertà di riparametrizzazione per studiare la teoria in prossimità della singolarità scegliendo a_D come parametro locale in modo che la particella carica si accoppi in modo locale ai campi di gauge. La costante di accoppiamento sarà data da $\tau_D = -\frac{1}{\tau}$. Ricordando la formula di massa per il multipletto corto del monopolo:

$$M = \sqrt{2}a_D$$

otteniamo che deve essere $a_D(u_0) = 0$. Usando il running a un loop della funzione beta per la versione $\mathcal{N} = 2$ della QED:

$$\beta_{QED}^{1loop}(g) = \frac{g^3}{8\pi^2}$$

e ricordando che $\tau_{Def} = \frac{4\pi i}{g_{eff}^2}$, siamo in grado di calcolare l'andamento vicino alla singolarità: $\tau_{Def} \sim -\frac{i}{\pi} \log a_D$. Abbiamo che $\tau_{Def} = \mathcal{F}_D''(a_D)$ e $a = -\mathcal{F}_D'(a_D)$, quindi otteniamo anche l'andamento di a :

$$a \sim a_0 + \frac{i}{\pi}(a_D \log a_D - a_D)$$

Sviluppando per u vicino a u_0 , $a_D \sim c(u-u_0)$ e facendo un giro: $u-u_0 \rightarrow e^{2\pi i}(u-u_0)$ troviamo la monodromia attorno alla singolarità del monopolo:

$$\begin{pmatrix} a_D \\ a \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a_D \\ a - 2a_D \end{pmatrix} \equiv M_{u_0} \begin{pmatrix} a_D \\ a \end{pmatrix}$$

dove:

$$M_{u_0} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \in \text{SL}(2, \mathbb{Z})$$

è la corrispondente matrice di monodromia.

Attorno a $-u_0$ sfruttiamo la condizione di chiusura del gruppo di monodromia:

$$M_{u_0} M_{-u_0} = M_\infty \Rightarrow M_{-u_0} = M_{u_0}^{-1} M_\infty = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Per determinare che tipo di monopolo/dione diventi massless in $-u_0$ notiamo che la carica deve essere lasciata invariata dalla corrispondente monodromia, come avviene anche per il monopolo in u_0 . Otteniamo:

$$q_{-u_0} M_{-u_0} = q_{-u_0} \Rightarrow q_{-u_0} = (1, -1)$$

Dunque in questo caso è un dione $(1, -1)$ a diventare massless. Notiamo che il comportamento vicino alla singolarità del dione è analogo a quello vicino alla singolarità del monopolo ma con la sostituzione $a_D \rightarrow a - a_D$.

Con questo ansatz abbiamo dunque determinato completamente la struttura delle singolarità e delle relative monodromie sullo spazio dei moduli quantistico e abbiamo individuato i gradi di libertà leggeri in prossimità dei punti singolari. Grazie all'ambiguità nella parametrizzazione dei campi di gauge della teoria $U(1)$ residua, che prende la forma di una dualità elettro-magnetica, siamo sempre in grado di individuare una lagrangiana effettiva che accoppi localmente le eccitazioni leggere ai campi di gauge e la teoria risultante è debolmente accoppiata in prossimità delle singolarità.

4.2.8 Confinamento nella teoria $\mathcal{N} = 1$

Se aggiungiamo al superpotenziale un termine di massa $\mu \text{Tr}[\Phi^2]$, la supersimmetria è rotta da $\mathcal{N} = 2$ a $\mathcal{N} = 1$. A basse energie Φ può essere integrato via e rimaniamo con una teoria $SU(2)$ di pura gauge supersimmetrica $\mathcal{N} = 1$. Dall'analisi fatta nel capitolo precedente sappiamo che questa teoria ha due vuoti che esibiscono confinamento e mass gap e che rompono spontaneamente la simmetria chirale \mathbb{Z}_4 in \mathbb{Z}_2 . Vediamo in che modo possiamo riprodurre questi risultati dalla teoria con supersimmetria estesa.

A livello della teoria effettiva, la massa $\mu \text{Tr}[\Phi^2]$ produrrà un nuovo termine nel superpotenziale efficace del tipo μU , dove con U abbiamo indicato il supercampo chirale che rappresenta $\text{Tr}[\Phi^2]$ nella teoria a basse energie. Notiamo che $\langle U \rangle$ coincide proprio con u , il parametro olomorfo sullo spazio dei moduli. Il nuovo termine dunque rimuove la degenerazione continua di vuoti e potenzialmente genera anche il termine di massa per il supercampo scalare della teoria a basse energie. Perché ci sia effettivamente mass gap è necessario che anche il supercampo di gauge acquisti una massa. In base alle osservazioni fatte nel paragrafo precedente, è naturale cercare di spiegare l'insorgere della massa per i campi di gauge come una conseguenza dell'esistenza di altra materia leggera carica che dia luogo ad un fenomeno di Higgs.

In prossimità della singolarità in cui il monopolo diventa massless passiamo alla parametrizzazione A_D per i campi di gauge in modo che l'ipermultipletto del monopolo (M, \tilde{M}) accoppi in maniera locale e abbiamo il seguente superpotenziale efficace:

$$\mathcal{W}_{eff} = \sqrt{2} A_D M \tilde{M} + \mu U(A_D)$$

Le equazioni per il vuoto sono date dalla condizione di stazionarietà del superpotenziale:

$$\begin{cases} \sqrt{2} M \tilde{M} + \mu U'(A_D) = 0 \\ A_D M = A_D \tilde{M} = 0 \end{cases}$$

e dato che abbiamo anche i campi carichi M dobbiamo aggiungere la condizione che viene dai termini D: $|M| = |\tilde{M}|$.

Se $\mu = 0$ l'unica soluzione è data da $\langle M \rangle = \langle \tilde{M} \rangle = 0$ con $u = \langle U \rangle$ arbitrario, e ritroviamo lo spazio dei moduli della teoria $\mathcal{N} = 2$. Se però $\mu \neq 0$, allora otteniamo:

$$a_D = \langle A_D \rangle = 0, \quad \langle M \rangle = \langle \tilde{M} \rangle = \left(-\frac{\mu}{\sqrt{2}} u'(0) \right)^{\frac{1}{2}}$$

ovvero il vuoto coincide esattamente con la singolarità della teoria $\mathcal{N} = 2$ e il monopolo ha un VEV non nullo. In questo modello dunque si realizza il confinamento à la 't Hooft-Mandelstam indotto dalla condensazione di cariche magnetiche. Analogamente andando a studiare le modifiche allo spazio dei moduli attorno al punto del vuoto troverò che c'è un solo vuoto per $\mu \neq 0$ coincidente con la singolarità e che il

dione condensa nel vuoto confinando la carica elettrica. Notiamo che, come atteso, l'aggiunta del termine di massa ha rimosso la degenerazione continua e ha lasciato solo due vuoti collegati dalla simmetria \mathbb{Z}_2 e che sono confinanti via effetto Meissner duale.

4.2.9 Soluzione del modello

Il problema di determinare l'azione effettiva è stato ricondotto a quello di trovare due funzioni $(a(u), a_D(u))$ meromorfe sul piano u con le corrette singolarità e monodromie e con gli andamenti asintotici determinati dai limiti di accoppiamento debole (nella teoria elettrica o magnetica a seconda dei casi) nel modo che abbiamo descritto. Inoltre tali funzioni devono essere tali che, detto:

$$\tau = \frac{a'_D(u)}{a'(u)}$$

la metrica sullo spazio dei moduli $ds^2 = \text{Im}\tau |da|^2$ sia definita positiva, ovvero deve valere $\text{Im}\tau > 0$. Il fatto che τ possa prendere valori solo nel semipiano superiore H del piano complesso ci permette di vedere lo spazio dei moduli parametrizzato da u come il quoziente:

$$\mathcal{M} = H/\Gamma(2)$$

dove $\Gamma(2) = \{M \in \text{SL}(2, \mathbb{Z}) | M = 1 \pmod{2}\}$ è il sottogruppo del gruppo di dualità $\text{SL}(2, \mathbb{Z})$ generato dalle matrici di monodromia $M_\infty, M_{\pm u_0}$.

L'idea di Seiberg e Witten che ha permesso di determinare la soluzione consiste nell'identificare \mathcal{M} come lo spazio che parametrizza la famiglia di curve ellittiche E_u descritte dall'equazione:

$$y^2 = (x - u_0)(x + u_0)(x - u) \quad (4.6)$$

dove x e y sono variabili complesse. Innanzitutto notiamo che questa curva viene mandata in sè stessa dalla trasformazione:

$$y \rightarrow \pm iy, \quad x \rightarrow -x, \quad u \rightarrow -u$$

Questa trasformazione genera una simmetria \mathbb{Z}_4 che agisce come uno \mathbb{Z}_2 su u , esattamente come la simmetria della nostra teoria.

Per identificare la curva descritta dall'equazione (4.6), notiamo che la funzione $y(x)$ è ben definita sul piano complesso x con due tagli, che possiamo prendere da $-u_0$ a u_0 e da u a ∞ . Dato che la variabile y è elevata al quadrato, la curva è data dalla superficie di Riemann a due fogli che si ottiene "incollando" due piani x lungo i tagli: si ottiene così un toro.

Pertanto ad ogni u fissato abbiamo associato un toro E_u e le singolarità sul piano

u hanno un'interpretazione geometrica. Infatti quando $u = \pm u_0$ oppure $u = \infty$, due estremi dei tagli sul piano x vanno a coincidere e di conseguenza uno dei cicli del toro si stringe fino a degenerare in un punto.

Per capire come determinare a e a_D come funzioni di u con la corretta monodromia, consideriamo due 1-cicli indipendenti del toro γ_i , $i = 1, 2$ e fissiamoli in modo che si intersechino in un solo punto. Visti come base del gruppo di omologia $H^1(E_u, \mathbb{C})$, questi cicli hanno la proprietà di trasformarsi con una matrice di $SL(2, \mathbb{Z})$ quando u gira attorno ad una singolarità. Se integriamo su questi cicli delle 1-forme meromorfe, otterremo come risultato delle funzioni meromorfe di u che diventeranno singolari nei punti dove uno dei cicli degenera, esattamente il comportamento che vogliamo per a e a_D . Affinchè il risultato di questi integrali non sia sensibile a una deformazione del cammino di integrazione, dobbiamo considerare 1-forme meromorfe con residui nulli o ancora meglio 1-forme olomorfe su tutta la superficie E_u . In questo modo quando u gira attorno ad una singolarità la trasformazione degli integrali non è influenzata da eventuali residui al polo della forma ma è univocamente determinata da come si combinano i cicli γ_1 e γ_2 .

Esiste un'unica 1-forma olomorfa su E_u ed è data da:

$$\lambda_{olo} \equiv \frac{dx}{y}$$

Questo cosiddetto *differenziale olomorfo* è caratterizzato dalla proprietà che detti:

$$b_i \equiv \int_{\gamma_i} \lambda_{olo}, \quad i = 1, 2$$

allora il parametro $\tau_u \equiv b_1/b_2$ è un parametro caratteristico della curva ellittica E_u con la fondamentale proprietà $\text{Im}\tau_u > 0$. Per una dimostrazione di queste proprietà e in generale una trattazione basilare della teoria delle curve ellittiche si veda ad esempio [30].

In base alle considerazioni fatte, siamo portati a supporre per a e a_D la seguente espressione:

$$a_D(u) = \int_{\gamma_1} \lambda(u), \quad a(u) = \int_{\gamma_2} \lambda(u)$$

dove $\lambda(u)$ sia una 1-forma dipendente dal parametro u che rispetti $\lambda'(u) = f(u)\lambda_{olo}$. Questa scelta infatti ci assicura che indipendentemente dalla funzione f :

$$\tau = \frac{a'_D(u)}{a'(u)} = \frac{b_1}{b_2} = \tau_u \Rightarrow \text{Im}\tau > 0$$

In questo modo abbiamo senz'altro soddisfatto la condizione di positività della metrica. Infine l'arbitrarietà sulla scelta della funzione f e dei cammini γ_1 e γ_2 ci permette di ottenere delle funzioni con le corrette monodromie e il corretto anda-

mento asintotico vicino alla singolarità.

Gli 1-cicli sul toro si possono vedere come curve sul piano x che girino attorno ad almeno due singolarità: uno dei due, che prenderemo come γ_1 può essere preso come la curva che passa attorno ai branch point in u e in u_0 ; l'altro, γ_2 , attorno a u_0 e $-u_0$. Deformando le curve possiamo scrivere i relativi integrali come integrali su cammini che congiungono u_0 a u , oppure lungo il taglio da $-u_0$ a u_0 . La condizione di avere un corretto andamento vicino alla singolarità fissa: $f = -\sqrt{2}/4\pi$.

In definitiva otteniamo le seguenti espressioni per (a, a_D) :

$$a_D(u) = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \int_{-u_0}^{u_0} \frac{dx \sqrt{x-u}}{\sqrt{x^2-u_0^2}}, \quad a(u) = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \int_{u_0}^u \frac{dx \sqrt{x-u}}{\sqrt{x^2-u_0^2}}$$

Queste funzioni rispettano tutte le richieste su monodromie, andamenti asintotici in prossimità delle singolarità e positività della metrica. Pertanto in termini di queste funzioni abbiamo determinato completamente la forma dell'azione effettiva in modo da rispettare tutti i requisiti fisici descritti nei paragrafi precedenti.

4.3 Teoria con materia: cenni.

Consideriamo la teoria in cui al multipletto vettoriale (Φ, V) che contiene i gradi di libertà di gauge aggiungiamo dei campi di materia nella rappresentazione fondamentale del gruppo di gauge (quark). Come abbiamo visto trattando la teoria di pura gauge a basse energie, la materia è descritta dalla rappresentazione dell'algebra $\mathcal{N} = 2$ che contiene solo stati con spin $\leq \frac{1}{2}$ ed è detta ipermultipletto. In termini di supercampi $\mathcal{N} = 1$ l'ipermultipletto è dato da una coppia di supercampi chirali (Q, \tilde{Q}) rispettivamente nella rappresentazione fondamentale e antifondamentale del gruppo di gauge.

L'interazione tra campi di gauge e campi di materia, oltre che dai termini cinetici covariantizzati, è data dal termine di superpotenziale:

$$\sqrt{2}\tilde{Q}\Phi Q = \sqrt{2}\Phi^a \tilde{Q}^\beta (T^a)_\beta{}^\alpha Q_\alpha$$

Se aggiungiamo N_f flavor, ovvero N_f ipermultiplietti indipendenti (Q^i, \tilde{Q}_i) , $i = 1, \dots, N_f$, tutti con la stessa interazione, questa teoria ha chiaramente una simmetria $SU(N_f)$ che ruota tra loro i quark. In realtà nel caso particolare della teoria $SU(2)$ che stiamo trattando, la simmetria globale è ancora più grande in virtù del fatto che la rappresentazione fondamentale e antifondamentale sono equivalenti, ed abbiamo una simmetria di flavor $O(2N_f)$. Spiegheremo come rendere esplicita questa simmetria nel prossimo capitolo in cui avremo una maggiore necessità di trattare direttamente i gradi di libertà dei quark. Nel frattempo notiamo che questo gruppo

contiene una trasformazione discretà di “parità”:

$$\rho : Q_\alpha^1 \leftrightarrow \tilde{Q}_\alpha^1$$

La corrispondente simmetria \mathbb{Z}_2 può essere combinata con $U(1)_R$ per dare una simmetria discreta non anomala $\mathbb{Z}_{4(4-N_f)}$. Questo gruppo è rotto spontaneamente dal condensato del campo dell’aggiunta in \mathbb{Z}_4 e di conseguenza abbiamo una simmetria \mathbb{Z}_{4-N_f} che agisce in modo non banale (per $N_f < 3$) sul piano u .

Osseviamo che in questa teoria possiamo aggiungere anche un termine di massa per i campi dei quark mediante un termine di superpotenziale del tipo:

$$m_i \tilde{Q}_i Q^i$$

Le masse rompono esplicitamente la simmetria di flavor e avremo diversi pattern di rottura nel caso in cui alcune di esse coincidano o si annullino. Se ad esempio aggiungiamo solo una massa m_{N_f} per il flavor N_f , allora abbiamo la rottura $SO(2N_f) \rightarrow SO(2N_f - 2) \times U(1)$, dove il fattore $U(1)$ è quello che moltiplica per una fase il supercampo del flavor N_f . La simmetria globale $U(1)$ addizionale dà luogo a un’altra carica conservata che può dare contributo alla carica centrale. In effetti si può mostrare che con l’aggiunta di ipermultiplietti massivi l’espressione per la carica centrale va modificata in:

$$Z = a n_e + a_D n_m + S \frac{m_{N_f}}{\sqrt{2}}$$

dove S è l’operatore carica associato all’ $U(1)$ addizionale. Dato che la materia nella rappresentazione fondamentale è organizzata in multiplietti corti dell’algebra $\mathcal{N} = 2$ per cui $M = \sqrt{2}|Z|$, l’espressione della carica centrale ci dà che la massa del flavor N_f si annulla nel punto dello spazio dei moduli in cui $a = \pm \frac{m_{N_f}}{\sqrt{2}}$.

Andando in prossimità di $a \sim a_0 \equiv \frac{m_{N_f}}{\sqrt{2}}$ la teoria a basse energie è una versione supersimmetrica della QED, in modo analogo a quanto visto per il monopolio e il dione. Utilizzando la funzione beta a un loop della QED, si ottiene¹:

$$a_D = -\frac{ik}{2\pi}(a - a_0) \log \left(\frac{a - a_0}{\Lambda} \right)$$

da cui possiamo ricavare la monodromia vicino alla singolarità:

$$\begin{aligned} a_D &\rightarrow a_D + a - \frac{m_{N_f}}{\sqrt{2}} \\ a &\rightarrow a \end{aligned}$$

¹Per riprodurre il corretto prefattore nella funzione beta bisogna considerare che nella teoria con materia nella rappresentazione fondamentale, per mantenere la carica elettrica n_e un numero intero, effettuiamo il riscalamento $a \rightarrow 2a$ e di conseguenza $a_D = \frac{1}{2}\mathcal{F}'(a)$.

Osserviamo che l'aggiunta degli ipermultiplietti massivi fa sì che la monodromia non sia più una trasformazione omogenea delle funzioni (a_D, a) perchè è presente anche un termine di traslazione proporzionale alla massa del flavor massivo. Si può comunque costruire una matrice di monodromia considerando l'azione su un vettore colonna che contiene anche la massa:

$$\begin{pmatrix} m_{N_f}/\sqrt{2} \\ a_D \\ a \end{pmatrix} \rightarrow M \begin{pmatrix} m_{N_f}/\sqrt{2} \\ a_D \\ a \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

In generale nella teoria con materia si avranno matrici di monodromia della forma:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ r & k & l \\ q & n & p \end{pmatrix}, \quad \det M = 1$$

in modo che girando attorno alla singolarità la massa rimanga sempre invariata ma (a_D, a) possano ricevere anche contributi non omogenei. Notiamo che se raccogliamo in un vettore anche le cariche:

$$W = \begin{pmatrix} S \\ n_m \\ n_e \end{pmatrix}$$

allora l'invarianza sotto monodromia della carica centrale ci dice che le cariche trasformano secondo: $W \rightarrow (M^{-1})^T W$. Di conseguenza n_m e n_e si limitano a mescolarsi tra loro, mentre la carica S della simmetria globale può ricevere contributi anche dalle cariche elettromagnetiche.

Oltre che dalle monodromie, le funzioni a e a_D sono determinate dai loro andamenti asintotici nella regione semiclassica di accoppiamento debole, che possono essere letti dalla funzione beta a un loop della teoria (è l'unico contributo perturbativo alla funzione beta):

$$u \rightarrow \infty \quad \Rightarrow \quad u \sim 2a(u)^2, \quad a_D(u) \sim i \frac{4 - N_f}{2\pi} a(u) \log \left(\frac{u}{\Lambda^2} \right) \quad (4.7)$$

4.3.1 Singolarità e stati massless

Vogliamo analizzare come si modifica lo spazio dei moduli quantistico in seguito all'aggiunta dei flavor.

Innanzitutto notiamo che per $N_f \geq 2$ oltre alla *branch di Coulomb* (con $\langle \phi \rangle \neq 0$), in cui rimane una simmetria di gauge residua $U(1)$, abbiamo anche la possibilità, a seconda delle configurazioni di masse, che si sviluppino delle nuove direzioni piatte dette *branch di Higgs* in cui sono gli squark a condensare e la simmetria di gauge

è completamente rotta (vedi il capitolo successivo per maggiori dettagli sullo spazio dei moduli classico). Sulla branch di Higgs non possiamo avere gradi di libertà come monopoli o dioni e la metrica è univocamente determinata dalla simmetria della teoria, pertanto non riceve alcuna correzione a livello quantistico. Pertanto nel seguito ci concentreremo sull'analizzare le possibili singolarità che si sviluppano sulla branch di Coulomb.

Come abbiamo visto nel precedente paragrafo, delle nuove singolarità possono emergere nei punti in cui i quark diventano massless. Almeno quando le masse sono molto grandi rispetto alla scala intrinseca $m_i \gg \Lambda$, i punti $a = m_i/\sqrt{2}$ si troveranno nella regione semiclassica e corrisponderanno a dei valori del parametro gauge invariante u che leggiamo dalla relazione classica tra u e a . Dunque per masse grandi ho delle singolarità aggiuntive sul piano u a grandi valori del parametro.

Per capire cosa avviene negli altri range di valori delle masse dei quark, usiamo i vincoli dati dalle simmetrie globali. Dobbiamo tenere conto del fatto che sulla branch di Coulomb come stati leggeri possiamo avere anche le eccitazioni solitoniche con carica magnetica: in presenza dei quark al monopolo sono associati $2N_f$ zero-modi (uno per ogni doppietto della simmetria di gauge SU(2)) che si organizzano in una rappresentazione spinoriale di SO($2N_f$). Pertanto a livello quantistico la simmetria globale è il rivestimento universale Spin($2N_f$) di SO($2N_f$).

$N_f = 3$: Prendendo $m_i = m \gg \Lambda$ rompiamo la simmetria globale Spin(6) = SU(4) \rightarrow SU(3) \times U(1). In questo caso abbiamo una singolarità nella regione semiclassica $u \gg \Lambda^2$ nel punto in cui $a = m/\sqrt{2}$. In questo punto gli stati che diventano massless sono i tre quark che formano la $\underline{3}$ di SU(3). Andando nella regione $u \ll m^2$ possiamo integrare via i quark e ritroviamo le due singolarità del monopolo e del dione della teoria di pura gauge, che sono singoletti di flavor.

Facendo decrescere m le singolarità si sposteranno sul piano u e le cariche degli stati massless associati possono cambiare (con una matrice di monodromia) ma dovranno rimanere sempre nelle stesse rappresentazioni $\underline{3}$, $\underline{1}$ e $\underline{1}$ del gruppo di flavor. Per $m = 0$ la simmetria SU(4) è ripristinata e i gradi di libertà si dovranno riorganizzare in multipletti di questa simmetria: l'unica possibilità è che la $\underline{3}$ e una delle $\underline{1}$ si combinino a dare la $\underline{4}$ di SU(4) mentre l'altro $\underline{1}$ si sposti rimanendo sempre un singoletto di flavor.

Possiamo trarre informazioni sulle cariche degli stati che diventano massless alla singolarità sfruttando il fatto che il centro del gruppo di flavor SU(4) è uno \mathbb{Z}_4 sotto cui i quark hanno carica 2 e i monopoli, essendo spinori, hanno carica 1. In generale dunque l'azione del centro su uno stato carico sarà la moltiplicazione per la fase:

$$e^{i\frac{\pi}{4}(2n_e+n_m)}$$

Pertanto l'assegnazione di cariche (n_m, n_e) "minimale" per gli stati che diventano massless è: $(1, 0)$ per la singolarità nella $\underline{4}$ (perchè è una rappresentazione spinoriale di $SO(6)$) e $(2, 1)$ per il singoletto (in modo che sia scarico anche sotto il centro).

$N_f = 2$: Se consideriamo $m_i = m \gg \Lambda$, la simmetria $Spin(4) = SU(2) \times SU(2)$ è rotta in $SO(2) \times SO(2)$. In questo range del parametro di massa abbiamo una singolarità nella regione semiclassica nel punto in cui $a = m/\sqrt{2}$ e le due singolarità della teoria di pura gauge nella regione $u \ll \Lambda$. Nel punto in cui diventano massless i due quark, ciascuno degli stati massless trasforma sotto uno dei due $SO(2)$, mentre chiaramente monopolo e dione sono singoletti della simmetria di flavor.

Quando facciamo decrescere il parametro di massa fino a $m = 0$ la simmetria $Spin(4)$ è ripristinata: per avere compatibilità con la nuova simmetria globale i due stati massless con carica $SO(2)$ dovranno combinarsi con i due singoletti in modo da formare un doppietto per ciascuno dei due $SU(2)$. Si avranno perciò due singolarità ciascuna associata a due stati massless che formano un doppietto di flavor. Notiamo che per la teoria massless $N_f = 2$ abbiamo una simmetria \mathbb{Z}_2 che agisce sul piano u . Pertanto queste due singolarità dovranno essere in punti simmetrici rispetto all'origine e saranno scambiate dallo \mathbb{Z}_2 .

In questo caso il centro è $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ con cariche (ϵ, ϵ') e vale che $\epsilon + \epsilon' = 0 \pmod{2}$ per rappresentazioni vettoriali di $SO(4)$ mentre è $1 \pmod{2}$ per quelle spinoriali. Per i quark la carica sotto il centro è $(1, 1)$ mentre per stati di carica generica (n_m, n_e) sarà della forma $(n_m + n_e \pmod{2}, n_e \pmod{2})$. Dato che le due singolarità per $m = 0$ sono entrambe associate a stati in rappresentazioni spinoriali di $SO(4)$, la più semplice forma che possiamo assumere per le cariche è (n_m, n_e) pari a $(1, 0)$ per una e $(1, 1)$ per l'altra.

$N_f = 1$: In questo caso la simmetria di flavor è $SO(2)$ indipendentemente dal parametro di massa. Quando la massa è grande, ragionando come sopra deduciamo che ci sono le due singolarità della teoria di pura gauge e in aggiunta una singolarità legata al quark che diventa massless nella regione semiclassica. Quando prendiamo $m = 0$ per $N_f = 1$ abbiamo una simmetria \mathbb{Z}_3 che agisce sul piano u e pertanto le tre singolarità si disporranno ai vertici di un triangolo equilatero. Per avere informazioni sulle cariche degli stati massless notiamo dalle formule (4.7) che andando nella ragione semiclassica \mathbb{Z}_3 agisce come uno \mathbb{Z}_6 su a e agisce in modo non omogeneo su a_D :

$$a \rightarrow e^{i\frac{\pi}{3}} a, \quad a_D \rightarrow e^{i\frac{\pi}{3}} (a + a_D)$$

Quindi per $m = 0$ partendo dalla singolarità con $(n_m, n_e) = (1, 0)$ troviamo che le altre due hanno carica $(1, 1)$ e $(1, 2)$.

Rottura della simmetria di flavor: Se aggiungiamo un termine di massa per il campo nella rappresentazione aggiunta rompiamo $\mathcal{N} = 2$ in $\mathcal{N} = 1$. Come nel caso senza materia, questo elimina la degenerazione continua di vuoti gauge inequivalenti sulla branch di Coulomb e le uniche soluzioni di vuoto che rimangono corrispondono alle singolarità sul piano u e ad eventuali direzioni piatte di Higgs (per $N_f \geq 2$ e particolari valori delle masse dei quark). La teoria a basse energie è una versione supersimmetrica della QED in cui oltre ai campi di gauge abbiamo dei campi carichi (monopoli/dioni) che, a cause degli 0-modi fermionici, portano indici di flavor. Il termine di massa per il campo nell'aggiunta produce un nuovo termine μU nel superpotenziale efficace, come discusso nel caso senza materia, e risolvendo le equazioni di stazionarietà si trova che le cariche magnetiche condensano.

Prendendo le masse dei quark tutte nulle, nel paragrafo precedente siamo stati in grado di determinare le cariche di flavor degli stati leggeri vicino alla singolarità. In questo caso la teoria $U(1)$ a basse energie ha delle branch di Higgs in cui i monopoli con carica di flavor condensano. Dunque la condensazione dei monopoli, oltre a essere responsabile del confinamento nella teoria $\mathcal{N} = 1$, spiega anche la rottura della simmetria di flavor. In particolare notiamo come nel caso $N_f = 3$, esistendo una singolarità in cui lo stato massless è un singoletto di flavor, è possibile il confinamento senza la rottura della simmetria di flavor, come avevamo trovato anche nel capitolo precedente per la teoria $\mathcal{N} = 1$ per $N_f = N_c + 1$.

Capitolo 5

SQCD con materia nell'aggiunta

Consideriamo la teoria $SU(2)$ con $\mathcal{N} = 1$ supersimmetria, con un numero per ora generico N_f di flavor e con un supercampo chirale nella rappresentazione aggiunta. Classicamente la teoria è definita dal seguente superpotenziale:

$$\mathcal{W}_{tree} = m_i \tilde{Q}_i Q^i + \sqrt{2} h \tilde{Q}_i \Phi Q^i + \mu \text{Tr} \Phi^2$$

ove $(Q_\alpha^i, \tilde{Q}_i^\alpha)$ sono i campi dei quark nella rappresentazione fondamentale e anti-fondamentale rispettivamente e $\Phi_\alpha^\beta = \Phi^a (\tau^a)_\alpha^\beta$ è il campo di materia nell'aggiunta. Nella nostra notazione $i = 1, \dots, N_f$ sono gli indici di flavor e $\alpha, \beta = 1, 2$ quelli di gauge. Osserviamo che scegliendo opportunamente il parametro dell'accoppiamento di Yukawa $h = 1$ e prendendo Φ senza massa otterremo la teoria con supersimmetria estesa $\mathcal{N} = 2$, ma per il momento non facciamo alcuna supposizione riguardo la scelta dei parametri e la deformazione dalla teoria $\mathcal{N} = 2$ non sarà considerata “piccola” .

Seguendo l'approccio di Gorsky, Vainshtein e Yung ([27]), il nostro obiettivo è mostrare come la struttura dei vuoti e il comportamento dei condensati chirali dedotti dalla soluzione di Seiberg-Witten siano consistenti con i risultati ottenuti a partire dai superpotenziali esatti $\mathcal{N} = 1$ e dalle relazioni fornite dall'anomalia di Konishi. Questo permette di mettere in relazione due diversi regimi della teoria, in accordo con la proprietà di olomorfia: quello di weak coupling con μ grande, in cui la teoria è una versione modificata della SQCD, e quello di strong coupling con μ piccolo, che può essere analizzato grazie alla soluzione della teoria $\mathcal{N} = 2$. Il comportamento regolare al variare di μ vincola il pattern di rottura della simmetria globale a rimanere invariato nei vuoti supersimmetrici, e il controllo di questa proprietà fornisce un check non banale della consistenza dei due approcci. In questo capitolo riprodurremo il risultato dei tre autori per la teoria con un solo flavor nella fondamentale, lo estenderemo alle teorie con due e tre flavor, gli altri casi in cui vale la libertà asintotica, e mostreremo anche come sia possibile riottenere i risultati con

un numero minore di flavor nel limite in cui la massa di un flavor diventa molto grande e si ha disaccoppiamento.

5.1 Simmetrie globali e spazio dei moduli della teoria classica

La teoria $N_c = 2$ è particolare dal punto di vista delle simmetrie globali. Infatti se i quark sono massless la simmetria di flavor è più grande dell' $SU(N_f)$ vettoriale che ci si aspetterebbe (quello assiale è rotto al tree-level dall'interazione di Yukawa con Φ). Questo è dovuto al fatto che le rappresentazioni fondamentale e antifondamentale di $SU(N_c)$ sono equivalenti tra loro solo per $N_c = 2$, e quindi solo in questo caso abbiamo la possibilità di ruotare tra loro anche le componenti di quark e antiquark. Per rendere precisa quest'affermazione è opportuno passare ad un'altra parametrizzazione dei campi:

$$q = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} Q - \epsilon \tilde{Q}^T & i(Q + \epsilon \tilde{Q}^T) \end{pmatrix}$$

dove abbiamo usato per Q e \tilde{Q} la notazione di matrici $2 \times N_f$ e $N_f \times 2$ rispettivamente e ϵ è il tensore completamente antisimmetrico in dimensione 2. Dunque q_α^I è una matrice $2 \times 2N_f$, con $\alpha = 1, 2$ indice nella rappresentazione fondamentale e $I = 1, \dots, 2N_f$ indice di flavor. Indicando con tr la traccia sul flavor e con Tr quella sul colore, il superpotenziale può essere riscritto in termini di q nella forma:

$$\mathcal{W}_{tree} = \text{Tr} [\mu \Phi^2] - \text{tr} \left[\frac{h}{\sqrt{2}} q^T \epsilon \Phi q + \frac{i}{2} \mathbf{m} q^T \epsilon q \right] \quad (5.1)$$

ove:

$$\mathbf{m} \equiv \left(\begin{array}{c|c} 0 & m \\ \hline -m & 0 \end{array} \right), \quad m = \text{diag}(m_1, \dots, m_{N_f})$$

In (5.1) abbiamo reso esplicita la simmetria $q \rightarrow qO$ con O in $O(2N_f)$ per $\mathbf{m} = 0$.

Lo spazio dei moduli classico è definito dalla condizione di stazionarietà del potenziale dei campi scalari modulo l'azione del gruppo di gauge. In una teoria supersimmetrica il potenziale dei campi scalari è stazionario quando si annullano i termini D che vengono dall'azione di gauge e i termini F che vengono dal superpotenziale. Nelle equazioni che seguono indichiamo con la stessa lettera dei supercampi chirali le loro componenti scalari:

- termini F :

$$\begin{cases} 0 = \frac{\partial \mathcal{W}_{tree}}{\partial q_\alpha^I} = -\sqrt{2}(\Phi q)^{\alpha I} - i(q\mathbf{m})^{\alpha I} \\ 0 = \frac{\partial \mathcal{W}_{tree}}{\partial \Phi^a} = 2\mu \Phi^a - \text{tr} \left[\frac{h}{\sqrt{2}} q^T \epsilon \tau^a q \right] \end{cases}$$

- termini D :

$$0 = (D^a)^2 = \left(\Phi^\dagger (T^a)^{(adj)} \Phi + q^{I\dagger} (T^a)^{(fund)} q^I \right)^2$$

Sfruttando la prima equazione dei termini F il doppio prodotto si vede essere proporzionale a $[\mathbf{m}, \mathbf{m}^\dagger] = 0$ e l'equazione dei termini D si riscrive:

$$\text{Tr} \left[[\Phi^\dagger, \Phi]^2 + \left(qq^\dagger - \frac{1}{2} \text{Tr}[qq^\dagger] 1 \right)^2 \right] = 0$$

Dunque otteniamo:

$$\begin{cases} [\Phi^\dagger, \Phi] = 0 \\ qq^\dagger - \frac{1}{2} \text{Tr}[qq^\dagger] 1 = 0 \end{cases}$$

La prima ci permette di prendere il campo nell'aggiunta, a meno di una trasformazione di gauge, proporzionale alla matrice di Pauli diagonale: $\Phi = a\tau_3$ con $a \in \mathbb{C}$. Le equazioni F per i quark in componenti sono:

$$\begin{cases} aq_1^i = -\frac{i}{\sqrt{2}} m_i q_1^{i+N_f} \\ aq_1^{i+N_f} = \frac{i}{\sqrt{2}} m_i q_1^i \\ -aq_2^i = -\frac{i}{\sqrt{2}} m_i q_2^{i+N_f} \\ -aq_2^{i+N_f} = \frac{i}{\sqrt{2}} m_i q_2^i \end{cases} \quad i = 1, \dots, N_f$$

e vanno risolte insieme alle condizioni D :

$$\begin{cases} (q_1^I)^* q_1^I - (q_2^I)^* q_2^I = 0 \\ (q_1^I)^* q_2^I = 0 \end{cases}$$

e alla seconda equazione F che dà l'ulteriore vincolo:

$$2\mu a - \frac{h}{\sqrt{2}} (q_1^I q_1^I - q_2^I q_2^I) = 0 \quad (5.2)$$

Per $\mu, a \neq 0$ quest'equazione richiede che anche qualche squark condensino nel vuoto. Supponendo per semplicità le masse dei quark tutte diverse la soluzione più generale a meno di trasformazioni di gauge è :

$$\begin{aligned}
a &= \frac{m_i}{\sqrt{2}} \\
q_1^i &= d^i, \quad q_1^{i+N_f} = id^i \\
q_2^i &= \tilde{d}^i, \quad q_2^{i+N_f} = -i\tilde{d}^i, \quad |\tilde{d}^i| = |d^i| \\
q_\alpha^I &= 0, \quad I \neq i, i + N_f
\end{aligned}$$

L'arbitrarietà della gauge ci permette ancora di assorbire una fase e prendere d^i reale e $\tilde{d}^i = d^i e^{i\chi^i}$. Infine i due numeri reali d^i e χ^i sono determinati dalla parte reale e immaginaria dell'equazione (5.2). Dunque comunque fissato un $i = 1 \dots N_f$ abbiamo individuato un vuoto classico in cui la simmetria di gauge è completamente rotta e i condensati dei campi scalari sono tutti determinati a meno di trasformazioni di gauge. Un'altra possibile soluzione è quella in cui a e q_α^I sono tutti nulli: in questo caso la simmetria di gauge è non rotta e questa soluzione corrisponde ai due vuoti della teoria SU(2) di pura gauge supersimmetrica. Pertanto semiclassicamente la teoria ha $N_f + 2$ vuoti distinti.

Per alcuni valori delle masse la teoria ammette anche delle direzioni piatte, e in questo caso abbiamo una degenerazione continua di vuoti gauge-inequivalenti. In particolare per $\mu = 0$ una soluzione possibile delle equazioni è data da un valore generico di $a^2 \in \mathbb{C}$ con $q_\alpha^I = 0$. Questa direzione piatta viene detta *Coulomb branch* perchè questi vuoti hanno una simmetria U(1) di gauge residua. Se invece alcune masse dei quark coincidono allora possono svilupparsi altre direzioni piatte in cui a è fissato mentre i condensati dei quark assumono valori in una certa varietà algebrica determinata dalle equazioni del vuoto. In questo caso la simmetria di gauge è rotta completamente e si parla pertanto di *Higgs branch(es)*. Una parametrizzazione gauge-invariante di queste direzioni piatte può essere data in termini del campo composto:

$$V \equiv iq^T \epsilon q = -V^T$$

che è una matrice antisimmetrica $2N_f \times 2N_f$ invariante di gauge e classicamente dovrà rispettare un constraint quadratico che esprime il fatto che le entrate non sono tutte indipendenti:

$$\epsilon_{I_1 \dots I_{2N_f}} V^{I_1 I_2} V^{I_3 I_4} = 0$$

che è significativo solo per $N_f \geq 2$.

5.2 Teoria quantistica

A livello quantistico, per evitare inconsistenze legate a eventuali poli di Landau, ci si deve restringere a $N_f \leq 4$. Tratteremo i casi $N_f = 1, 2, 3$ per cui la teoria è

asintoticamente libera, mentre $N_f = 4$ corrisponde alla teoria invariante conforme. Il punto di partenza sarà mettersi nel regime di μ grande rispetto alla scala intrinseca della teoria e disaccoppiare il campo nell'aggiunta sostituendolo con il valore che rende stazionario il superpotenziale:

$$\frac{\partial \mathcal{W}_{tree}}{\partial \Phi} = 0 \Rightarrow \Phi = \frac{h}{2\sqrt{2\mu}} qq^T \epsilon$$

La teoria risultante è una versione della SQCD con un termine quartico nei campi dei quark che è generato dall'interazione di Yukawa dopo aver disaccoppiato Φ :

$$\mathcal{W}_{tree} = \frac{h^2}{8\mu} \text{tr}[V^2] - \frac{1}{2} \text{tr}[\mathbf{m}V]$$

Procederemo utilizzando i risultati noti sulle correzioni quantistiche al superpotenziale, che dipendono dal numero di flavor, per derivare le equazioni per i condensati degli squark. Nel capitolo 3 abbiamo ottenuto la forma esatta delle correzioni al superpotenziale per la teoria con N_f ed N_c generici con $N_f \leq N_c + 1$ in termini dei campi gauge invarianti del mesone e dei barioni. Nel caso particolare della teoria SU(2), come abbiamo visto anche a livello classico, lo spazio dei moduli è parametrizzato dalla matrice antisimmetrica V che tiene conto della simmetria globale allargata. L'analisi fatta nel capitolo 3 può comunque essere ripercorsa in modo strettamente analogo e riportiamo direttamente come si riscrivono i risultati in termini del campo V :

$N_f = 1$: Siamo nel range $N_f < N_c$ e l'unica correzione quantistica al superpotenziale è data dal superpotenziale ADS, riscritto in funzione di V :

$$\mathcal{W}_{ADS} = \left(\frac{\tilde{\Lambda}_{N_f}^{3N_c - N_f}}{\text{Pf}V} \right)^{\frac{1}{N_c - N_f}} = \frac{\tilde{\Lambda}_1^5}{\text{Pf}V}$$

$N_f = 2$: Per $N_f = N_c$ abbiamo visto che lo spazio dei moduli quantistico è diverso da quello classico perchè il vincolo classico viene corretto. In termini di V il vincolo classico è semplicemente $\text{Pf}V = 0$ e quantisticamente viene modificato in $\text{Pf}V = \tilde{\Lambda}_{N_f}^{3N_c - N_f} = \tilde{\Lambda}_2^4$. Questo vincolo può essere implementato mediante un moltiplicatore di Lagrange X con il superpotenziale efficace:

$$\mathcal{W}_{eff} = X(\text{Pf}V - \tilde{\Lambda}_2^4)$$

$N_f = 3$: In questo caso ($N_f = N_c + 1$) lo spazio dei moduli classico e quantistico coincidono ma è abbiamo una correzione al superpotenziale che in funzione di

V si scrive:

$$\overline{\mathcal{W}}_{eff} = \frac{1}{\tilde{\Lambda}_{N_f}^{3N_c - N_f}} \text{Pf}V = \frac{1}{\tilde{\Lambda}_3^3} \text{Pf}V$$

Abbiamo adottato la convenzione di indicare con $\tilde{\Lambda}$ la scala intrinseca della teoria in cui il campo Φ è stato disaccoppiato. Pf è lo pfaffiano, ovvero la radice quadrata del determinante per una matrice antisimmetrica:

$$\text{Pf}V = \frac{1}{N_f!} \epsilon_{I_1 \dots I_{2N_f}} V^{I_1 I_2} \dots V^{I_{2N_f-1} I_{2N_f}}$$

Dopo aver individuato il superpotenziale esatto e aver determinato le equazioni per i VEV degli squark, il passo successivo sarà sfruttare l'anomalia di Konishi per ricavare il condensato del gaugino e del campo nell'aggiunta in funzione di quelli degli squark. L'anomalia di Konishi scritta come relazione tra supercampi ha la forma $\frac{1}{4} \bar{D}^2 (X^\dagger e^{\mathcal{V}} X) = X \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial X} + T(R_X) \frac{\text{Tr}W^2}{8\pi^2}$ ove X è un generico supercampo chirale, $T(R_X)$ è l'indice di Dynkin della corrispondente rappresentazione del gruppo di gauge (pari a $\frac{1}{2}$ per la rappresentazione fondamentale e 2 per l'aggiunta), \mathcal{V} è il supercampo reale di gauge e W la corrispondente field-strength supersimmetrica. In un vuoto supersimmetrico la derivata totale ha aspettazione nulla e pertanto: $\left\langle X \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial X} + T(R_X) \frac{\text{Tr}W^2}{8\pi^2} \right\rangle = 0$. Prendendo Φ o q^I come X nella precedente relazione troviamo:

$$\begin{cases} \Phi : & \left\langle 2\mu \text{Tr}\Phi^2 - \frac{h}{\sqrt{2}} \text{tr}[q^T \epsilon \Phi q] + \frac{1}{4\pi^2} \text{Tr}W^2 \right\rangle = 0 \\ q^I : & \left\langle -\sqrt{2} h q^{IT} \epsilon \Phi q^I - (\mathbf{m}V)^{II} + \frac{1}{16\pi^2} \text{Tr}W^2 \right\rangle = 0 \quad I = 1, \dots, 2N_f \end{cases}$$

Sommando le equazioni per q^I e sostituendo il valore di Φ che rende stazionario il superpotenziale, possiamo ricavare il condensato del gaugino $s \equiv -\frac{1}{16\pi^2} \langle \text{Tr}W^2 \rangle$ in funzione di quello degli squark:

$$s = \left\langle -\frac{1}{2N_f} \text{tr}[\sqrt{2} h q^T \epsilon \Phi q + \mathbf{m}V] \right\rangle = \left\langle \frac{1}{2N_f} \text{tr} \left[\frac{h^2}{2\mu} V^2 - \mathbf{m}V \right] \right\rangle$$

Infine usiamo ancora le equazioni per q^I per eliminare dall'equazione di Φ il secondo termine e siamo in grado di scrivere $U \equiv \langle \text{Tr}\Phi^2 \rangle$ in funzione del condensato di V :

$$2\mu U = (4 - N_f)s - \left\langle \frac{1}{2} \text{tr}[\mathbf{m}V] \right\rangle = \left\langle \frac{4 - N_f}{2N_f} \text{tr} \left[\frac{h^2}{2\mu} V^2 \right] - \frac{2}{N_f} \text{tr}[\mathbf{m}V] \right\rangle \quad (5.3)$$

Prima di procedere a ricavare le equazioni per V nei casi $N_f = 1, 2, 3$ discutiamo in generale le simmetrie non anomale della teoria e le informazioni che ci danno sulla forma dei condensati.

5.2.1 Simmetrie della teoria quantistica

Oltre alla simmetria di flavor abbiamo altre simmetrie globali che corrispondono ad automorfismi dell'algebra supersimmetrica. Queste simmetrie in genere sono rotte esplicitamente dagli accoppiamenti del superpotenziale ma promuovendo i parametri a supercampi chirali possono essere ristorate come simmetrie spurioniche ¹. In particolare in questa teoria abbiamo un $U(1)_R$ che moltiplica le supercariche per una fase e un $U(1)_J$ incluso nell' $SU(2)_R$ che ruota le due supercariche della teoria $\mathcal{N} = 2$. L'azione sui supercampi è :

$$U(1)_R \left\{ \begin{array}{l} W(x, \theta) \rightarrow e^{i\alpha} W(x, e^{-i\alpha}\theta) \\ \Phi(x, \theta) \rightarrow e^{2i\alpha} \Phi(x, e^{-i\alpha}\theta) \\ Q(x, \theta) \rightarrow Q(x, e^{-i\alpha}\theta) \\ \tilde{Q}(x, \theta) \rightarrow \tilde{Q}(x, e^{-i\alpha}\theta) \\ \mathbf{m} \rightarrow e^{2i\alpha} \mathbf{m} \\ \mu \rightarrow e^{-2i\alpha} \mu \end{array} \right.$$

$$U(1)_J \left\{ \begin{array}{l} W(x, \theta) \rightarrow e^{i\alpha} W(x, e^{-i\alpha}\theta) \\ \Phi(x, \theta) \rightarrow \Phi(x, e^{-i\alpha}\theta) \\ Q(x, \theta) \rightarrow e^{i\alpha} Q(x, e^{-i\alpha}\theta) \\ \tilde{Q}(x, \theta) \rightarrow e^{i\alpha} \tilde{Q}(x, e^{-i\alpha}\theta) \\ \mu \rightarrow e^{2i\alpha} \mu \end{array} \right.$$

Notiamo che uno $\mathbb{Z}_2 \subset U(1)_R$ coincide con una rotazione spaziale di 2π , ovvero cambia segno ai fermioni ed è banale sui bosoni, ed è contenuto nel gruppo di Lorentz. $U(1)_R$ non è una simmetria della teoria quantistica perché è rotto dall'anomalia al sottogruppo discreto $\mathbb{Z}_{2(4-N_f)}$, mentre $U(1)_J$ non è anomalo. Come abbiamo accennato anche nel capitolo precedente discutendo la teoria con materia, possiamo combinare $U(1)_R$ con la "parità" ρ , contenuta nel centro del gruppo di flavor $O(2N_f)$:

$$\rho : Q_\alpha^1 \leftrightarrow \tilde{Q}_\alpha^1$$

¹Con il termine *spurione* ci si riferisce ad un parametro di una teoria che viene considerato al pari di una variabile dinamica nella determinazione delle simmetrie. Permettere alle trasformazioni di simmetria di agire in modo non banale anche sui parametri in generale allargherà il gruppo di simmetria della teoria e darà luogo a delle regole di selezione potenzialmente utili nel determinare la dipendenza dai parametri dei valori di aspettazione delle variabili dinamiche. L'idea delle simmetrie spurioniche non è specifica delle teorie supersimmetriche e se ne trovano esempi anche in fisica atomica: l'interazione di dipolo elettrico $\sim \vec{d} \cdot \vec{E}$ preserva l'invarianza sotto rotazioni e sotto parità dell'Hamiltoniana solo a patto di considerare i tre parametri che definiscono il campo esterno \vec{E} come un vettore spurionico. La particolarità delle teorie supersimmetriche risiede nei vincoli aggiuntivi forniti dalla dipendenza olomorfa dei condensati dai parametri, che uniti alle regole di selezione delle simmetrie spurioniche permettono spesso di ottenere dei risultati molto forti sulla forma dei condensati. Questa tecnica è stata sfruttata ampiamente anche nel capitolo 3.

per ottenere una simmetria discreta $\mathbb{Z}_{4(4-N_f)}$ non anomala. Questa simmetria è rotta spontaneamente da $U \neq 0$ in \mathbb{Z}_4 e quindi agisce sul piano U come un gruppo di trasformazioni discrete \mathbb{Z}_{4-N_f} .

Sfruttando la possibilità di trasformare anche il coefficiente h dell'accoppiamento di Yukawa è possibile definire una versione modificata della simmetria $U(1)_R$ che non ha anomalie e indicheremo con $U(1)_{R'}$:

$$U(1)_{R'} \left\{ \begin{array}{l} W(x, \theta) \rightarrow e^{i\alpha} W(x, e^{-i\alpha}\theta) \\ \Phi(x, \theta) \rightarrow e^{i\alpha} \Phi(x, e^{-i\alpha}\theta) \\ Q(x, \theta) \rightarrow e^{i\frac{N_f-2}{N_f}\alpha} Q(x, e^{-i\alpha}\theta) \\ \tilde{Q}(x, \theta) \rightarrow e^{i\frac{N_f-2}{N_f}\alpha} \tilde{Q}(x, e^{-i\alpha}\theta) \\ \mathbf{m} \rightarrow e^{i\frac{4}{N_f}\alpha} \mathbf{m} \\ h \rightarrow e^{i\frac{4-N_f}{N_f}\alpha} h \end{array} \right.$$

Se si considera anche la simmetria spurionica $O(2N_f)$ che ruota la matrice di massa \mathbf{m} , allora l'unica combinazione dei parametri invariante sotto le simmetrie non anomale e adimensionale è data da:

$$\sigma_{N_f}^2 \equiv (\text{Pf } \mathbf{m})^{1-\frac{4}{N_f}} h^4 \Lambda_{N_f}^{4-N_f} \quad (5.4)$$

ove Λ_{N_f} è la scala intrinseca della teoria con N_f flavor. Notiamo che $\Lambda_{N_f}^{4-N_f}$ è proporzionale al fattore instantonico $e^{-S_{1inst}}$ in termini del quale è espresso lo sviluppo semiclassico. In generale assegnata la dimensione e la carica del campo sotto $U(1)_{R'}$ e sotto $U(1)_J$ l'andamento del condensato sarà dato da un prefattore con la corretta dimensione e carica per una funzione olomorfa di σ_{N_f} . Ad esempio per $U = \langle \text{Tr} \Phi^2 \rangle$ avremo:

$$U \equiv (\text{Pf } \mathbf{m})^{\frac{1}{2}} \Lambda_{N_f}^{\frac{4-N_f}{2}} u = \Lambda_0^2 u \quad (5.5)$$

dove Λ_0 è la scala della teoria senza quark, legata alla scala originale facendo coincidere i running coupling alla scala $(\text{Pf } \mathbf{m})^{\frac{1}{N_f}}$, e u sarà una funzione olomorfa da determinare di σ_{N_f} . Il VEV degli squark invece sarà parametrizzato come:

$$\langle V \rangle \equiv \sigma_{N_f} \frac{\mu}{h^2} \left(\begin{array}{c|ccc} & & m_1 v_1 & \\ & 0 & & \ddots \\ & & & m_{N_f} v_{N_f} \\ \hline -m_1 v_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & -m_{N_f} v_{N_f} & \\ \hline & & & 0 \end{array} \right) \quad (5.6)$$

La scelta di questa forma per V è giustificata dal fatto che ci aspettiamo che i condensati del tipo:

$$\langle \tilde{Q}_i^\alpha Q_\alpha^j \rangle$$

siano nulli per $i \neq j$, e lo stesso per quelli barionici:

$$\langle \epsilon^{\alpha\beta} Q_\alpha^i Q_\beta^j \rangle \quad \langle \epsilon_{\alpha\beta} \tilde{Q}_i^\alpha \tilde{Q}_j^\beta \rangle$$

Notiamo che il limite $\sigma_{N_f} \rightarrow 0$ è particolarmente interessante perché può essere interpretato in due modi “duali”: può essere visto come il limite $h \rightarrow 0$ in cui la teoria diventa l’ordinaria SQCD con gruppo $SU(2)$ e N_f flavor oppure come il limite in cui le masse \mathbf{m} diventano grandi, i quark disaccoppiano e tenendo fisso $h = 1$ abbiamo la teoria $SU(2)$ di pura gauge con supersimmetria estesa $\mathcal{N} = 2$ rotta lievemente dalla massa nell’aggiunta. Nel primo caso ci aspettiamo di trovare i due vuoti in fase di Higgs della SQCD e nel secondo caso i due vuoti in fase di confinamento associati alla condensazione del monopolo e del dione. In ogni caso le equazioni algebriche che determinano il vuoto devono ammettere esattamente due soluzioni ciascuna con molteplicità uno nel limite $\sigma_{N_f} \rightarrow 0$. Abbiamo isolato un fattore σ_{N_f} nella definizione di v_1, \dots, v_{N_f} in modo che rimangano quantità finite nei limiti $h \rightarrow 0$ e $\mathbf{m} \rightarrow \infty$, come anche il parametro u . Osserviamo che l’olomorfia ci permette di connettere la fase di Higgs e la fase confinante della teoria che quindi sono in realtà la stessa fase della teoria, come atteso in una teoria che contiene materia scalare nella rappresentazione fondamentale del gruppo di gauge ([17]).

Inizialmente riprodurremo alcuni dei risultati del lavoro di Gorsky, Vanshtein e Yung riguardo alla teoria con un flavor e successivamente ci occuperemo della generalizzazione ai casi con due e tre flavor.

5.2.2 $N_f = 1$

In questo caso $N_f < N_c$ per cui le correzioni quantistiche al superpotenziale sono date dal superpotenziale ADS:

$$\mathcal{W} = \mathcal{W}_{tree} + \frac{\tilde{\Lambda}_1^5}{\text{Pf}V} = \frac{h^2}{8\mu} \text{tr}[V^2] - \frac{1}{2} \text{tr}[\mathbf{m}V] + \frac{\tilde{\Lambda}_1^5}{\text{Pf}V}$$

ove $\tilde{\Lambda}_1$ è la scala intrinseca della teoria in cui Φ è stato disaccoppiato. Facendo coincidere il running coupling con quello della teoria iniziale alla scala μ abbiamo la relazione $\tilde{\Lambda}_1^5 = \mu^2 \Lambda_1^3$. Se sostituiamo a V la parametrizzazione (5.6), che in questo caso introduce una sola variabile adimensionale v_1 , \mathcal{W} si riscrive come:

$$\mathcal{W} = \frac{\sigma_1 \mu m_1^2}{h^2} \left(\frac{1}{v_1} + v_1 - \frac{\sigma_1}{4} v_1^2 \right)$$

ove σ_1 è la combinazione scarica dei parametri (5.4). La condizione di stazionarietà di \mathcal{W} dà l'equazione:

$$\sigma_1 v_1 - 2 + 2 \frac{1}{v_1^2} = 0 \quad (5.7)$$

L'altra relazione che ci serve è la (5.3) che lega U a V , che riscritta nelle variabili adimensionali u, v_1 è :

$$4u = -3\sigma_1 v_1^2 + 8v_1 \quad (5.8)$$

Limite $\sigma_1 \rightarrow 0$: In questo limite l'equazione (5.7) ha due soluzioni finite $v_1 = \pm 1 + \mathcal{O}(\sigma_1)$ e una terza soluzione che va a infinito $v_1 = \frac{2}{\sigma_1} + \mathcal{O}(\sigma_1)$. L'equazione (5.8) dà:

$$\begin{cases} v_1 = \pm 1 + \mathcal{O}(\sigma_1) \Rightarrow u = \pm 2 + \mathcal{O}(\sigma_1) \\ v_1 = \frac{2}{\sigma_1} + \mathcal{O}(\sigma_1) \Rightarrow u = \frac{1}{\sigma_1} + \mathcal{O}(\sigma_1) \end{cases}$$

Dunque le due soluzioni con v_1 finito corrispondono ai due punti $U = \pm 2\sqrt{m_1\Lambda_1^3} = \pm 2\Lambda_0^2$, dove con Λ_0 indichiamo la scala intrinseca della teoria senza quark. Questo è in accordo con quanto atteso dalla teoria $\mathcal{N} = 2$ per i vuoti del monopolo e del dione. La soluzione con $v_1 \rightarrow \infty$ corrisponde invece al vuoto in cui condensa la carica elettrica e correttamente tende all'infinito sul piano U nel limite in cui il quark è molto pesante e disaccoppia.

Limite $m \rightarrow 0$: In questo limite $\sigma_1 = \mathcal{O}(m^{-\frac{3}{2}})$ e $v_1 = \mathcal{O}(m^{\frac{1}{2}})$ e le equazioni diventano:

$$\begin{cases} \sigma_1 v_1^3 + 2 = 0 \\ u = 2v_1 \end{cases} \Rightarrow u = 2v_1 = -2 \left(\frac{2}{\sigma_1} \right)^{\frac{1}{3}} e^{\frac{2k\pi i}{3}}, \quad k = 0, 1, 2$$

La relazione tra i VEV della teoria massless può essere letta tenendo conto che le combinazioni $\sigma_1 u^3$ e $v_1 \sigma_1^3$ rimangono finite in questo limite. Notiamo che abbiamo trovato la simmetria discreta \mathbb{Z}_3 che agisce sul piano U ruotando le tre soluzioni, e anche in questo caso la struttura dei vuoti è consistente con quella che si ottiene per μ piccolo dalla teoria $\mathcal{N} = 2$.

Caso generale: L'argomento si può generalizzare a valori arbitrari dei parametri perché eliminando la variabile v_1 dalle equazioni (5.7) e (5.8) si trova la seguente equazione per u :

$$u^3 - \frac{u^2}{\sigma_1} - \frac{9}{2}u + \frac{4}{\sigma_1} + \frac{27}{16}\sigma_1 = 0$$

ovvero nelle variabili originali:

$$U^3 - m_1^2 U^2 - \frac{9}{2} m_1 \Lambda_1^3 h^2 U + 4 m_1^3 \Lambda_1^3 + \frac{27}{16} h^4 \Lambda_1^6 = 0$$

Questa equazione, per $h = 1$, coincide con quella che determina le singolarità sullo spazio dei moduli della curva di Seiberg-Witten per la teoria con un flavor. Tali singolarità coincidono proprio con i vuoti della teoria in cui la supersimmetria estesa è rotta lievemente dal termine di massa per il campo nell'aggiunta, dunque il metodo che abbiamo utilizzato è in accordo con i risultati della teoria $\mathcal{N} = 2$.

5.2.3 $N_f = 2$

Come abbiamo visto in 5.2, a livello quantistico il constraint classico $\text{Pf}V = 0$ viene modificato in $\text{Pf}V = \tilde{\Lambda}_2^4$ ove $\tilde{\Lambda}_2$ è la scala intrinseca della teoria a basse energie in cui Φ è stato integrato via. Facendo coincidere il running coupling con quello della teoria microscopica alla scala μ , si ottiene $\tilde{\Lambda}_2^2 = \mu\Lambda_2$. Il superpotenziale non ha correzioni non perturbative per $N_f \geq 2$ e quindi ci limitiamo ad aggiungere un moltiplicatore di Lagrange X che forzi il vincolo quantistico su V :

$$\mathcal{W} = \frac{h^2}{8\mu} \text{tr}V^2 - \frac{1}{2} \text{tr}(\mathbf{m}V) + X \frac{h^2}{\mu} (\text{Pf}V - \tilde{\Lambda}_2^4)$$

L'equazione di stazionarietà del superpotenziale è :

$$0 = \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial V^{IJ}} = \frac{h^2}{4\mu} V^{IJ} - \frac{1}{2} \mathbf{m}^{IJ} - X \frac{h^2}{4\mu} \epsilon^{IJKL} V^{KL}$$

Insieme al vincolo $\text{Pf}V = \tilde{\Lambda}^4$ otteniamo il seguente sistema di equazioni per le variabili introdotte in (5.6):

$$\begin{cases} \sigma_2(v_1 + \alpha X v_2) - 2 = 0 \\ \sigma_2(v_2 + \alpha^{-1} X v_1) - 2 = 0 \\ v_1 v_2 = 1 \end{cases} \quad (5.9)$$

in cui abbiamo posto $\alpha = \frac{m_2}{m_1}$ e compare la combinazione scarica dei parametri $\sigma_2 = \frac{h^2 \tilde{\Lambda}_2^2}{\mu \sqrt{m_1 m_2}}$.

Scriviamo la relazione tra U e i condensati degli squark (5.3) in termini della variabile adimensionale u introdotta in (5.5):

$$4u + \sigma_2(\alpha^{-1} v_1^2 + \alpha v_2^2) - 4(\alpha^{-1} v_1 + \alpha v_2) = 0 \quad (5.10)$$

Limite $\sigma_2 \rightarrow 0$: Sommando le prime due equazioni in (5.9) si trova che nel limite $\sigma_2 \rightarrow 0$:

$$X = \frac{4}{\sigma_2(\alpha^{-1} v_1 + \alpha v_2)} + \mathcal{O}(1)$$

Sostituiamo questo valore per X e all'ordine dominante il sistema di equazioni ha le soluzioni $(v_1, v_2) = \pm(\alpha, \alpha^{-1}) + \mathcal{O}(\sigma_2)$ e dalla (5.10) abbiamo $u = \pm 2 + \mathcal{O}(\sigma_2)$. Come per $N_f = 1$ queste due soluzioni corrispondono ai due vuoti $U = \pm 2\Lambda_0^2$ del

monopolo e del dione. Delle quattro soluzioni che si hanno per $\sigma_2 \neq 0$, due vanno all'infinito in questo limite:

$$(v_1, v_2) = \begin{cases} (\frac{2}{\sigma_2}, \frac{\sigma_2}{2})(1 + \mathcal{O}(\sigma_2^2)) \\ (\frac{\sigma_2}{2}, \frac{2}{\sigma_2})(1 + \mathcal{O}(\sigma_2^2)) \end{cases} \Rightarrow u = \begin{cases} \frac{\alpha^{-1}}{\sigma_2}(1 + \mathcal{O}(\sigma_2^2)) \\ \frac{\alpha}{\sigma_2}(1 + \mathcal{O}(\sigma_2^2)) \end{cases}$$

Nella teoria $\mathcal{N} = 2$ queste soluzioni corrispondono ai due vuoti in cui uno dei quark diventa massless e condensa un grado di libertà elettrico.

Caso $m_1 = m_2 = m$: Per questi valori delle masse $\alpha = 1$. Utilizzando il vincolo $v_1 v_2 = 1$ possiamo riscrivere (5.9) e (5.10) come un sistema di tre equazioni nelle variabili X , $v_1 + v_2 \equiv v_+$ e u . Dopo aver eliminato X rimaniamo con le seguenti:

$$\begin{cases} \sigma_2 v_+^3 - 2v_+^2 - 4\sigma_2 v_+ + 8 = 0 \\ 4u = \sigma_2(v_+^2 - 2) - 4v_+ \end{cases}$$

Le soluzioni per v_+ sono $v_+ = 2\sigma_2^{-1}$, che individua due punti distinti nel piano (v_1, v_2) , oppure $v_+ = \pm 2$, ciascuna delle quali individua un solo punto. Le corrispondenti soluzioni per u sono rispettivamente $u = \sigma_2/2 + \sigma_2^{-1}$, da contare con molteplicità due, oppure $u = -\sigma_2/2 \pm 2$. In termini di U e della scala intrinseca della teoria microscopica Λ_2 e per $h = 1$ che è il valore della teoria $\mathcal{N} = 2$ abbiamo:

$$\begin{cases} U = \frac{1}{2}\Lambda_2^2 + m^2 \\ U = -\frac{1}{2}\Lambda_2^2 \pm 2m\Lambda_2 \end{cases} \quad (5.11)$$

Per $m \rightarrow 0$ la simmetria di flavor $O(4)$ è ripristinata. Dalla teoria $\mathcal{N} = 2$ sappiamo che per μ piccolo i vuoti si organizzano in due doppietti: sul piano U le quattro singolarità della curva di Seiberg-Witten coincidono a due a due, i corrispondenti gradi di libertà magnetici che condensano nel vuoto sono nella rappresentazione spinoriale $\underline{2}$ di $SO(4)$. Le soluzioni (5.11) per $m \rightarrow 0$ danno in effetti due soluzioni $U = \pm \frac{1}{2}\Lambda_2^2$ scambiate dalla simmetria \mathbb{Z}_2 e ciascuna con molteplicità due, ovvero corrispondente a due vuoti distinti: il calcolo effettuato per μ grande è dunque consistente con il risultato $\mathcal{N} = 2$.

Decoupling di un flavor ($m_2 \rightarrow \infty$): Vogliamo ritrovare la teoria con un solo flavor come limite in cui uno dei due flavor diventa molto massivo mantenendo finita la scala intrinseca della teoria $\tilde{\Lambda}_1$. Facendo coincidere i running coupling alla scala m_2 del flavor che vogliamo disaccoppiare abbiamo: $\tilde{\Lambda}_1^5 = m_2 \tilde{\Lambda}_2^4$. In questo limite

$\alpha \rightarrow \infty$ e i coefficienti e le variabili delle equazioni hanno il seguente comportamento:

$$\begin{cases} \sigma_2 = \sigma_1 \alpha^{-1}, & \sigma_1 = \mathcal{O}(1) \\ v_1 = v'_1 \alpha, & v'_1 = \mathcal{O}(1) \\ v_2 = \mathcal{O}(\alpha^{-1}) \\ u = \mathcal{O}(1) \end{cases}$$

dove σ_1 e v'_1 sono le variabili della teoria $N_f = 1$:

$$\sigma_1 = h^2 \left(\frac{\Lambda_1}{m_1} \right)^{\frac{3}{2}}, \quad v'_1 = \frac{h^2}{\mu m_1 \sigma_1} \langle V^{13} \rangle$$

Eliminando v_2 da (5.9) e (5.10) e isolando i termini dominanti nel limite $\alpha \rightarrow \infty$ otteniamo le equazioni:

$$\begin{cases} \sigma_1 v'_1{}^2 - 2v'_1 + 2\frac{1}{v'_1} = 0 \\ 4u - 4(v'_1 + \frac{1}{v'_1}) + \sigma_1 v'_1{}^2 = 0 \end{cases}$$

che sono equivalenti al set di equazioni (5.7) e (5.8) ottenute nella trattazione della teoria con un solo flavor.

5.2.4 $N_f = 3$

In questo caso lo spazio dei moduli non è modificato nel passaggio dalla teoria classica a quella quantistica. È necessario però aggiungere una correzione non perturbativa al superpotenziale (vedi 5.2) che è data da:

$$\mathcal{W} = \mathcal{W}_{tree} - \frac{1}{\tilde{\Lambda}_3^3} \text{Pf} V$$

Facendo coincidere i running coupling alla scala μ si ha: $\tilde{\Lambda}_3^3 = \mu^2 \Lambda_3$. L'equazione di stazionarietà:

$$0 = \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial V^{IJ}} = \frac{h^2}{4\mu} V^{IJ} - \frac{1}{2} \mathbf{m}^{IJ} - \frac{1}{16\tilde{\Lambda}_3^3} \epsilon^{JKLMN} V^{KL} V^{MN}$$

si riscrive nelle variabili adimensionali come il seguente sistema:

$$\begin{cases} \sigma_3 v_1 - 2 + 2\alpha_1^{-1} v_2 v_3 = 0 \\ \sigma_3 v_2 - 2 + 2\alpha_2^{-1} v_3 v_1 = 0 \\ \sigma_3 v_3 - 2 + 2\alpha_3^{-1} v_1 v_2 = 0 \end{cases} \quad (5.12)$$

dove $\sigma_3 = \frac{h^2 \tilde{\Lambda}_3^{\frac{3}{2}}}{\mu (m_1 m_2 m_3)^{\frac{1}{6}}}$ è la combinazione scarica dei parametri, $\alpha_1 = \frac{m_1^{\frac{4}{3}}}{(m_2 m_3)^{\frac{2}{3}}}$ e con definizioni cicliche per α_2 e α_3 , in modo che $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 = 1$. L'altra equazione (5.3) in

questo caso si riscrive nelle variabili adimensionali come:

$$12u + \sigma_3(\alpha_1 v_1^2 + \alpha_2 v_2^2 + \alpha_3 v_3^2) - 8(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3) = 0 \quad (5.13)$$

Limite $\sigma_3 \rightarrow 0$: Prendendo $\sigma_3 \rightarrow 0$ dal sistema (5.12) si trovano le soluzioni $(v_1, v_2, v_3) = \pm(\alpha_1^{-1}, \alpha_2^{-1}, \alpha_3^{-1}) + \mathcal{O}(\sigma_3)$ che sostituite in (5.13) danno $u = \pm 2$. Analogamente a quanto visto per $N_f = 1, 2$, queste due soluzioni corrispondono ai vuoti $\mathcal{N} = 2$ del monopolo e del dione con $U = \pm 2\Lambda_0$. Le altre tre soluzioni che vanno a infinito nel limite sono:

$$(v_1, v_2, v_3) = \begin{cases} (\frac{2}{\sigma_3}, \frac{\alpha_3 \sigma_3}{2}, \frac{\alpha_2 \sigma_3}{2})(1 + \mathcal{O}(\sigma_3^2)) \\ (\frac{\alpha_3 \sigma_3}{2}, \frac{2}{\sigma_3}, \frac{\alpha_1 \sigma_3}{2})(1 + \mathcal{O}(\sigma_3^2)) \\ (\frac{\alpha_2 \sigma_3}{2}, \frac{\alpha_1 \sigma_3}{2}, \frac{2}{\sigma_3})(1 + \mathcal{O}(\sigma_3^2)) \end{cases} \Rightarrow u = \begin{cases} \frac{\alpha_1}{\sigma_3}(1 + \mathcal{O}(\sigma_3^2)) \\ \frac{\alpha_2}{\sigma_3}(1 + \mathcal{O}(\sigma_3^2)) \\ \frac{\alpha_3}{\sigma_3}(1 + \mathcal{O}(\sigma_3^2)) \end{cases}$$

e come per $N_f = 1, 2$ corrispondono ai punti del piano U della teoria $\mathcal{N} = 2$ in cui uno dei tre quark diventa massless e dei gradi di libertà elettrici condensano nel vuoto.

Caso $m_1 = m_2 = m_3 = m$: In questo caso $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 1$ e il sistema (5.12) ha le seguenti soluzioni:

$$(v_1, v_2, v_3) = \begin{cases} (\frac{2}{\sigma_3} - \frac{\sigma_3}{2}, \frac{\sigma_3}{2}, \frac{\sigma_3}{2}) \\ (\frac{\sigma_3}{2}, \frac{2}{\sigma_3} - \frac{\sigma_3}{2}, \frac{\sigma_3}{2}) \\ (\frac{\sigma_3}{2}, \frac{\sigma_3}{2}, \frac{2}{\sigma_3} - \frac{\sigma_3}{2}) \end{cases} \Rightarrow u = \frac{1}{\sigma_3} + \frac{1}{6}\sigma_3 - \frac{1}{16}\sigma_3^3$$

oppure:

$$v_1 = v_2 = v_3 = \frac{1}{4}(-\sigma_3 \pm \sqrt{\sigma_3^2 + 16}) \Rightarrow u = -\frac{3}{4}\sigma_3 - \frac{1}{32}\sigma_3^3 \pm \frac{1}{4} \left(\frac{\sigma_3^2}{4} + 4 \right)^{\frac{3}{2}}$$

Queste soluzioni sono consistenti con quanto trovato nel paragrafo precedente nel limite $\sigma_3 \rightarrow 0$. Notiamo che $m \neq 0$ tenendo le tre masse uguali rompe la simmetria di flavor da $SO(6) \simeq SU(4)$ in $SU(3) \times U(1)$. La soluzione con molteplicità tre nel piano u è interpretabile, per m grande, come il punto in cui i tre quark diventano massless. I tre vuoti corrispondenti sono caratterizzati dalla condensazione di gradi di libertà elettrici che formano un tripletto dell' $SU(3)$ residuo. Le altre due soluzioni sono invece singoletti di flavor e corrispondono ai due punti che nel limite di disaccoppiamento dei quark $\sigma_3 \rightarrow 0$ abbiamo interpretato come i vuoti del monopolo e del dione.

Nel limite $m \rightarrow 0$ invece la simmetria di flavor $O(6)$ è ripristinata. In questo limite $\sigma_3 \rightarrow \infty$ e il punto con molteplicità tre sul piano u va a coincidere con uno dei singoletti in $u = -\frac{1}{16}\sigma_3^3(1 + \mathcal{O}(\sigma_3^{-2}))$, che corrisponde a $U = -\frac{1}{16}h^6\Lambda_3^2$, mentre l'altro singoletto si sposta in $U = 0$. I vuoti dunque si organizzano in un singoletto e

in una rappresentazione spinoriale $\underline{4}$ di $\text{SO}(6)$, concordemente a quanto atteso dalla teoria $\mathcal{N} = 2$. Notiamo che per $N_f = 3$ anche nel limite massless non abbiamo alcuna simmetria discreta residua che agisca in modo non banale sul piano U .

Decoupling di un flavor ($m_3 \rightarrow \infty$): Disaccoppiamo il terzo flavor tenendo finita la scala intrinseca della teoria limite con due flavor $\tilde{\Lambda}_2$. Facendo coincidere i running coupling alla scala m_3 si trova: $\tilde{\Lambda}_2^4 = m_3 \tilde{\Lambda}_3^3$. In questo limite $\alpha_3 \rightarrow \infty$ e l'andamento dei parametri e delle variabili è dato da:

$$\begin{cases} \sigma_3 = \sigma_2 \alpha_3^{-\frac{1}{2}}, & \sigma_2 = \mathcal{O}(1) \\ (\alpha_1, \alpha_2) = (\alpha^{-1}, \alpha) \alpha_3^{-\frac{1}{2}}, & \alpha = \mathcal{O}(1) \\ (v_1, v_2) = (v'_1, v'_2) \alpha_3^{\frac{1}{2}}, & (v'_1, v'_2) = \mathcal{O}(1) \\ v_3 = C \alpha_3^{-1} & C = \mathcal{O}(1) \end{cases}$$

dove α , σ_2 e (v'_1, v'_2) sono i parametri e le variabili introdotti nella trattazione della teoria con due flavor:

$$\alpha = \frac{m_2}{m_1}, \quad \sigma_2 = \frac{h^2 \tilde{\Lambda}_2^2}{\mu \sqrt{m_1 m_2}}, \quad (v'_1, v'_2) = \frac{h^2}{\mu \sigma_2} (m_1^{-1} \langle V^{14} \rangle, m_2^{-1} \langle V^{25} \rangle)$$

Isolando i termini dominanti nelle equazioni otteniamo:

$$\begin{cases} \sigma_2 v'_1 - 2 + 2\alpha C v'_2 = 0 \\ \sigma_2 v'_2 - 2 + 2\alpha^{-1} C v'_1 = 0 \\ v'_1 v'_2 = 1 \\ 12u + \sigma_2 (\alpha^{-1} v'_1{}^2 + \alpha v'_2{}^2) - 8(\alpha^{-1} v'_1 + \alpha v'_2) - 8C = 0 \end{cases}$$

e questo sistema, come voluto, è equivalente alle equazioni (5.9) e (5.10) ottenute nel caso $N_f = 2$.

Capitolo 6

Conclusioni

Il principale risultato dello studio portato avanti per la tesi è aver riprodotto in maniera originale le caratteristiche dei vuoti della SQCD con supersimmetria estesa $\mathcal{N} = 2$ rotta da una perturbazione a $\mathcal{N} = 1$. Si sono ottenuti risultati perfettamente consistenti con l'analisi di Seiberg e Witten utilizzando dei metodi analoghi a quelli della SQCD $\mathcal{N} = 1$: per ottenere informazioni sui vuoti abbiamo “integrato via” la materia nella rappresentazione aggiunta e utilizzato il potenziale efficace esatto che descrive la dinamica dei gradi di libertà rimanenti, debolmente accoppiati.

Questo tipo di approccio era stato precedentemente utilizzato da Gorsky, Vainshtein e Yung ([27]) per la teoria con due colori e un flavor di quark. Il nostro studio costituisce una generalizzazione ai casi di due e tre flavor. L'interesse nella generalizzazione deriva, oltre che dalla possibilità di estendere il controllo di consistenza, dalla struttura aggiuntiva legata alla simmetria di flavor non banale.

Tale simmetria è rotta spontaneamente dai condensati degli squark ma lascia invariata la materia nella rappresentazione aggiunta. Conseguentemente abbiamo trovato che ad un valore fissato del VEV della materia nella rappresentazione aggiunta corrispondono diverse soluzioni per i VEV degli squark, collegate tra loro da una trasformazione di flavor¹. Abbiamo potuto studiare anche l'andamento di queste soluzioni al variare della massa dei quark e verificare che effettivamente i punti corrispondenti collidono quando c'è un allargamento del gruppo di simmetria, in modo da riorganizzarsi in multipletti della simmetria più grande. La generalizzazione alle teorie con un numero maggiore di flavor ci ha permesso di effettuare un ulteriore controllo: nel limite in cui un flavor diventa molto pesante abbiamo dimostrato che le equazioni che determinano i vuoti diventano equivalenti a quelle della teoria con un flavor in meno. Quanto ottenuto può essere visto come una verifica dei risultati dell'analisi di Seiberg e Witten e offre una descrizione alternativa della

¹Otteniamo una degenerazione discreta piuttosto che una vera e propria direzione piatta, associata alla rottura del gruppo di simmetria continuo, perchè stiamo assumendo una parametrizzazione per la matrice degli squark V valida per il caso di masse generiche in cui la simmetria globale è rotta esplicitamente.

fisica a basse energie in termini dei gradi di libertà della materia in fase di Higgs, che per grandi VEV risulta debolmente accoppiata, descrizione che può essere poi estesa per olomorfia al regime fortemente accoppiato.

Bibliografia

- [1] J. Wess, J. Bagger, *Supersymmetry and Supergravity*, Princeton University Press (1992)
- [2] S. Weinberg, *The Quantum Theory of Fields, Volume III - Supersymmetry*, Cambridge University Press (2000)
- [3] J. Terning, *Modern Supersymmetry*, Oxford University Press (2006)
- [4] S.R. Coleman, J. Mandula, *All Possible Symmetries of the S Matrix*, Phys.Rev. 159, 1251 (1967)
- [5] R. Haag, J.T. Lopuszanski, M. Sohnius, *All Possible Generators of Supersymmetries of the S Matrix*, Nucl.Phys. B88, 257 (1975)
- [6] V.A. Novikov, M.A. Shifman, A.I. Vainshtein, V.I. Zakharov, *Exact Gell-Mann-Low Function of Supersymmetric Yang-Mills Theories from Instanton Calculus*, Nucl.Phys. B229 381 (1983)
V.A. Novikov, M.A. Shifman, A.I. Vainshtein, V.I. Zakharov, *Supersymmetric Instanton Calculus: Gauge Theory with Matter*, Nucl.Phys. B260, 157 (1985)
- [7] D. Amati, K. Konishi, Y. Meurice, G.C. Rossi, G. Veneziano, *Nonperturbative Aspects in Supersymmetric Gauge Theories*, Phys.Rept. 162, 169 (1988)
- [8] K. Konishi, *Anomalous Supersymmetry Transformation of Some Composite Operators in SQCD*, Phys.Lett. 135B, 439 (1984)
- [9] I. Affleck, M. Dine, N. Seiberg, *Dynamical Supersymmetry Breaking in Supersymmetric QCD*, Nucl.Phys. B241, 429 (1984)
- [10] S.F. Cordes, *The Instanton-Induced Superpotential in Supersymmetric QCD*, Nucl.Phys. B273, 629 (1986)
- [11] E. Witten, *Constraints on Supersymmetry Breaking*, Nucl.Phys. B202, 253 (1982)
- [12] K. Intriligator, N. Seiberg, *Lectures on Supersymmetric Gauge Theories and Electric-Magnetic Duality*, Nucl.Phys.Proc.Suppl. 45BC, 1 (1996)

-
- [13] N. Seiberg, *Naturalness versus supersymmetric nonrenormalization theorems*, Phys.Lett. 318B, 469 (1993)
- [14] N. Seiberg, *Exact Results on the Space of Vacua of Four Dimensional SUSY Gauge Theories*, Phys.Rev. D49, 6857 (1994)
- [15] K. Intriligator, R.G. Leigh, N. Seiberg, *Exact Superpotentials in Four Dimensions*, Phys.Rev. D50, 1092 (1994)
- [16] J. Wess, B. Zumino, *Consequences of Anomalous Ward Identities*, Phys.Lett. 37B, 95 (1971)
- [17] E. Fradkin, S. Shenker, Phys.Rev. D19, 540 (1979)
- [18] G. 't Hooft, Nucl.Phys. B190, 455 (1981)
- [19] N. Seiberg, E. Witten, *Electric-Magnetic Duality, Monopole Condensation and Confinement in $\mathcal{N} = 2$ Supersymmetric Yang-Mills Theory*, Nucl.Phys. B426, 19 (1994)
- [20] N. Seiberg, E. Witten, *Monopoles, Duality and Chiral Symmetry Breaking in $\mathcal{N} = 2$ Supersymmetric QCD*, Nucl.Phys. B431, 484 (1994)
- [21] L. Alvarez-Gaume, S.F. Hassan, *Introduction to S-duality in $N = 2$ supersymmetric gauge theories: A pedagogical review of the work of Seiberg and Witten*, Fortsch. Phys. **45**, 159 (1997)
- [22] R. Grimm, J. Wess, M. Sohnius, *Extended Supersymmetry and Gauge Theories*, Nucl. Phys. B133, 275 (1978)
- [23] E. Witten, D. Olive, Phys.Lett. 78B, 97 (1978)
- [24] S.Coleman, *The Magnetic Monopole Fifty Years Later*, In the Proc. of the 1981 Int. School of Subnuclear Physics, Erice; Ed. A. Zichichi, Plenum Press (1983)
- [25] P.A.M. Dirac, Proc.R.Soc. A133, 60 (1931)
D. Zwanziger, Phys.Rev. 176, 1480 (1968)
J. Schwinger, Phys.Rev. 144, 1087 (1966); 173, 1536 (1968)
E. Witten, Phys.Lett. 86B, 283 (1979)
- [26] N. Seiberg, *Supersymmetry and Non-Perturbative Beta Functions*, Phys.Lett. 106B, 75 (1988)
- [27] A. Gorsky, A.I. Vainshtein, A.Yung, *Deconfinement at the Argyres-Douglas point in $SU(2)$ gauge theory with broken $\mathcal{N} = 2$ supersymmetry*, Nucl.Phys. B584, 197 (2000)

-
- [28] F. Cachazo, M.R. Douglas, N. Seiberg, E. Witten, *Chiral rings and anomalies in supersymmetric gauge theories*, JHEP 0212, 071 (2002)
- [29] G. Carlino, K. Konishi, H. Murajama, *Dynamics of Supersymmetric $SU(n_c)$ and $USp(2n_c)$ Gauge Theories*, JHEP 0002, 004 (2000)
- [30] L.V. Ahlfors, *Complex Analysis*, McGraw-Hil (1979)