



UNIVERSITÀ DI PISA
Facoltà di Ingegneria

Corso di Laurea in
INGEGNERIA DEI VEICOLI TERRESTRI

Caratterizzazione oggettiva dell'handling di autovetture con un nuovo approccio

Tesi di laurea

Francesco Bucchi

Relatori:

Prof. Ing. M. Guiggiani

Dott. Ing. A. Sponziello

Dott. Ing. I. Camuffo (CRF)

Anno Accademico 2008-2009

Sommario

Lo studio della dinamica laterale è di fondamentale importanza per coloro che si occupano di dinamica del veicolo. L'argomento è solitamente trattato attraverso un approccio strettamente legato all'analisi sperimentale, mentre le definizioni teoriche risultano limitate e poco rispondenti al reale comportamento dei veicoli, specialmente durante i transitori.

Con questa tesi si vuole impostare un'analisi oggettiva della dinamica laterale, cercare di riprendere e rivedere concetti classici quali il fin troppo noto gradiente di sottosterzo, e proporre degli indici attraverso i quali poter analizzare il comportamento di un veicolo, in grado di dare informazioni riguardanti la risposta dinamica a partire da manovre di regime.

Grazie alla collaborazione con il *Centro Ricerche Fiat*, è stato possibile validare l'analisi proposta a partire dai dati relativi a modelli monotraccia di alcuni veicoli e confrontare i risultati ottenuti con i giudizi solitamente adottati dal *CRF* per giudicare il comportamento dei veicoli stessi.

Si sono inoltre proposte delle modifiche da apportare ai veicoli giudicati dal *CRF* in maniera negativa, al fine di renderne la dinamica somigliante a quella dei veicoli ritenuti migliori.

Abstract

The lateral behaviour of a vehicle is a very important topic of the vehicle dynamics theory. Lateral Dynamics study is very important for those who deal in vehicle dynamics. This subject usually is analysed with an experimental approach, or with theoretical definitions which are often confused and limited.

In this thesis lateral dynamics was studied with a new approach, based on clear and well defined concepts. Moreover classical definitions like understeer gradient were retrieved and revised, and new indexes were proposed to analyze vehicle behaviour. These indexes were obtained since steady state manouvres and were able to give information about the dynamic behaviour of a vehicle.

The thesis was in cooperation with *Centro Ricerche Fiat* which provided single track model data of some real vehicles, in order to validate the results of the new approach. Also *CRF* judgments used to sort vehicle behaviour were provided.

Besides, beginning from the results of the new approach, we proposed some adjustments in order to improve the dynamics of the vehicles that *CRF* evaluated negatively.

Indice

Sommario	i
Abstract	ii
Indice	iii
1 Analisi teorica	1
1.1 Definizione di veicolo	1
1.2 Equazioni del moto	3
1.3 Equazioni linearizzate	5
1.3.1 Gradienti di assetto e di curvatura	9
1.4 Formulazione alternativa delle equazioni linearizzate	11
1.4.1 Sistema omogeneo	13
1.4.2 Forzante	16
1.5 Funzioni di trasferimento	17
1.5.1 Poli	18
1.5.2 Zeri	18
1.5.3 Guadagno	19
2 Dalle manovre ai coefficienti del sistema	21
2.1 Modelli di veicolo	21
2.1.1 Manovre simulate	22
2.1.2 Caratteristiche degli assali	27
2.2 Veicoli reali	30
3 Modelli di veicolo	32
3.1 Modello monotraccia lineare	32
3.1.1 Esempio numerico	35
3.2 Modello monotraccia lineare e cedevolezza del sistema di sterzo	37
3.3 Modello monotraccia non lineare	41
3.4 Modello monotraccia non lineare e sistema di sterzo cedevole .	48

3.5	Modello monotraccia non lineare e ritardo di risposta	52
3.6	Modello di veicolo con differenziale bloccato	55
4	Analisi dati <i>CRF</i>	70
4.1	Dati modelli monotraccia	70
4.1.1	Dati geometrici	71
4.1.2	Caratteristiche degli assali	73
4.1.3	Ritardo di risposta equivalente degli assali	74
4.1.4	Classificazione e giudizio	76
5	Elaborazione dati	80
5.1	Gradienti di assetto e di curvatura	80
5.2	Derivate di stabilità	86
5.3	Coefficienti caratteristici	89
5.4	Trasformata di Laplace	91
5.4.1	Guadagno a regime	93
5.4.2	Risposta al gradino	96
5.4.3	Risposta armonica	100
6	Simulazione manovre e predizione risultati	104
6.1	Colpo di sterzo	104
6.2	Sorpasso	120
6.3	Modelli con ritardo di risposta	133
7	Conclusioni	136
7.1	Analisi teorica	136
7.2	Risultati sperimentali	137
	Bibliografia	138

Capitolo 1

Analisi teorica

Questo lavoro si pone come scopo quello di rileggere e reimpostare attraverso un approccio oggettivo le basi della dinamica del veicolo, con particolare attenzione alla dinamica laterale (*handling*). In letteratura è già presente un reinquadramento del problema proposto da Massimo Guiggiani in *Dinamica del Veicolo*[13], all'interno del capitolo 5 - *Un nuovo approccio all'handling*. L'idea di base è lo studio del veicolo come un classico sistema meccanico, che viene linearizzato nell'intorno di una generica configurazione di regime. L'ipotesi di linearità fa da cornice a tutto il lavoro e i risultati ottenuti, sebbene debbano essere considerati un'approssimazione del comportamento reale di un veicolo, possono dare indicazioni molto utili, specie se correlati alla definizione di parametri e grandezze fondamentali per la dinamica del veicolo, che devono essere tenuti in considerazione anche in analisi più approfondite, quali le simulazioni *multibody* o addirittura le prove sperimentali.

1.1 Definizione di veicolo

Nell'ottica di reinquadrare il problema dell'*handling* da principio, ci pare utile in primo luogo dare una definizione di veicolo semplice e generale. All'interno di questa si vogliono racchiudere la quasi totalità dei veicoli, indipendentemente dal numero di assali, da quante siano le ruote sterzanti, da quali modelli si usino per rappresentare il comportamento del sistema e delle sue parti.

In questa prima analisi il veicolo viene considerato un unico corpo rigido in moto su un piano, avente perciò tre gradi di libertà: due traslatori e uno rotatorio con asse perpendicolare al piano considerato.

In Fig. 1.1 è rappresentato il modello più generale di veicolo preso in considerazione: si tratta di un

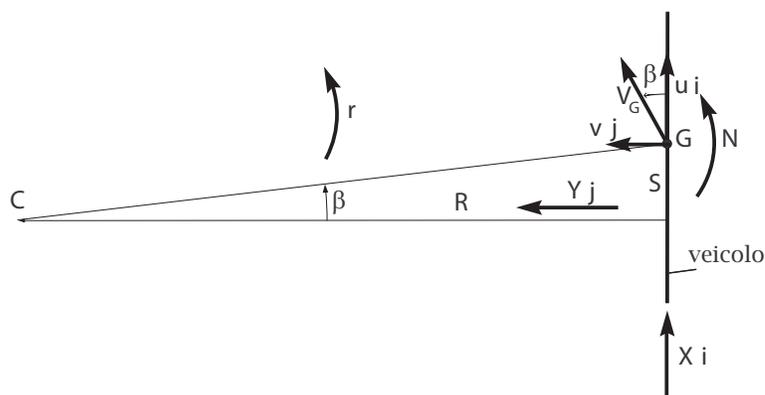


Figura 1.1: Definizione di veicolo

Corpo rigido su cui si individua punto notevole (G) e un asse passante per detto punto, indicante la direzione di avanzamento in rettilineo

Come è possibile notare non si parla per adesso di ruote, pneumatici, sterzo, passi, semipassi, larghezza della carreggiata ecc., non perché si possa prescindere totalmente da questi dati, ma perché si vuol mantenere un certo distacco nell'approcciare un sistema fisico apparentemente fin troppo noto e dettagliato. Inoltre un'impostazione di questo genere dà la possibilità di partire da una piattaforma di analisi valida per tutti i veicoli, anche ad esempio per mezzi con più di due assali, non imponendo pertanto limitazioni aprioristiche all'analisi.

Come noto dalla cinematica piana, per conoscere il moto di tutti i punti del corpo rigido considerato, è sufficiente conoscere la traiettoria di un punto, ad esempio quella del baricentro G , e la velocità angolare del sistema, r . Per fare ciò, una volta note le condizioni iniziali del sistema, è sufficiente conoscere la velocità longitudinale del baricentro u , la velocità trasversale dello stesso v e la velocità angolare del sistema, detta anche velocità di imbardata, r .

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_G &= u\mathbf{i} + v\mathbf{j} \\ \Omega &= r\mathbf{k} \end{aligned} \tag{1.1}$$

Per quanto riguarda la dinamica, una volta note le proprietà inerziali del sistema, ossia la massa m e il momento di inerzia J , basterà conoscere le forze

(X, Y) e i momenti esterni (N) . Come d'altronde insegnano le equazioni cardinali della dinamica è sufficiente sapere la risultante delle forze ed il momento totale agente sul sistema rispetto ad un polo qualsiasi, senza preoccuparsi di come le forze siano ripartite o dove siano applicate. Questa osservazione, per quanto elementare, è di grande utilità in quanto permette di analizzare il sistema in maniera del tutto generale ed è utile sia per quel che concerne l'analisi diretta, ossia partendo dalle forze risalire al valore delle variabili di stato che identificano il sistema, sia per un'analisi inversa che permette, una volta noti i valori delle variabili di stato e quelli dei parametri di comando, di ricavare informazioni sulla risultante delle forze e sui momenti totali.

1.2 Equazioni del moto

Equazioni di congruenza

Definite u , v e r , si definiscono le variabili di stato del sistema

$$u \quad \beta = \arctan\left(\frac{v}{u}\right) \simeq \frac{v}{u} \quad \rho = \frac{r}{u} \quad (1.2)$$

La scelta di assumere come variabili di stato, oltre ad u , delle grandezze definite come rapporto tra una data variabile di stato originaria e u stessa, è dettata dal fatto che, come sarà evidente nel seguito, la dinamica laterale dei veicoli è solitamente studiata per valori di velocità longitudinale costanti. Pertanto, per poter confrontare il comportamento del sistema in varie situazioni, è utile relativizzare i valori delle variabili di stato.

Per chi ha già un po' di dimestichezza con la dinamica del veicolo non risulterà nuova la definizione della seconda variabile di stato introdotta: β è difatti il già noto angolo di assetto. Per quel che riguarda la terza variabile di stato, ρ , che sarà chiamata curvatura, si nota che la sua definizione è analoga al già noto angolo di Ackermann, se non fosse che in essa non compare il passo del veicolo. La mancata introduzione del passo del veicolo non è una questione di poco conto: il fatto di legarlo fin da subito al valore di una variabile di stato, avrebbe fatto sì che il sistema dinamico che verrà impostato sarebbe stato valido solo per veicoli che hanno il passo ben definito, escludendo pertanto dall'analisi ad esempio i veicoli con più di due assali.

Può risultare utile per il seguito del lavoro esplicitare, in funzione delle nuove variabili di stato, la formulazione delle derivate, calcolate rispetto al tempo, di v ed r

$$\begin{aligned} \dot{v} &= u\dot{\beta} + \dot{u}\beta \\ \dot{r} &= u\dot{\rho} + \dot{u}\rho \end{aligned} \tag{1.3}$$

Se si considera, come già accennato, che la dinamica laterale viene solitamente studiata per valori di $u = cost$, si ha

$$\begin{aligned} \dot{v} &= u\dot{\beta} \\ \dot{r} &= u\dot{\rho} \end{aligned} \tag{1.4}$$

e si evidenzia un legame di proporzionalità diretta sia tra i valori (v, r) e (β, ρ) , sia tra quelli (\dot{v}, \dot{r}) e $(\dot{\beta}, \dot{\rho})$, dove u è semplicemente un fattore di scala.

Un'altra coppia di variabili di stato che potrebbero essere scelte sono, sempre con riferimento alla Fig. 1.1, la coppia di lunghezze (S, R) . Volendone scrivere la formulazione in funzione di (β, ρ) si ha

$$\beta = \frac{S}{R} \quad \rho = \frac{1}{R} \tag{1.5}$$

con ρ che rappresenta l'inverso del raggio di curvatura della traiettoria del baricentro veicolo, in condizioni di regime.

Equazioni di equilibrio

Si possono scrivere le equazioni di equilibrio del sistema, mantenendo per adesso la doppia formulazione delle variabili di stato.

$$\begin{aligned} m(\dot{u} - vr) &= m(\dot{u} - u^2\beta\rho) = X \\ m(\dot{v} + ur) &= m(u\dot{\beta} + \dot{u}\beta + u^2\rho) = Y \\ Jr &= J(u\dot{\rho} + \dot{u}\rho) = N \end{aligned} \tag{1.6}$$

Equazioni costitutive

Per completare la trattazione si tratta ora di definire le dipendenze tra lo stato del sistema e le forze agenti su di esso. Pare ragionevole assumere che le forze esterne dipendano dalle variabili di stato u, v, r e dall'angolo volante imposto dal pilota δ_v . Volendo distinguere meglio, potremmo assumere come

grandezza controllabile dal pilota, oltre all'angolo di sterzo δ_v , anche la velocità di avanzamento u , ottenendo così la coppia di variabili di stato (β, ρ) e la coppia di parametri assegnati (u, δ_v) .

Risulta interessante osservare che la scelta di δ_v come parametro è ragionata: si è a conoscenza dei modelli di veicolo che prendono in considerazione la cedevolezza di sterzo, così come è noto che l'angolo di sterzo è trasmesso alle ruote da un riduttore, però si vuole impostare un'analisi che prescindendo da conoscenze di meccanica del veicolo e si limiti unicamente ad analizzare la dinamica di un sistema fisico, per il quale si individuano due variabili di stato e due parametri di controllo.

$$\begin{aligned} X &= \bar{X}(v, r; u, \delta_v) = X(\beta, \rho; u, \delta_v) \\ Y &= \bar{Y}(v, r; u, \delta_v) = Y(\beta, \rho; u, \delta_v) \\ N &= \bar{N}(v, r; u, \delta_v) = N(\beta, \rho; u, \delta_v) \end{aligned} \quad (1.7)$$

Nelle equazioni (1.7) si presenta per l'ultima volta la doppia formulazione delle variabili di stato, nel seguito della trattazione la scelta ricadrà sulla coppia (β, ρ) .

Si possono ora riscrivere le **equazioni del moto** che risultano essere

$$\begin{aligned} m(\dot{u} - u^2\beta\rho) &= X(u, \beta, \rho; \delta_v) \\ m(u\dot{\beta} + \dot{u}\beta + u^2\rho) &= Y(u, \beta, \rho; \delta_v) \\ J(u\dot{\rho} + \dot{u}\rho) &= N(u, \beta, \rho; \delta_v) \end{aligned} \quad (1.8)$$

1.3 Equazioni linearizzate

Come è uso in una gran quantità di sistemi fisici, il primo passo per analizzarli è linearizzare le equazioni che ne descrivono il moto.

Il fatto che la velocità longitudinale sia controllabile, insieme alla necessità di analizzare l'*handling* del sistema, ci porta a considerare solo due delle tre equazioni finora viste.

$$\begin{aligned} m(u\dot{\beta} + u^2\rho) &= Y(\beta, \rho; u, \delta_v) \\ Ju\dot{\rho} &= N(\beta, \rho; u, \delta_v) \end{aligned} \quad (1.9)$$

Condizioni di regime

Il primo passo da fare per linearizzare un sistema è quello di individuare una configurazione di equilibrio, attorno alla quale analizzarne il comportamento supposto lineare.

Si tratta di bloccare i comandi, assegnando una velocità longitudinale u_a e un angolo di sterzo δ_{va} costanti e di annullare le derivate delle variabili di stato $\dot{\beta} = \dot{\rho} = 0$. I valori di equilibrio delle variabili di stato vengono dette β_p e ρ_p .

$$\begin{aligned} mu_a^2 \rho &= Y_0(\beta_p, \rho_p; u_a, \delta_{va}) \\ 0 &= N_0(\beta_p, \rho_p; u_a, \delta_{va}) \end{aligned} \quad (1.10)$$

per cui è possibile esplicitare il valore delle variabili di stato ottenute in funzione dei comandi assegnati

$$\begin{aligned} \beta_p &= \beta_p(u_a, \delta_{va}) \\ \rho_p &= \rho_p(u_a, \delta_{va}) \end{aligned} \quad (1.11)$$

e ottenere, attraverso una serie di prove da condursi in condizioni di equilibrio, delle mappe funzione dei parametri di controllo.

È prassi in dinamica del veicolo assumere come parametro di controllo non tanto la velocità, quanto l'accelerazione laterale a regime \tilde{a}_y , per cui si potranno ottenere le mappe

$$\begin{aligned} \beta_p &= \bar{\beta}_p(\tilde{a}_y, \delta_{va}) \\ \rho_p &= \bar{\rho}_p(\tilde{a}_y, \delta_{va}) \end{aligned} \quad (1.12)$$

che in generale saranno superfici come in Fig. 1.2

Oscillazione libera

Attorno alla condizione di regime trovata nel paragrafo precedente, effettuiamo adesso la linearizzazione

$$\begin{aligned} m(u\dot{\beta} + u^2\dot{\rho}) &= Y_0 + (\beta - \beta_p)Y_\beta + (\rho - \rho_p)Y_\rho \\ Ju\dot{\rho} &= N_0 + (\beta - \beta_p)N_\beta + (\rho - \rho_p)N_\rho \end{aligned} \quad (1.13)$$

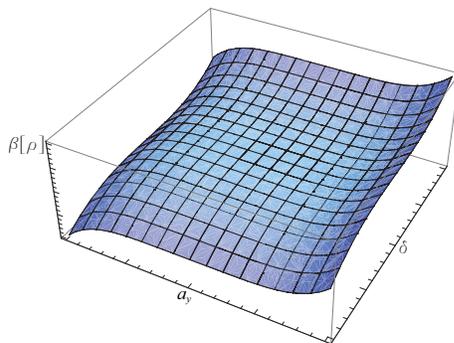


Figura 1.2: Mappa di equilibrio

dove $Y_0 = mu_a^2 \rho_p$ e $N_0 = 0$.

Considerando lo stato di equilibrio e introducendo le variabili traslate β_t e ρ_t

$$\begin{aligned}\beta_t &= \beta - \beta_p \\ \rho_t &= \rho - \rho_p\end{aligned}\tag{1.14}$$

si giunge a una semplice forma differenziale

$$\begin{aligned}mu_a \dot{\beta} &= Y_\beta \beta_t + (Y_\rho - mu_a^2) \rho_t \\ Ju_a \dot{\rho} &= N_\beta \beta_t + N_\rho \rho_t\end{aligned}\tag{1.15}$$

Si noti che $\dot{\beta}_t = \dot{\beta}$ e $\dot{\rho}_t = \dot{\rho}$.

Nei sistemi (1.13) e (1.15) fanno per la prima volta la loro comparsa le **derivate di stabilità**, elementi che rappresentano un cardine portante nella trattazione proposta. L'idea non è certamente nuova, già in alcuni articoli [11], [10], [1] e anche in qualche libro di dinamica dei veicoli [14] si ha traccia di esse, ma in letteratura non si hanno documenti che approfondiscano la questione e che cerchino di studiare a fondo la dinamica del veicolo attraverso questo approccio, cercando cioè di giungere alla formulazione delle derivate di stabilità partendo da modelli di veicolo o da prove sperimentali. In altri settori, come ad esempio quello aerospaziale [4], lo studio delle derivate di stabilità è pratica comune già da tempo.

Le derivate di stabilità sono derivate parziali calcolate in condizioni di equilibrio (β_p, ρ_p) e con comandi bloccati (u_a, δ_{va}) .

$$Y_\beta = \frac{\partial Y}{\partial \beta} \qquad Y_\rho = \frac{\partial Y}{\partial \rho} \qquad (1.16)$$

$$N_\beta = \frac{\partial N}{\partial \beta} \qquad N_\rho = \frac{\partial N}{\partial \rho} \qquad (1.17)$$

In linea del tutto generale saranno perciò funzione di tutte le quattro grandezze coinvolte.

Oscillazione forzata

Si considera ora un sistema da linearizzare attorno alla propria configurazione di equilibrio, al quale venga imposta un'alterazione dei comandi

$$\begin{aligned} u_t &= u - u_a \\ \delta_{vt} &= \delta_v - \delta_{va} \end{aligned} \qquad (1.18)$$

Si ottengono pertanto le seguenti equazioni

$$\begin{aligned} mu_a \dot{\beta} &= Y_\beta \beta_t + (Y_\rho - mu_a^2) \rho_t + Y_u u_t + Y_\delta \delta_{vt} \\ Ju_a \dot{\rho} &= N_\beta \beta_t + N_\rho \rho_t + N_u u_t + N_\delta \delta_{vt} \end{aligned} \qquad (1.19)$$

dove sono state introdotte le ulteriori derivate di stabilità

$$Y_\delta = \frac{\partial Y}{\partial \delta} \qquad N_\delta = \frac{\partial N}{\partial \delta} \qquad (1.20)$$

$$Y_u = \frac{\partial Y}{\partial u} \qquad N_u = \frac{\partial N}{\partial u} \qquad (1.21)$$

calcolate anch'esse nella condizione di equilibrio $(\beta_p, \rho_p; u_a, \delta_{va})$.

Siamo perciò di fronte ad un sistema differenziale lineare del primo ordine per il quale i coefficienti che moltiplicano le variabili di stato sono funzione dello stato stesso. Ci pare opportuno precisare fin da ora che lo scopo di questo lavoro non è quello di risolvere queste equazioni con metodi numerici o analitici, analizzando ad esempio successivi stati di equilibrio del sistema all'interno di una manovra, bensì quello di capire la natura di questi coefficienti, le manovre necessarie a ricavarne le mappe e il loro legame con la risposta dinamica del veicolo. Ovviamente i risultati ottenuti saranno validi nell'intorno della configurazione di equilibrio analizzata e l'approssimazione sarà di tipo lineare.

1.3.1 Gradienti di assetto e di curvatura

Considerando le equazioni di equilibrio in condizioni di regime è possibile ricavare dei legami tra le mappe $\beta_p(\tilde{a}_y, \delta_{va})$, $\rho_p(\tilde{a}_y, \delta_{va})$, ricavate in condizioni stazionarie, e le derivate di stabilità, che risultano essere grandezze legate alla dinamica del sistema in senso lato.

Come espresso in (1.13) in condizioni di equilibrio si ha

$$\begin{aligned} Y_0(\tilde{a}_y, \delta_{va}) &= m u_a^2 \rho_p = m \tilde{a}_y \\ N_0(\tilde{a}_y, \delta_{va}) &= 0 \end{aligned} \quad (1.22)$$

Prendendo pertanto in considerazione la condizione di equilibrio identificata dalle funzioni $(Y_0(\tilde{a}_y, \delta_{va}), N_0(\tilde{a}_y, \delta_{va}))$, è possibile esprimerne il differenziale come

$$\begin{aligned} \frac{\partial Y_0}{\partial \tilde{a}_y} &= Y_\beta \frac{\partial \beta_p}{\partial \tilde{a}_y} + Y_\rho \frac{\partial \rho_p}{\partial \tilde{a}_y} + Y_u \frac{\partial u_a}{\partial \tilde{a}_y} + Y_\delta \frac{\partial \delta_{va}}{\partial \tilde{a}_y} = m \frac{\partial \tilde{a}_y}{\partial \tilde{a}_y} = m \\ \frac{\partial Y_0}{\partial \delta_{va}} &= Y_\beta \frac{\partial \beta_p}{\partial \delta_{va}} + Y_\rho \frac{\partial \rho_p}{\partial \delta_{va}} + Y_u \frac{\partial u_a}{\partial \delta_{va}} + Y_\delta = m \frac{\partial \tilde{a}_y}{\partial \delta_{va}} = 0 \\ \frac{\partial N_0}{\partial \tilde{a}_y} &= N_\beta \frac{\partial \beta_p}{\partial \tilde{a}_y} + N_\rho \frac{\partial \rho_p}{\partial \tilde{a}_y} + N_u \frac{\partial u_a}{\partial \tilde{a}_y} + N_\delta \frac{\partial \delta_{va}}{\partial \tilde{a}_y} = 0 \\ \frac{\partial N_0}{\partial \delta_{va}} &= N_\beta \frac{\partial \beta_p}{\partial \delta_{va}} + N_\rho \frac{\partial \rho_p}{\partial \delta_{va}} + N_u \frac{\partial u_a}{\partial \delta_{va}} + N_\delta = 0 \end{aligned} \quad (1.23)$$

si ottiene un sistema di quattro equazioni dove, supponendo noti i gradienti di assetto e di curvatura, si hanno come incognite le otto derivate di stabilità.

In realtà, limitando la nostra analisi a veicoli ordinari, ossia veicoli che non hanno un'aerodinamica molto spinta, si può assumere nullo il valore delle derivate di stabilità relative alla velocità di avanzamento

$$Y_u = N_u = 0 \quad (1.24)$$

mentre si ha indipendenza dell'angolo di sterzo δ_{va} dall'accelerazione laterale \tilde{a}_y

$$\frac{\partial \delta_{va}}{\partial \tilde{a}_y} = 0 \quad (1.25)$$

Una volta note le mappe di equilibrio $\beta_p(\tilde{a}_y, \delta_{va})$, $\rho_p(\tilde{a}_y, \delta_{va})$ è possibile calcolarne le derivate rispetto ad \tilde{a}_y e δ_{va} , ottenendo così il **gradiente di assetto**

$$\nabla\beta_p(\tilde{a}_y, \delta_v) = \left(\frac{\partial\beta_p}{\partial\tilde{a}_y}, \frac{\partial\beta_p}{\partial\delta_{va}} \right) = (\beta_y, \beta_\delta) \quad (1.26)$$

e il **gradiente di curvatura**

$$\nabla\rho_p(\tilde{a}_y, \delta_v) = \left(\frac{\partial\rho_p}{\partial\tilde{a}_y}, \frac{\partial\rho_p}{\partial\delta_{va}} \right) = (\rho_y, \rho_\delta) \quad (1.27)$$

Si definisce inoltre:

- β_y , derivata di assetto dinamica
- β_δ , derivata di assetto cinematica
- ρ_y , derivata di curvatura dinamica
- ρ_δ , derivata di curvatura cinematica

In generale i due gradienti sono funzione, come del resto le mappe, di \tilde{a}_y e δ_{va} . In realtà, nella maggior parte dei casi, i gradienti di curvatura e di assetto risulteranno più semplicemente funzione di \tilde{a}_y . Come vedremo nel seguito, questa condizione si verifica a patto che per il modello di veicolo considerato le equazioni di congruenza presentino linearità tra i valori degli angoli di deriva (α_1, α_2) e il valore dell'angolo volante δ_v .

Tornando ad analizzare il sistema (1.23) si può adesso sostituire il valore delle derivate di assetto e di curvatura, note, in maniera tale da ricavare l'espressione di quattro delle sei derivate di stabilità del veicolo. Le restanti due derivate di stabilità sono assunte come parametri; la loro determinazione sarà necessaria per poter scrivere le equazioni lineari (1.19), ma per il momento non ci soffermiamo su questo argomento. Vedremo nel seguito che possono essere ricavate per via sperimentale o, stanti di nuovo alcune proprietà delle equazioni di congruenza, possono essere ottenute per via analitica in forma chiusa, sempre in funzione dei gradienti di assetto e di curvatura e di alcuni parametri geometrici caratteristici del veicolo.

La struttura del sistema risulta

$$\begin{cases} Y_\beta\beta_y + Y_\rho\rho_y & = m \\ Y_\beta\beta_\delta + Y_\rho\rho_\delta & = -Y_\delta \\ N_\beta\beta_y + N_\rho\rho_y & = 0 \\ N_\beta\beta_\delta + N_\rho\rho_\delta & = -N_\delta \end{cases} \quad (1.28)$$

dove si è scelto di assumere come parametri le derivate Y_δ e N_δ . La scelta dei

parametri non è obbligata ma qualora si debbano condurre manovre volte a determinarne il valore, certamente δ_v si trova in una posizione di vantaggio in quanto variabile controllabile.

La soluzione del sistema è

$$\begin{aligned} Y_\beta &= \frac{Y_\delta \rho_y + m \rho_\delta}{\beta_y \rho_\delta - \beta_\delta \rho_y} & Y_\rho &= -\frac{Y_\delta \beta_y + m \beta_\delta}{\beta_y \rho_\delta - \beta_\delta \rho_y} \\ N_\beta &= \frac{N_\delta \rho_y}{\beta_y \rho_\delta - \beta_\delta \rho_y} & N_\rho &= -\frac{N_\delta \beta_y}{\beta_y \rho_\delta - \beta_\delta \rho_y} \end{aligned} \quad (1.29)$$

Con alcuni semplici passaggi si verifica che per poter scrivere il sistema (1.19) è necessario conoscere i seguenti sei parametri

$$\begin{aligned} s_1(\tilde{a}_y, \delta_{va}) &= \beta_y \\ s_2(\tilde{a}_y, \delta_{va}) &= \rho_y \\ s_3(\tilde{a}_y, \delta_{va}) &= \beta_\delta \\ s_4(\tilde{a}_y, \delta_{va}) &= \rho_\delta \\ s_5(\tilde{a}_y, \delta_{va}) &= N_\delta/J \\ s_6(\tilde{a}_y, \delta_{va}) &= Y_\delta/m \end{aligned} \quad (1.30)$$

È quindi evidente a questo punto che veicoli costruttivamente differenti avranno medesime risposte dinamiche a patto di avere gli indici s_i identici e di conseguenza identiche derivate di stabilità. Pertanto possiamo assumere sia gli indici sia le derivate di stabilità come indicatori da tener presente nella progettazione di un veicolo. Il loro valore non darà indicazioni assoluta sulla bontà di un veicolo, ma sarà uno strumento molto valido nella progettazione per similitudine e per andare a ricercare e risolvere possibili lacune specifiche di alcuni veicoli.

1.4 Formulazione alternativa delle equazioni linearizzate

Come noto dalla meccanica delle vibrazioni [15], le equazioni differenziali del primo ordine (1.19) possono essere riscritte, in forma equivalente, come due equazioni differenziali del secondo ordine con medesima parte omogenea e forzanti diverse. Per dimostrare questo passaggio ci pare utile riscrivere il sistema (1.19) sotto forma matriciale

$$\begin{bmatrix} \dot{\beta} \\ \dot{\rho} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{Y_\beta}{mu_a} & \frac{Y_\rho - mu_a^2}{mu_a} \\ \frac{N_\beta}{Ju_a} & \frac{N_\rho}{Ju_a} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_t \\ \rho_t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{Y_\delta}{mu_a} \delta_{vt} \\ \frac{N_\delta}{Ju_a} \delta_{vt} \end{bmatrix} \quad (1.31)$$

secondo la classica struttura dei sistemi dinamici

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{b} \quad (1.32)$$

per poi applicarvi la trasformata di Laplace [3, p. 509]

$$\begin{bmatrix} s\beta_t \\ s\rho_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{Y_\beta}{mu_a} & \frac{Y_\rho - mu_a^2}{mu_a} \\ \frac{N_\beta}{Ju_a} & \frac{N_\rho}{Ju_a} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_t \\ \rho_t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{Y_\delta}{mu_a} \delta_{vt} \\ \frac{N_\delta}{Ju_a} \delta_{vt} \end{bmatrix} \quad (1.33)$$

Come per ogni sistema lineare sar  possibile esplicitare il vettore delle incognite

$$\mathbf{x} = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{b} \quad (1.34)$$

per poi anti-trasformare, dal dominio delle frequenze a quello del tempo, le formulazioni ottenuti.

La forma cui si giunge  

$$\begin{aligned} \ddot{\beta} + n_1\dot{\beta} + n_2\beta_t &= n_3\delta_v + n_4\dot{\delta}_v \\ \ddot{\rho} + n_1\dot{\rho} + n_2\rho_t &= n_5\delta_v + n_6\dot{\delta}_v \end{aligned} \quad (1.35)$$

Il sistema (1.35)   costituito da due equazioni differenziali del secondo ordine con termini omogenei identici e differente forzante. Da notare che la forzante   anche essa un'espressione differenziale del primo ordine per cui la dinamica del veicolo   condizionata sia dalla perturbazione dei comandi sia dalla derivata di quest'ultima rispetto al tempo, cio  quella che potremmo chiamare velocit  di perturbazione.

A prima vista questo passaggio potrebbe sembrare un'inutile complicazione del sistema, in realt  i coefficienti $n_i(u_a, \tilde{a}_y, \delta_{va})$, che definiremo **coefficienti caratteristici**, hanno un importante significato fisico ai fini dell'analisi del sistema.

A differenza delle derivate di stabilit  e dei gradienti di assetto e sottosterzo, i coefficienti caratteristici sono funzione, oltre che di \tilde{a}_y, δ_{va} anche della

velocità di avanzamento u_a . A regime sussiste un legame tra le tre grandezze per cui è sempre possibile scriverne una in funzione delle altre due. Non è però utile ai nostri fini disquisire su questo passaggio, anche in ragione del fatto che nelle nostre analisi u_a verrà sempre assunta costante.

1.4.1 Sistema omogeneo

Prendendo per adesso in considerazione soltanto la parte omogenea del sistema (1.35), è possibile trovare la soluzione delle equazioni differenziali secondo la prassi tradizionale. La forma e i coefficiente delle equazioni, come già notato, sono i medesimi sia per ρ_t sia per β_t per cui quanto segue è valido per tutte e due le variabili di stato e, ove necessario, si usa la variabili muta $x(t)$ per indicare indistintamente l'una o l'altra.

Le radici dell'equazione caratteristica associata alla differenziale sono

$$\lambda_{1,2}(u, \tilde{a}_y, \delta_{va}) = \frac{-n_1 \pm \sqrt{n_1^2 - 4n_2}}{2} = -\frac{n_1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{n_1}{2}\right)^2 - n_2} \quad (1.36)$$

e si ha che il sistema risulta sottosmorzato quando

$$\frac{n_1^2}{2} - n_2 < 0 \quad (1.37)$$

condizione che porta ad avere radici complesse coniugate e risposta sinusoidale esponenzialmente decrescente, a patto di avere $Re(\lambda_i) < 0$ $i = 1, 2$.

In termini di derivate di stabilità si ha

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2u_a} \left\{ \left(\frac{N_\rho}{J} + \frac{Y_\beta}{m} \right) \pm \left[\left(\frac{N_\rho}{J} + \frac{Y_\beta}{m} \right)^2 - \frac{4}{Jm} (Y_\beta N_\rho - (Y_\rho - mu_a^2) N_\beta) \right]^{\frac{1}{2}} \right\} \quad (1.38)$$

e le radici risultano complesse coniugate per

$$u_a(\tilde{a}_y, \delta_{va}) > \left[\frac{1}{N_\beta} \left(\frac{Y_\rho N_\beta - Y_\beta N_\rho}{m} + \frac{J}{4N_\beta} \left(\frac{N_\rho}{J} + \frac{Y_\beta}{m} \right)^2 \right) \right]^{\frac{1}{2}} \quad (1.39)$$

Tornando a considerare il sistema (1.31) non è difficile verificare che i valori di $\lambda_{1,2}$ di cui sopra altro non sono che gli autovalori della matrice \mathbf{A} . Secondo la trattazione classica è possibile esplicitare i primi due coefficienti che compaiono, n_1 e n_2 , in relazione alla matrice dinamica \mathbf{A} (1.34) e alle caratteristiche fisiche del sistema. Si ottiene così

$$\begin{aligned} n_1(u, \tilde{a}_y, \delta_{va}) &= -\text{tr}\mathbf{A} = 2\zeta\omega_n \\ n_2(u, \tilde{a}_y, \delta_{va}) &= \det \mathbf{A} = \omega_n^2 \end{aligned} \quad (1.40)$$

dove si indica con ω_n la frequenza naturale del sistema e con ζ il coefficiente di smorzamento.

Il valore degli stessi coefficienti può essere altresì espresso in funzione delle derivate di stabilità. La formulazione che viene proposta è proprio quella che si ottiene nel momento in cui si anti-trasforma quanto ottenuto nel sistema (1.34).

$$\begin{aligned} n_1(u_a, \tilde{a}_y, \delta_{va}) &= -\frac{1}{u_a} \left(\frac{N_\rho}{J} + \frac{Y_\beta}{m} \right) \\ n_2(u_a, \tilde{a}_y, \delta_{va}) &= \frac{1}{Jmu_a^2} (Y_\beta N_\rho - (Y_\rho - mu_a^2)N_\beta) \end{aligned} \quad (1.41)$$

Il primo dei coefficienti caratteristici, n_1 , è legato solo ai termini della diagonale principale della matrice \mathbf{A} ed è sempre positivo. È opportuno precisare infatti che le derivate Y_β ed N_ρ sono sempre negative in quanto rappresentano un termine di richiamo del valore della variabile di stato. Difatti, se si impone una perturbazione legata unicamente a β_t per la prima equazione del sistema (1.31), e una perturbazione legata unicamente a ρ_t per la seconda

$$\begin{aligned} \dot{\beta} &= Y_\beta \beta_t \\ \dot{\rho} &= N_\rho \rho_t \end{aligned} \quad (1.42)$$

si ottengono valori di $\dot{\beta}$ e $\dot{\rho}$ negativi che tendono a riportare il sistema nella configurazione imperturbata.

La soluzione dell'equazione differenziale omogenea, indipendentemente dal fatto che si consideri la variabile di stato β_t o ρ_t è la seguente (espressa in funzione della variabile generica $x(t)$)

$$x(t) = Ae^{-\frac{n_1}{2}t} \sin \left(\sqrt{n_2 - \left(\frac{n_1}{2}\right)^2} t + \phi \right) \quad (1.43)$$

con A e ϕ che dipendono dalle condizioni iniziali del sistema.

Si è per adesso assunto che il sistema sia asintoticamente stabile e quindi la soluzione omogenea dell'equazione differenziale tenda a zero per $t \rightarrow \infty$. Questa condizione è verificata nel momento in cui $\text{tr} \mathbf{A} < 0$ e $\det \mathbf{A} > 0$. Nel seguito verrà presa in considerazione anche il caso in cui $\text{tr} \mathbf{A} < 0$ e $\det \mathbf{A} < 0$, condizione che si verifica nei veicoli comunemente detti sovrasterzanti.

Volendo riscrivere la (1.43) in funzione delle derivate di stabilità si ottiene

$$x(t) = Ae^{-\frac{1}{2u_a} \left(\frac{N_\rho}{J} + \frac{Y_\beta}{m} \right) t} \sin \left(\frac{1}{u_a} \sqrt{\frac{1}{Jm} (Y_\beta N_\rho - (Y_\rho - mu_a^2) N_\beta) - \frac{1}{4} \left(\frac{N_\rho}{J} - \frac{Y_\beta}{m} \right)^2} t + \phi \right) \quad (1.44)$$

Per completare la carrellata è possibile scrivere, in funzione dei coefficienti caratteristici, anche il valore della frequenza del sistema smorzato ω_s e il fattore di smorzamento ζ

$$\begin{aligned} \omega_s(u_a, \tilde{a}_y, \delta_{va}) &= \sqrt{n_2 - \frac{n_1^2}{4}} \\ \zeta(u_a, \tilde{a}_y, \delta_{va}) &= \frac{n_1}{2\sqrt{n_2}} \end{aligned} \quad (1.45)$$

che in funzione delle derivate di stabilità diventano

$$\begin{aligned} \omega_s(u_a, \tilde{a}_y, \delta_{va}) &= \frac{1}{u_a} \left[\frac{1}{Jm} (Y_\beta N_\rho - (Y_\rho - mu_a^2) N_\beta) - \frac{1}{4} \left(\frac{N_\rho}{J} - \frac{Y_\beta}{m} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \\ \zeta(u_a, \tilde{a}_y, \delta_{va}) &= -\frac{JY_\beta + mN_\rho}{2 [Jm (Y_\beta N_\rho - (Y_\rho - mu_a^2) N_\beta)]^{\frac{1}{2}}} \end{aligned} \quad (1.46)$$

La condizione di instabilità si raggiunge invece quando $\det \mathbf{A} < 0$, ossia qualora la parte reale di un autovalore della matrice \mathbf{A} è positiva. Guardando alle derivate di stabilità si avrà instabilità qualora $n_2(u_a, \tilde{a}_y, \delta_{va}) < 0$, cioè quando

$$\frac{1}{Jmu_a^2} (Y_\beta N_\rho - (Y_\rho - mu_a^2) N_\beta) < 0 \quad (1.47)$$

Questa condizione come noto non è desiderabile e, ammesso che si verifichi, si manifesta per valori di velocità superiori a quello della velocità critica, definita come

$$u_{cr}(\tilde{a}_y, \delta_{va}) = \sqrt{\frac{1}{mN_\beta} (Y_\rho N_\beta - Y_\beta N_\rho)} \quad (1.48)$$

È importante notare che la velocità critica non assume un valore fisso ma è anch'essa funzione dello stato del sistema. Ovviamente nel caso in cui il valore della velocità critica sia immaginario significa che la risposta del veicolo in quella condizione è asintoticamente stabile per ogni valore di u_a . Il valore della velocità critica apparterrà ai numeri reali nel caso in cui

$$\frac{1}{mN_\beta} (Y_\rho N_\beta - Y_\beta N_\rho) > 0 \quad (1.49)$$

Altra importante considerazione riguarda il valore che assumono i coefficienti caratteristici al variare della velocità u_a . Si verifica che al crescere della velocità il valore di ω_s ha un comportamento asintotico

$$\lim_{u_a \rightarrow +\infty} \omega_s = \lim_{u_a \rightarrow +\infty} \sqrt{n_2} = \sqrt{\frac{N_\beta}{J}} \quad (1.50)$$

Questa relazione può essere letta e utilizzata nei due versi

- note le derivate di stabilità è possibile determinare la pulsazione smorzata per alti valori di velocità
- è possibile ricavare il valore di $N_\beta(\tilde{a}_y, \delta_{vt})$ a partire da misurazioni sperimentali in grado di fornire una precisa stima di $\omega_s(\infty, \tilde{a}_y, \delta_{vt})$.

Su quali siano manovre più indicate per ricavare informazioni riguardo i coefficienti caratteristici del sistema ci soffermeremo in maniera più dettagliata nel seguito, ma ci pare utile anticipare che una buona approssimazione del valore asintotico di ω_s si ha per valori di u_a raggiungibili senza difficoltà dai comuni veicoli.

1.4.2 Forzante

Si passa adesso a considerare il ruolo dei termini forzanti del sistema (1.31). A differenza della parte omogenea, i termini forzanti sono diversi per β e per ρ , anche dal punto di vista dimensionale.

Con riferimento al sistema (1.35) è possibile scrivere i termini n_i , $i = 3...6$ in funzione delle derivate di stabilità

$$\begin{aligned}
 n_3(u_a, \tilde{a}_y, \delta_{va}) &= \frac{1}{Jmu_a^2} ((Y_\rho - mu_a^2)N_\delta - N_\rho Y_\delta) \\
 n_4(u_a, \tilde{a}_y, \delta_{va}) &= \frac{Y_\delta}{mu_a} \\
 n_5(u_a, \tilde{a}_y, \delta_{va}) &= -\frac{1}{Jmu_a^2} (Y_\beta N_\delta - N_\beta Y_\delta) \\
 n_6(u_a, \tilde{a}_y, \delta_{va}) &= \frac{N_\delta}{Ju_a}
 \end{aligned} \tag{1.51}$$

Queste espressioni meritano di essere commentate in maniera abbastanza dettagliata, in quanto possono dare un'idea di come il veicolo reagisce ai comandi del pilota e in che misura i vari parametri condizionano detta risposta. Si ha una certa dualità tra i coefficienti caratteristici relativi alla prima equazione e quelli relativi alla seconda, per cui è possibile analizzarli a coppie.

- n_3 e n_5 , sono termini che, come vedremo nel seguito, insieme ad n_2 condizionano il guadagno dell'angolo di assetto [curvatura] rispetto all'angolo di sterzo. Interessante osservare che nella formulazione relativa alla prima [seconda] equazione, quella che riguarda β_t [ρ_t], non compaiono derivate parziali calcolate rispetto alla variabile stessa, ma compaiono quelle calcolate rispetto all'altra variabile di stato ρ_t [β_t] e rispetto alla variazione di angolo di sterzo δ_t
- n_4 e n_6 hanno una formulazione molto immediata e condizionano la dinamica di β_t [ρ_t] in ragione della velocità di sterzata δ_{vt} . Interessante notare che β_t è condizionato da Y_δ/m mentre ρ_t è legato a N_δ/J , legame che potevamo aspettarci fin da principio. Non era però scontato capire che questo legame fosse relativo a variazioni di $\dot{\delta}_{vt}$.

1.5 Funzioni di trasferimento

Ai fini di questa analisi è risultato inoltre molto utile prendere in considerazione alcune definizioni di teoria dei sistemi [3, p. 88]. Considerando la trasformata nel dominio delle frequenze mostrata in (1.33), si perviene alla seguente formulazione

$$\begin{aligned}(s^2 + n_1s + n_2)\beta_t(s) &= (n_4s + n_3)\delta_{vt}(s) \\ (s^2 + n_1s + n_2)\rho_t(s) &= (n_5s + n_6)\delta_{vt}(s)\end{aligned}\tag{1.52}$$

cui sono associate le funzioni di trasferimento

$$\begin{aligned}G_\beta(s, u_a, \tilde{a}_y, \delta_{va}) &= \frac{\beta_t(s)}{\delta_{vt}(s)} = \frac{n_4s + n_3}{s^2 + n_1s + n_2} \\ G_\rho(s, u_a, \tilde{a}_y, \delta_{va}) &= \frac{\rho_t(s)}{\delta_{vt}(s)} = \frac{n_5s + n_6}{s^2 + n_1s + n_2}\end{aligned}\tag{1.53}$$

che possono essere riscritte considerando la forma canonica o forma di Bode

$$\begin{aligned}G_\beta(s, u_a, \tilde{a}_y, \delta_{va}) &= \frac{\beta_t(s)}{\delta_{vt}(s)} = \frac{n_3}{n_2} \frac{\frac{n_4}{n_3}s + 1}{\frac{s^2}{n_2} + \frac{n_1}{n_2}s + 1} \\ G_\rho(s, u_a, \tilde{a}_y, \delta_{va}) &= \frac{\rho_t(s)}{\delta_{vt}(s)} = \frac{n_5}{n_2} \frac{\frac{n_6}{n_5}s + 1}{\frac{s^2}{n_2} + \frac{n_1}{n_2}s + 1}\end{aligned}\tag{1.54}$$

che mette in evidenza il guadagno, uno zero e due poli.

1.5.1 Poli

I poli sono definiti come i valori di s per cui si annulla il denominatore della funzione di trasferimento. Questi valori coincidono con le radici dell'equazione caratteristica associata al sistema omogeneo, come già affrontato nel paragrafo (1.4.1), cui si rimanda.

1.5.2 Zeri

Gli zeri sono definiti come i valori di s per cui si annulla il numeratore, e il loro valore è legato alla forzante del sistema.

Questa parte è di grande ausilio nello studio del sistema poiché, secondo l'analisi classica delle equazioni differenziali, non si hanno strumenti così immediati e prettamente quantitativi per analizzare la forzante del sistema.

In funzione dei coefficienti caratteristici, e quindi delle derivate di stabilità, si ha che gli zeri, definiti rispettivamente z_β e z_ρ assumono la forma

$$\begin{aligned} z_\beta(u_a, \tilde{a}_y, \delta_{va}) &= -\frac{n_3}{n_4} = \frac{N_\rho Y_\delta - (Y_\rho - mu_a^2)N_\delta}{Ju_a Y_\delta} \\ z_\rho(u_a, \tilde{a}_y, \delta_{va}) &= -\frac{n_5}{n_6} = -\frac{N_\beta Y_\delta - Y_\beta N_\delta}{mu_a N_\delta} \end{aligned} \quad (1.55)$$

1.5.3 Guadagno

Il guadagno della funzione di trasferimento $G_\beta [G_\rho]$, definito $K_\beta [K_\rho]$, rappresenta il valore di regime cui si porta $\beta_t [\rho_t]$ quando viene impressa all'angolo volante una variazione δ_{vt} unitaria.

$$\begin{aligned} K_\beta &= -\frac{(Y_\rho - mu_a^2)N_\delta - N_\rho Y_\delta}{(Y_\rho - mu_a^2)N_\beta - N_\rho Y_\beta} \\ K_\rho &= -\frac{N_\beta Y_\delta - Y_\beta N_\delta}{(Y_\rho - mu_a^2)N_\beta - N_\rho Y_\beta} \end{aligned} \quad (1.56)$$

Analogamente a quanto fatto per ω_s è possibile ricavare anche dal valore del guadagno $K_\beta [K_\rho]$ calcolato in particolari condizioni informazioni riguardanti le derivate di stabilità

$$\begin{aligned} \lim_{u_a \rightarrow +\infty} K_\beta &= \frac{N_\delta}{N_\beta} \\ \lim_{u_a \rightarrow +\infty} K_\rho &= 0 \end{aligned} \quad (1.57)$$

Il valore di $K_\rho(\infty, \tilde{a}_y, \delta_{vt})$ non riserva informazioni utili, come del resto c'era da aspettarsi, mentre si verifica che il valore $K_\beta(\infty, \tilde{a}_y, \delta_{vt})$ è pari al rapporto N_δ/N_β .

Per quanto riguarda i valori che il guadagno $K_\beta [K_\rho]$ assume per velocità molto basse si ottengono altre informazioni

$$\begin{aligned} \lim_{u_a \rightarrow 0} K_\beta &= \frac{N_\rho Y_\delta - Y_\rho N_\delta}{N_\beta Y_\rho - Y_\beta N_\rho} \\ \lim_{u_a \rightarrow 0} K_\rho &= -\frac{N_\beta Y_\delta - Y_\beta N_\delta}{N_\beta Y_\rho - Y_\beta N_\rho} \end{aligned} \quad (1.58)$$

dove apparentemente si ha una forma parecchio articolata che, dopo aver

esplicitato i valori di $(\beta_y, \rho_y, \beta_\delta, \rho_\delta)$ dal sistema (1.28), si semplifica in maniera sorprendente

$$\begin{aligned}\lim_{u_a \rightarrow 0} K_\beta &= \frac{N_\rho Y_\delta - Y_\rho N_\delta}{N_\beta Y_\rho - Y_\beta N_\rho} = \beta_\delta \\ \lim_{u_a \rightarrow 0} K_\rho &= -\frac{N_\beta Y_\delta - Y_\beta N_\delta}{N_\beta Y_\rho - Y_\beta N_\rho} = \rho_\delta\end{aligned}\tag{1.59}$$

Si può verificare che esiste un valore di velocità per cui K_β è nullo ponendo uguale a zero la prima equazione in (1.56)

$$u_\beta(\tilde{a}_y, \delta_{va}) = \sqrt{\frac{Y_\rho N_\delta - N_\rho Y_\delta}{m N_\delta}}\tag{1.60}$$

Capitolo 2

Dalle manovre ai coefficienti del sistema

Si vuole descrivere quali siano le manovre che permettono di ricavare i valori dei parametri, delle funzioni e dei coefficienti caratteristici considerati nel capitolo 1.

Si tratterà di distinguere tra veicoli reali, veicoli modellati in ambienti *multibody* e veicoli di cui si ha a disposizione il modello. Nei risultati che verranno esposti nei capitoli seguenti illustreremo solamente i risultati ottenuti con veicoli di cui il *CRF* ha messo a disposizione il modello monotraccia equivalente, mentre si conta che in successivi approfondimenti potranno essere presi in considerazione prima i modelli *multibody* ed infine i veicoli reali. Come però si illustra nel seguito non c'è motivo di aspettarsi che le differenze siano molte.

2.1 Modelli di veicolo

Il *CRF* ha messo a nostra disposizione dei modelli monotraccia equivalenti di veicoli sia del gruppo *Fiat* sia della concorrenza. Riguardo alla maniera in cui si possa passare da un veicolo reale ad un modello monotraccia equivalente non è stato possibile acquisire molte informazioni, in quanto le normative interne legate a queste procedure sono di natura confidenziale.

I modelli considerati sono monotraccia non lineari, con caratteristica del pneumatico espressa attraverso la Magic Formula, per i quali si prende in considerazione anche il ritardo di risposta equivalente¹.

¹si considera una lunghezza di rilassamento equivalente relativa all'assale, all'interno della quale sono riassunti, secondo criteri anch'essi confidenziali, tutti i fattori che portano ad un ritardo nella risposta del veicolo ai comandi del pilota

Nel seguito sarà dedicato un intero capitolo (cap. 5) all'analisi dei coefficienti caratteristici in relazione ai vari modelli considerati, per adesso ci basti considerare due casistiche generali:

- come ricavare i parametri caratteristici a partire da manovre simulate
- come ricavare i parametri caratteristici a partire dalla conoscenza delle caratteristiche degli assali

2.1.1 Manovre simulate

I gradienti di assetto e di curvatura $(\beta_y, \beta_\delta; \rho_y, \rho_\delta)$, come visto nel paragrafo 1.3.1, possono essere ricavati a partire dalla conoscenza delle mappe di equilibrio $\beta_p(\tilde{a}_y, \delta_{va})$ e $\rho_p(\tilde{a}_y, \delta_{va})$.

Queste mappe possono essere ricavate risolvendo le equazioni di equilibrio linearizzate

$$\begin{aligned} m\tilde{a}_y &= Y(u_a, \delta_{va}, \beta_p, \rho_p) \\ 0 &= N(u_a, \delta_{va}, \beta_p, \rho_p) \end{aligned} \quad (2.1)$$

dove i simboli si riferiscono alle grandezze in Fig. 2.1.

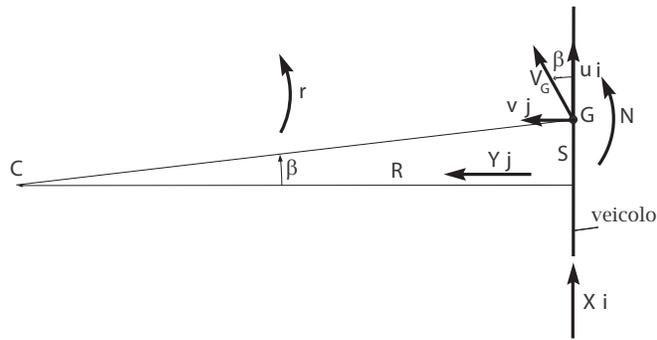


Figura 2.1: Definizione di veicolo

Le mappe possono essere ottenute in molte maniere, visto che la relazione tra il valore della coppia di parametri di comando (u_a, δ_{va}) e di variabili di stato (β_p, ρ_p) è univoca.

Un esempio può essere quello di simulare manovre in cui si imponga l'accelerazione laterale e si faccia variare, per successivi stati di equilibrio,

il valore dell'angolo di sterzo in un intervallo $(-\bar{\delta}_m, \bar{\delta}_M)$. Nei veicoli reali la condizione $\tilde{a}_y = cost$ non sarebbe semplice da ottenere, ma nell'ottica di risolvere le equazioni di equilibrio (2.1) al calcolatore, questa procedura è la più immediata.

In Fig. 2.2 e Fig. 2.3 sono riportati i valori di β e ρ ottenuti attraverso manovre analoghe a quella descritta di sopra. I risultati sono stati ottenuti attraverso codici in linguaggio *Mathematica* ed hanno delle limitazioni dettate dalla fisica del problema: si può verificare che, come del resto è ovvio, valori di ρ positivi possono essere ottenuti soltanto con una combinazione di angolo di sterzo e di accelerazione laterale positivi, viceversa per $\rho < 0$. Non sono state considerate invece limitazioni sulla velocità raggiungibile dal veicolo, per cui non sarà difficile ricavare dai grafici valori di u_a molto elevati in corrispondenza di accelerazioni laterali elevate e valori di ρ prossimi a zero.

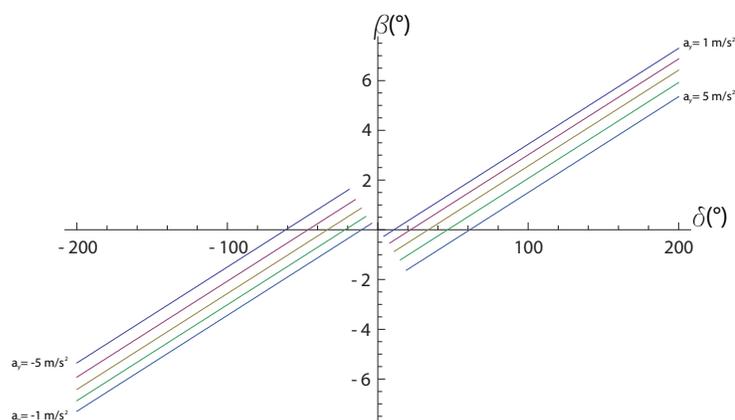


Figura 2.2: Angolo di assetto

I grafici sono relativi al modello monotraccia non lineare del *Veicolo 1* fornito dal CRF, di cui nel seguito verranno presentate le caratteristiche costruttive. L'andamento lineare dei valori di β e ρ in funzione dell'angolo di sterzo δ_{va} non deve stupire, in quanto le equazioni di congruenza del modello monotraccia impongono proporzionalità diretta tra le grandezze suddette (3.39).

I valori delle derivate cinematiche di assetto e di curvatura possono essere ottenuti derivando le funzioni di cui sopra rispetto a δ_{va} . Nel caso in analisi è evidente che il valore β_δ e ρ_δ , non dipende né da \tilde{a}_y né dall'angolo di sterzo δ_{va} , per cui il loro andamento è costante.

In maniera analoga, al fine di ricavare l'andamento delle derivate dinamiche di assetto e curvatura, è possibile simulare delle manovre in cui si impone il valore dell'angolo di sterzo e si fa variare, per successivi stati di

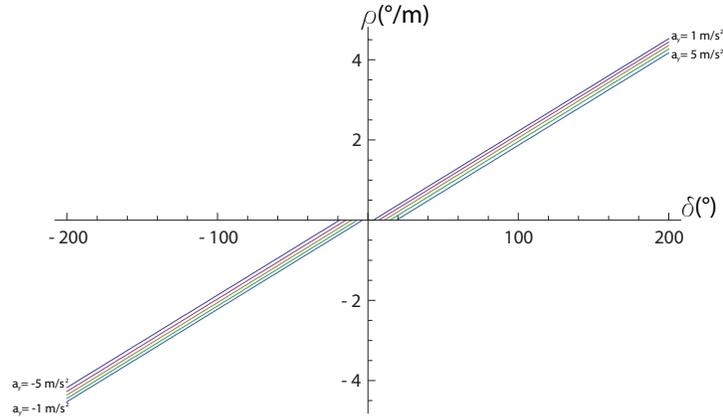


Figura 2.3: Curvatura

equilibrio, l'accelerazione laterale del veicolo o , in un'ottica più verosimile, la velocità di avanzamento del veicolo u_a .

Anche in questo caso le limitazioni sono dettate dal fatto che angolo di sterzo e curvatura, a regime, devono essere concordi ed inoltre si verifica che, fissato un valore dell'angolo di sterzo, non è possibile superare un determinato limite di accelerazione laterale, anche facendo crescere all'infinito la velocità di avanzamento. Questo risultato può essere ottenuto, forse in maniera meno intuitiva, analizzando l'*handling diagram*.

L'andamento delle derivate dinamiche di assetto e di curvatura si ottiene derivando le curve in Fig. 2.4 e Fig. 2.5 e, per il modello monotraccia non lineare, si ottengono valori di $\beta_y(\tilde{a}_y)$ e $\rho_y(\tilde{a}_y)$ indipendenti da δ_{va} (le curve ottenute per diversi valori di angolo di sterzo sono perfettamente sovrapponibili per traslazione).

Per risolvere il sistema (1.28) è necessario aggiungere altre due equazioni che, come già anticipato, possono essere la (1.47) e la (1.57). Le manovre atte a ricavare queste grandezze sono descritte nel seguito; i risultati ricavati da esse però non sono poi stati utilizzati negli sviluppi successivi del lavoro in quanto è possibile ricavare i coefficienti caratteristici del veicolo in maniera più diretta, perdendo però la generalità che contraddistingue questa parte.

Per ricavare il valore di ω_s è sufficiente ricavare l'andamento di $\beta(t)$ e di $\rho(t)$ risolvendo il sistema differenziale

$$\begin{aligned} m(u\dot{\beta} + u^2\rho) &= Y(\delta_{va}; \beta, \rho) \\ Ju\dot{\rho} &= N(\delta_{va}; \beta, \rho) \end{aligned} \quad (2.2)$$

con velocità di avanzamento u_a elevata (per mantenere una certa verosimiglian-

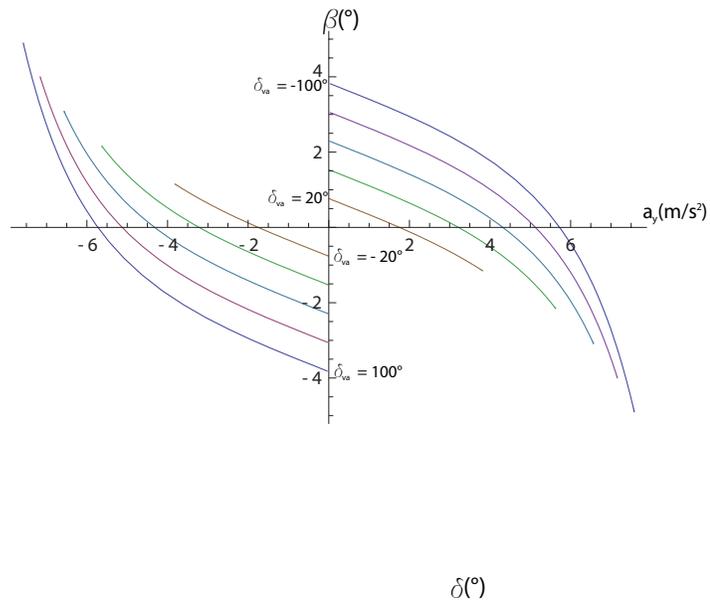


Figura 2.4: Angolo di assetto

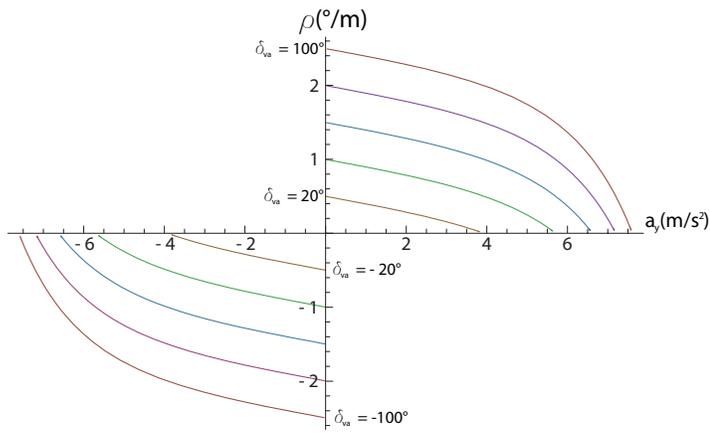


Figura 2.5: Curvatura

za si assume 40 m/s) e condizioni iniziali β_0, ρ_0 prossime, ma non uguali, a β_p, ρ_p .

Assegnando i valori (u_a, δ_{va}) si ricavano le variabili di stato (β_p, ρ_p) e l'accelerazione laterale \tilde{a}_y di regime e dalla forma della soluzione si ricavano informazioni relative a ω_s .

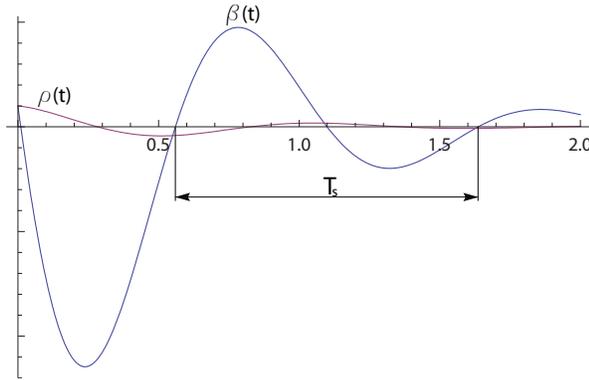


Figura 2.6: Oscillazione libera *Veicolo 1*

$$\omega_s(\tilde{a}_y, \delta_{va}) = \frac{2\pi}{T_s} \simeq \sqrt{\frac{N_\beta}{J}} \quad (2.3)$$

Al contrario delle relazioni trovate in precedenza quella appena esposta è un'approssimazione, per cui si renderebbe necessario uno studio di carattere sperimentale per verificarne il campo di validità ed effettuare un'accurata analisi di convergenza.

Un'altra manovra da prendere in considerazione è atta a misurare il valore di $u_\beta(\tilde{a}_y, \delta_{va})$ definito nell'equazione (1.60). Si tratterà, in linea generale, di imporre un colpo di sterzo, quanto più piccolo possibile, e misurare per quali valori il guadagno $K_\beta(\tilde{a}_y, \delta_{va})$ è nullo. La ragione per cui il valore dell'angolo di sterzo debba essere piccolo è legata alla linearizzazione del sistema, mentre la rapidità con cui viene impresso il colpo di sterzo non influenza i risultati, essendo essi legati ai valori di regime.

Si possono pertanto condurre delle manovre di questo tipo

- si assegna al veicolo un angolo di sterzo δ_{va} e una velocità di avanzamento u_a
- si esegue un piccolo colpo di sterzo e si acquisisce il valore β_t
- se $\beta_t \neq 0$ si riporta il valore dell'angolo di sterzo a δ_{va}

- si incrementa la velocità di avanzamento a $u_a + \Delta u_a$
- si ripete l'operazione fino ad ottenere $\beta_t(\tilde{a}_y, \delta_{va}) = 0$

L'ultima relazione da prendere in considerazione è quella che lega il guadagno $K_\beta(\infty, \tilde{a}_y, \delta_{vt})$ alle derivate di stabilità ((1.57)). La manovra più indicata di nuovo è un piccolo colpo di sterzo

Anche in questo caso si renderebbe necessario un approfondimento e una validazione dei risultati dal punto di vista sperimentale, soprattutto per il fatto che si utilizzano relazioni esatte per $u_a \rightarrow \infty$ per ricavare informazioni riguardanti prove condotte per valori di u_a finiti. Il maggiore ostacolo è legato al fatto che \tilde{a}_y non è definita per $u_a \rightarrow \infty$, mentre non si può prescindere da essa nelle manovre reali.

La questione può essere però aggirata in maniera più semplice e meno onerosa anche dal punto di vista delle manovre da effettuare, introducendo gli angoli di deriva e le equazioni di congruenza

$$\alpha_{ij} = f_{ij}(\delta_v, \beta, \rho) \quad (2.4)$$

dove i indica l'assale (1 anteriore, 2 posteriore) e j il lato (1 sinistra, 2 destra).

2.1.2 Caratteristiche degli assali

Le procedure sperimentali attualmente in uso sono in grado di ricavare, a partire da veicoli reali, modelli monotraccia equivalenti degli stessi. Proprio queste procedure sono state utilizzate dal *CRF* per fornirci i dati a nostra disposizione. Analogamente, se si dispone di un modello *multibody* di un veicolo, è possibile ricavare i valori delle forze scambiate con l'esterno e quindi risalire alle caratteristiche degli assali.

Pertanto, pensare di avere a disposizione le caratteristiche equivalenti degli assali di un veicolo è un'ipotesi realistica, e l'accuratezza con cui queste caratteristiche ricalcano il comportamento reale del veicolo ci è stato garantito esser buona.

Si definisce rigidezza di deriva generalizzata dell'assale

$$\Phi_i(\alpha_{ip}) = \left. \frac{dY_i}{d\alpha_i} \right|_{\alpha_i = \alpha_{ip}} \quad (2.5)$$

e rigidezza di deriva normalizzata e generalizzata dell'assale il rapporto

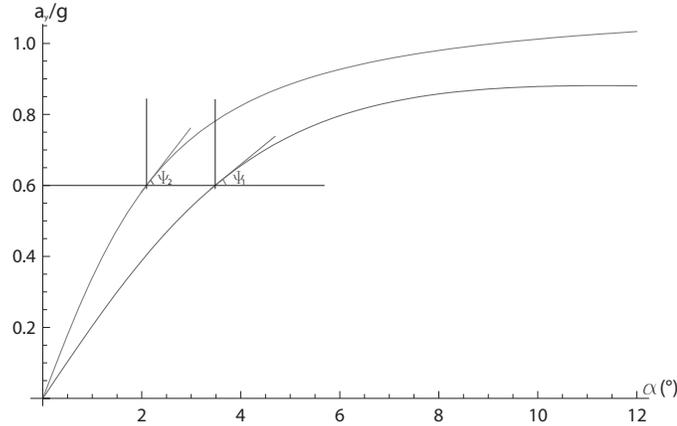


Figura 2.7: Caratteristica normalizzata degli assali *Veicolo 1*

$$\Psi_i(\alpha_{ip}) = \frac{\Phi_i(\alpha_{ip})}{W_i} \quad (2.6)$$

dove W_i è la massa che grava sull' i -esimo assale in condizioni di equilibrio.

Noto il valore della rigidezza di deriva generalizzata è possibile calcolare le derivate di stabilità come derivata di funzioni composte

$$\begin{aligned} Y_\zeta &= \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 Y_{ij\zeta} = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \Phi_{ij}(\alpha_{ij}) \frac{\partial \alpha_{ij}}{\partial \zeta} \\ N_\zeta &= \sum_{j=1}^2 Y_{1j\zeta} a_1 - \sum_{j=1}^2 Y_{2j\zeta} a_2 = \sum_{j=1}^2 \Phi_{1j}(\alpha_{1j}) \frac{\partial \alpha_{1j}}{\partial \zeta} a_1 - \sum_{j=1}^2 \Phi_{2j}(\alpha_{2j}) \frac{\partial \alpha_{2j}}{\partial \zeta} a_2 \end{aligned} \quad (2.7)$$

dove con ζ si è indicata la generica grandezza rispetto cui si deriva il valore della forza e del momento.

Si deve notare che con l'introduzione del sistema (2.7) la trattazione ha perso parte della sua generalità, in quanto si è assunto la formulazione di $Y(\alpha_{ij})$ e $N(\alpha_{ij})$ relativa ad un modello di veicolo che ha come limitazione quella di avere il differenziale aperto. Difatti il sistema (2.7) si riferisce a un modello al modello di veicolo di Fig. 2.8

L'aggiunta di ulteriori assali non comporterebbe invece alcuna modifica sostanziale alla trattazione, si tratterebbe solo di riscrivere il sistema di equilibrio in analogia a quello in (2.7).

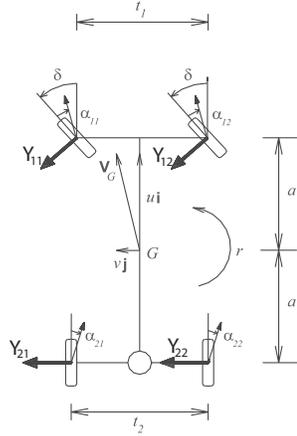


Figura 2.8: Modello di veicolo con differenziale aperto

Se invece si considera un veicolo con differenziale bloccato, la formulazione di $N(u_a, \delta_{va}; \beta_p, \rho_p)$ risulta diversa da quella riportata in (2.7), a causa delle forze longitudinali che si sviluppano al posteriore. Una trattazione specifica per modelli di veicolo con differenziale bloccato è proposta nel paragrafo (3.6).

Se sono note le equazioni di congruenza è possibile poter scrivere il legame tra (α_1, α_2) e (δ_v, β, ρ) derivando l'equazione (2.4)

$$\frac{d\alpha_{ij}}{d\zeta} = \frac{df_{ij}(\delta_v, \beta, \rho)}{d\zeta} \quad (2.8)$$

e quindi sostituire i risultati ottenuti all'interno della (2.7).

Le equazioni di congruenza rappresentano dei legami geometrici sempre validi, non sono frutto di nessun modello, e possono essere considerate nella loro forma completa o in una forma approssimata che trascura gli effetti di ordine superiore. Pertanto non è da ritenersi semplificativa né tanto meno riduttiva l'indicazione di affidarsi alla conoscenza delle equazioni di congruenza per ricavare informazioni riguardo alle derivate di stabilità.

È possibile anche riuscire a scrivere le derivate di stabilità nel caso in cui non siano note le rigidzze di deriva generalizzate. All'equilibrio la forza laterale scambiata dai singoli assali è

$$Y_i = W_i \frac{\tilde{a}_y(\alpha_i)}{g} \quad (2.9)$$

derivando

$$\frac{dY_i}{d\alpha_i} = \Phi_i(\alpha_i) = \frac{W_1}{g} \frac{d\tilde{a}_y}{d\alpha_i} \quad (2.10)$$

ed in base alla proprietà delle funzioni inverse

$$\frac{d\alpha_i}{d\tilde{a}_y} = \frac{1}{\frac{d\tilde{a}_y}{d\alpha_i}} \quad (2.11)$$

È adesso possibile scrivere la derivata dell'angolo di deriva calcolata rispetto all'accelerazione laterale come

$$\frac{d\alpha_i}{d\tilde{a}_y} = \frac{W_i}{g} \frac{1}{\Phi_i(\alpha_i)} = \frac{1}{g\Psi_i(\alpha_i)} \quad (2.12)$$

con, nel seguito, $\frac{d\alpha_i}{d\tilde{a}_y} = \alpha_{iy}$.

Inoltre si può scrivere il valore della rigidezza di deriva generalizzata in funzione di α_{iy}

$$\Phi_i(\alpha_{iy}) = \frac{W_1}{g} \frac{1}{\alpha_{iy}} \quad (2.13)$$

e, considerando le derivate delle equazioni di congruenza, esprimere

$$\alpha_{iy} = \alpha_{iy}(\beta_y, \rho_y) \quad (2.14)$$

e quindi arrivare a scrivere il valore della rigidezza di deriva generalizzata in funzione delle derivate dinamiche di assetto e di curvatura

$$\Phi_i(\alpha_i) = \Phi_i(\alpha_{iy}(\beta_y, \rho_y)) \quad (2.15)$$

Nel seguito queste relazioni saranno esplicitate per il modello monotraccia, mentre come vedremo nel caso di veicolo con differenziale bloccato, non è possibile esprimere in forma chiusa il legame tra lo scorrimento dei singoli pneumatici e l'accelerazione laterale a regime del veicolo.

2.2 Veicoli reali

Molte delle manovre descritte per i modelli di veicolo possono essere eseguite anche con veicoli reali per ricavare i valori delle grandezze di interesse.

Le misurazioni in questo caso saranno affette da rumori e imprecisioni che devono essere corretti sia in fase di acquisizione sia in fase di elaborazione. Trattandosi di un lavoro esplorativo non si è approfondita la questione né per veicoli reali né per modelli multi-body complessi, ma si ritiene che le formulazioni teoriche proposte possono essere estese con facilità a un approccio più dettagliato.

Si vuole però tener presente che l'approccio proposto si fonda sulla linearizzazione delle equazioni di equilibrio e sull'analisi delle sole equazioni di equilibrio laterali e di imbardata, perciò non ci si può aspettare una approssimazione ottima del comportamento del veicolo reale. Quello che però è necessario sottolineare è che un approccio di questo genere è quantitativo, nel senso che il comportamento del veicolo può essere mutato agendo, come si vedrà nel seguito, su alcune caratteristiche costruttive, condizionate spesso da molti parametri costruttivi (si pensi alla caratteristica equivalente dell'assale).

Pertanto ci pare necessario continuare a tenere una linea di demarcazione tra la dinamica del veicolo e la meccanica del veicolo.

Tornando nel merito, i gradienti di assetto e di curvatura possono essere ricavati con facilità effettuando prove ad angolo di sterzo costante e accelerazione laterale o, più semplicemente, velocità di avanzamento costante. Per quanto riguarda invece le ulteriori due equazioni pare realistico effettuare manovre volte a

- misurare ω_s per velocità elevate e vari valori di \tilde{a}_y e δ_{va}
- misurare u_β per vari valori di \tilde{a}_y e δ_{va}

Le procedure sperimentali più indicate devono essere oggetto di un approfondimento ma la misurazione di ω_s è già effettuata secondo manovre normate, mentre la misurazione di u_β dovrebbe essere semplice in quanto riferita alla misurazione di una quantità all'equilibrio.

Capitolo 3

Modelli di veicolo

In questa sezione ci occupiamo di determinare la struttura dei gradienti di assetto e curvatura e delle derivate di stabilità per vari modelli di veicolo. Verranno infatti presi in considerazione i classici modelli monotraccia, prima con pneumatico lineare, per poi inserire man mano pneumatici non lineari, con ritardo di risposta, sistema di sterzo cedevole, ecc. Si prenderà inoltre in considerazione il ruolo delle derivate di stabilità in un veicolo con differenziale bloccato, che non può essere ridotto ad un modello monotraccia.

3.1 Modello monotraccia lineare

Prendendo in considerazione il modello monotraccia lineare di un veicolo non è difficile ricavare in forma chiusa l'espressione sia delle derivate di stabilità sia dei gradienti di assetto e curvatura. Considerando infatti le equazioni di equilibrio, di congruenza e quelle costitutive otteniamo le equazioni del moto a regime nella forma

$$\begin{aligned} m\ddot{a}_y &= C_1[\tau\delta_v - (\beta + \rho a_1)] + C_2[\chi\tau\delta_v - (\beta - \rho a_2)] \\ 0 &= C_1 a_1[\tau\delta_v - (\beta + \rho a_1)] - C_2 a_2[\chi\tau\delta_v - (\beta - \rho a_2)] \end{aligned} \quad (3.1)$$

dove C_1 e C_2 sono rispettivamente i valori della rigidezza di deriva anteriore e posteriore, τ è il rapporto tra angolo ruote anteriori e angolo volante e χ è il valore della sterzata posteriore, supponendo unitaria quella dell'anteriore. Si può anche definire

$$\begin{aligned} \tau_1 &= \tau \\ \tau_2 &= \chi\tau \end{aligned} \quad (3.2)$$

dove τ_1 e τ_2 sono rispettivamente il rapporti tra angolo ruote anteriori e angolo di sterzo e tra angolo ruote posteriori e angolo di sterzo.

Risolvendo il sistema (3.1) è possibile ricavare in forma chiusa $\beta_p(\tilde{a}_y, \delta_v)$ e $\rho_p(\tilde{a}_y, \delta_v)$

$$\begin{aligned}\beta_p(\tilde{a}_y, \delta_{va}) &= \tau\delta_{va}\frac{a_2 + \chi a_1}{a_1 + a_2} - \frac{m\tilde{a}_y}{(a_1 + a_2)^2} \frac{C_1 a_1^2 + C_2 a_2^2}{C_1 C_2} \\ \rho_p(\tilde{a}_y, \delta_{va}) &= \tau\delta_{va}\frac{1 - \chi}{a_1 + a_2} - \frac{m\tilde{a}_y}{(a_1 + a_2)^2} \frac{C_2 a_2 - C_1 a_1}{C_1 C_2}\end{aligned}\quad (3.3)$$

Si nota che le espressioni ottenute sono lineari nelle variabili \tilde{a}_y e δ_v e che non compaiono prodotti misti tra le stesse, per cui è lecito aspettarsi che i gradienti di $\beta_p(\tilde{a}_y, \delta_v)$ e $\rho_p(\tilde{a}_y, \delta_v)$ risultino indipendenti dallo stato

$$\begin{aligned}\nabla\beta_p &= (\beta_y, \beta_\delta) = \left(-\frac{m}{(a_1 + a_2)^2} \frac{C_1 a_1^2 + C_2 a_2^2}{C_1 C_2}, \quad \tau \frac{a_2 + \chi a_1}{a_1 + a_2} \right) \\ \nabla\rho_p &= (\rho_y, \rho_\delta) = \left(-\frac{m}{(a_1 + a_2)^2} \frac{C_2 a_2 - C_1 a_1}{C_1 C_2}, \quad \tau \frac{1 - \chi}{a_1 + a_2} \right)\end{aligned}\quad (3.4)$$

Passando adesso a considerare le derivate di stabilità notiamo che anche esse risultano costanti in quanto le espressioni

$$\begin{aligned}Y &= Y_1 + Y_2 = C_1[\tau\delta_v - (\beta + \rho a_1)] + C_2[\chi\tau\delta_v - (\beta - \rho a_2)] \\ N &= Y_1 a_1 - Y_2 a_2 = C_1 a_1[\tau\delta_v - (\beta + \rho a_1)] - C_2 a_2[\chi\tau\delta_v - (\beta - \rho a_2)]\end{aligned}\quad (3.5)$$

sono lineari in β , ρ e δ . I valori delle derivate di stabilità sono direttamente ricavabili, anch'essi in forma chiusa, dalle equazioni di equilibrio

$$Y_\beta = -(C_1 + C_2) \quad Y_\rho = C_2 a_2 - C_1 a_1 \quad Y_\delta = \tau(C_1 + \chi C_2) \quad (3.6)$$

$$N_\beta = C_2 a_2 - C_1 a_1 \quad N_\rho = -(C_1 a_1^2 + C_2 a_2^2) \quad N_\delta = \tau(C_1 a_1 - \chi C_2 a_2) \quad (3.7)$$

Le equazioni dinamiche del veicolo possono essere scritte considerando le derivate di stabilità appena ricavate nella seguente forma

$$\begin{aligned}\dot{\beta} &= -\frac{C_1 + C_2}{m}\beta_t + \frac{C_2 a_2 - C_1 a_1 - m u_a^2}{m}\rho_t + \frac{\tau(C_1 + \chi C_2)}{m}\delta_{vt} \\ \dot{\rho} &= \frac{C_2 a_2 - C_1 a_1}{J}\beta_t - \frac{C_1 a_1^2 + C_2 a_2^2}{J}\rho_t + \frac{\tau(C_1 a_1 - \chi C_2 a_2)}{J}\delta_{vt}\end{aligned}\quad (3.8)$$

Nel sistema (3.8) le derivate di stabilità compaiono sempre divise per la massa m o il momento di inerzia J del veicolo, a seconda che si trovino all'interno della prima o della seconda equazione. I rapporti tra le derivate di stabilità e m o J saranno detti nel seguito *derivate di stabilità relativizzate*.

Analizzando attentamente i sei parametri si nota che sono funzione di sette caratteristiche costruttive: J/m , a_1 , a_2 , C_1/m , C_2/m , τ , χ . Come già mostrato in fase preliminare si possono adesso scegliere sei parametri caratteristici, detti \bar{s}_i $i = 1..6$, come indici della dinamica del veicolo. La scelta può essere effettuata attingendo dai valori dei gradienti di assetto e di curvatura o dai valori delle derivate di stabilità relativizzate.

Si è deciso di far ricadere la scelta sulla sestina

$$\beta_y \quad \beta_\delta \quad \rho_y \quad \rho_\delta \quad Y_\delta/m \quad N_\delta/J \quad (3.9)$$

Le derivate di stabilità possono essere altresì calcolate prescindendo dalla conoscenza delle rigidzze di deriva, come descritto nel paragrafo (2.1.2), basandosi sulla conoscenza delle equazioni di congruenza e delle derivate dinamiche di assetto e di curvatura. Si ricorda che i valori di β_y e ρ_y continuano a essere funzione delle rigidzze di deriva ma, come descritto nel capitolo 2, è possibile ricavarne l'andamento attraverso opportune manovre in condizioni di regime.

Come descritto in (2.14) è possibile derivare le equazioni di congruenza ottenendo, per il modello monotraccia,

$$\begin{aligned} \alpha_{1y} &= -\beta_y - \rho_y a_1 \\ \alpha_{2y} &= -\beta_y + \rho_y a_2 \end{aligned} \quad (3.10)$$

che sostituito all'interno dell'equazione (2.13) fornisce i valori delle rigidzze di deriva in funzione di grandezze ricavabili per via sperimentale

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{W_1}{g} \frac{1}{-\beta_y - \rho_y a_1} \\ C_2 &= \frac{W_2}{g} \frac{1}{-\beta_y + \rho_y a_2} \end{aligned} \quad (3.11)$$

dove si è assunto, vista la linearità della caratteristica del pneumatico, $\Phi_i = C_i$.

Si torna ora a considerare le derivate di stabilità come funzioni composte, come mostrato nell'equazione (2.7)

$$\begin{aligned}
 Y_\beta &= \frac{\partial Y_1}{\partial \alpha_1} \frac{\partial \alpha_1}{\partial \beta} + \frac{\partial Y_2}{\partial \alpha_2} \frac{\partial \alpha_2}{\partial \beta} = - \left(\frac{W_1}{g} \frac{1}{-\beta_y - \rho_y a_1} + \frac{W_2}{g} \frac{1}{-\beta_y + \rho_y a_2} \right) \\
 Y_\rho &= \frac{\partial Y_1}{\partial \alpha_1} \frac{\partial \alpha_1}{\partial \rho} + \frac{\partial Y_2}{\partial \alpha_2} \frac{\partial \alpha_2}{\partial \rho} = - \left(\frac{W_1}{g} \frac{a_1}{-\beta_y - \rho_y a_1} - \frac{W_2}{g} \frac{a_2}{-\beta_y + \rho_y a_2} \right) \\
 Y_\delta &= \frac{\partial Y_1}{\partial \alpha_1} \frac{\partial \alpha_1}{\partial \delta} + \frac{\partial Y_2}{\partial \alpha_2} \frac{\partial \alpha_2}{\partial \delta} = \tau \left(\frac{W_1}{g} \frac{1}{-\beta_y - \rho_y a_1} - \frac{W_2}{g} \frac{\chi}{-\beta_y + \rho_y a_2} \right) \\
 N_\beta &= \frac{\partial Y_1}{\partial \alpha_1} \frac{\partial \alpha_1}{\partial \beta} a_1 - \frac{\partial Y_2}{\partial \alpha_2} \frac{\partial \alpha_2}{\partial \beta} a_2 = - \left(\frac{W_1}{g} \frac{a_1}{-\beta_y - \rho_y a_1} - \frac{W_2}{g} \frac{a_2}{-\beta_y + \rho_y a_2} \right) \\
 N_\rho &= \frac{\partial Y_1}{\partial \alpha_1} \frac{\partial \alpha_1}{\partial \rho} a_1 - \frac{\partial Y_2}{\partial \alpha_2} \frac{\partial \alpha_2}{\partial \rho} a_2 = - \left(\frac{W_1}{g} \frac{a_1^2}{-\beta_y - \rho_y a_1} + \frac{W_2}{g} \frac{a_2^2}{-\beta_y + \rho_y a_2} \right) \\
 N_\delta &= \frac{\partial Y_1}{\partial \alpha_1} \frac{\partial \alpha_1}{\partial \delta} a_1 - \frac{\partial Y_2}{\partial \alpha_2} \frac{\partial \alpha_2}{\partial \delta} a_2 = \tau \left(\frac{W_1}{g} \frac{a_1}{-\beta_y - \rho_y a_1} - \frac{W_2}{g} \frac{\chi a_2}{-\beta_y + \rho_y a_2} \right)
 \end{aligned} \tag{3.12}$$

dove si è assunto

$$\frac{\partial \alpha_1}{\partial \beta} = -1 \qquad \frac{\partial \alpha_2}{\partial \beta} = -1 \tag{3.13}$$

$$\frac{\partial \alpha_1}{\partial \rho} = -a_1 \qquad \frac{\partial \alpha_2}{\partial \rho} = a_2 \tag{3.14}$$

$$\frac{\partial \alpha_1}{\partial \delta_v} = \tau \qquad \frac{\partial \alpha_2}{\partial \delta_v} = \chi \tau \tag{3.15}$$

ottenendo l'espressione delle derivate di stabilità in funzione di grandezze calcolate attraverso manovre di regime.

A conforto della bontà dell'analisi svolta si può verificare che mettendo a sistema le espressioni (3.6), (3.11), (3.12) si ottengono delle identità.

3.1.1 Esempio numerico

Si considera un modello di veicolo, detto *Veicolo 0*, con le seguenti caratteristiche costruttive

I parametri caratteristici del *Veicolo 0* sono riportati in Tab. 3.2.

L'obiettivo è quello di ricavare le caratteristiche costruttive di un secondo veicolo tale che abbia i medesimi valori dei parametri caratteristici del *Veicolo 0* e, di conseguenza, stessa dinamica.

Si tratta di risolvere un sistema di sei equazioni in sette incognite

m (kg)	1365	J/m (m ²)	0.569
J (kg m ²)	2400	a_1 (m)	0.912
a_1 (m)	0.912	a_2 (m)	1.668
a_2 (m)	1.668	C_1/m (N/kg rad)	53.5
C_1 (N/rad)	73000	C_2/m (N/kg rad)	65.9
C_2 (N/rad)	90000	τ	1
τ	1	χ	0
χ	0		

Tabella 3.1: Caratteristiche costruttive *Veicolo 0*

β_y (m ⁻¹ s ⁻²)	$- 9.71 \cdot 10^{-3}$
ρ_y (m ⁻² s ⁻²)	$- 2.61 \cdot 10^{-3}$
β_δ	$6.46 \cdot 10^{-1}$
ρ_δ (m ⁻¹)	$3.88 \cdot 10^{-1}$
Y_δ/m (s ⁻²)	27.7
N_δ/J (m s ²)	53.5

Tabella 3.2: Parametri caratteristici *Veicolo 0*

$$s_i^{(0)} = s_i^{(1)}(J/m, a_1, a_2, C_1/m, C_2/m, \tau, \chi) \quad i = 1..6 \quad (3.16)$$

Si rende necessario fissare un parametro costruttivo, ad esempio il valore della ripartizione di sterzata al posteriore χ , e ricavare i restanti sei parametri dal sistema di sei equazioni in sei incognite. Importante notare che non si tratta di un sistema lineare, pertanto non si ha a priori la certezza dell'univocità della soluzione.

Di seguito si propongono due soluzioni trovate imponendo per il primo caso, *Veicolo A* un rapporto di sterzata positivo $\chi = 0.1$ mentre nel secondo caso, *Veicolo B*, un rapporto di sterzata $\chi = -0.052$, valore per cui si ottiene medesima rigidezza di deriva all'anteriore e al posteriore e passo minimo del veicolo.

Si sono così ottenuti tre veicoli costruttivamente diversi ma con stessa dinamica, cioè stesso comportamento in risposta a qualsiasi tipo di manovra, sia a regime sia durante i transitori.

m (kg)	1365	m (kg)	1365
J (kgm ²)	2400	J (kgm ²)	2400
a_1 (m)	1.43	a_1 (m)	0.77
a_2 (m)	1.36	a_2 (m)	1.795
C_1 (N/rad)	49330	C_1 (N/rad)	81500
C_2 (N/rad)	113670	C_2 (N/rad)	81500
τ	1.2	τ	0.945
χ	0.1	χ	- 0.052

3.2 Modello monotraccia lineare e cedevolezza del sistema di sterzo

Analogamente a quanto fatto di sopra prendiamo adesso in considerazione un modello nel quale venga considerata la cedevolezza del sistema di sterzo, cioè un modello per cui l'angolo di sterzo anteriore e posteriore non sia legato in maniera univoca all'angolo volante ma sia determinato, oltre che da δ_v , anche dalla rigidezza di tutto il sistema di sterzo e dalla forza scambiata dall'assale. Le equazioni di equilibrio a regime e quelle costitutive non cambiano, continuando a valere il sistema

$$\begin{aligned} m\tilde{a}_y &= C_1\alpha_1 + C_2\alpha_2 \\ 0 &= C_1\alpha_1a_1 - C_2\alpha_2a_2 \end{aligned} \quad (3.17)$$

e anche le equazioni di congruenza sono le stesse

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \delta_1 - (\beta + \rho a_1) \\ \alpha_2 &= \delta_2 - (\beta - \rho a_2) \end{aligned} \quad (3.18)$$

Quel che però cambia è il legame tra gli angoli di sterzo delle ruote, δ_1 e δ_2 , e l'angolo volante δ_v . Con riferimento alla Fig. 3.1 è possibile scrivere un'equazione aggiuntiva (3.19), di equilibrio alla rotazione, per ogni assale

dove con t_i si indica il braccio della forza laterale rispetto al centro dell'impronta mentre con e_i si indica l'avancorsa del sistema di sterzo.

Considerando di poter conglobare tutte le elasticità del sistema di sterzo all'interno di due costanti elastiche torsionali, k_1 e k_2 , è possibile scrivere l'equilibrio dei due assali

$$\begin{aligned} -Y_1(e_1 + t_1) - k_1(\delta_1 - \delta_{s1}) &= 0 \\ -Y_2(e_2 + t_2) - k_2(\delta_2 - \delta_{s2}) &= 0 \end{aligned} \quad (3.19)$$


Figura 3.1: Modello monotraccia con sistema di sterzo cedevole

dove $\delta_{si} = \tau_i \delta_v$.

Tornando a considerare che il legame costitutivo è di tipo lineare è possibile esplicitare il valore di δ_i

$$\begin{aligned}\delta_1 &= \delta_{s1} - \frac{C_1(e_1 + t_1)}{k_1} \alpha_1 = \tau \delta_v - \varepsilon_1 \alpha_1 \\ \delta_2 &= \delta_{s2} - \frac{C_2(e_2 + t_2)}{k_2} \alpha_2 = \chi \tau \delta_v - \varepsilon_2 \alpha_2\end{aligned}\quad (3.20)$$

dove

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= \frac{C_1(e_1 + t_1)}{k_1} \\ \varepsilon_2 &= \frac{C_2(e_2 + t_2)}{k_2}\end{aligned}\quad (3.21)$$

e riscrivere le equazioni costitutive in maniera tale da poter legare l'angolo volante allo stato del veicolo

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= \frac{\tau \delta_v - (\beta + \rho a_1)}{1 + \varepsilon_1} \\ \alpha_2 &= \frac{\chi \tau \delta_v - (\beta - \rho a_2)}{1 + \varepsilon_2}\end{aligned}\quad (3.22)$$

Perciò l'analisi della dinamica attraverso la conoscenza dei gradienti di assetto e di curvatura e attraverso le derivate di stabilità non incontra impedimenti conseguenti l'introduzione dell'elasticità del sistema di sterzo, a patto di prestare attenzione nel momento in cui si considerano le equazioni di congruenza.

Poiché il legame costitutivo è di tipo lineare la maniera più rapida per calcolare i valori dei gradienti e delle derivate di stabilità è quella della derivazione diretta di (β_p, ρ_p) e delle espressioni (Y, N) .

Le equazioni del sistema all'equilibrio sono

$$\begin{aligned} m\tilde{a}_y &= C_1 \frac{\tau\delta_{va} - (\beta + \rho a_1)}{1 + \varepsilon_1} + C_2 \frac{\chi\tau\delta_{va} - (\beta - \rho a_2)}{1 + \varepsilon_2} \\ 0 &= C_1 a_1 \frac{\tau\delta_{va} - (\beta + \rho a_1)}{1 + \varepsilon_1} - C_2 a_2 \frac{\chi\tau\delta_{va} - (\beta - \rho a_2)}{1 + \varepsilon_2} \end{aligned} \quad (3.23)$$

dalle quali è possibile ricavare le mappe di $\beta_p(\tilde{a}_y, \delta_{va})$ e $\rho_p(\tilde{a}_y, \delta_{va})$

$$\begin{aligned} \beta_p(\tilde{a}_y, \delta_{va}) &= \tau\delta_{va} \frac{a_2 + \chi a_1}{a_1 + a_2} - \frac{m\tilde{a}_y}{(a_1 + a_2)^2} \frac{C_1 a_1^2 (1 + \varepsilon_2) + C_2 a_2^2 (1 + \varepsilon_1)}{C_1 C_2} \\ \rho_p(\tilde{a}_y, \delta_{va}) &= \tau\delta_{va} \frac{1 - \chi}{a_1 + a_2} + \frac{m\tilde{a}_y}{(a_1 + a_2)^2} \frac{C_1 a_1 (1 + \varepsilon_2) - C_2 a_2 (1 + \varepsilon_1)}{C_1 C_2} \end{aligned} \quad (3.24)$$

e di conseguenza l'espressione dei gradienti di assetto e di curvatura

$$\begin{aligned} \nabla\beta_p &= (\beta_y, \beta_\delta) = \left(-\frac{m}{(a_1 + a_2)^2} \frac{C_1 a_1^2 (1 + \varepsilon_2) + C_2 a_2^2 (1 + \varepsilon_1)}{C_1 C_2}, \quad \tau \frac{a_2 + \chi a_1}{a_1 + a_2} \right) \\ \nabla\rho_p &= (\rho_y, \rho_\delta) = \left(\frac{m}{(a_1 + a_2)^2} \frac{C_1 a_1 (1 + \varepsilon_2) - C_2 a_2 (1 + \varepsilon_1)}{C_1 C_2}, \quad \tau \frac{1 - \chi}{a_1 + a_2} \right) \end{aligned} \quad (3.25)$$

Si osserva che le derivate di assetto e di curvatura dinamiche, β_y e ρ_y , sono influenzate dall'elasticità del sistema di sterzo, mentre le derivate cinematiche, β_δ e ρ_δ non lo sono.

Per ricavare invece direttamente la forma delle derivate di stabilità è sufficiente derivare le equazioni di equilibrio (3.23), dalle quali si ottiene

$$Y_\beta = -\left(\frac{C_1}{1 + \varepsilon_1} + \frac{C_2}{1 + \varepsilon_2} \right) \quad N_\beta = \frac{C_2 a_2}{1 + \varepsilon_2} - \frac{C_1 a_1}{1 + \varepsilon_1} \quad (3.26)$$

$$Y_\rho = \frac{C_2 a_2}{1 + \varepsilon_2} - \frac{C_1 a_1}{1 + \varepsilon_1} \quad N_\rho = -\left(\frac{C_1 a_1^2}{1 + \varepsilon_1} + \frac{C_2 a_2^2}{1 + \varepsilon_2} \right) \quad (3.27)$$

$$Y_\delta = \tau \left(\frac{C_1}{1 + \varepsilon_1} + \chi \frac{C_2}{1 + \varepsilon_2} \right) \quad N_\delta = \tau \left(\frac{C_1 a_1}{1 + \varepsilon_1} - \chi \frac{C_2 a_2}{1 + \varepsilon_2} \right) \quad (3.28)$$

Leggermente più delicato è il passaggio che riguarda come ricavare l'espressione delle derivate di stabilità, partendo dalla conoscenza delle derivate dinamiche e prescindendo da quella delle rigidzze di deriva, considerandole come funzioni composte. La derivata delle equazioni di congruenza rispetto all'accelerazione laterale è

$$\begin{aligned}\alpha_{1y} &= \frac{-(\beta_y + \rho_y a_1)}{1 + \varepsilon_1} \\ \alpha_{2y} &= \frac{-(\beta_y - \rho_y a_2)}{1 + \varepsilon_2}\end{aligned}\quad (3.29)$$

per cui, analogamente a quanto ottenuto in (3.11), è possibile ricavare il valore delle rigidzze di deriva in funzione delle derivate dinamiche

$$\begin{aligned}C_1 &= \frac{W_1}{g} \frac{1}{-\beta_y - \rho_y a_1} \\ C_2 &= \frac{W_2}{g} \frac{1}{-\beta_y + \rho_y a_2}\end{aligned}\quad (3.30)$$

e quindi ottenere l'espressione delle derivate di stabilità

$$\begin{aligned}Y_\beta &= \frac{\partial Y_1}{\partial \alpha_1} \frac{\partial \alpha_1}{\partial \beta} + \frac{\partial Y_2}{\partial \alpha_2} \frac{\partial \alpha_2}{\partial \beta} \\ &= - \left(\frac{W_1}{g(1 + \varepsilon_1)} \frac{1}{-\beta_y - \rho_y a_1} + \frac{W_2}{g(1 + \varepsilon_2)} \frac{1}{-\beta_y + \rho_y a_2} \right)\end{aligned}\quad (3.31)$$

$$\begin{aligned}Y_\rho &= \frac{\partial Y_1}{\partial \alpha_1} \frac{\partial \alpha_1}{\partial \rho} + \frac{\partial Y_2}{\partial \alpha_2} \frac{\partial \alpha_2}{\partial \rho} \\ &= - \left(\frac{W_1}{g(1 + \varepsilon_1)} \frac{a_1}{-\beta_y - \rho_y a_1} - \frac{W_2}{g(1 + \varepsilon_2)} \frac{a_2}{-\beta_y + \rho_y a_2} \right)\end{aligned}\quad (3.32)$$

$$\begin{aligned}Y_\delta &= \frac{\partial Y_1}{\partial \alpha_1} \frac{\partial \alpha_1}{\partial \delta} + \frac{\partial Y_2}{\partial \alpha_2} \frac{\partial \alpha_2}{\partial \delta} \\ &= \tau \left(\frac{W_1}{g(1 + \varepsilon_1)} \frac{1}{-\beta_y - \rho_y a_1} - \frac{W_2}{g(1 + \varepsilon_2)} \frac{\chi}{-\beta_y + \rho_y a_2} \right)\end{aligned}\quad (3.33)$$

$$\begin{aligned}
 N_\beta &= \frac{\partial Y_1}{\partial \alpha_1} \frac{\partial \alpha_1}{\partial \beta} a_1 - \frac{\partial Y_2}{\partial \alpha_2} \frac{\partial \alpha_2}{\partial \beta} a_2 \\
 &= - \left(\frac{W_1}{g(1 + \varepsilon_1)} \frac{a_1}{-\beta_y - \rho_y a_1} - \frac{W_2}{g(1 + \varepsilon_2)} \frac{a_2}{-\beta_y + \rho_y a_2} \right) \quad (3.34)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 N_\rho &= \frac{\partial Y_1}{\partial \alpha_1} \frac{\partial \alpha_1}{\partial \rho} a_1 - \frac{\partial Y_2}{\partial \alpha_2} \frac{\partial \alpha_2}{\partial \rho} a_2 \\
 &= - \left(\frac{W_1}{g(1 + \varepsilon_1)} \frac{a_1^2}{-\beta_y - \rho_y a_1} + \frac{W_2}{g(1 + \varepsilon_2)} \frac{a_2^2}{-\beta_y + \rho_y a_2} \right) \quad (3.35)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 N_\delta &= \frac{\partial Y_1}{\partial \alpha_1} \frac{\partial \alpha_1}{\partial \delta} a_1 - \frac{\partial Y_2}{\partial \alpha_2} \frac{\partial \alpha_2}{\partial \delta} a_2 \\
 &= \tau \left(\frac{W_1}{g(1 + \varepsilon_1)} \frac{a_1}{-\beta_y - \rho_y a_1} - \frac{W_2}{g(1 + \varepsilon_2)} \frac{\chi a_2}{-\beta_y + \rho_y a_2} \right) \quad (3.36)
 \end{aligned}$$

Anche in questo caso si può verificare che sostituendo all'interno di (3.31-3.36) l'espressione delle derivate dinamiche relative al modello monotraccia lineare con sistema di sterzo cedevole, è possibile ottenere le derivate di stabilità già viste in (3.26).

Per cui si conclude che per un modello di veicolo che consideri pneumatici lineari ma elasticità del sistema di sterzo, si può considerare un approccio analogo a quello del modello monotraccia classico, a patto di considerare, in luogo delle classiche rigidzze di deriva, le *rigidezze di deriva ridotte*

$$\begin{aligned}
 \tilde{C}_1 &= \frac{C_1}{1 + \varepsilon_1} \\
 \tilde{C}_2 &= \frac{C_2}{1 + \varepsilon_2}
 \end{aligned} \quad (3.37)$$

3.3 Modello monotraccia non lineare

Prendiamo adesso in considerazione un modello in cui si abbia sistema di sterzo infinitamente rigido ma pneumatici non lineari. Le equazioni di equilibrio a regime del veicolo sono ancora le stesse

$$\begin{aligned}
 Y &= Y_1 + Y_2 = m\tilde{a}_y \\
 N &= Y_1 a_1 - Y_2 a_2 = 0
 \end{aligned} \quad (3.38)$$

così come è quella classica la struttura delle equazioni di congruenza

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= \tau\delta_v - (\beta + \rho a_1) \\ \alpha_2 &= \chi\tau\delta_v - (\beta - \rho a_2)\end{aligned}\tag{3.39}$$

La novità risiede all'interno delle equazioni costitutive, cioè nell'espressione della forza laterale relativa ad ogni assale in relazione all'angolo di deriva dell'assale stesso

$$Y_i = Y_i(\alpha_i)\tag{3.40}$$

che in generale non è invertibile in forma chiusa.

Per questo stesso motivo non è possibile risolvere in forma analitica le equazioni di moto del sistema, neanche quelle relative a condizioni stazionarie

$$\begin{aligned}m\tilde{a}_y &= Y_1(\alpha_1) + Y_2(\alpha_2) \\ 0 &= Y_1(\alpha_1)a_1 - Y_2(\alpha_2)a_2\end{aligned}\tag{3.41}$$

e quindi non si è in grado di ricavare le mappe $\beta_p(\tilde{a}_y, \delta_{va})$ e $\rho_p(\tilde{a}_y, \delta_{va})$ in maniera analitica, e di conseguenza i gradienti di assetto e di curvatura.

Ciò non ci impedisce però di fare delle considerazioni riguardanti la dipendenza dei gradienti da \tilde{a}_y e da δ_{va} .

Risolvendo il sistema (3.41) si ottiene che il valore delle forze laterali Y_1 e Y_2 all'equilibrio è funzione unicamente dell'accelerazione laterale \tilde{a}_y

$$\begin{aligned}Y_1(\alpha_1) &= m\frac{a_2}{a_1 + a_2}\tilde{a}_y \\ Y_2(\alpha_2) &= m\frac{a_1}{a_1 + a_2}\tilde{a}_y\end{aligned}\tag{3.42}$$

come già era possibile intuire guardando le caratteristiche normalizzate degli assali che legano in maniera univoca gli angoli di deriva anteriore e posteriore al valore dell'accelerazione laterale.

È così possibile assumere

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= Y^{-1}\left(m\frac{a_2}{a_1 + a_2}\tilde{a}_y\right) = f_1(\tilde{a}_y) \\ \alpha_2 &= Y^{-1}\left(m\frac{a_1}{a_1 + a_2}\tilde{a}_y\right) = f_2(\tilde{a}_y)\end{aligned}\tag{3.43}$$

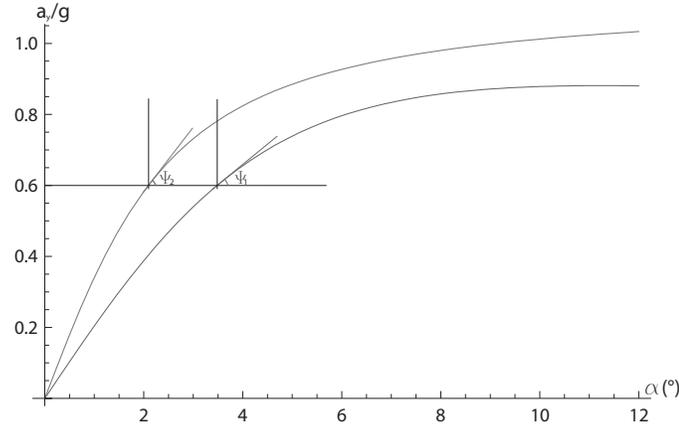


Figura 3.2: Caratteristica normalizzata degli assali *Veicolo 1*

anche se, a seconda della struttura di $Y_i(\alpha_i)$, questa può assumere un'unica espressione esplicita, o essere definita a intervalli, o esistere unicamente sotto forma numerica, dalla quale è possibile estrarre una funzione interpolante.

Sostituendo l'espressione di α_i (3.43) all'interno delle equazioni di congruenza valide per il modello monotraccia (3.39), si ottiene

$$\begin{aligned}\tau\delta_v - (\beta + \rho a_1) &= f_1(\tilde{a}_y) \\ \chi\tau\delta_v - (\beta - \rho a_2) &= f_2(\tilde{a}_y)\end{aligned}\quad (3.44)$$

Le espressioni di $\beta_p(\tilde{a}_y, \delta_{va})$ e $\rho_p(\tilde{a}_y, \delta_{va})$ risultano perciò

$$\begin{aligned}\beta_p &= \tau\delta_v \frac{a_2 + \chi a_1}{a_1 + a_2} - \frac{f_1(\tilde{a}_y)a_2 + f_2(\tilde{a}_y)a_1}{a_1 + a_2} \\ \rho_p &= \frac{\tau\delta_v - \chi\tau\delta_v}{a_1 + a_2} + \frac{f_1(\tilde{a}_y) - f_2(\tilde{a}_y)}{a_1 + a_2}\end{aligned}\quad (3.45)$$

lineari rispetto a δ_{va} , mentre la dipendenza da \tilde{a}_y è legata alle funzioni $f_i(\tilde{a}_y)$.

Si può così concludere che le derivate cinematiche β_δ e ρ_δ risultano costanti, mentre quelle dinamiche β_y e ρ_y risultano essere solo funzione di \tilde{a}_y .

I gradienti di assetto e di curvatura possono così essere ottenuti, analogamente a quanto già fatto per il modello lineare, derivando l'espressione delle mappe di equilibrio

$$\begin{aligned}\nabla\beta_p = (\beta_y, \beta_\delta) &= \left(-\frac{1}{a_1 + a_2} \frac{\partial(f_1(\tilde{a}_y)a_2 + f_2(\tilde{a}_y)a_1)}{\partial\tilde{a}_y}, \quad \tau \frac{a_2 + \chi a_1}{a_1 + a_2} \right) \\ \nabla\rho_p = (\rho_y, \rho_\delta) &= \left(\frac{1}{a_1 + a_2} \frac{\partial(f_1(\tilde{a}_y) - f_2(\tilde{a}_y))}{\partial\tilde{a}_y}, \quad \tau \frac{1 - \chi}{a_1 + a_2} \right)\end{aligned}\quad (3.46)$$

all'interno delle quali compaiono le derivate parziali $\frac{\partial f_i(\tilde{a}_y)}{\partial\tilde{a}_y}$ che, considerando l'equazione (3.43) e la proprietà della derivata della funzione inversa, risultano essere

$$\begin{aligned}\frac{\partial f_1(\tilde{a}_y)}{\partial\tilde{a}_y} &= \frac{ma_2}{a_1 + a_2} \frac{1}{\Phi_1(\tilde{a}_y)} \\ \frac{\partial f_2(\tilde{a}_y)}{\partial\tilde{a}_y} &= \frac{ma_1}{a_1 + a_2} \frac{1}{\Phi_2(\tilde{a}_y)}\end{aligned}\quad (3.47)$$

L'espressione dei gradienti di assetto e di curvatura in funzione delle caratteristiche costruttive del veicolo, all'interno delle quali si considera anche la rigidità di deriva generalizzata, risultano essere

$$\begin{aligned}\nabla\beta_p = (\beta_y, \beta_\delta) &= \left(-\frac{m}{(a_1 + a_2)^2} \frac{\Phi_1(\tilde{a}_y)a_1^2 + \Phi_2(\tilde{a}_y)a_2^2}{\Phi_1(\tilde{a}_y)\Phi_2(\tilde{a}_y)}, \quad \tau \frac{a_2 + \chi a_1}{a_1 + a_2} \right) \\ \nabla\rho_p = (\rho_y, \rho_\delta) &= \left(-\frac{m}{(a_1 + a_2)^2} \frac{\Phi_2(\tilde{a}_y)a_2 - \Phi_1(\tilde{a}_y)a_1}{\Phi_1(\tilde{a}_y)\Phi_2(\tilde{a}_y)}, \quad \tau \frac{1 - \chi}{a_1 + a_2} \right)\end{aligned}\quad (3.48)$$

con una struttura praticamente identica a quella già vista per il modello monotraccia lineare (3.25) dove al posto delle rigidità di deriva C_1 e C_2 , si trovano le rigidità di deriva generalizzate $\Phi_1(\tilde{a}_y)$, $\Phi_2(\tilde{a}_y)$.

A titolo di esempio si riporta in Fig. 3.3 e Fig. 3.4 l'andamento delle derivate dinamiche $\beta_y(\tilde{a}_y)$, $\rho_y(\tilde{a}_y)$ e in Tab. 3.3 il valore delle derivate cinematiche per il *Veicolo 1*.

β_δ	$\rho_\delta(\text{m}^{-1})$
0.0392	0.0240

Tabella 3.3: Derivate cinematiche di assetto e di curvatura - *Veicolo 1*

Le derivate di stabilità possono essere anche in questo caso ottenute in forma diretta, a patto di avere a disposizione le caratteristiche degli assali,

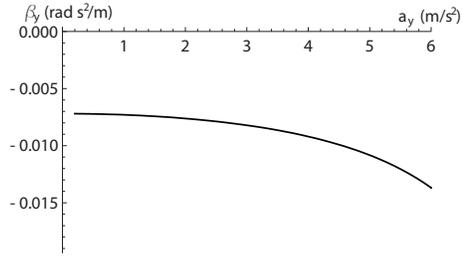


Figura 3.3: Derivata dinamica di assetto - *Veicolo 1*

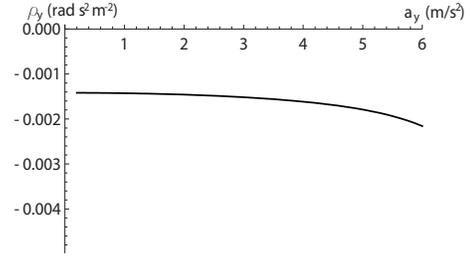


Figura 3.4: Derivata dinamica di curvatura - *Veicolo 1*

derivando le espressioni di $Y(\alpha_1)$ e $N(\alpha_2)$ rispetto alle variabili di stato del veicolo, oltre che all'angolo volante, e considerando le proprietà delle funzioni composte

$$\begin{aligned}
 \frac{dY(\alpha_1, \alpha_2)}{d\beta} &= \frac{dY_1(\alpha_1)}{d\beta} + \frac{dY_2(\alpha_2)}{d\beta} = \frac{dY_1(\alpha_1)}{d\alpha_1} \frac{\partial \alpha_1}{\partial \beta} + \frac{dY_2(\alpha_2)}{d\alpha_2} \frac{\partial \alpha_2}{\partial \beta} \\
 \frac{dY(\alpha_1, \alpha_2)}{d\rho} &= \frac{dY_1(\alpha_1)}{d\rho} + \frac{dY_2(\alpha_2)}{d\rho} = \frac{dY_1(\alpha_1)}{d\alpha_1} \frac{\partial \alpha_1}{\partial \rho} + \frac{dY_2(\alpha_2)}{d\alpha_2} \frac{\partial \alpha_2}{\partial \rho} \\
 \frac{dY(\alpha_1, \alpha_2)}{d\delta} &= \frac{dY_1(\alpha_1)}{d\delta} + \frac{dY_2(\alpha_2)}{d\delta} = \frac{dY_1(\alpha_1)}{d\alpha_1} \frac{\partial \alpha_1}{\partial \delta} + \frac{dY_2(\alpha_2)}{d\alpha_2} \frac{\partial \alpha_2}{\partial \delta} \\
 \frac{dN(\alpha_1, \alpha_2)}{d\beta} &= \frac{dY_1(\alpha_1)}{d\beta} a_1 - \frac{dY_2(\alpha_2)}{d\beta} a_2 = \frac{dY_1(\alpha_1)}{d\alpha_1} \frac{\partial \alpha_1}{\partial \beta} a_1 - \frac{dY_2(\alpha_2)}{d\alpha_2} \frac{\partial \alpha_2}{\partial \beta} a_2 \\
 \frac{dN(\alpha_1, \alpha_2)}{d\rho} &= \frac{dY_1(\alpha_1)}{d\rho} a_1 - \frac{dY_2(\alpha_2)}{d\rho} a_2 = \frac{dY_1(\alpha_1)}{d\alpha_1} \frac{\partial \alpha_1}{\partial \rho} a_1 - \frac{dY_2(\alpha_2)}{d\alpha_2} \frac{\partial \alpha_2}{\partial \rho} a_2 \\
 \frac{dN(\alpha_1, \alpha_2)}{d\delta} &= \frac{dY_1(\alpha_1)}{d\delta} a_1 - \frac{dY_2(\alpha_2)}{d\delta} a_2 = \frac{dY_1(\alpha_1)}{d\alpha_1} \frac{\partial \alpha_1}{\partial \delta} a_1 - \frac{dY_2(\alpha_2)}{d\alpha_2} \frac{\partial \alpha_2}{\partial \delta} a_2
 \end{aligned} \tag{3.49}$$

è possibile esprimere le derivate di stabilità come prodotto di una parte che è legata direttamente alla caratteristica degli assali

$$\begin{aligned}
 \Phi_1(\alpha_1) &= \frac{dY_1(\alpha_1)}{d\alpha_1} \\
 \Phi_2(\alpha_2) &= \frac{dY_2(\alpha_2)}{d\alpha_2}
 \end{aligned} \tag{3.50}$$

e di una parte legata alle equazioni di congruenza

$$\frac{\partial \alpha_1}{\partial \beta} = -1 \qquad \frac{\partial \alpha_2}{\partial \beta} = -1 \qquad (3.51)$$

$$\frac{\partial \alpha_1}{\partial \rho} = -a_1 \qquad \frac{\partial \alpha_2}{\partial \rho} = a_2 \qquad (3.52)$$

$$\frac{\partial \alpha_1}{\partial \delta_v} = \tau \qquad \frac{\partial \alpha_2}{\partial \delta_v} = \chi \tau \qquad (3.53)$$

Si dimostra così come le derivate di stabilità siano funzione solo di \tilde{a}_y e non di δ_{va} , e che la loro espressione è facilmente ottenibile una volta note le caratteristiche degli assali.

$$Y_\beta = -\Phi_1 - \Phi_2 \qquad Y_\rho = -\Phi_1 a_1 + \Phi_2 a_2 \qquad (3.54)$$

$$N_\beta = -\Phi_1 a_1 + \Phi_2 a_2 \qquad N_\rho = -\Phi_1 a_1^2 - \Phi_2 a_2^2 \qquad (3.55)$$

$$Y_\delta = \tau \Phi_1 + \chi \tau \Phi_2 \qquad N_\delta = \tau \Phi_1 a_1 - \chi \tau \Phi_2 a_2 \qquad (3.56)$$

Come già si è osservato per i gradienti anche per le derivate di stabilità si ha la medesima struttura già incontrata per il modello monotraccia con pneumatici lineari, a patto di sostituire le rigidezze di deriva con le rigidezze di deriva generalizzate.

Questo passaggio pare assumere un'importanza fondamentale in quanto, nota la caratteristica dell'assale, è sempre possibile, per un modello monotraccia lineare, determinare le derivate di stabilità e quindi il comportamento dinamico del veicolo in risposta a perturbazioni della condizione di equilibrio.

Sempre a titolo di esempio si riporta l'andamento delle derivate di stabilità per il *Veicolo 1*

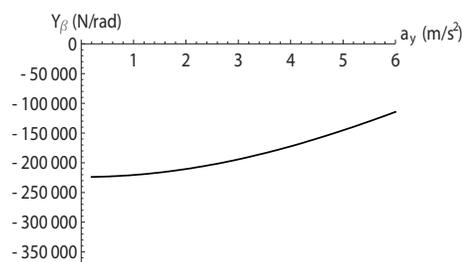


Figura 3.5: Y_β - *Veicolo 1*

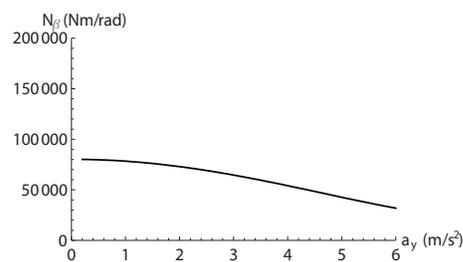


Figura 3.6: N_β - *Veicolo 1*

Affinché i risultati ottenuti abbiano senso occorre che le caratteristiche degli assali siano precise ed affidabili; è necessario perciò effettuare un campionamento adeguato affinché anche la forma della caratteristica, ossia il valore delle rigidezze di deriva Φ_i al variare di \tilde{a}_y sia rispondente alla realtà.

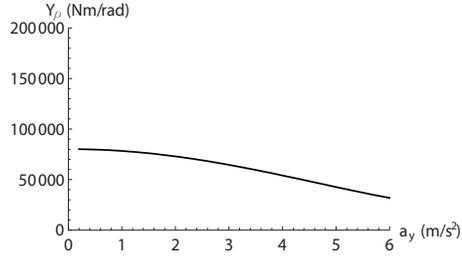


Figura 3.7: Y_ρ - Veicolo 1

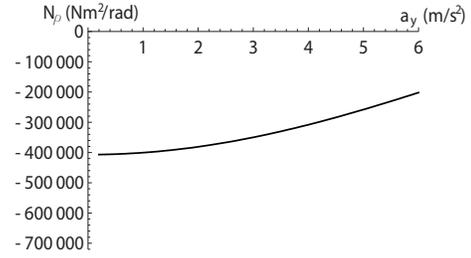


Figura 3.8: N_ρ - Veicolo 1

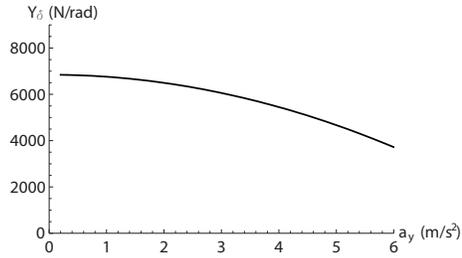


Figura 3.9: Y_δ - Veicolo 1

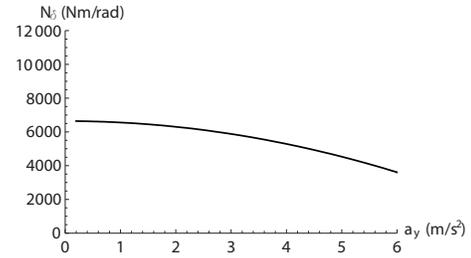


Figura 3.10: N_δ - Veicolo 1

Per terminare il parallelismo con il modello monotraccia lineare, si prende in considerazione come ricavare i valori delle derivate di stabilità a partire dai gradienti e dalla derivata, rispetto all'accelerazione laterale, delle equazioni di congruenza

Come descritto in (2.14) è possibile derivare le equazioni di congruenza ottenendo, per il modello monotraccia,

$$\begin{aligned}\alpha_{1y} &= -\beta_y - \rho_y a_1 \\ \alpha_{2y} &= -\beta_y + \rho_y a_2\end{aligned}\tag{3.57}$$

che sostituito all'interno dell'equazione (2.13) fornisce i valori delle rigidzze di deriva generalizzate in funzione di grandezze ricavabili per via sperimentale

$$\begin{aligned}\Phi_1(\tilde{a}_y) &= \frac{W_1}{g} \frac{1}{-\beta_y(\tilde{a}_y) - \rho_y(\tilde{a}_y)a_1} \\ \Phi_2(\tilde{a}_y) &= \frac{W_2}{g} \frac{1}{-\beta_y(\tilde{a}_y) + \rho_y(\tilde{a}_y)a_2}\end{aligned}\tag{3.58}$$

Si torna ora a considerare le derivate di stabilità come funzioni composte, come mostrato nell'equazione

$$\begin{aligned}
 Y_\beta &= \frac{\partial Y_1}{\partial \alpha_1} \frac{\partial \alpha_1}{\partial \beta} + \frac{\partial Y_2}{\partial \alpha_2} \frac{\partial \alpha_2}{\partial \beta} = - \left(\frac{W_1}{g} \frac{1}{-\beta_y - \rho_y a_1} + \frac{W_2}{g} \frac{1}{-\beta_y + \rho_y a_2} \right) \\
 Y_\rho &= \frac{\partial Y_1}{\partial \alpha_1} \frac{\partial \alpha_1}{\partial \rho} + \frac{\partial Y_2}{\partial \alpha_2} \frac{\partial \alpha_2}{\partial \rho} = - \left(\frac{W_1}{g} \frac{a_1}{-\beta_y - \rho_y a_1} - \frac{W_2}{g} \frac{a_2}{-\beta_y + \rho_y a_2} \right) \\
 Y_\delta &= \frac{\partial Y_1}{\partial \alpha_1} \frac{\partial \alpha_1}{\partial \delta} + \frac{\partial Y_2}{\partial \alpha_2} \frac{\partial \alpha_2}{\partial \delta} = \tau \left(\frac{W_1}{g} \frac{1}{-\beta_y - \rho_y a_1} - \frac{W_2}{g} \frac{\chi}{-\beta_y + \rho_y a_2} \right) \\
 N_\beta &= \frac{\partial Y_1}{\partial \alpha_1} \frac{\partial \alpha_1}{\partial \beta} a_1 - \frac{\partial Y_2}{\partial \alpha_2} \frac{\partial \alpha_2}{\partial \beta} a_2 = - \left(\frac{W_1}{g} \frac{a_1}{-\beta_y - \rho_y a_1} - \frac{W_2}{g} \frac{a_2}{-\beta_y + \rho_y a_2} \right) \\
 N_\rho &= \frac{\partial Y_1}{\partial \alpha_1} \frac{\partial \alpha_1}{\partial \rho} a_1 - \frac{\partial Y_2}{\partial \alpha_2} \frac{\partial \alpha_2}{\partial \rho} a_2 = - \left(\frac{W_1}{g} \frac{a_1^2}{-\beta_y - \rho_y a_1} + \frac{W_2}{g} \frac{a_2^2}{-\beta_y + \rho_y a_2} \right) \\
 N_\delta &= \frac{\partial Y_1}{\partial \alpha_1} \frac{\partial \alpha_1}{\partial \delta} a_1 - \frac{\partial Y_2}{\partial \alpha_2} \frac{\partial \alpha_2}{\partial \delta} a_2 = \tau \left(\frac{W_1}{g} \frac{a_1}{-\beta_y - \rho_y a_1} - \frac{W_2}{g} \frac{\chi a_2}{-\beta_y + \rho_y a_2} \right)
 \end{aligned} \tag{3.59}$$

e si ottiene la loro espressione in funzione di grandezze calcolate attraverso manovre di regime.

3.4 Modello monotraccia non lineare e sistema di sterzo cedevole

Una volta analizzato il modello monotraccia non lineare, non è difficile passare a considerare quel che succede in casi leggermente più complessi. In analogia a quanto fatto per il modello lineare, si considera adesso il caso di un modello monotraccia lineare con elasticità del sistema di sterzo.

Le equazioni di equilibrio a regime continuano a essere

$$\begin{aligned}
 Y_1 + Y_2 &= m\tilde{a}_y \\
 Y_1 a_1 - Y_2 a_2 &= 0
 \end{aligned} \tag{3.60}$$

così come il legame costitutivo è ancora del tipo

$$Y_i = Y_i(\alpha_i) \tag{3.61}$$

e le equazioni di congruenza possono essere espresse considerando lo stato

del veicolo e l'angolo di sterzo effettivo dei singoli assali

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= \delta_1 - (\beta + \rho a_1) \\ \alpha_2 &= \delta_2 - (\beta - \rho a_2)\end{aligned}\tag{3.62}$$

A questo sistema di equazioni si deve aggiungere l'equazione di equilibrio dei singoli assali (3.19) grazie alla quale è possibile scrivere la relazione che lega il valore dell'angolo volante a quello dell'angolo di sterzo delle ruote dei due assali

$$\begin{aligned}\delta_1 &= \delta_{s1} - \frac{e_1 + t_1}{k_1} Y_1(\alpha_1) = \tau \delta_v - \frac{e_1 + t_1}{k_1} Y_1(\alpha_1) \\ \delta_2 &= \delta_{s2} - \frac{e_2 + t_2}{k_2} Y_2(\alpha_2) = \chi \tau \delta_v - \frac{e_2 + t_2}{k_2} Y_2(\alpha_2)\end{aligned}\tag{3.63}$$

e sostituire le espressioni ottenute all'interno delle equazioni di congruenza

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= \tau \delta_v - \frac{e_1 + t_1}{k_1} Y_1(\alpha_1) - (\beta + \rho a_1) \\ \alpha_2 &= \chi \tau \delta_v - \frac{e_2 + t_2}{k_2} Y_2(\alpha_2) - (\beta - \rho a_2)\end{aligned}\tag{3.64}$$

che si presentano a questo punto in forma implicita rispetto ad (α_1, α_2) , per cui non è possibile estrarre le funzioni $\alpha_i(\beta, \rho)$ da inserire nelle equazioni costitutive.

Si pensa pertanto di ricavare i valori di α_i a regime utilizzando le equazioni di equilibrio e quelle costitutive come già fatto per il modello monotraccia non lineare con sistema di sterzo rigido,

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= Y_1^{-1} \left(m \frac{a_2}{a_1 + a_2} \tilde{a}_y \right) = f_1(\tilde{a}_y) \\ \alpha_2 &= Y_2^{-1} \left(m \frac{a_1}{a_1 + a_2} \tilde{a}_y \right) = f_2(\tilde{a}_y)\end{aligned}\tag{3.65}$$

sostituirli all'interno delle equazioni (3.64) e tenendo conto che a regime

$$\begin{aligned}Y_1(\alpha_1) &= Y_1 \left(Y_1^{-1} \left(m \frac{a_2}{a_1 + a_2} \tilde{a}_y \right) \right) = m \frac{a_2}{a_1 + a_2} \\ Y_2(\alpha_2) &= Y_2 \left(Y_2^{-1} \left(m \frac{a_1}{a_1 + a_2} \tilde{a}_y \right) \right) = m \frac{a_1}{a_1 + a_2}\end{aligned}\tag{3.66}$$

si ottiene

$$\begin{aligned} f_1(\tilde{a}_y) &= \tau\delta_v - \frac{e_1 + t_1}{k_1} \left(m \frac{a_2}{a_1 + a_2} \tilde{a}_y \right) - (\beta + \rho a_1) \\ f_2(\tilde{a}_y) &= \chi\tau\delta_v - \frac{e_2 + t_2}{k_2} \left(m \frac{a_1}{a_1 + a_2} \tilde{a}_y \right) - (\beta - \rho a_2) \end{aligned} \quad (3.67)$$

dalle quali è possibile ricavare in maniera esplicita le espressioni di $\beta_p(\tilde{a}_y, \delta_v a)$ e $\rho_p(\tilde{a}_y, \delta_v a)$

$$\begin{aligned} \beta_p &= \tau\delta_v \frac{a_2 + \chi a_1}{a_1 + a_2} - \frac{f_1(\tilde{a}_y)a_2 + f_2(\tilde{a}_y)a_1}{a_1 + a_2} - m\tilde{a}_y \frac{\frac{e_1+t_1}{k_1}a_2^2 + \frac{e_2+t_2}{k_2}a_1^2}{(a_1 + a_2)^2} \\ \rho_p &= \frac{\tau\delta_v - \chi\tau\delta_v}{a_1 + a_2} + \frac{f_1(\tilde{a}_y) - f_2(\tilde{a}_y)}{a_1 + a_2} + m\tilde{a}_y \frac{\frac{e_2+t_2}{k_2}a_1 - \frac{e_1+t_1}{k_1}a_2}{(a_1 + a_2)^2} \end{aligned} \quad (3.68)$$

dalle quali si ottengono, come già visto per gli altri modelli, le espressioni dei gradienti di assetto e di curvatura.

Anche in questo caso è di ausilio l'equazione (3.47) che esprime il legame tra $\frac{\partial f_i(\tilde{a}_y)}{\partial \tilde{a}_y}$ e la rigidezza di deriva generalizzata $\Phi_i(\tilde{a}_y)$, e permette di ottenere le seguenti espressioni per i gradienti di assetto e di curvatura

$$\begin{aligned} \nabla\beta_p &= \left(-\frac{m}{(a_1 + a_2)^2} \frac{\Phi_1(\tilde{a}_y)a_1^2(1 + \tilde{\varepsilon}_2) + \Phi_2(\tilde{a}_y)a_2^2(1 + \tilde{\varepsilon}_1)}{\Phi_1(\tilde{a}_y)\Phi_2(\tilde{a}_y)}, \quad \tau \frac{a_2 + \chi a_1}{a_1 + a_2} \right) \\ \nabla\rho_p &= \left(-\frac{m}{(a_1 + a_2)^2} \frac{\Phi_2(\tilde{a}_y)a_2(1 + \tilde{\varepsilon}_1) - \Phi_1(\tilde{a}_y)a_1(1 + \tilde{\varepsilon}_2)}{\Phi_1(\tilde{a}_y)\Phi_2(\tilde{a}_y)}, \quad \tau \frac{1 - \chi}{a_1 + a_2} \right) \end{aligned} \quad (3.69)$$

dove si è assunto

$$\tilde{\varepsilon}_i(\tilde{a}_y) = \frac{(e_i + t_i)\Phi_i(\tilde{a}_y)}{k_i} \quad (3.70)$$

L'analogia tra il modello con pneumatico lineare e quello con pneumatico non lineare è evidente, si può verificare che tutte le relazioni scritte per il primo sono valide anche per il secondo a patto di sostituire la rigidezza di deriva C_i con la rigidezza di deriva generalizzata $\Phi_i(\tilde{a}_y)$, operazione che introduce come complicazione il fatto che le derivate di dinamiche non sono

più costanti ma risultano dipendenti dall'accelerazione laterale intorno cui si effettua la linearizzazione. Si continua invece ad avere indipendenza dei gradienti di assetto e di curvatura, e quindi anche delle derivate di stabilità, dall'angolo volante δ_{va} .

Per quanto riguarda le espressioni che permettono di ricavare le derivate di stabilità per derivazione diretta, considerando cioè le funzioni $Y(\alpha_1, \alpha_2)$ e $N(\alpha_1, \alpha_2)$ come funzioni composte le cose si complicano leggermente. Se si osserva l'equazione (3.64) si nota che non è possibile, come già anticipato nella trattazione precedente, esprimere in forma esplicita $\alpha(\beta, \rho, \delta_v)$ e a prima vista non sembrerebbe possibile esprimere la derivata parziale di α rispetto alle tre grandezze di cui è funzione. In realtà ci è di grande aiuto il *teorema di Dini* [7], [5], secondo cui, data un'equazione in forma implicita, nel caso in questione le equazioni di congruenza $F_1(\alpha_1, \delta_v, \beta, \rho)$ e $F_2(\alpha_2, \delta_v, \beta, \rho)$

$$\begin{aligned} F_1(\alpha_1, \delta_v, \beta, \rho) &= \tau\delta_v - \frac{e_1 + t_1}{k_1}Y_1(\alpha_1) - (\beta + \rho a_1) - \alpha_1 = 0 \\ F_1(\alpha_2, \delta_v, \beta, \rho) &= \chi\tau\delta_v - \frac{e_2 + t_2}{k_2}Y_2(\alpha_2) - (\beta - \rho a_2) - \alpha_2 = 0 \end{aligned} \quad (3.71)$$

è possibile, sotto le condizioni per cui vale il suddetto teorema, cui si rimanda [5], ricavare

$$\frac{\partial\alpha_1}{\partial\beta} = -\frac{\frac{\partial F_1}{\partial\beta}}{\frac{\partial F_1}{\partial\alpha_1}} = -\frac{1}{1 + \tilde{\varepsilon}_1(\tilde{a}_y)} \quad \frac{\partial\alpha_2}{\partial\beta} = -\frac{\frac{\partial F_2}{\partial\beta}}{\frac{\partial F_2}{\partial\alpha_2}} = -\frac{1}{1 + \tilde{\varepsilon}_2(\tilde{a}_y)} \quad (3.72)$$

$$\frac{\partial\alpha_1}{\partial\rho} = -\frac{\frac{\partial F_1}{\partial\rho}}{\frac{\partial F_1}{\partial\alpha_1}} = -\frac{a_1}{1 + \tilde{\varepsilon}_1(\tilde{a}_y)} \quad \frac{\partial\alpha_2}{\partial\rho} = -\frac{\frac{\partial F_2}{\partial\rho}}{\frac{\partial F_2}{\partial\alpha_2}} = \frac{a_2}{1 + \tilde{\varepsilon}_2(\tilde{a}_y)} \quad (3.73)$$

$$\frac{\partial\alpha_1}{\partial\delta} = -\frac{\frac{\partial F_1}{\partial\delta}}{\frac{\partial F_1}{\partial\alpha_1}} = \frac{\tau}{1 + \tilde{\varepsilon}_1(\tilde{a}_y)} \quad \frac{\partial\alpha_2}{\partial\delta} = -\frac{\frac{\partial F_2}{\partial\delta}}{\frac{\partial F_2}{\partial\alpha_2}} = \frac{\chi\tau}{1 + \tilde{\varepsilon}_2(\tilde{a}_y)} \quad (3.74)$$

anch'esse identiche a quelle già visto per il monotraccia lineare con sistema di sterzo cedevole a patto, di nuovo, di sostituire C_i con $\Phi_i(\tilde{a}_y)$.

Note le rigidzze di deriva generalizzate e le derivate parziali di cui sopra è possibile ricavare le derivate di stabilità per derivazione diretta.

$$Y_\beta = - \left(\frac{\Phi_1(\tilde{a}_y)}{1 + \tilde{\varepsilon}_1} + \frac{\Phi_2(\tilde{a}_y)}{1 + \tilde{\varepsilon}_2} \right) \quad N_\beta = \frac{\Phi_2(\tilde{a}_y)a_2}{1 + \tilde{\varepsilon}_2} - \frac{\Phi_1(\tilde{a}_y)a_1}{1 + \tilde{\varepsilon}_1} \quad (3.75)$$

$$Y_\rho = \frac{\Phi_2(\tilde{a}_y)a_2}{1 + \tilde{\varepsilon}_2} - \frac{\Phi_1(\tilde{a}_y)a_1}{1 + \tilde{\varepsilon}_1} \quad N_\rho = - \left(\frac{\Phi_1(\tilde{a}_y)a_1^2}{1 + \tilde{\varepsilon}_1} + \frac{\Phi_2(\tilde{a}_y)a_2^2}{1 + \tilde{\varepsilon}_2} \right) \quad (3.76)$$

$$Y_\delta = \tau \left(\frac{\Phi_1(\tilde{a}_y)}{1 + \tilde{\varepsilon}_1} + \chi \frac{\Phi_2(\tilde{a}_y)}{1 + \tilde{\varepsilon}_2} \right) \quad N_\delta = \tau \left(\frac{\Phi_1(\tilde{a}_y)a_1}{1 + \tilde{\varepsilon}_1} - \chi \frac{\Phi_2(\tilde{a}_y)a_2}{1 + \tilde{\varepsilon}_2} \right) \quad (3.77)$$

Per concludere si prende in considerazione la derivata delle equazioni di congruenza ((3.64)) calcolata rispetto all'accelerazione laterale \tilde{a}_y che risulta

$$\begin{aligned} \alpha_{1y} &= \frac{-(\beta_y + \rho_y a_1)}{1 + \tilde{\varepsilon}_1} \\ \alpha_{2y} &= \frac{-(\beta_y - \rho_y a_2)}{1 + \tilde{\varepsilon}_2} \end{aligned} \quad (3.78)$$

a partire dalla quale è possibile scrivere il legame tra le rigidezze di deriva generalizzate e le derivate dinamiche di assetto e curvatura, già espresso per il modello monotraccia lineare con sistema di sterzo cedevole (3.30) sia per il modello monotraccia non lineare con sistema di sterzo rigido (3.58).

3.5 Modello monotraccia non lineare e ritardo di risposta

Indipendentemente dal tipo di modello considerato, prendiamo adesso in considerazione il comportamento di un veicolo avente pneumatici con ritardo di risposta. Le equazioni che governano il sistema dinamico passano da due a quattro. Come noto adesso la risposta del pneumatico è funzione, oltre che dell'angolo di deriva, anche del tempo.

Le variabili di stato del sistema sono: β , ρ , F_{y1} e F_{y2} dove con F_{yi} si assume il valore della forza, funzione del tempo, passante per l' i -esimo assale, mentre indichiamo con $Y_i(\beta_p, \rho_p, \delta_{va}, u_a)$ il valore della forza in condizioni di regime.

$$\begin{aligned} mu\dot{\beta} + mu^2\rho &= F_{y1} + F_{y2} \\ Ju\dot{\rho} &= F_{y1}a_1 - F_{y2}a_2 \\ \dot{F}_{y1} &= \frac{u}{l_1} (Y_1(\beta_p, \rho_p, \delta_{va}, u_a) - F_{y1}) \\ \dot{F}_{y2} &= \frac{u}{l_2} (Y_2(\beta_p, \rho_p, \delta_{va}, u_a) - F_{y2}) \end{aligned} \quad (3.79)$$

A regime il sistema risulta

$$\begin{aligned}
 mu_a^2 \rho_p &= F_{y_1} + F_{y_2} \\
 0 &= F_{y_1} a_1 - F_{y_2} a_2 \\
 F_{y_1} &= Y_1(\beta_p, \rho_p, \delta_{va}, u_a) \\
 F_{y_2} &= Y_2(\beta_p, \rho_p, \delta_{va}, u_a)
 \end{aligned} \tag{3.80}$$

e, considerando le variabili traslate, è possibile riscrivere il sistema linearizzato

$$\begin{aligned}
 mu_a \dot{\beta} &= F_{y_{1t}} + F_{y_{2t}} - mu_a^2 \rho_t \\
 Ju_a \dot{\rho} &= F_{y_{1t}} a_1 - F_{y_{2t}} a_2 \\
 \dot{F}_{y_1} &= \frac{u_a}{l_1} (Y_{1\beta} \beta_t + Y_{1\rho} \rho_t + Y_{1\delta} \delta_{vt} - F_{y_{1t}}) \\
 \dot{F}_{y_2} &= \frac{u_a}{l_2} (Y_{2\beta} \beta_t + Y_{2\rho} \rho_t + Y_{2\delta} \delta_{vt} - F_{y_{2t}})
 \end{aligned} \tag{3.81}$$

Si nota che le derivate di stabilità di Y_1 e Y_2 calcolate rispetto alla generica variabile ζ sono legate alle già note derivate di stabilità

$$\begin{aligned}
 Y_{1\zeta} &= \frac{a_2}{a_1 + a_2} Y_\zeta + \frac{1}{a_1 + a_2} N_\zeta \\
 Y_{2\zeta} &= \frac{a_1}{a_1 + a_2} Y_\zeta - \frac{1}{a_1 + a_2} N_\zeta
 \end{aligned} \tag{3.82}$$

Il sistema linearizzato (3.81) può essere riscritto in forma matriciale secondo la struttura

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b} \tag{3.83}$$

per altro già usata nel sistema con due sole variabili di stato (1.32)

$$\begin{bmatrix} \dot{\beta} \\ \dot{\rho} \\ \dot{F}_{y_1} \\ \dot{F}_{y_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -u_a & \frac{1}{mu_a} & \frac{1}{mu_a} \\ 0 & 0 & \frac{Ju_a}{a_1} & -\frac{Ju_a}{a_2} \\ \frac{u_a Y_{1\beta}}{l_1} & \frac{u_a Y_{1\rho}}{l_1} & -\frac{u_a}{l_1} & 0 \\ \frac{u_a Y_{2\beta}}{l_2} & \frac{u_a Y_{2\rho}}{l_2} & 0 & -\frac{u_a}{l_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_t \\ \rho_t \\ F_{y_{1t}} \\ F_{y_{2t}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{u_a Y_{1\delta}}{l_1} \\ \frac{u_a Y_{2\delta}}{l_2} \end{bmatrix} \delta_{vt}$$

all'interno del quale compaiono, oltre alle sei derivate di stabilità ricavabili attraverso le manovre valide a regime descritte nei paragrafi precedenti, le lunghezze di rilassamento dei due assali l_1 e l_2 .

Su come ricavare le lunghezze di rilassamento degli assali non sono state prese in considerazione manovre *ad hoc* in quanto è prassi comune calcolarle per chi si occupa di dinamica del veicolo sperimentale. I dati che ci sono stati messi a disposizione dal *CRF* contengono delle *lunghezze di rilassamento equivalenti* degli assali, all'interno delle quali sono raccolti vari contributi derivanti da tutto ciò che influisce sul ritardo di risposta del veicolo. In un'analisi sperimentale più accurata sarebbe da approfondire se questi valori sono adatti per essere inseriti all'interno del modello governato dal sistema di equazioni (3.5). Per adesso pare sufficiente un approccio qualitativo per cui, nel modello monotraccia con pneumatici rilassati, si considerano otto anziché sei coefficienti caratteristici

$$\beta_y \quad \rho_y \quad \beta_\delta \quad \rho_\delta \quad \frac{Y_\delta}{m} \quad \frac{N_\delta}{J} \quad l_1 \quad l_2 \quad (3.84)$$

Il sistema (3.5) può essere studiato anche nel dominio delle frequenze attraverso la trasformata di Laplace, ottenendo quattro equazioni differenziali del quarto ordine che caratterizzano ognuna la dinamica linearizzata di una delle quattro variabili di stato.

$$\mathbf{x} = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{b} \quad (3.85)$$

Il sistema che si ottiene, considerato nel dominio del tempo, è il seguente

$$\frac{d^4\beta}{dt^4} + n_1\frac{d^3\beta}{dt^3} + n_2\frac{d^2\beta}{dt^2} + n_3\frac{d\beta}{dt} + n_4\beta_t = n_5\frac{d^2\delta_v}{dt^2} + n_6\frac{d\delta_v}{dt} + n_7\delta_{vt} \quad (3.86)$$

$$\frac{d^4\rho}{dt^4} + n_1\frac{d^3\rho}{dt^3} + n_2\frac{d^2\rho}{dt^2} + n_3\frac{d\rho}{dt} + n_4\rho_t = n_8\frac{d^2\delta_v}{dt^2} + n_9\frac{d\delta_v}{dt} + n_{10}\delta_{vt} \quad (3.87)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^4F_{y1}}{dt^4} + n_1\frac{d^3F_{y1}}{dt^3} + n_2\frac{d^2F_{y1}}{dt^2} + n_3\frac{dF_{y1}}{dt} + n_4F_{y1t} \\ = n_{11}\frac{d^3\delta_v}{dt^3} + n_{12}\frac{d^2\delta_v}{dt^2} + n_{13}\frac{d\delta_v}{dt} + n_{14}\delta_{vt} \end{aligned} \quad (3.88)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^4 F_{y2}}{dt^4} + n_1 \frac{d^3 F_{y2}}{dt^3} + n_2 \frac{d^2 F_{y2}}{dt^2} + n_3 \frac{dF_{y2}}{dt} + n_4 F_{y2} \\ = n_{15} \frac{d^3 \delta_v}{dt^3} + n_{16} \frac{d^2 \delta_v}{dt^2} + n_{17} \frac{d\delta_v}{dt} + n_{18} \delta_{vt} \end{aligned} \quad (3.89)$$

governate dai coefficienti $n_i(Y_\beta/m, Y_\rho/m, Y_\delta/m, N_\beta/J, N_\rho/J, N_\delta/J, l_1, l_2, u_a)$, dei quali non si riporta la formulazione esplicita ma che sono legati agli elementi della matrice \mathbf{A} e del vettore \mathbf{b} .

Si vuole sottolineare come, anche nel caso di quattro variabili di stato, l'equazione omogenea è caratterizzata dagli stessi coefficienti per tutte le variabili, mentre quel che cambia sono i termini forzanti.

Analizzando le funzioni di trasferimento

$$\begin{aligned} G_\beta(s) &= \frac{n_5 s^2 + n_6 s + n_7}{s^4 + n_1 s^3 + n_2 s^2 + n_3 s + n_4} \\ G_\rho(s) &= \frac{n_8 s^2 + n_9 s + n_{10}}{s^4 + n_1 s^3 + n_2 s^2 + n_3 s + n_4} \\ G_{F_{y1}}(s) &= \frac{n_{11} s^3 + n_{12} s^2 + n_{13} s + n_{14}}{s^4 + n_1 s^3 + n_2 s^2 + n_3 s + n_4} \\ G_{F_{y2}}(s) &= \frac{n_{15} s^3 + n_{16} s^2 + n_{17} s + n_{18}}{s^4 + n_1 s^3 + n_2 s^2 + n_3 s + n_4} \end{aligned} \quad (3.90)$$

si osserva che, considerando il dominio complesso, le radici del denominatore, i cosiddetti poli della funzione, sono quattro, gli stessi per tutte le variabili di stato, mentre gli zeri sono due sia per β_t sia per ρ_t , mentre sono tre per F_{y1} e F_{y2} .

3.6 Modello di veicolo con differenziale bloccato

Il modello di veicolo con differenziale bloccato dà lo spunto per poter affrontare un caso più complesso, per trattare il quale si deve considerare un modello di veicolo non più monotraccia ma con quattro o più ruote, per il quale si devono considerare gli effetti del trasferimento di carico conseguenti al rollio del veicolo [8], [9].

Per cercare di fare un parallelismo con quanto finora visto si consideri intanto un modello di veicolo con differenziale aperto, per il quale cioè la velocità angolare di ogni ruota ω_{ij} è indipendente da quella delle altre ruote.

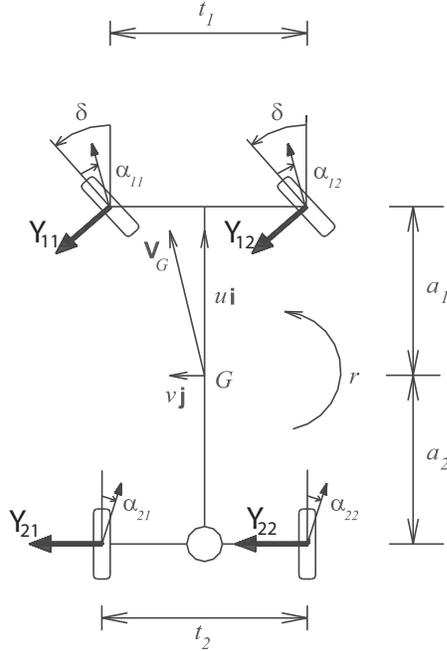


Figura 3.11: Equilibrio veicolo con differenziale aperto

Le equazioni di equilibrio possono essere scritte con riferimento alla Fig. 3.11, nella quale per semplicità si considera solo la sterzata delle ruote anteriori, e risultano identiche a quelle dei modelli monotraccia già visti

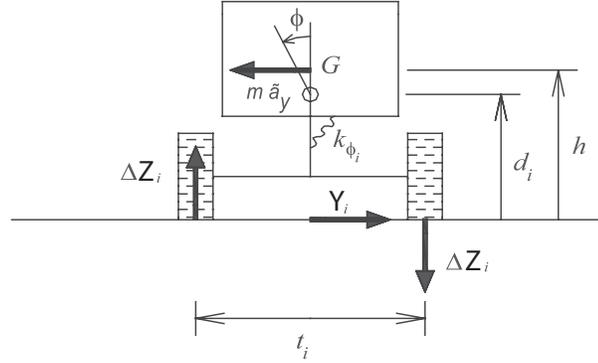
$$\begin{aligned} m(u_a \dot{\beta} + u_a^2 \rho) &= Y_{11} + Y_{12} + Y_{21} + Y_{22} \\ J\dot{\rho} &= (Y_{11} + Y_{12})a_1 - (Y_{21} + Y_{22})a_2 \end{aligned} \quad (3.91)$$

dove si assumeva implicitamente $Y_1 = Y_{11} + Y_{12}$ e $Y_2 = Y_{21} + Y_{22}$.

Se si considera poi la Fig. 3.12 è possibile ricavare anche l'espressione dei trasferimenti di carico conseguenti l'applicazione della forza centrifuga in un punto diverso dalla traccia dell'asse di rollio sul piano di sezione considerato. Considerando il veicolo nel suo complesso è possibile scrivere, con riferimento alla configurazione di regime

$$m\tilde{a}_y(h - d) - k_\Phi \Phi = 0 \quad (3.92)$$

dove si è indicato con h l'altezza del baricentro (cui è applicata la risultante


Figura 3.12: Equilibrio al rollio

delle azioni centrifughe), con d l'altezza della traccia dell'asse di rollio sul piano di sezione trasversale contenente il baricentro, con Φ l'angolo di rollio e con k_Φ la rigidezza di rollio di tutto il veicolo.

Per i singoli assali si considera lo schema di Fig. 3.12, dal quale è possibile ricavare le due equazioni di equilibrio

$$\begin{aligned} Y_1 d_1 - \Delta Z_1 t_1 + k_{\Phi_1} \Phi &= 0 \\ Y_2 d_2 - \Delta Z_2 t_2 + k_{\Phi_2} \Phi &= 0 \end{aligned} \quad (3.93)$$

dove t_i e k_{Φ_i} indicano rispettivamente la larghezza della carreggiata e la rigidezza al rollio dell' i -esimo assale.

Dal sistema di equazioni (3.92) e (3.93) si può ricavare l'espressione dei trasferimenti di carico

$$\begin{aligned} \Delta Z_1 &= Y_1 \frac{d_1}{t_1} + m \tilde{a}_y \frac{k_{\Phi_1}}{k_\Phi} \frac{h-d}{t_1} \\ \Delta Z_2 &= Y_2 \frac{d_2}{t_2} + m \tilde{a}_y \frac{k_{\Phi_2}}{k_\Phi} \frac{h-d}{t_2} \end{aligned} \quad (3.94)$$

che considerando i valori di regime di Y_1 e Y_2 ricavabili dal sistema (3.91), assumono la seguente formulazione

$$\begin{aligned} \Delta Z_1 &= \frac{m \tilde{a}_y}{t_1} \left(\frac{a_2}{a_1 + a_2} d_1 + \frac{k_{\Phi_1}}{k_\Phi} (h-d) \right) \\ \Delta Z_2 &= \frac{m \tilde{a}_y}{t_2} \left(\frac{a_1}{a_1 + a_2} d_2 + \frac{k_{\Phi_2}}{k_\Phi} (h-d) \right) \end{aligned} \quad (3.95)$$

Per le equazioni costitutive si assume un modello di pneumatico per il quale la forza scambiata con il terreno è funzione dello scorrimento [8] e del trasferimento di carico

$$\mathbf{F}(\sigma, \Delta Z) = F_x(\sigma_x, \Delta Z)\mathbf{i} + F_y(\sigma_y, \Delta Z)\mathbf{j} \quad (3.96)$$

La relazione che lega le due variabili $(\sigma, \Delta Z)$ al valore della forza può essere espressa da qualsiasi tipo di modello senza ledere alla generalità della trattazione, a patto di conoscere gli scorrimenti, definiti dalle equazioni di congruenza.

Equazioni di congruenza che sono legami puramente geometrici per cui non sono frutto di modelli. Per completezza di trattazione si elencano sia gli scorrimenti longitudinali σ_{xij} sia quelli laterali σ_{yij} , linearizzati rispetto all'angolo di sterzo delle ruote anteriori δ

$$\begin{aligned} \sigma_{x11} &= \frac{u_a[(1 - \rho t_1/2) + (\beta + \rho a_1)\delta] - \omega_{11}R_1}{\omega_{11}R_1} \\ \sigma_{x12} &= \frac{u_a[(1 + \rho t_1/2) + (\beta + \rho a_1)\delta] - \omega_{12}R_1}{\omega_{12}R_1} \\ \sigma_{x21} &= \frac{u_a(1 - \rho t_2/2) - \omega_{21}R_2}{\omega_{21}R_2} \\ \sigma_{x22} &= \frac{u_a(1 + \rho t_2/2) - \omega_{22}R_2}{\omega_{22}R_2} \end{aligned} \quad (3.97)$$

che, per un veicolo con differenziale aperto, in una manovra a velocità di avanzamento costante u_a risultano identicamente nulli.

Per quanto concerne invece gli scorrimenti laterali, le formulazioni che si ottengono sono identiche a quelle già viste per gli angoli di deriva

$$\begin{aligned} \sigma_{y11} &= \frac{u_a[-(1 - \rho t_1/2)\delta + (\beta + \rho a_1)]}{\omega_{11}R_1} \\ \sigma_{y12} &= \frac{u_a[-(1 + \rho t_1/2)\delta + (\beta + \rho a_1)]}{\omega_{12}R_1} \\ \sigma_{y21} &= \frac{u_a(\beta - \rho a_2)}{\omega_{21}R_2} \\ \sigma_{y22} &= \frac{u_a(\beta - \rho a_2)}{\omega_{22}R_2} \end{aligned} \quad (3.98)$$

a patto di assumere come ipotesi semplificative $\omega_{ij}R_i \simeq u_a$ e trascurare i termini di ordine superiore

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= -\sigma_{y_{11}} = -\sigma_{y_{12}} = \delta - (\beta + \rho a_1) \\ \alpha_2 &= -\sigma_{y_{21}} = -\sigma_{y_{22}} = -(\beta - \rho a_2)\end{aligned}\quad (3.99)$$

Per cui una volta noti i gradienti $\beta_y(\tilde{a}_y)$, $\rho_y(\tilde{a}_y)$, β_δ e ρ_δ , comunque ricavati, è possibile ricavare il valore delle derivate di stabilità derivando le equazioni (3.99) rispetto all'accelerazione laterale \tilde{a}_y in maniera tale da verificare che continuano a valere le espressioni già viste in (3.57), (3.58).

Affrontato il caso di veicolo con differenziale aperto non è difficile occuparsi di quello con differenziale bloccato. La differenza fondamentale si trova nelle equazioni di equilibrio in cui figurano le forze longitudinali X_{21} e X_{22} (3.13) che nascono dagli scorrimenti conseguenti l'omocineticità delle ruote posteriori

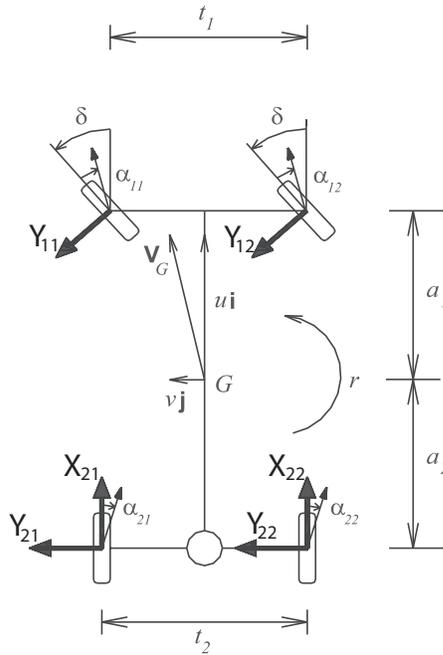


Figura 3.13: Equilibrio veicolo con differenziale chiuso

$$\begin{aligned}m(u_a \dot{\beta} + u_a^2 \rho) &= Y_{11} + Y_{12} + Y_{21} + Y_{22} \\ J \dot{\rho} &= (Y_{11} + Y_{12})a_1 - (Y_{21} + Y_{22})a_2 + (X_{22} - X_{21})\frac{t_2}{2}\end{aligned}\quad (3.100)$$

dove il contributo $M_z = (X_{22} - X_{21})\frac{t_2}{2}$ è spesso detto momento di imbardata.

Anche i trasferimenti di carico sono influenzati dal momento di imbardata e risultano, mettendo a sistema le equazioni di equilibrio a rollio e (3.100)

$$\begin{aligned}\Delta Z_1 &= \frac{m\tilde{a}_y}{t_1} \left(\frac{a_2}{a_1 + a_2} d_1 + \frac{k_{\Phi_1}}{k_{\Phi}} (h - d) \right) - \frac{M_z}{a_1 + a_2} \frac{d}{t_1} \\ \Delta Z_2 &= \frac{m\tilde{a}_y}{t_2} \left(\frac{a_1}{a_1 + a_2} d_2 + \frac{k_{\Phi_2}}{k_{\Phi}} (h - d) \right) + \frac{M_z}{a_1 + a_2} \frac{d}{t_2}\end{aligned}\quad (3.101)$$

Inoltre le equazioni di congruenza sono formalmente ancora quelle viste di sopra, con la differenza che gli scorrimenti σ_{x21} e σ_{x22} non sono più approssimabili a zero, visto che il prodotto $\omega_{2i} R_{2i} \neq u_a$. È così possibile introdurre dei coefficienti χ_{ij} tali che

$$\frac{\omega_{ij} R_{ij}}{u_a} = 1 + \chi_{ij} \quad (3.102)$$

per cui l'espressione della forza scambiata da ogni ruota non è esprimibile se non in forma implicita

$$\mathbf{F}(\sigma, \Delta Z) = F_x(\sigma_x, \Delta Z)\mathbf{i} + F_y(\sigma_y, \Delta Z)\mathbf{j} \quad (3.103)$$

dato che all'interno dell'espressione del trasferimento di carico è implicitamente contenuto il valore della forza stessa.

Per la risoluzione del sistema si rimanda all'articolo [8], quello che però ci preme sottolineare è che il valore delle variabili di stato $\beta_p(\delta_{va}, \tilde{a}_y)$ e $\rho_p(\delta_{va}, \tilde{a}_y)$ a regime sono funzioni non lineari di $(\delta_{va}, \tilde{a}_y)$, per cui i gradienti risulteranno funzione di ambedue le variabili di comando.

A titolo di esempio si riportano gli andamenti dei gradienti di assetto e di curvatura calcolati per un veicolo relativamente al quale erano già stati fatti studi per quel che concerne il comportamento con differenziale bloccato [12]. Non interessa tanto considerare l'aspetto quantitativo dei risultati ottenuti, bensì quello qualitativo, verificando che tutte le componenti dei gradienti di assetto e di curvatura sono dipendenti sia dal valore dell'accelerazione laterale a regime \tilde{a}_y sia dall'angolo di sterzo assegnato δ_{va} .

Senza entrare nel dettaglio dei parametri costruttivi del veicolo, si presenta l'andamento dei gradienti di assetto e di curvatura considerando i seguenti modelli

- modello monotraccia non lineare

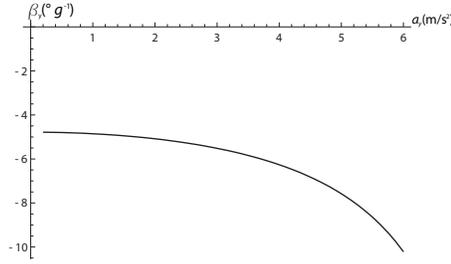


Figura 3.14: Derivata dinamica di assetto

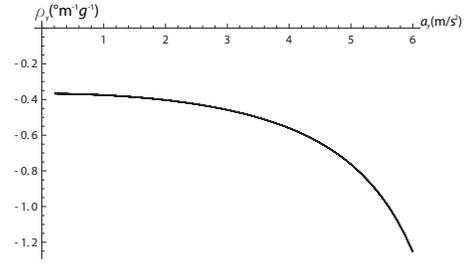


Figura 3.15: Derivata dinamica di curvatura

- modello completo con differenziale aperto e caratteristica dei pneumatici indipendente dal trasferimento di carico
- modello completo con differenziale aperto e caratteristica dei pneumatici dipendente dal trasferimento di carico
- modello completo con differenziale bloccato e caratteristica dei pneumatici dipendente dal trasferimento di carico

Questa analisi ha anche lo scopo di validare l'affidabilità delle ipotesi semplificative che si fanno nel momento in cui si considera il modello monotraccia di un veicolo, oltre che quella di verificare come i gradienti di assetto e di curvatura, così come le derivate di stabilità, possono essere ricavate, sotto le condizioni che verranno specificate, anche per i modelli di veicolo più complessi.

Monotraccia non lineare Come descritto nel paragrafo (3.3), è possibile ricavare i gradienti di curvatura e di assetto a partire da manovre stazionarie. Per il veicolo in oggetto si riportano i valori delle derivate cinematiche β_δ e ρ_δ , e l'andamento delle derivate dinamiche $\beta_y(\tilde{a}_y)$ e $\rho_y(\tilde{a}_y)$. Si riporta inoltre l'andamento delle sei derivate di stabilità anch'esse funzione unicamente dell'accelerazione laterale di regime \tilde{a}_y .

β_δ	$\rho_\delta(\text{m}^{-1})$
0.0435	0.0296

Tabella 3.4: Derivate cinematiche di assetto e di curvatura

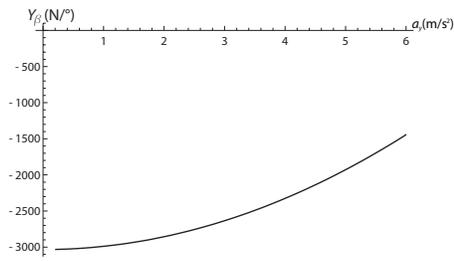


Figura 3.16: $Y_\beta(\tilde{a}_y)$

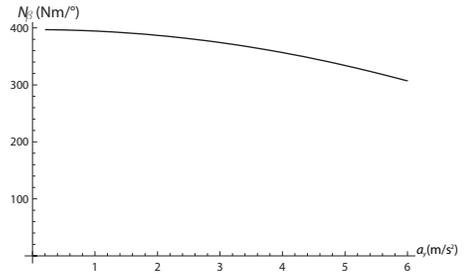


Figura 3.17: $N_\beta(\tilde{a}_y)$

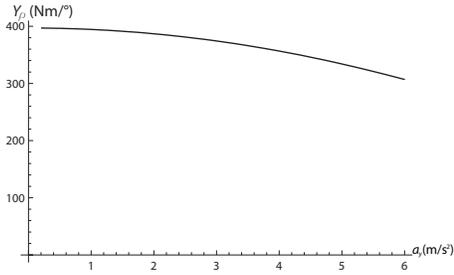


Figura 3.18: $Y_\rho(\tilde{a}_y)$

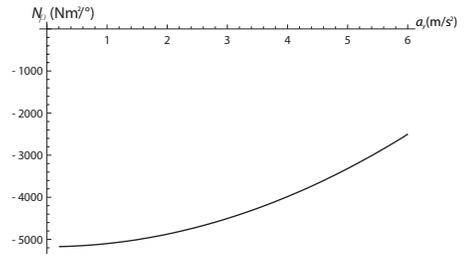


Figura 3.19: $N_\rho(\tilde{a}_y)$

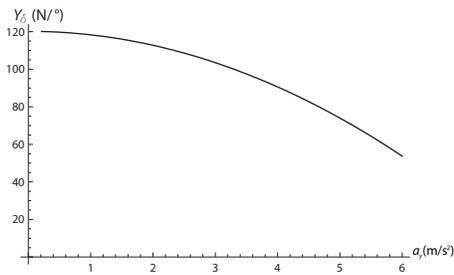


Figura 3.20: $Y_\delta(\tilde{a}_y)$

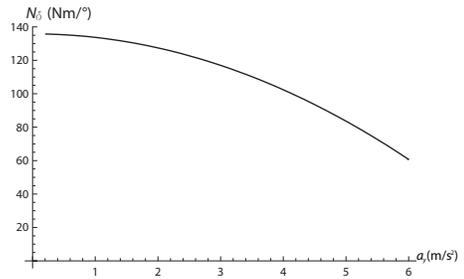


Figura 3.21: $N_\delta(\tilde{a}_y)$

Modello completo senza trasferimento di carico Come primo passo si considera un modello di veicolo con quattro ruote, per il quale si ricavano le mappe di assetto e di curvatura considerando la forma originale delle equazioni di equilibrio e di congruenza, senza considerare né linearizzazioni né approssimazioni, mantenendo però la caratteristica dei pneumatici analoga a quella del monotraccia, senza considerare gli effetti del trasferimento di carico.

Con riferimento alla Fig. 3.11 le equazioni di equilibrio risultano

$$\begin{aligned} m\tilde{a}_y &= (Y_{11} + Y_{12}) \cos \delta + (Y_{21} + Y_{22}) \\ 0 &= (Y_{11} + Y_{12}) \cos \delta a_1 - (Y_{21} + Y_{22}) a_2 \end{aligned} \quad (3.104)$$

ed anche le equazioni di congruenza possono essere espresse nella loro forma completa

$$\begin{aligned} \sigma_{y11} &= \frac{u_a[-(1 - \rho t_1/2) \sin \delta + (\beta + \rho a_1) \cos \delta]}{\omega_{11} R_1} \\ \sigma_{y12} &= \frac{u_a[-(1 + \rho t_1/2) \sin \delta + (\beta + \rho a_1) \cos \delta]}{\omega_{12} R_1} \\ \sigma_{y21} &= \frac{u_a(\beta - \rho a_2)}{\omega_{21} R_2} \\ \sigma_{y22} &= \frac{u_a(\beta - \rho a_2)}{\omega_{22} R_2} \end{aligned} \quad (3.105)$$

dove si è assunto $\delta = \tau \delta_{va}$ ($\tau = 1/13$).

Si avrà perciò un comportamento leggermente diverso da quello ottenuto per il modello monotraccia, in ragione del fatto che si considerano effetti di ordine superiore. Dimostrare come sia possibile da queste equazioni ricavare le derivate di nostro interesse non è cosa difficile, ma sarebbe una ripetizione di quanto già largamente dimostrato per il modello monotraccia. Quello che invece è importante mostrare è come sia possibile ricavare numericamente le mappe $\beta_p(\tilde{a}_y)$, $\rho_p(\tilde{a}_y)$ e da esse estrarre i gradienti di assetto e di curvatura, che risultano

Non si evidenziano grosse differenze numeriche rispetto al modello monotraccia lineare, anche se dal punto di vista concettuale si verifica che l'andamento dei gradienti di assetto e di curvatura è funzione sia di \tilde{a}_y sia di δ_{va} .

Inoltre, data la non linearità del sistema, non è possibile esprimere analiticamente la relazione $Y_{ij} = Y_{ij}(\sigma_{ij})$, in analogia con quanto era stato fatto per il modello monotraccia (2.9) e di conseguenza non si può esprimere

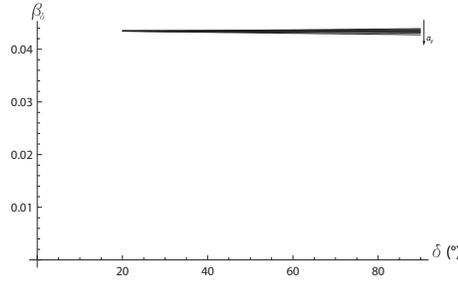


Figura 3.22: Derivata cinematica di assetto

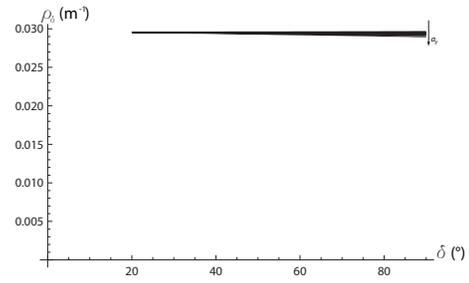


Figura 3.23: Derivata cinematica di curvatura

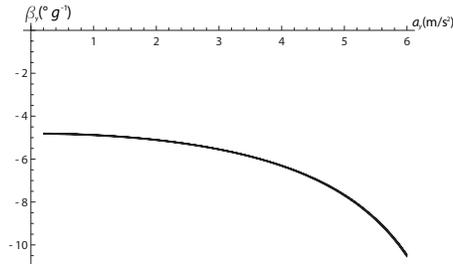


Figura 3.24: Derivata dinamica di assetto

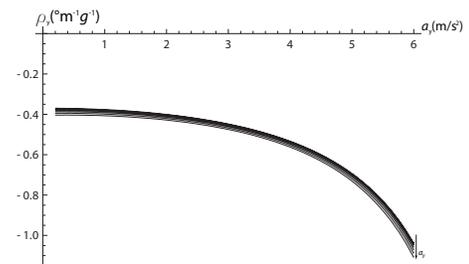


Figura 3.25: Derivata dinamica di curvatura

la rigidezza di deriva generalizzata in funzione dell'accelerazione laterale di regime, come descritto in (2.13).

Si è così pensato di ricavare l'andamento di due derivate di stabilità, nella fattispecie Y_δ e N_δ , considerandole come derivate di funzioni composte

$$\begin{aligned}
 Y_\delta &= \frac{\partial Y_{11}}{\partial \sigma_{11}} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial \delta} + \frac{\partial Y_{12}}{\partial \sigma_{12}} \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial \delta} + \frac{\partial Y_{21}}{\partial \sigma_{21}} \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial \delta} + \frac{\partial Y_{22}}{\partial \sigma_{22}} \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial \delta} \\
 N_\delta &= \left(\frac{\partial Y_{11}}{\partial \sigma_{11}} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial \delta} + \frac{\partial Y_{12}}{\partial \sigma_{12}} \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial \delta} \right) a_1 - \left(\frac{\partial Y_{21}}{\partial \sigma_{21}} \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial \delta} + \frac{\partial Y_{22}}{\partial \sigma_{22}} \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial \delta} \right) a_2
 \end{aligned} \tag{3.106}$$

dove le derivate delle forze rispetto agli scorrimenti sono calcolabili una volta note le caratteristiche dei pneumatici, mentre le derivate degli scorrimenti rispetto all'angolo volante possono essere ricavate dalle equazioni di congruenza (3.105).

A questo punto è possibile ricavare l'andamento delle restanti derivate di stabilità in funzione dei parametri noti (1.29).

Si verifica così che gli andamenti non si discostano di molto da quelli già trovati per il modello monotraccia lineare e che, le derivate che risentono in maniera maggiore della variazione dell'angolo volante (0-90°) sono Y_ρ e

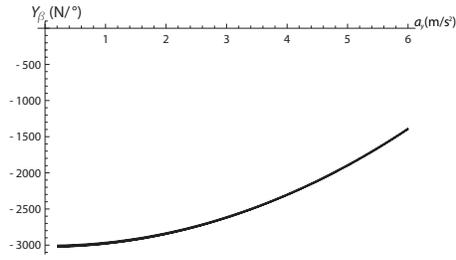


Figura 3.26: $Y_\beta(\tilde{a}_y, \delta_{va})$

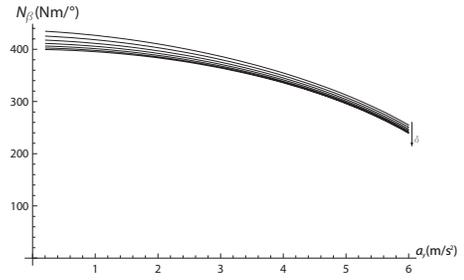


Figura 3.27: $N_\beta(\tilde{a}_y, \delta_{va})$

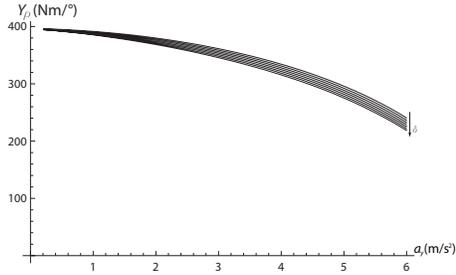


Figura 3.28: $Y_\rho(\tilde{a}_y, \delta_{va})$

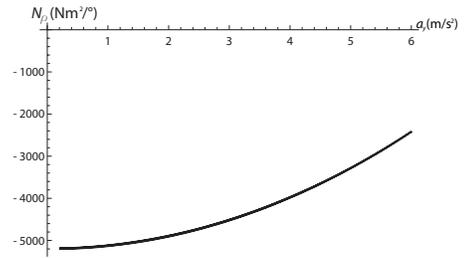


Figura 3.29: $N_\rho(\tilde{a}_y, \delta_{va})$

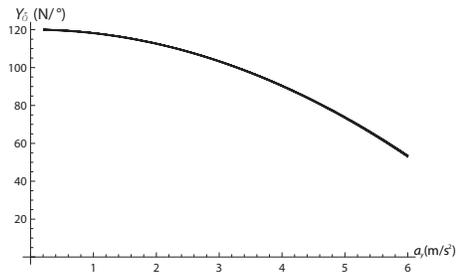


Figura 3.30: $Y_\delta(\tilde{a}_y, \delta_{va})$

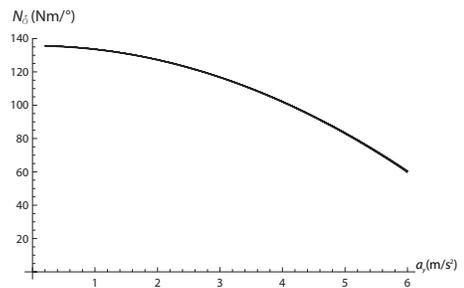


Figura 3.31: $N_\delta(\tilde{a}_y, \delta_{va})$

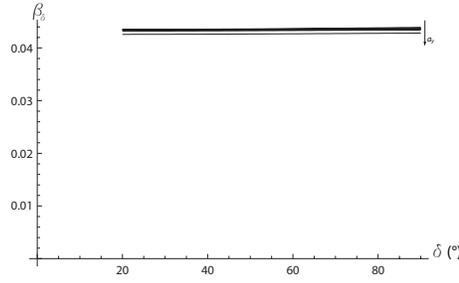


Figura 3.32: Derivata cinematica di assetto

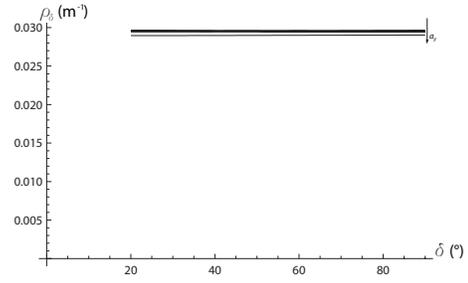


Figura 3.33: Derivata cinematica di curvatura

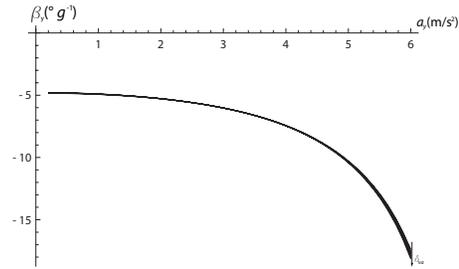


Figura 3.34: Derivata dinamica di assetto

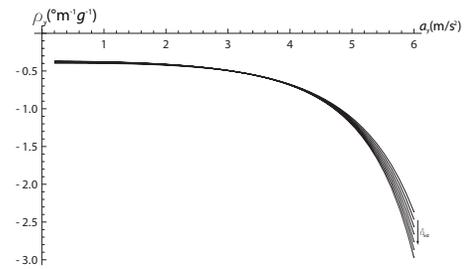


Figura 3.35: Derivata dinamica di curvatura

N_β che non risultano più equivalenti. Il risultato è soddisfacente in quanto fornisce una validazione sperimentale all'uso del modello monotraccia lineare per lo studio dell'*handling* del veicolo.

Modello completo con trasferimento di carico Come ultimo scalino prima di affrontare il veicolo con differenziale bloccato, si vuole analizzare un modello di veicolo analogo al precedente ma con caratteristica dei pneumatici funzione, oltre che dello scorrimento, anche del trasferimento di carico ΔZ (3.95).

Le equazioni di equilibrio e quelle di congruenza rimangono le stesse, mentre le equazioni costitutive dei singoli pneumatici sono

$$Y_{ij} = Y_{ij}(\sigma_{ij}(\tilde{a}_y, \delta_{va}), \Delta Z(\tilde{a}_y)) \quad (3.107)$$

I gradienti di assetto e di curvatura possono essere di nuovo ricavati dopo aver risolto per via numerica il sistema e derivato le mappe in funzione delle variabili di comando

Si osserva che le derivate cinematiche continuano a rimanere molto simili a quelle già viste, mentre le derivate dinamiche non risentono molto dell'influenza dell'angolo di sterzo, mostrando però una marcata variazione del

valore assoluto delle stesse rispetto al caso precedente, in ragione della minor rigidezza di deriva generalizzata dell'assale che si ha nel momento in cui si considera il trasferimento di carico [13, p. 150-151].

Le derivate di stabilità risultano, come è logico, anch'esse funzione sia di \tilde{a}_y sia, in misura minore di δ_{va} . Rispetto ai casi grafici si nota un marcata differenza nell'andamento di $Y_\beta(\tilde{a}_y)$, conseguente il differente carico statico e la diversa incidenza del trasferimento di carico sui pneumatici anteriori rispetto a quelli posteriori

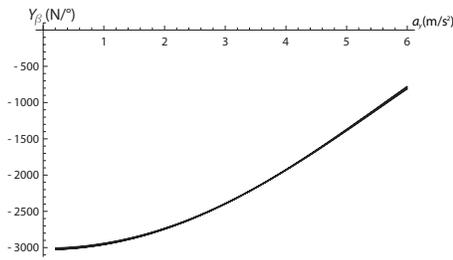


Figura 3.36: $Y_\beta(\tilde{a}_y, \delta_{va})$

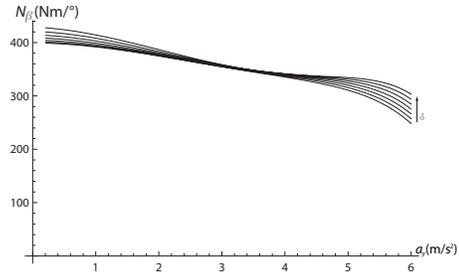


Figura 3.37: $N_\beta(\tilde{a}_y, \delta_{va})$

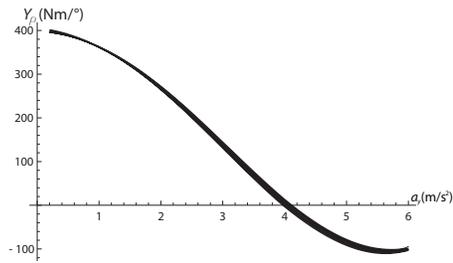


Figura 3.38: $Y_\rho(\tilde{a}_y, \delta_{va})$

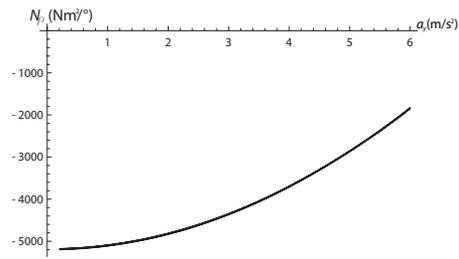


Figura 3.39: $N_\rho(\tilde{a}_y, \delta_{va})$

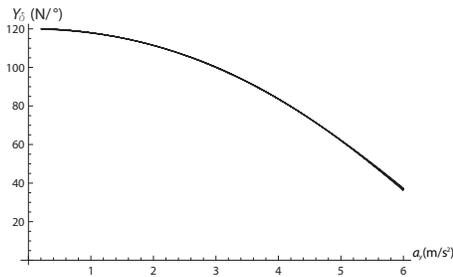


Figura 3.40: $Y_\delta(\tilde{a}_y, \delta_{va})$

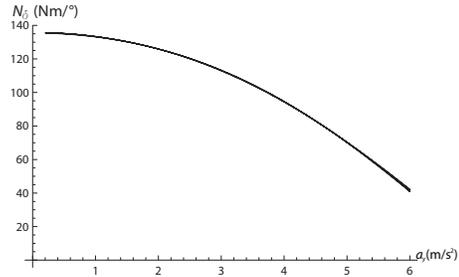


Figura 3.41: $N_\delta(\tilde{a}_y, \delta_{va})$

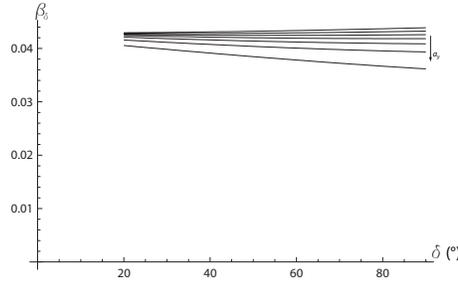


Figura 3.42: Derivata cinematica di assetto

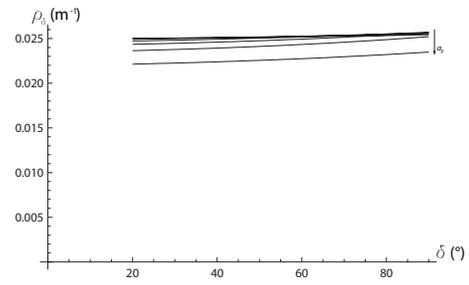


Figura 3.43: Derivata cinematica di curvatura

Modello con differenziale bloccato Si può finalmente a questo punto mostrare l'andamento dei gradienti e delle derivate di stabilità per un veicolo con differenziale bloccato.

Per ricavarle sono state utilizzate le equazioni di equilibrio che, con riferimento alla Fig. 3.13 risultano

$$m\tilde{a}_y = (Y_{11} + Y_{12}) \cos \delta + (Y_{21} + Y_{22}) \quad (3.108)$$

$$0 = (Y_{11} + Y_{12}) \cos \delta a_1 - (Y_{21} + Y_{22}) a_2 + (X_{22} - X_{12}) \frac{t_2}{2} + (Y_{11} - Y_{12}) \sin \delta \frac{t_1}{2} \quad (3.109)$$

assieme alle equazioni relative al trasferimento di carico (3.95), al modello di pneumatico funzione dello scorrimento e del trasferimento di carico (3.107) e alle equazioni di congruenza complete (3.105) cui vanno aggiunte le espressioni complete degli scorrimenti longitudinali delle ruote posteriori, equivalenti a quelli in (3.97).

Si ricavano così i gradienti di assetto e di sottosterzo per via numerica, come mostrato nelle precedenti sezioni, e le derivate di stabilità considerate come funzioni composte, come già mostrato in (3.106).

Si evidenziano stavolta differenze marcate negli andamenti delle derivate di stabilità e dei gradienti di assetto e curvatura, causate non tanto da effetti di ordine superiore come accadeva nei modelli precedenti, che spesso possono essere, a ragione, trascurati, bensì a causa di una diversa struttura dell'equazione di equilibrio al momento imbardante, che provoca una dipendenza della risposta lineare del veicolo oltre che dall'accelerazione laterale \tilde{a}_y anche dall'angolo di sterzo δ_{va} .

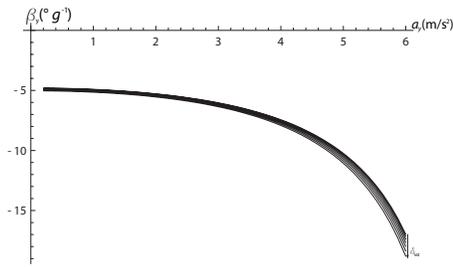


Figura 3.44: Derivata dinamica di assetto

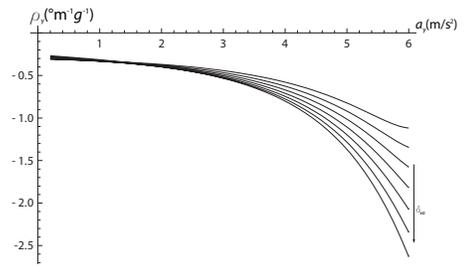


Figura 3.45: Derivata dinamica di curvatura

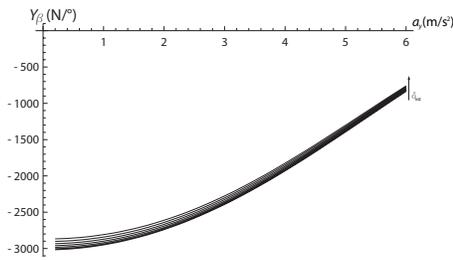


Figura 3.46: $Y_{\beta}(\tilde{a}_y, \delta_{va})$

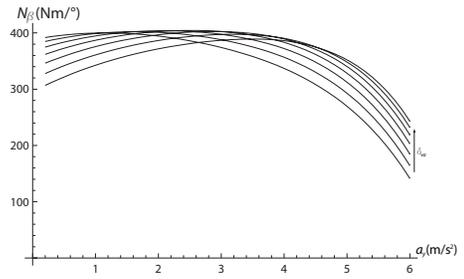


Figura 3.47: $N_{\beta}(\tilde{a}_y, \delta_{va})$

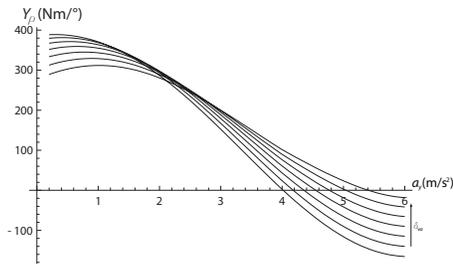


Figura 3.48: $Y_{\rho}(\tilde{a}_y, \delta_{va})$

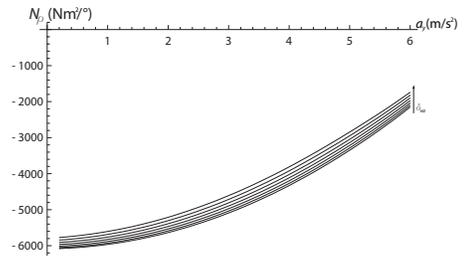


Figura 3.49: $N_{\rho}(\tilde{a}_y, \delta_{va})$

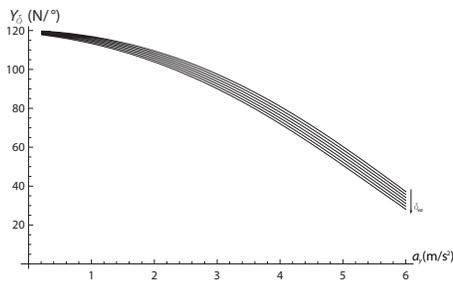


Figura 3.50: $Y_{\delta}(\tilde{a}_y, \delta_{va})$

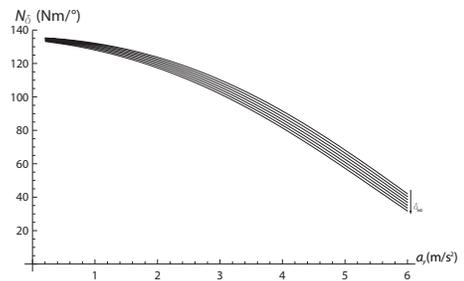


Figura 3.51: $N_{\delta}(\tilde{a}_y, \delta_{va})$

Capitolo 4

Analisi dati *CRF*

Archiviata quella che è la parte teorica del problema e dimostrata la possibilità di utilizzare le derivate di stabilità sia per modelli più o meno complessi di veicolo, sia per dati sperimentali ricavati da prove condotte su veicoli reali, si passa adesso, grazie al supporto del *Centro Ricerche Fiat*, a calcolare i coefficienti finora incontrati per un modello monotraccia con pneumatici non lineari e ritardo di risposta degli assali, al fine di analizzarne la forma e studiare la loro incidenza sulla dinamica del veicolo, per poi passare a confrontare i risultati ottenuti con quelli comunemente ottenuti dal *CRF* mediante un arroccio che integra parametri quantitativi e giudizi qualitativi dei collaudatori.

4.1 Dati modelli monotraccia

Il *CRF* ha messo a nostra disposizione i dati relativi a otto modelli di veicolo, ricavati da veicoli reali sia del gruppo *FIAT* sia della concorrenza. Riguardo a come sia possibile passare da un veicolo reale ad un modello monotraccia equivalente dello stesso esistono delle normative interne che sono di tipo confidenziale e non possono essere rese note; è stato però assicurato che l'accuratezza dei risultati utilizzati all'interno del modello è buona.

Si tenga conto che questa parte vuol servire a prendere confidenza con l'uso delle derivate di stabilità, a capirne la struttura, il legame con le prove sperimentali e i limiti entro i quali i risultati possono essere ritenuti validi.

Inoltre si vuole precisare che i dati riportati nel seguito sono relativi a veicoli reali, ma spesso i dati in nostro possesso (posizione del baricentro, pneumatici utilizzati, caratteristica degli assali ecc.) non corrispondono a quelli dei veicoli effettivamente prodotti. È principalmente per questo motivo che il nome commerciale dei veicoli non è stato reso noto dal *CRF*, per evitare

appunto che dati, risultati e giudizi sperimentali possano essere associati a veicoli che in produzione risultano omonimi ma costruttivamente differenti da quelli in nostro possesso.

In Fig. 4.1 si riporta il documento testuale contenente i dati del *Veicolo 1* così come ricevuto dal *CRF*, all'interno del quale possono essere individuate quattro sezioni

- Dati geometrici
- Caratteristiche degli assali
- Ritardo di risposta equivalente degli assali
- Classificazione e giudizio

```

-----
DATI VETTURA
-----
Vettura: Seg. C
Configurazione: 1p + strumentazione

Peso anteriore      [kg]      939
Peso posteriore     [kg]      559
Passo vettura      [m]       2.60
Rapporto sterzo     []        16.00

Iz                  [kg*m²]   2330.1
Lant                [m]       0.965
Lpost              [m]       0.762

-----
Pacejka
-----
B                  [1/rad]   Ant.      Post.
C                  []        9.12     24.76
D                  [N]       1.480    0.603
E                  []        8116     7663
E                  []        0.000    0.000

-----
Metrica valutazione
-----
Dinamica laterale: 7.4

```

Figura 4.1: Dati Veicolo 1 - Formato *CRF*

4.1.1 Dati geometrici

In Tab. 4.1 si riportano la massa (m), il momento di inerzia (J), il rapporto di sterzo (τ'), la lunghezza dei semipassi (a_1 e a_2), quella del passo (l) e la ripartizione dei carichi all'anteriore e al posteriore (σ_1 e σ_2) relativi agli otto modelli di veicolo a nostra disposizione.

Si vuole precisare che per coerenza con i simboli utilizzati nei capitoli precedenti, si ha

$$\tau' = \frac{1}{\tau} \quad (4.1)$$

cioè il rapporto di sterzo secondo la definizione in uso al *CRF* esprime il rapporto tra angolo volante e angolo ruote anteriori, mentre il quello introdotto nelle equazioni di congruenza è il reciproco (in condizioni di veicolo con tiranteria di sterzo rigida)

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{\delta}{\delta_v} \\ \tau' &= \frac{\delta_v}{\delta} \end{aligned} \quad (4.2)$$

Risulta inoltre utile definire le grandezze σ_1 e σ_2 come

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{a_2}{l} \\ \sigma_2 &= \frac{a_1}{l} \end{aligned} \quad (4.3)$$

Infine è importante precisare che i veicoli considerati hanno tutti sterzata imposta solo all'assale anteriore, per cui si ha $\chi = 0$ per ognuno di essi.

Veicolo	m [kg]	J [kgm ²]	τ	a_1 [m]	a_2 [m]	l [m]	σ_1	σ_2
1	1498	2330	16.0	0.97	1.63	2.60	0.63	0.37
2	1066	1281	16.3	0.92	1.38	2.30	0.60	0.40
3	1420	2124	13.2	0.96	1.59	2.55	0.62	0.38
4	1096	1147	15.8	0.94	1.51	2.45	0.62	0.38
5	1527	2401	16.4	1.31	1.35	2.66	0.51	0.49
6	1744	3718	17.0	1.17	1.53	2.70	0.57	0.43
7	1695	3293	13.2	1.03	1.67	2.70	0.62	0.38
8	1712	3257	12.8	1.09	1.61	2.70	0.60	0.40

Tabella 4.1: Dati geometrici

4.1.2 Caratteristiche degli assali

Per quanto concerne la caratteristica degli assali sono stati forniti i coefficienti da inserire all'interno della *Magic Formula*, espressa secondo la seguente forma

$$Y_i = D_i \sin \{C_i \arctan [B_i \alpha_i - E_i(B_i \alpha_i - \arctan B_i \alpha_i)]\} \quad (4.4)$$

in funzione dell'angolo di deriva dell'assale.

La caratteristica dell'assale non è esattamente la somma delle caratteristiche dei singoli pneumatici dell'assale in questione, ma raccoglie al proprio interno fenomeni legati all'elasticità dell'assale.

Le caratteristiche per gli otto veicoli possono essere espresse nella loro forma classica oppure possono essere normalizzate rispetto al carico statico gravante sull'assale considerato

$$\bar{Y}_i = \frac{Y_i}{W_i} \quad (4.5)$$

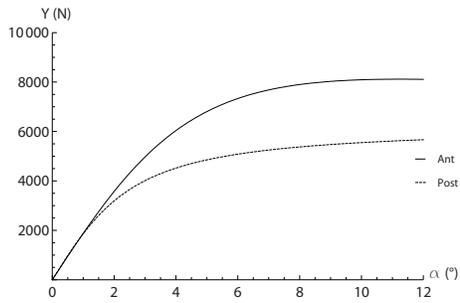


Figura 4.2: Caratteristica Assale - Veicolo 1

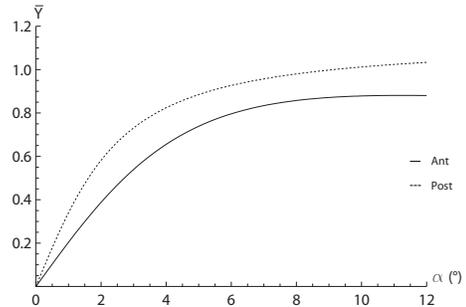


Figura 4.3: Caratteristica Assale Normalizzata - Veicolo 1

4.1.3 Ritardo di risposta equivalente degli assali

Si elencano in questa sezione le lunghezze di rilassamento equivalenti dei pneumatici, espresse in metri. Non si tratta della lunghezza di rilassamento dei singoli pneumatici così come è definita in [13, p. 77-81], bensì di un parametro che tiene in qualche modo conto dei ritardi di risposta dei singoli assali. Risulta infatti, rispetto ai valori di lunghezza di rilassamento cui solitamente siamo abituati, che questi valori sono maggiori.

Si è deciso di usarli comunque alla stregua di lunghezze di rilassamento all'interno dell'equazione differenziale

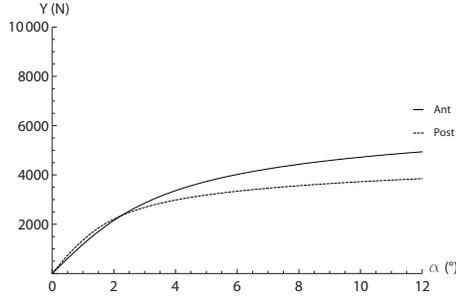


Figura 4.4: Caratteristica Assale - *Veicolo 2*

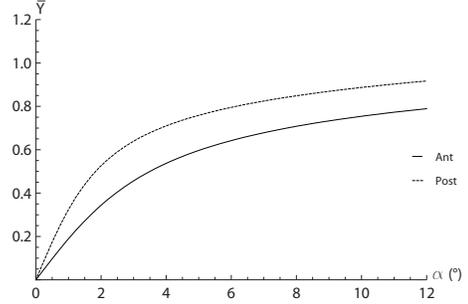


Figura 4.5: Caratteristica Assale Normalizzata - *Veicolo 2*

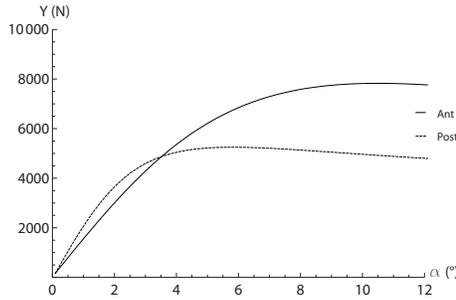


Figura 4.6: Caratteristica Assale - *Veicolo 3*

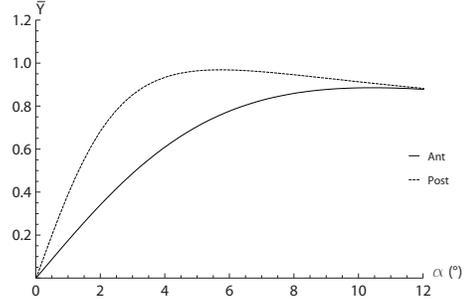


Figura 4.7: Caratteristica Assale Normalizzata - *Veicolo 3*

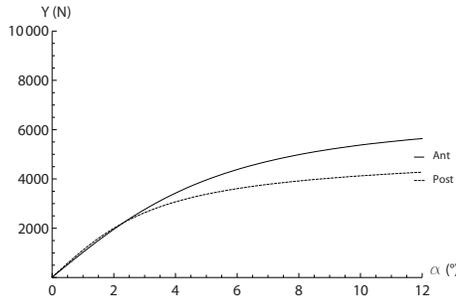


Figura 4.8: Caratteristica Assale - *Veicolo 4*

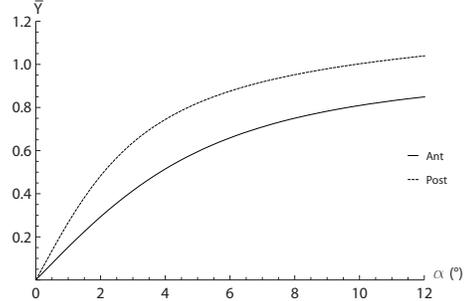


Figura 4.9: Caratteristica Assale Normalizzata - *Veicolo 4*

$$\begin{aligned} \dot{F}_{y1} &= \frac{u}{l_1} (Y_1(\beta_p, \rho_p, \delta_{va}, u_a) - F_{y1}) \\ \dot{F}_{y2} &= \frac{u}{l_2} (Y_2(\beta_p, \rho_p, \delta_{va}, u_a) - F_{y2}) \end{aligned} \quad (4.6)$$

anche se sarebbe importante indagare meglio quali tipi di ritardo sono in

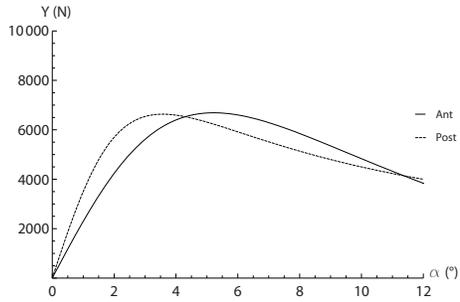


Figura 4.10: Caratteristica Assale - *Veicolo 5*

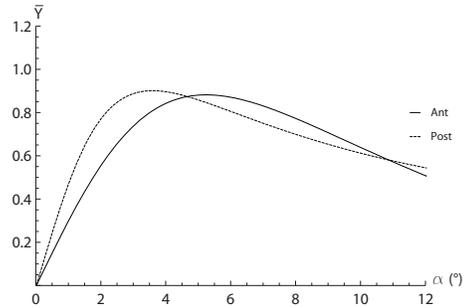


Figura 4.11: Caratteristica Assale Normalizzata - *Veicolo 5*

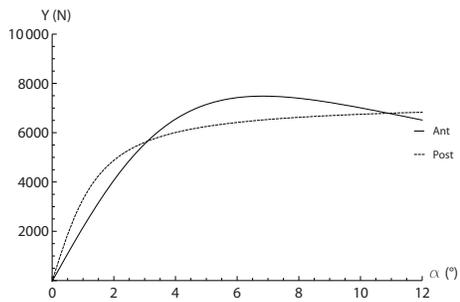


Figura 4.12: Caratteristica Assale - *Veicolo 6*

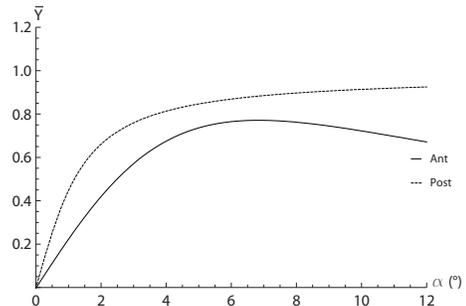


Figura 4.13: Caratteristica Assale Normalizzata - *Veicolo 6*

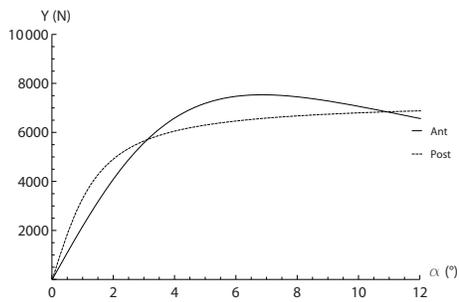


Figura 4.14: Caratteristica Assale - *Veicolo 7*

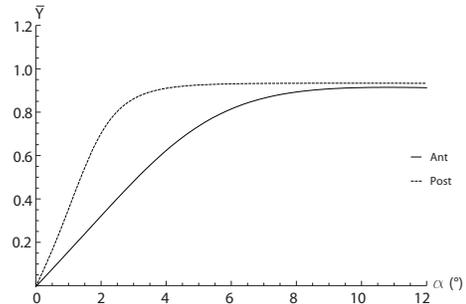


Figura 4.15: Caratteristica Assale Normalizzata - *Veicolo 7*

esse raccolti e se tutti possono essere interpretati attraverso le equazioni differenziali (4.6).

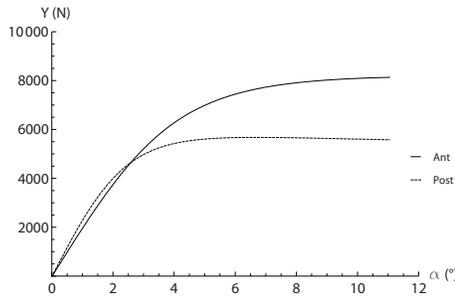


Figura 4.16: Caratteristica Assale - Veicolo 8

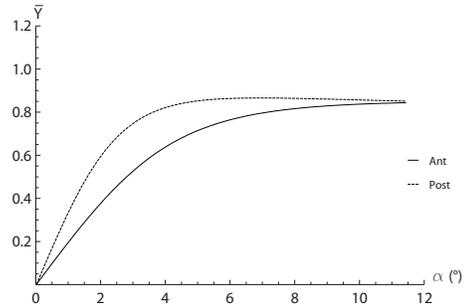


Figura 4.17: Caratteristica Assale Normalizzata - Veicolo 8

Veic	l_1 [m]	l_2 [m]
1	0.650	0.762
2	0.939	0.989
3	0.655	1.031
4	0.876	0.643
5	1.419	0.715
6	0.816	0.644
7	0.433	0.577
8	1.058	0.362

4.1.4 Classificazione e giudizio

È certamente la parte più qualitativa ed empirica dell'analisi. Riguardo alla classificazione è stato fornito, relativamente ad ogni veicolo, il segmento di appartenenza che rappresenta un tipo di classificazione primariamente commerciale. Nel seguito si riporta la definizione che è possibile ricavare da *Wikipedia* e un esempio di veicolo, del gruppo Fiat, appartenente ad ognuno di essi

- **Segmento A:** si tratta di vetture definite comunemente *City Car* o *Superutilitarie*, di dimensioni, peso e potenza ridotte. Es. *Fiat Seicento*
- **Segmento B:** altresì dette vetture *utilitarie* rappresenta un segmento per il quale si cerca di ottimizzare i servizi essenziali per trasporto di persone a fronte di un prezzo di vendita contenuto. Es. *Fiat Grande Punto*
- **Segmento C:** sono vetture intermedie atte al trasporto di persone, per le quali si ha un comfort e delle dimensioni maggiori rispetto al segmento precedente. Possono essere sia berline sia monovolume. Es. *Alfa 147*

- **Segmento D:** sono vetture medio-superiori, simili a quelle del segmento C ma le dimensioni e il comfort sono maggiori. Es. *Fiat Croma*
- **Segmento E:** sono vetture superiori, con ottime prestazioni e comfort eccellente. Possono essere sia berline sia *station wagon*. Es. *Lancia Thesis*

Pertanto per quel che riguarda i segmenti di appartenenza, la loro indicazione non è troppo di aiuto per quanto riguarda lo studio dell'*handling* del veicolo. Difatti, come visto, in più di un segmento rientrano veicoli di natura diversa, ad esempio berline e *station wagon*, che possono essere equiparati a livello di accessori, comfort e prezzo di vendita, ma che non evidenziano particolari elementi in comune per quel che concerne la dinamica del veicolo.

Per quanto riguarda invece i giudizi la questione è più complessa, ma ha anche una maggiore parvenza di oggettività. Difatti per ogni veicolo, limitatamente alla dinamica laterale, argomento del nostro studio, è assegnato un voto globale.

Su come sia calcolato il voto si rimanda a [6], ci basta per adesso accennare che esso è frutto dell'elaborazione di dati oggettivi ricavabili da prove sperimentali, riuniti all'interno di un algoritmo tale da fornire giudizi in linea con quelli espressi dai collaudatori. Ovviamente la struttura dell'algoritmo è di natura confidenziale, così come l'indicazione dei parametri sperimentali da considerare. Quello che ci è stato fornito, per ogni veicolo, è il voto attribuito ad ognuno dei seguenti indici

- *Steering Wheel Activity* (IAV): si tratta di un parametro di carattere cinematico, considera il lavoro di sterzo necessario a eseguire determinate manovre (tipicamente traiettorie circolari)
- *Quickness in Car Response* (IRV): considera la rapidità di risposta ai comandi
- *Car Feedback Progressiveness* (IPI): considera la prevedibilità del comportamento del veicolo durante le manovre

La media dei voti assegnati ad ognuno dei suddetti indici rappresenta il voto globale (IQL) relativo alla dinamica laterale del veicolo in questione.

Il segmento, il voto assegnato ad ogni indice e il voto globale sono riassunti in Tab. 4.2 In Fig. 4.18 sono riportati i voti sotto forma di istogramma, mentre in Fig. 4.19 si mostrano, per ogni indice, i voti standardizzati ($\mu = 0$, $\sigma^2 = 1$), in maniera tale da poter operare un confronto sia in termini assoluti, sia in termini relativi.

Veic	Segmento	IAV	IRV	IPI	IQL
1	C	7.6	8.2	6.4	7.4
2	A	7.3	5.5	3.2	5.5
3	C	8.7	8.3	6.6	7.9
4	B	7.1	5.9	4.3	5.8
5	C	8.3	9.7	6.5	8.2
6	D	7.1	9.0	8.4	8.2
7	D	8.6	9.1	7.1	8.5
8	D	9.3	9.5	7.6	8.8

Tabella 4.2: Voti

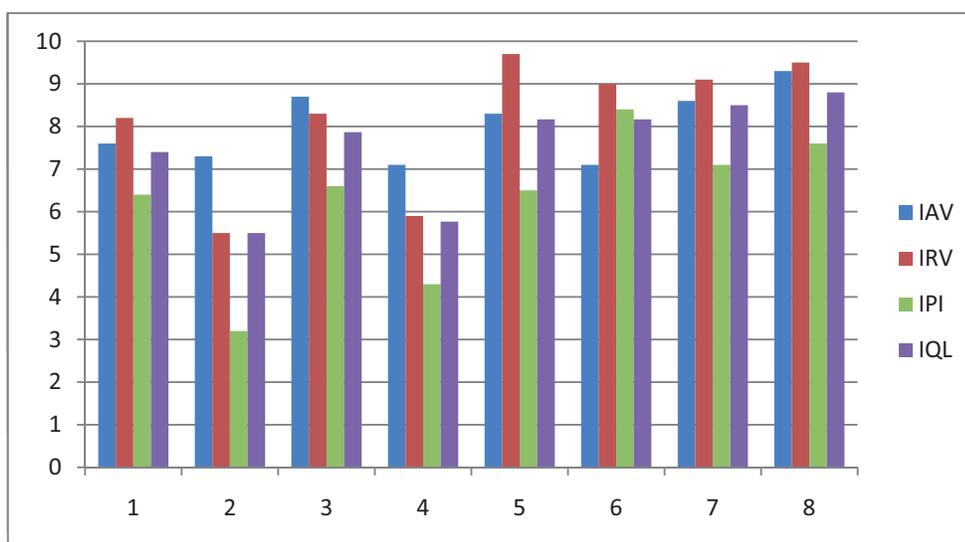


Figura 4.18: Voti

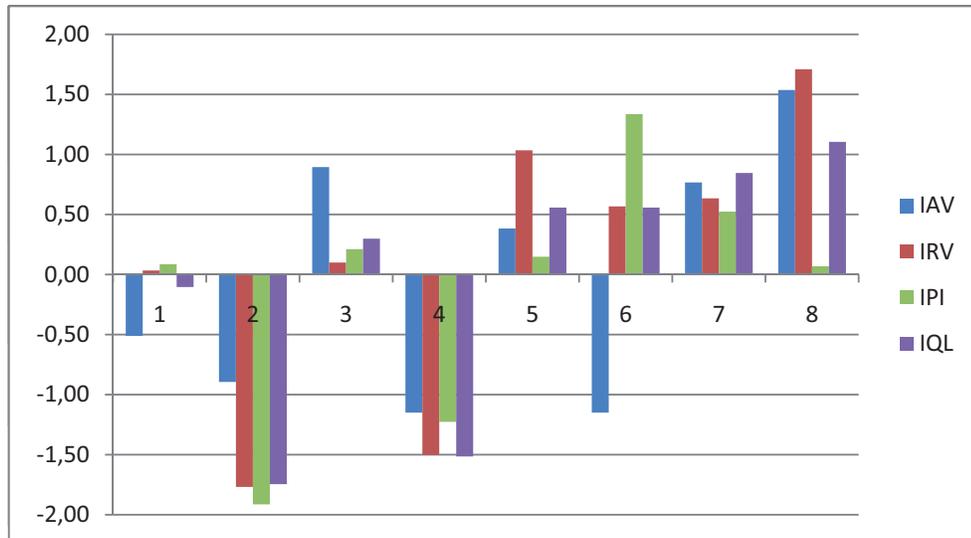


Figura 4.19: Voti standardizzati

Si ritiene importante sottolineare fin da subito come anche il voto assegnato ai singoli indici sia frutto dell'elaborazione e della ponderazione di molti parametri, per cui detti dati non devono essere letti in maniera assoluta, ma si deve cercare di estrarre da essi indicazioni di tendenza. Solo a titolo di esempio si vuol far notare che il giudizio globale del *Veicolo 6* è molto buono e, senza avere a disposizione i voti dei singoli indici, potremmo essere erroneamente portati a credere che si abbiano valutazioni positive per ognuno di essi. In realtà, come mostrato in Fig. 4.19, il giudizio globale per questo veicolo è frutto di valutazioni pessime da una parte (IAV) e ottime dall'altra (IPI).

Capitolo 5

Elaborazione dati

Si passa ora ad applicare la teoria vista ai dati elencati nel capitolo precedente, al fine di valutare eventuali elementi comuni tra l'analisi del sistema linearizzato e i giudizi frutto di prove sperimentali. Il fine del lavoro non è costruire una metrica da adottare per la valutazione del veicolo ma, in maniera più obiettiva, capire i legami tra le caratteristiche costruttive di un veicolo, i coefficienti caratteristici e la risposta dinamica dello stesso.

5.1 Gradienti di assetto e di curvatura

Per i modelli monotraccia non è difficile calcolare il valore dei gradienti di assetto e di curvatura. Il loro andamento può essere ricavato o dalla caratteristica dell'assale o attraverso manovre *ad hoc*. Per verificare l'equivalenza dei due metodi si è proceduto parallelamente, per poi verificare che gli andamenti ottenuti sono effettivamente gli stessi.

Per poter analizzare meglio la struttura di queste funzioni è utile esprimerle supponendo nota la caratteristica degli assali; più nello specifico è utile conoscere gli andamenti delle rigidzze di deriva generalizzate in funzione dell'accelerazione laterale, $\Phi_1(\tilde{a}_y)$, $\Phi_2(\tilde{a}_y)$. Si ha pertanto

$$\begin{aligned}\beta_\delta &= \tau \frac{a_2 + \chi a_1}{a_1 + a_2} \\ \rho_\delta &= \tau \frac{1 - \chi}{a_1 + a_2} \\ \beta_y(\tilde{a}_y) &= -\frac{m}{(a_1 + a_2)^2} \frac{\Phi_1(\tilde{a}_y)a_1^2 + \Phi_2(\tilde{a}_y)a_2^2}{\Phi_1(\tilde{a}_y)\Phi_2(\tilde{a}_y)} \\ \rho_y(\tilde{a}_y) &= -\frac{m}{(a_1 + a_2)^2} \frac{\Phi_2(\tilde{a}_y)a_2 - \Phi_1(\tilde{a}_y)a_1}{\Phi_1(\tilde{a}_y)\Phi_2(\tilde{a}_y)}\end{aligned}\tag{5.1}$$

In Fig. 5.1 e Fig. 5.2 sono riportati i valori delle derivate cinematiche β_δ e ρ_δ per gli otto veicoli considerati. La loro espressione in funzione dei parametri costruttivi del veicolo fa intendere che il loro valore è strettamente legato alla cinematica di sterzo, ossia quanto più questo sarà elevato tanto più il veicolo sarà sensibile ai comandi. C'è però da sottolineare che, al contrario di ciò cui saremmo portati a pensare, non è solo il valore del rapporto di sterzo (e dell'eventuale ripartizione di sterzatura al posteriore) a condizionarne l'andamento, visto che compare a denominatore di tutte e due le espressioni il passo del veicolo.

Altra importante osservazione nasce dal confronto di questi valori con i giudizi relativi alla *Steering Wheel Activity*(IAV) riportati in Fig. 4.18-4.19: si verifica infatti che il *Veicolo 3*, il *Veicolo 7* e il *Veicolo 8* presentano un buon giudizio in questa sezione hanno elevati valori di β_δ e ρ_δ , mentre il *Veicolo 6*, che ha un giudizio IAV negativo, presenta valori delle derivate cinematiche bassi.

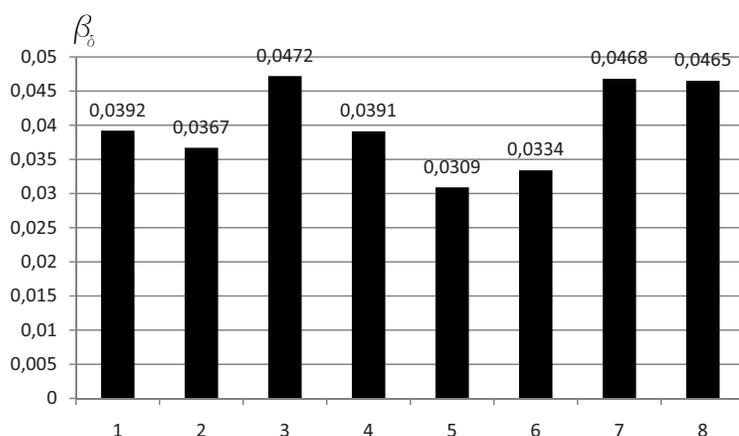


Figura 5.1: Derivata cinematica β_δ

Certamente si evidenzia fin da subito, e resterà vero anche nel seguito, che la variabile di stato su cui risulta più facile fare considerazioni è ρ , poiché si ha facilmente un'idea di cosa rappresenti la curvatura di una traiettoria, mentre per quel che riguarda β risulta più difficile associare un giudizio connesso alla caratteristica del veicolo di mettere più o meno il naso dentro alla curva, come mostrato in Fig. 5.3 [13, p. 173].

Le derivate dinamiche sono funzione dell'accelerazione laterale a regime \tilde{a}_y , per cui vanno rappresentate sotto forma di grafici

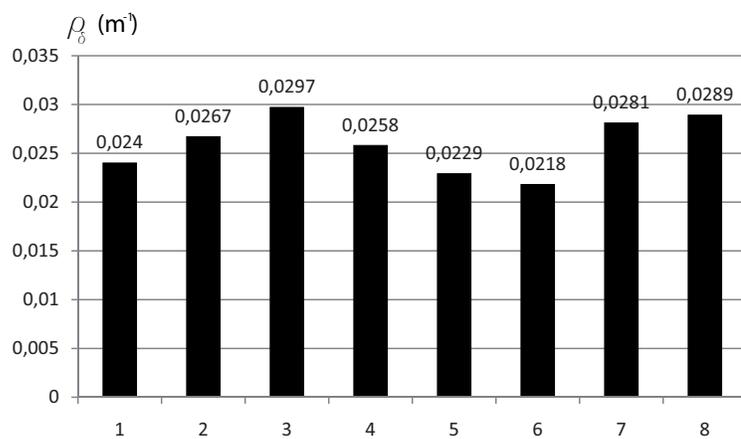


Figura 5.2: Derivata cinematica ρ_δ

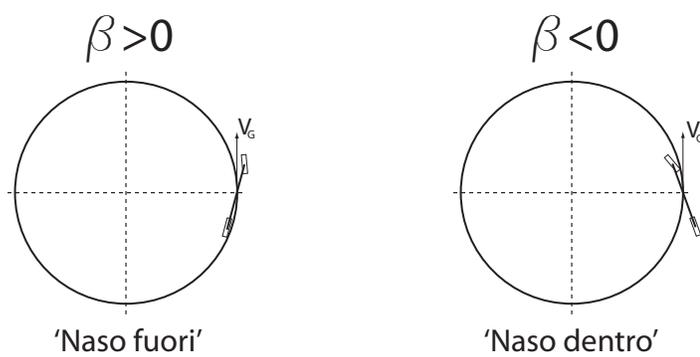


Figura 5.3: Angolo di assetto β

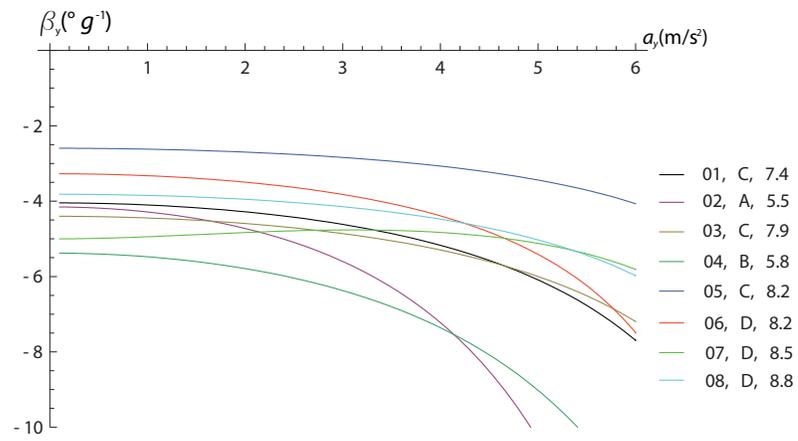


Figura 5.4: Derivata dinamica β_y

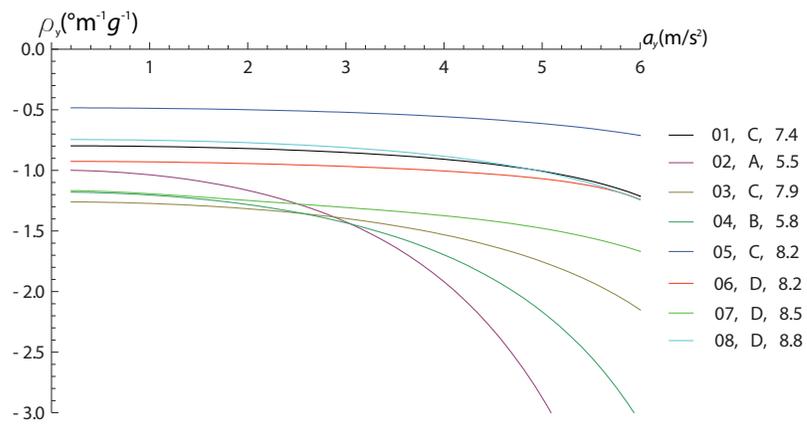


Figura 5.5: Derivata dinamica ρ_y

Gli andamenti delle derivate dinamiche evidenziano subito quali sono i veicoli che hanno un giudizio negativo in tutti e tre gli indici considerati: il *Veicolo 2* e il *Veicolo 4*. Si nota che per valori di accelerazione laterale elevati il valore delle derivate dinamiche decresce velocemente, testimoniando che all'aumentare dell'accelerazione laterale, mantenendo l'angolo di sterzo costante, questi due veicoli tendono a seguire una traiettoria sempre più ampia e al contempo tendono ad inserire sempre più il naso all'interno della curva.

Per quanto concerne gli altri veicoli non si vogliono fornire interpretazioni forzate, ma potrebbero essere ravvisati ulteriori elementi di continuità tra i valori assegnati agli indici e l'andamento delle derivate di stabilità.

Le funzioni risultano simmetriche rispetto all'asse delle ordinate (le accelerazioni laterali negative non sono riportate nei grafici) a testimonianza del fatto che si ha medesimo comportamento sia nelle curve a destra sia in quelle a sinistra. Risulta da evidenze sperimentali che dette funzioni possono essere ben approssimate da polinomi pari di quarto grado, esprimibili in funzione di soli tre parametri

$$\zeta_y(\tilde{a}_y) = a_0 + a_1\tilde{a}_y^2 + a_2\tilde{a}_y^4 \quad (5.2)$$

ovvero ricavabili sperimentalmente una volta note le misurazioni per tre diversi valori di accelerazione laterale.

Interessante risulta invece confrontare le formulazioni delle derivate dinamiche (5.1) con la classica definizione di *gradiente di sottosterzo* K_γ e la meno usata definizione di *gradiente di assetto* K_β [13, p. 174]

$$\begin{aligned} K_\beta(\tilde{a}_y) &= \frac{m}{(a_1 + a_2)^2} \frac{\Phi_1(\tilde{a}_y)a_1^2 + \Phi_2(\tilde{a}_y)a_2^2}{\Phi_1(\tilde{a}_y)\Phi_2(\tilde{a}_y)} = -\beta_y(\tilde{a}_y) \\ K_\gamma(\tilde{a}_y) &= \frac{m}{(a_1 + a_2)} \frac{\Phi_2(\tilde{a}_y)a_2 - \Phi_1(\tilde{a}_y)a_1}{\Phi_1(\tilde{a}_y)\Phi_2(\tilde{a}_y)} = -(a_1 + a_2)\rho_y(\tilde{a}_y) \end{aligned} \quad (5.3)$$

Si nota che la definizione di derivata dinamica di assetto è l'opposto di quella di gradiente di assetto, mentre la derivata dinamica di curvatura risulta pari al famoso gradiente di sottosterzo, cambiato di segno e moltiplicato per il passo. Questa differenza deriva direttamente dalla scelta delle variabili iniziali: si è infatti preferito considerare la curvatura (ρ) anziché l'angolo di Ackermann (γ), appunto per evitare di inserire all'interno della definizione delle variabili il passo del veicolo.

La differenza nel segno rispetto alle definizioni classiche, che riguarda tutte e due le derivate dinamiche, deriva invece dalla definizione classica stessa di gradiente di assetto e di sottosterzo

$$\begin{aligned} K_\beta &= \frac{d(\beta_0 - \beta_p)}{d\tilde{a}_y} \\ K_\gamma &= \frac{d(\gamma_0 - \gamma_p)}{d\tilde{a}_y} \end{aligned} \quad (5.4)$$

dove si è voluto riferire l'angolo di assetto e l'angolo di Ackermann reali a quelli che si avrebbero per un veicolo cinematico [13, p. 132] . Come dimostrato in (guig p 175) per manovre ad angolo volante costante si ha

$$\begin{aligned} K_\beta &= \frac{d(-\beta_p)}{d\tilde{a}_y} \\ K_\gamma &= \frac{d(-\gamma_p)}{d\tilde{a}_y} \end{aligned} \quad (5.5)$$

dalle quali risulta evidente il motivo dell'inversione del segno.

Per quanto riguarda il segno delle due derivate risulta evidente che, all'interno del ramo crescente, e quindi stabile, della caratteristica degli assali si ha $\beta_y(\tilde{a}_y) < 0 \forall \tilde{a}_y$, mentre, rifacendosi alle classiche definizioni di veicolo sovra-sottosterzante, si ha

- veicolo sovrasterzante se $\rho_y(\tilde{a}_y) > 0$
- veicolo neutro se $\rho_y(\tilde{a}_y) = 0$
- veicolo sottosterzante se $\rho_y(\tilde{a}_y) < 0$

che in funzione delle caratteristiche degli assali, sempre considerando il ramo positivo delle stesse, per il modello monotraccia divengono

- veicolo sovrasterzante se $\Phi_2(\tilde{a}_y)a_2 - \Phi_1(\tilde{a}_y)a_1 < 0$
- veicolo neutro se $\Phi_2(\tilde{a}_y)a_2 - \Phi_1(\tilde{a}_y)a_1 = 0$
- veicolo sottosterzante se $\Phi_2(\tilde{a}_y)a_2 - \Phi_1(\tilde{a}_y)a_1 > 0$

5.2 Derivate di stabilità

Noti i gradienti di assetto e di curvatura e le equazioni di congruenza del veicolo è possibile ricavare le derivate di stabilità da utilizzare all'interno del sistema

$$\begin{aligned} mu_a \dot{\beta} &= Y_\beta \beta_t + (Y_\rho - mu_a^2) \rho_t + Y_\delta \delta_{vt} \\ Ju_a \dot{\rho} &= N_\beta \beta_t + N_\rho \rho_t + N_\delta \delta_{vt} \end{aligned} \quad (5.6)$$

L'espressione delle derivate di stabilità in funzione dei parametri costruttivi del veicolo risulta

$$Y_\beta = -(\Phi_1 + \Phi_2) \quad Y_\rho = -\Phi_1 a_1 + \Phi_2 a_2 \quad (5.7)$$

$$N_\beta = -\Phi_1 a_1 + \Phi_2 a_2 \quad N_\rho = -\Phi_1 a_1^2 - \Phi_2 a_2^2 \quad (5.8)$$

$$Y_\delta = \tau(\Phi_1 + \chi \Phi_2) \quad N_\delta = \tau(\Phi_1 a_1 - \chi \Phi_2 a_2) \quad (5.9)$$

Pare opportuno presentare l'andamento delle derivate di stabilità, ma soprattutto è importante esprimerle dopo averle relativizzate rispetto alla massa m e al momento di inerzia J , in maniera tale da leggere il loro contributo non più in termini di forze o momenti ma in termini di accelerazioni laterali e accelerazioni angolari

$$\begin{aligned} u_a \dot{\beta} &= \frac{Y_\beta}{m} \beta_t + \left(\frac{Y_\rho}{m} - u_a^2 \right) \rho_t + \frac{Y_\delta}{m} \delta_{vt} \\ u_a \dot{\rho} &= \frac{N_\beta}{J} \beta_t + \frac{N_\rho}{J} \rho_t + \frac{N_\delta}{J} \delta_{vt} \end{aligned} \quad (5.10)$$

Dall'analisi dell'andamento delle derivate di stabilità si nota come i veicoli tendono a stratificarsi a seconda del segmento di appartenenza: si deve però prestare attenzione al fatto che, come già anticipato, i contributi in termini di forza relativi a variazioni dello stato del sistema sono poco indicativi, poiché per i veicoli di segmenti bassi si avranno forze o momenti non elevati a fronte però di ridotti valori di massa e momento di inerzia.

Quello che intanto si può considerare è il segno delle derivate, che nei casi in analisi risulta

- Y_β e N_ρ sono negativi e tendenzialmente decrescenti in modulo al crescere di \tilde{a}_y . Ciò significa che perturbazioni di una variabile sono compensate da un effetto di richiamo nei confronti della stessa, effetto che però decresce all'aumentare dell'accelerazione laterale

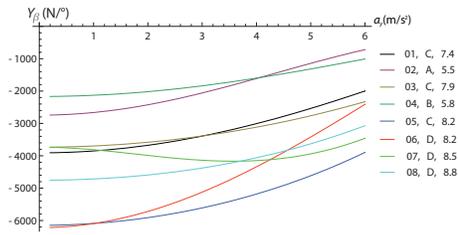


Figura 5.6: Y_β

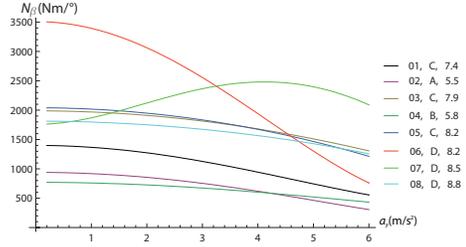


Figura 5.7: N_β

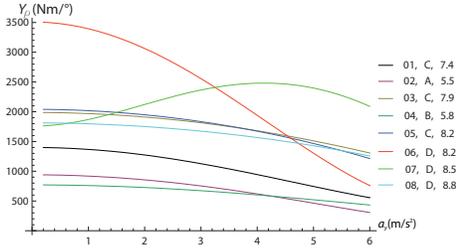


Figura 5.8: Y_ρ

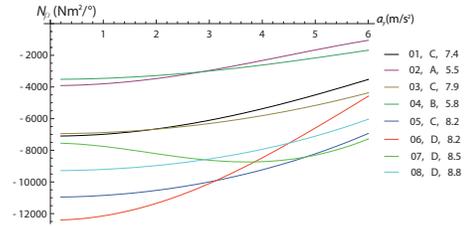


Figura 5.9: N_ρ

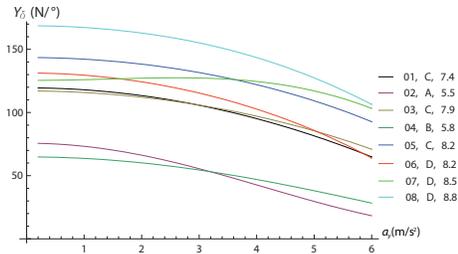


Figura 5.10: Y_δ

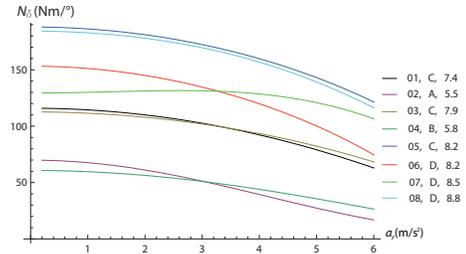


Figura 5.11: N_δ

- Y_ρ e N_β sono positive e tendenzialmente decrescenti al crescere di \tilde{a}_y . Si avrà pertanto un effetto di mutua eccitazione tra le due variabili di stato: una perturbazione di β produrrà un'alterazione nella stessa direzione su ρ e viceversa. Anche in questo caso l'effetto è più marcato per valori di \tilde{a}_y bassi.
- Y_δ e N_δ sono positive e tendenzialmente decrescenti al crescere di \tilde{a}_y . Si avrà perciò, come è logico aspettarsi, in risposta a una perturbazione dei comandi una variazione dello stato nella stessa direzione, decrescente all'aumentare dell'accelerazione laterale.

Prestando attenzione alle equazioni (5.7) si verifica presto che, nel tratto ascendente, e quindi stabile, delle caratteristiche degli assali, i valori di Y_β e N_ρ rimangono sempre negativi, così come sono sempre positivi i valori di Y_δ

e N_δ (entro valori di *chi* ragionevoli).

Quello che però è interessante sono le espressioni delle derivate miste Y_ρ e N_β che hanno una stretta parentela con la definizione classica di veicolo sovra-sottosterzante. Si verifica infatti che

- veicolo sovrasterzante se $Y_\rho = N_\beta < 0$
- veicolo neutro se $Y_\rho = N_\beta = 0$
- veicolo sottosterzante se $Y_\rho = N_\beta > 0$

L'uguaglianza tra Y_ρ e N_β si è visto essere valida solo per il modello monotraccia, mentre per modelli di veicolo completi ciò non è più vero, come mostrato nel paragrafo 3.6.

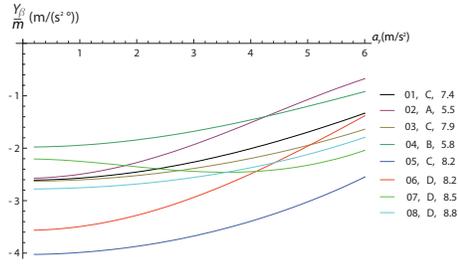
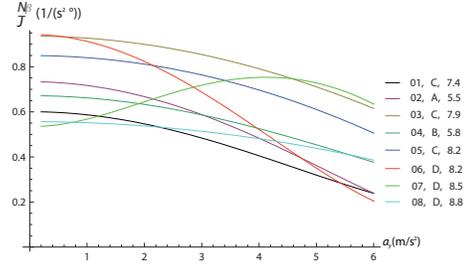
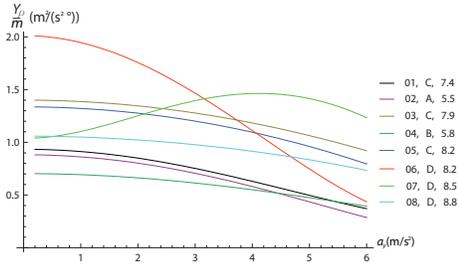
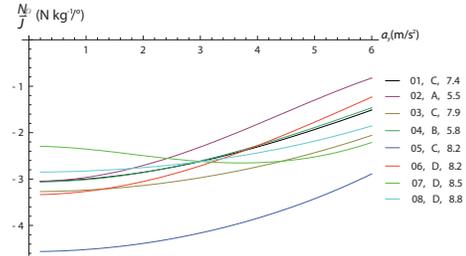
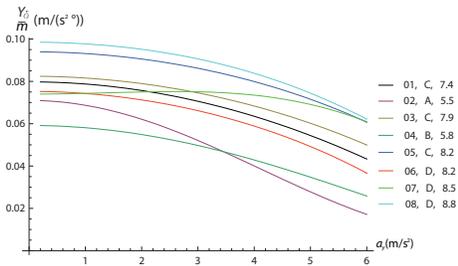
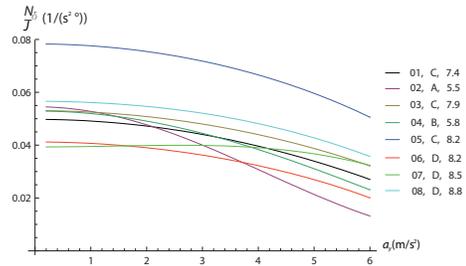
Per una trattazione generale è utile rifarsi pertanto alle definizioni fondamentali, secondo le quali il sistema risulta instabile nel momento in cui la parte reale di un autovalore risulta positiva, condiziona che si verifica se $\det \mathbf{A} < 0$, ovvero quando

$$n_2(u_a, \tilde{a}_y, \delta_{va}) = \frac{1}{Jmu_a^2} (Y_\beta N_\rho - (Y_\rho - mu_a^2) N_\beta) < 0 \quad (5.11)$$

abbandonando così la definizione di veicolo sovra-sottosterzante e limitandosi a studiare la stabilità di un sistema meccanico.

Discorso leggermente a parte merita il *Veicolo 7* che presenta derivate di stabilità non monotone. Questo comportamento non deve stupire in quanto le derivate di stabilità sono combinazioni lineari delle rigidezze di deriva dei pneumatici (5.7) e la crescita [decrescenza] delle derivate di stabilità è condizionata quindi dalla derivata della rigidezza di deriva degli assali. Analizzando le caratteristiche in Fig. 4.15 si verifica che la concavità delle curve, per bassi valori di angoli di deriva (e quindi di accelerazioni laterali), è rivolta verso l'alto, cioè la derivata della rigidezza di deriva in questo primo tratto è positiva, fattore che condiziona appunto la crescita/decrescenza delle derivate di stabilità.

Passando ora a considerare le derivate di stabilità relativizzate si ha un risultato apparentemente meno chiaro. Le derivate di stabilità dei vari veicoli non si strutturano in maniera tale da evidenziare delle demarcazioni evidenti tra i migliori e i peggiori. Come però si è visto nella parte introduttiva, le caratteristiche fisiche del sistema (frequenza propria, guadagno a regime, smorzamento ecc.) sono legate alle derivate di stabilità da relazioni complesse e la semplice analisi delle derivate di stabilità rappresenterebbe un approccio troppo riduttivo.


 Figura 5.12: Y_β/m

 Figura 5.13: N_β/J

 Figura 5.14: Y_ρ/m

 Figura 5.15: N_ρ/J

 Figura 5.16: Y_δ/m

 Figura 5.17: N_δ/J

5.3 Coefficienti caratteristici

Come descritto in (1.4) il sistema può essere analizzato anche sotto forma di sistema meccanico di due equazioni di secondo grado con medesima parte omogenea e differente forzante.

$$\begin{aligned}\ddot{\beta} + n_1\dot{\beta} + n_2\beta_t &= n_3\delta_v + n_4\dot{\delta}_v \\ \ddot{\rho} + n_1\dot{\rho} + n_2\rho_t &= n_5\delta_v + n_6\dot{\delta}_v\end{aligned}\quad (5.12)$$

I coefficienti caratteristici delle due equazioni sono legati alle derivate di stabilità dalle relazioni (5.13). La complicazione che si aggiunge è legata al

fatto che i coefficienti caratteristici non sono funzione solo dell'accelerazione laterale ma comprendono al loro interno anche la velocità di avanzamento u_a , ragion per cui risulta complesso rappresentare graficamente l'andamento dei coefficienti in funzione delle variabili indipendenti per tutti quanti i veicoli.

$$\begin{aligned}
 n_1(u_a, \tilde{a}_y) &= -\frac{1}{u_a} \left(\frac{N_\rho}{J} + \frac{Y_\beta}{m} \right) \\
 n_2(u_a, \tilde{a}_y) &= \frac{1}{Jmu_a^2} (Y_\beta N_\rho - (Y_\rho - mu_a^2)N_\beta) \\
 n_3(u_a, \tilde{a}_y) &= \frac{1}{Jmu_a^2} ((Y_\rho - mu_a^2)N_\delta - N_\rho Y_\delta) \\
 n_4(u_a, \tilde{a}_y) &= \frac{Y_\delta}{mu_a} \\
 n_5(u_a, \tilde{a}_y) &= -\frac{1}{Jmu_a^2} (Y_\beta N_\delta - N_\beta Y_\delta) \\
 n_6(u_a, \tilde{a}_y) &= \frac{N_\delta}{Ju_a}
 \end{aligned} \tag{5.13}$$

L'espressione dei coefficienti caratteristici in funzione delle caratteristiche costruttive del veicolo è semplice da ricavare ed è omessa in quanto, fatta eccezione per la stabilità del sistema, non fornisce informazioni immediate nello studio della dinamica del veicolo.

Per quel che riguarda la stabilità è sufficiente ricordare che il sistema è stabile nel momento in cui $\text{tr}\mathbf{A} < 0$ e $\det \mathbf{A} > 0$. Come è possibile verificare

$$\begin{aligned}
 \text{tr}\mathbf{A} &= -n_1(u_a, \tilde{a}_y) \\
 \det \mathbf{A} &= n_2(u_a, \tilde{a}_y)
 \end{aligned} \tag{5.14}$$

la traccia risulta sempre negativa, mentre il determinante, come nell'analisi classica, risulta negativo qualora

$$u_a > u_{acr} = \sqrt{\frac{1}{\rho_y}} = \sqrt{\frac{\Phi_1 \Phi_2 (a_1 + a_2)^2}{m(\Phi_1 a_1 - \Phi_2 a_2)}} \tag{5.15}$$

velocità critica che assume valori reale soltanto se

$$Y_\rho = N_\beta = \Phi_2 a_2 - \Phi_1 a_1 > 0 \tag{5.16}$$

Molto interessante è anche esprimere $\det \mathbf{A}$, e quindi studiare la stabilità del sistema, supponendo note le equazioni di congruenza, e quindi le derivate

cinematiche, ma evitando di esprimere le derivate dinamiche in funzione della caratteristica degli assali.

$$\det \mathbf{A} = \frac{ma_1a_2}{Ju^2\rho_y^2} \frac{1 - u^2\rho_y}{\left(\frac{\beta_y}{\rho_y} + a_1\right) \left(\frac{\beta_y}{\rho_y} - a_2\right)} \quad (5.17)$$

Per studiare la stabilità del sistema è necessario, come visto, studiare il segno di $\det \mathbf{A}$.

Veicoli sottosterzanti, $\rho_y < 0$ Si può avere instabilità anche per veicoli sottosterzanti, sotto la condizione

$$\frac{\beta_y}{\rho_y} < a_2 \quad (5.18)$$

Veicoli sovrasterzanti, $\rho_y > 0$ Sono instabili sotto le condizioni

$$\begin{aligned} u < \sqrt{\frac{1}{\rho_y}} \quad \cup \quad -a_1 < \frac{\beta_y}{\rho_y} < a_2 \\ u > \sqrt{\frac{1}{\rho_y}} \quad \cup \quad \frac{\beta_y}{\rho_y} > a_2 \quad \vee \quad \frac{\beta_y}{\rho_y} < a_1 \end{aligned} \quad (5.19)$$

Con questo tipo di approccio, stante la validità delle equazioni di congruenza del veicolo, è possibile verificare che la condizione $\rho_y > 0$ non è sempre fenomeno di instabilità del veicolo e quindi si deve procedere con particolare attenzione nel momento in cui si usa la definizione di gradiente di sottosterzo.

Ovviamente se ρ_y è espresso in funzione delle rigidzze di deriva generalizzate si torna ad avere instabilità se e solo se $\Phi_2a_2 - \Phi_1a_1 < 0$, cioè se $\rho_y(\Phi_1, \Phi_2) < 0$.

5.4 Trasformata di Laplace

Come detto i coefficienti caratteristici non sono adatti a fornire indicazioni immediate riguardo la risposta dinamica del veicolo, così come non lo sono le derivate di stabilità, se non in analisi molto semplificative in cui si considerino singole perturbazioni dello stato, utili a livello teorico ma certamente inconcepibili in campo sperimentale.

L'idea certo non è nuova, si tratta di un sistema meccanico, e l'analisi attraverso la trasformata di Laplace è prassi comune per sistemi di questo tipo. Si deve però tener conto che l'approccio comunemente utilizzato tende a considerare il veicolo come un sistema fisico d'eccezione, per il quale si ha una certa renitenza nel condurre un'analisi semplice, come d'uso per altri sistemi. Certamente uno studio dettagliato che tenga conto della meccanica del veicolo e delle valutazioni sperimentali è in grado di fornire risultati dettagliati per i singoli casi considerati, ma un approccio generale, seppur semplificativo, può fornire alcune indicazioni in più.

Si deve tener conto però che tutte le relazioni espresse riguardo i gradienti di assetto e di curvatura, le derivate di stabilità, i coefficienti caratteristici sono indispensabili per giungere a una formulazione corretta, cui poter applicare l'analisi della trasformata di Laplace. Appunto per mostrare come lo studio non sia unicamente teorico, si è mostrato come sia possibile ricavare le grandezze di cui sopra attraverso approcci sperimentali, mentre adesso è il momento di prendere in considerazione la predizione e il controllo delle risposte sperimentali.

Come mostrato nel paragrafo 1.5 le funzioni di trasferimento associate al sistema di equazioni risultano

$$\begin{aligned} G_{\beta}(s, u_a, \tilde{a}_y, \delta_{va}) &= \frac{\beta_t(s)}{\delta_{vt}(s)} = \frac{n_4 s + n_3}{s^2 + n_1 s + n_2} \\ G_{\rho}(s, u_a, \tilde{a}_y, \delta_{va}) &= \frac{\rho_t(s)}{\delta_{vt}(s)} = \frac{n_6 s + n_5}{s^2 + n_1 s + n_2} \end{aligned} \quad (5.20)$$

che possono essere riscritte considerando la forma canonica o forma di Bode

$$\begin{aligned} G_{\beta}(s, u_a, \tilde{a}_y, \delta_{va}) &= \frac{\beta_t(s)}{\delta_{vt}(s)} = \frac{n_3}{n_2} \frac{\frac{n_4}{n_3} s + 1}{\frac{s^2}{n_2} + \frac{n_1}{n_2} s + 1} \\ G_{\rho}(s, u_a, \tilde{a}_y, \delta_{va}) &= \frac{\rho_t(s)}{\delta_{vt}(s)} = \frac{n_5}{n_2} \frac{\frac{n_6}{n_5} s + 1}{\frac{s^2}{n_2} + \frac{n_1}{n_2} s + 1} \end{aligned} \quad (5.21)$$

Solitamente si prende in considerazione la risposta al gradino del sistema e la risposta armonica. Si vuole precisare che anche a livello sperimentale le prove effettuate non si discostano molto da queste, difatti come descritto in [6], è prassi effettuare tre tipi di manovre per acquisire dati utili a inquadrare un veicolo

- *Steady state circular test*, si tratta di una prova condotta in condizioni di equilibrio nella quale il pilota fa seguire all'auto una traiettoria circolare di raggio assegnato, aumentando gradualmente la velocità
- *Step steering wheel input*, è il classico colpo di sterzo a gradino
- *Double lane change*, si tratta di simulare una manovra di sorpasso a velocità assegnata, facendo seguire al veicolo una precisa traiettoria

Al di là dei dettagli delle prove, risulta evidente come la prima sia una manovra eseguita in condizioni di regime, che nell'approccio tradizionale è utile per analizzare il legame tra angolo di sterzo, accelerazione laterale e curvatura della traiettoria riassunti poi nei gradienti di sottosterzo, per cui facilmente collegabile alle indicazioni di regime legate alle trasformate. La seconda manovra coincide con la simulazione del colpo di sterzo a gradino, mentre la terza può essere analizzata a partire dalla risposta armonica del sistema, considerando la decomposizione secondo Fourier del segnale assegnato all'angolo volante.

5.4.1 Guadagno a regime

Prima di considerare le manovre di sopra descritte, ci pare utile considerare in primo luogo il legame che sussiste tra la variazione dell'angolo di sterzo e il valore delle variabili di stato a regime, considerato all'interno del sistema linearizzato. Come si può immaginare questo valore non dipende dal tipo di manovra effettuata, ma solo dalla variazione dell'angolo volante tra lo stato iniziale e quello finale del sistema.

Considerando la variazione dell'angolo di assetto β_t rispetto a uno stato di riferimento si ha

$$K_\beta(u_a, \tilde{a}_y) = \frac{n_3}{n_2} = \frac{\tau}{a_1 + a_2} \left(a_2 - a_1 \frac{\chi}{u_a^2 \left(\rho_y - \frac{1}{u^2} \right)} - \frac{\beta_y - a_1 \rho_y \chi}{\rho_y - \frac{1}{u^2}} \right) \quad (5.22)$$

che agli estremi del campo delle velocità assume valori

$$\begin{aligned} \lim_{u_a \rightarrow 0} K_\beta &= \tau \frac{a_2 + a_1 \chi}{a_1 + a_2} = \beta_\delta \\ \lim_{u_a \rightarrow +\infty} K_\beta(\tilde{a}_y) &= \frac{\tau}{a_1 + a_2} \frac{a_2 \rho_y - \beta_y + \chi(a_1 \rho_y + \beta_y)}{\rho_y} \end{aligned} \quad (5.23)$$

Il valore limite di $K_\beta(\tilde{a}_y)$ per $u_a \rightarrow +\infty$ può essere scritto anche in un'altra forma, di comprensione più immediata per quanto riguarda la determinazione del segno. La disuguaglianza (5.24) è verificata per

$$\lim_{u_a \rightarrow +\infty} K_\beta(\tilde{a}_y) = \frac{\tau}{a_1 + a_2} \left((a_2 + \chi a_1) - \frac{\beta_y}{\rho_y} (1 - \chi) \right) > 0 \quad (5.24)$$

$$\frac{\beta_y}{\rho_y} < \frac{a_2 + \chi a_1}{1 - \chi} \quad (5.25)$$

Importante ricordare che per veicoli sovrasterzanti esiste un valore di u_a oltre il quale il sistema diventa instabile, pertanto non ha senso per questi veicoli calcolare il limite per $u_a \rightarrow +\infty$ di grandezze raggiungibili solo da veicoli stabili.

Può risultare interessante chiedersi anche per quali valori di u_a si ha $K_\beta(u_a, \tilde{a}_y) = 0$, ossia, immaginando di tenere fisso il valore dell'accelerazione laterale, il veicolo assume, alla fine di una manovra, lo stesso valore di angolo di assetto che aveva all'inizio della stessa.

$$K_\beta = 0, \quad u_\beta(\tilde{a}_y) = \sqrt{\frac{a_2 + \chi a_1}{(a_2 + \chi a_1)\rho_y - \beta_y(1 - \chi)}} \quad (5.26)$$

Sempre limitando l'analisi ai veicoli sottosterzanti si verifica che u_β assume valori reali a patto che

$$\frac{\beta_y}{\rho_y} > \frac{a_2 + \chi a_1}{1 - \chi} \quad (5.27)$$

Passando a considerare l'espressione dei gradienti di assetto e di curvatura si ottengono i valori delle grandezze fin qui elencate in funzione delle rigidzze di deriva generalizzate, oltre che dei semipassi e dei rapporti di sterzo. L'espressione del guadagno risulta articolata e poco intuitiva, risultano invece interessanti le considerazioni agli estremi del campo delle velocità e quelle relative alla u_β .

Per quanto riguarda il valore di K_β calcolato per velocità prossime a zero si ottiene la stessa espressione già vista in (5.23), risultato che non deve stupire in quanto si tratta di un legame puramente cinematico. Per quanto riguarda invece il guadagno alle alte velocità si ha

$$\lim_{u_a \rightarrow +\infty} K_\beta(\tilde{a}_y) = \frac{\tau\chi\Phi_2 a_2 - \tau\Phi_1 a_1}{\Phi_2 a_2 - \Phi_1 a_1} \quad (5.28)$$

che, considerando il tratto crescente delle caratteristiche degli assali e valori ragionevoli di χ , risulta sempre negativo (come già detto per i veicoli sovrasterzanti non ha senso considerarlo).

I valori di velocità per cui è risulta nullo il guadagno sono individuati dalla relazione

$$K_\beta = 0, \quad u_\beta(\tilde{a}_y) = \sqrt{\frac{\Phi_1 \Phi_2 (a_1 + a_2) (a_2 + \chi a_1)}{m(\Phi_1 a_1 - \Phi_2 a_2 \chi)}} \quad (5.29)$$

che per veicoli con sterzata unicamente anteriore risulta indipendente dalla rigidità di deriva anteriore.

Allo stesso modo è possibile considerare l'andamento del guadagno della curvatura della traiettoria a regime.

$$K_\rho = \frac{n_5}{n_2} = \frac{\tau}{a_1 + a_2} \frac{1 - \chi}{u^2 \left(\frac{1}{u^2} - \rho_y \right)} \quad (5.30)$$

Come è lecito aspettarsi assume sempre valori positivi e degenera nel momento in cui

$$u_a > \sqrt{\frac{1}{\rho_y}} \quad (5.31)$$

cioè al di sopra della velocità critica (5.15), evenienza che si verifica solo per veicoli sovrasterzanti.

Per bassi valori di velocità il guadagno è pari al valore della derivata cinematica di curvatura

$$\lim_{u_a \rightarrow 0} K_\rho = \tau \frac{1 - \chi}{a_1 + a_2} = \rho_\delta \quad (5.32)$$

ed al crescere della velocità assume valori sempre più elevati per i veicoli sovrasterzanti, fino al raggiungimento della velocità critica, mentre decresce per veicoli sottosterzanti

$$\lim_{u_a \rightarrow +\infty} K_\rho(\tilde{a}_y) = 0 \quad (5.33)$$

Considerando anche le rigidità di deriva del veicolo, si ha un'espressione del guadagno della curvatura anche in questo caso articolata e poco intuitiva che viene omessa.

5.4.2 Risposta al gradino

L'espressione esplicita della risposta al gradino può essere ottenuta sia in funzione delle derivate di stabilità, sia considerando i gradienti di assetto e curvatura sia includendo anche le rigidzze di deriva. Non è però questo lo scopo della trattazione, difatti la risposta al gradino, come a qualsiasi altro comando, può essere ottenuta talvolta per via analitica e più spesso per via numerica per tutti i tipi di sistema, molto più complessi e precisi di quello in analisi.

Quello che però si vuole mettere in evidenza è il ruolo che i coefficienti caratteristici, e conseguentemente le derivate di stabilità e i gradienti di assetto e curvatura, giocano all'interno di un'analisi che consideri gli zeri, i poli e il guadagno delle funzioni di trasferimento (5.21). In letteratura [3] sono reperibili molte informazioni sul ruolo di poli, zeri e guadagno riguardo, nella fattispecie, la risposta al gradino.

Si consideri inizialmente un sistema meccanico classico, con forzante di ordine zero

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_n\dot{x} + \omega_n^2x = h_3H(t) \quad (5.34)$$

dove $H(t)$ è la funzione gradino di Heaviside definita come

$$H(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < 0 \\ 1 & \text{se } t > 0 \end{cases} \quad (5.35)$$

Assumendo $x(0^-) = \dot{x}(0) = 0$, la risposta al gradino unitario è

$$x(t) = \frac{h_3}{\omega_n^2} \left[1 - e^{-\zeta\omega_n t} \left(\cos \omega_s t + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin \omega_s t \right) \right] \quad (5.36)$$

In Fig. 5.18 è riportato il grafico della risposta al gradino che appare come un'oscillazione smorzata di periodo $2\pi/\omega_s$. Inoltre è possibile acquisire informazioni riguardo lo smorzamento del sistema considerando il decremento logaritmico

$$\ln \frac{x(t^*) - \frac{1}{\omega_n^2}}{x(t^* + T_s) - \frac{1}{\omega_n^2}} = \frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \quad (5.37)$$

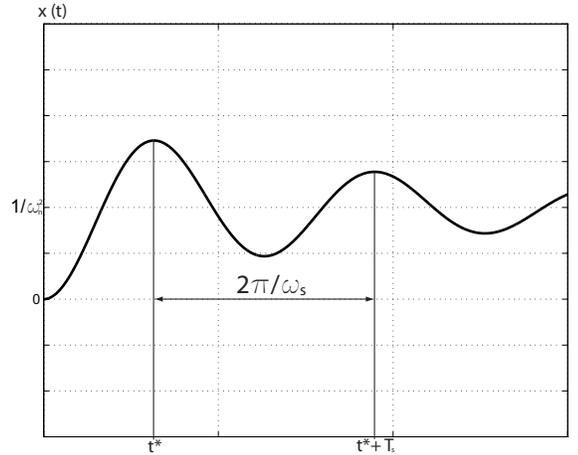


Figura 5.18: Risposta al gradino di un sistema meccanico

Passando adesso a considerare un'equazione differenziale che presenti una forzante del primo ordine, come accade nel sistema considerato, per quanto concerne la risposta al gradino si ha

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_n\dot{x} + \omega_n^2x = h_3H(t) + h_4\Delta(t) \quad (5.38)$$

dove la funzione $\Delta(t)$ è la derivata del gradino, detta delta di Dirac.

La soluzione della differenziale, così come proposta in [13, p. 239], risulta

$$x(t) = \frac{h_3}{\omega_n^2} \left[1 - e^{-\zeta\omega_n t} \left(\cos \omega_s t + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin \omega_s t \right) \right] + \frac{h_4}{\omega_s} e^{-\zeta\omega_n t} \sin \omega_s t \quad (5.39)$$

ma può essere riscritta anche come

$$x(t) = \left\{ \frac{h_3}{\omega_n^2} \left[1 - e^{-\zeta\omega_n t} \left(\cos \omega_s t + \left(\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} + \frac{h_4 \omega_n^2}{h_3 \omega_s} \right) \sin \omega_s t \right) \right] \right\} \quad (5.40)$$

che è un'oscillazione periodica smorzata attorno al valore di regime h_3/ω_n^2 , passante per l'origine con medesima pulsazione e smorzamento dell'equazione (5.36). Pertanto la forzante di primo ordine ha effetto solamente sull'angolo di fase dell'oscillazione. Infatti è possibile scrivere

$$\cos \omega_s t + \left(\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} + \frac{h_4}{h_3} \frac{\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}} \right) \sin \omega_s t = \sin (\omega_s t + \phi) \quad (5.41)$$

$$\phi = \arccos \frac{\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} + \frac{h_4}{h_3} \frac{\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} + \frac{h_4}{h_3} \frac{\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}} \right)^2}} \quad (5.42)$$

verificando perciò che il coefficiente h_4 compare solamente all'interno dell'espressione di ϕ .

Una trattazione di questo tipo giustifica le considerazioni che verranno fatte nel seguito riguardo al ruolo degli zeri della funzione di trasferimento, ma non è certo d'aiuto per interpretare la risposta al gradino in maniera rapida.

Per fare ciò risulta molto più ricca di indicazioni l'analisi della trasformata di Laplace, in maniera particolare il ruolo giocato dagli zeri al suo interno.

Come descritto in 1.5.2 e affrontato in maniera più ampia in [3] [2], gli zeri sono i valori di s per cui risulta nullo il numeratore della funzione di trasferimento. Considerando le variabili di stato β_t e ρ_t si ha

$$Z_\beta(u_a, \tilde{a}_y) = -\frac{n_3}{n_4} \quad Z_\rho(u_a, \tilde{a}_y) = -\frac{n_5}{n_6} \quad (5.43)$$

e, alternativamente, è possibile definire la costante di tempo associata allo zero della funzione di trasferimento come

$$\tau_\beta(u_a, \tilde{a}_y) = -\frac{1}{Z_\beta} = \frac{n_4}{n_3} \quad \tau_\rho(u_a, \tilde{a}_y) = -\frac{1}{Z_\rho} = \frac{n_6}{n_5} \quad (5.44)$$

Si può dimostrare, con riferimento alla Fig. 5.19, che

- $Z > 0 \Rightarrow \tau < 0$ effetto ritardante
- $Z < 0 \Rightarrow \tau > 0$ effetto anticipativo

L'oscillazione ritardata presenta il primo picco discorde rispetto al valore di regime della funzione, con il modulo del valore picco che cresce al crescere di $|\tau|$, mentre il valore di t per cui si verifica decresce.

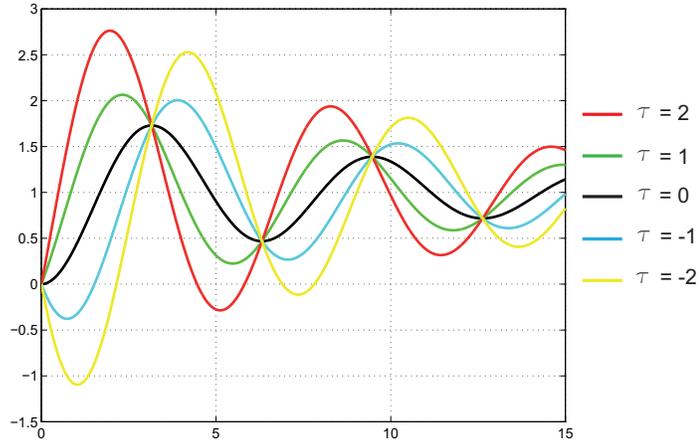


Figura 5.19: Risposta al gradino di un sistema meccanico

L'effetto anticipativo è invece caratterizzato da un primo picco concorde con il valore di regime della funzione, con il modulo del valore picco che cresce al crescere di $|\tau|$, mentre il valore di t per cui si verifica decresce.

Si tratta quindi di studiare il comportamento di $Z_\beta(u_a, \tilde{a}_y)$ e $Z_\rho(u_a, \tilde{a}_y)$ per comprendere quali siano i fattori che condizionano la prontezza di risposta al gradino.

$$Z_\beta = \frac{ma_1a_2 [(-a_2 + a_2u_a^2\rho_y - u_a^2\beta_y) + \chi(-a_1 + a_2u_a^2\rho_y + u_a^2\beta_y)]}{Ju [a_2(-\beta_y + a_2\rho_y) + a_1\chi(-\beta_y - a_1\rho_y)]} \quad (5.45)$$

Si verifica che agli estremi del campo delle velocità si ha

$$\begin{aligned} \lim_{u_a \rightarrow 0} Z_\beta(\tilde{a}_y) &= -\infty \\ \lim_{u_a \rightarrow +\infty} Z_\beta(\tilde{a}_y) &= +\infty \end{aligned} \quad (5.46)$$

per cui esiste un valore per il quale si ha inversione di segno per Z_β

$$Z_\beta = 0, \quad u_\beta(\tilde{a}_y) = \sqrt{\frac{a_2 + \chi a_1}{(a_2 + \chi a_1)\rho_y - \beta_y(1 - \chi)}} \quad (5.47)$$

che coincide con il valore di u_β già incontrato in (1.60).

Per valori di $u_a < u_\beta$ si avrà il primo picco concorde dal valore di regime di β_t , mentre per velocità superiori risulterà discorde.

Considerando le rigidezze di deriva si verifica

$$Z_\beta = \frac{-a_2^2\Phi_2 + a_1mu_a^2 - a_1a_2\Phi_2}{Ju\left(1 + \frac{\Phi_2}{\Phi_1}\chi\right)} - \frac{\chi(a_1^2\Phi_1 + a_2mu_a^2 + a_1a_2\Phi_1)}{Ju\left(\frac{\Phi_1}{\Phi_2} + \chi\right)} \quad (5.48)$$

che il valore di Z_β , nel caso in cui la sterzata posteriore sia nulla ($\chi = 0$), è indipendente dalla rigidezza di deriva anteriore Φ_1 .

Stesso approccio può essere usato per la curvatura ρ_t

$$Z_\rho = -\frac{1 - \chi}{u[(a_2 + \chi a_1)\rho_y - \beta_y(1 - \chi)]} \quad (5.49)$$

dove il valore di Z_ρ risulta negativo, e quindi legato ad un effetto ritardante della risposta, per quasi tutti i veicoli sottosterzanti, sotto la condizione espressa già in (5.26).

In funzione delle rigidezze di deriva si ha un valore di Z_ρ sempre negativo che, nel caso in cui si consideri un veicolo con sterzata unicamente all'anteriore, risulta anch'esso indipendente dal valore della rigidezza anteriore.

$$Z_\rho = -\frac{\Phi_1\Phi_2(a_1 + a_2)(1 - \chi)}{mu(a_1\Phi_1 - a_2\Phi_2\chi)} \quad (5.50)$$

5.4.3 Risposta armonica

Ultimo passaggio prima di analizzare ed elaborare le risposte reali dei veicoli è quello di considerare la risposta armonica e gli effetti che su di essa hanno il guadagno, gli zeri e i poli delle funzioni di trasferimento.

Di grande utilità per analizzare la risposta armonica sono i diagrammi di Bode [3, p. 142], attraverso i quali è possibile studiare l'andamento del guadagno e della fase al variare di frequenza della forzante. Si consideri una forzante sinusoidale di frequenza Ω e ampiezza D

$$\delta_{vt}(t) = D \sin \Omega t \quad (5.51)$$

cui è associata una risposta, sempre armonica e di medesima frequenza,

$$x(t) = X(\Omega) \sin(\Omega t + \Psi(\Omega)) \quad (5.52)$$

in cui è possibile individuare uno sfasamento $\Psi(\Omega)$ e un guadagno $G(\Omega)$

$$G(\Omega) = \frac{X(\Omega)}{D} \quad (5.53)$$

Si tratta di prendere in considerazione le funzioni $G_\beta(j\omega)$ e $G_\rho(j\omega)$ come numero complesso in funzione di ω e calcolarne appunto ampiezza e fase.

Senza scendere nei dettagli di come sia possibile costruire i diagrammi di Bode, si presenta l'andamento di guadagno e sfasamento a seconda che si abbia uno zero positivo o negativo, o a seconda del valore che il polo e gli zeri assumono.

Considerando il caso in cui i poli siano complessi coniugati, cioè le radici del determinante di \mathbf{A} assumano la struttura descritta in (1.36) e (1.37), che dà luogo alla risposta sinusoidale esponenzialmente decrescente, tipica dei sistemi sottosmorzati, e lo zero al numeratore sia reale, si possono avere i seguenti andamenti asintotici dei diagrammi di Bode.

Zero positivo precede polo

Si considera il caso in cui il valore dello zero di $G(j\omega)$ si trovi ad una frequenza inferiore rispetto alla frequenza naturale che caratterizza i poli complessi coniugati. Si ottiene un andamento del diagramma delle ampiezze che ha un picco di risonanza in corrispondenza del valore di ω_n , e valori di guadagno marcatamente differenti al variare della frequenza considerata.

Per quanto riguarda la fase lo zero positivo dà un contributo avente lo stesso verso di quello del poli complessi coniugati.

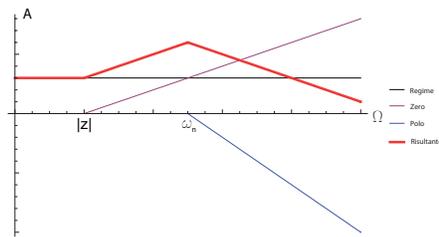


Figura 5.20: Diagramma di Bode asintotico - Ampiezza

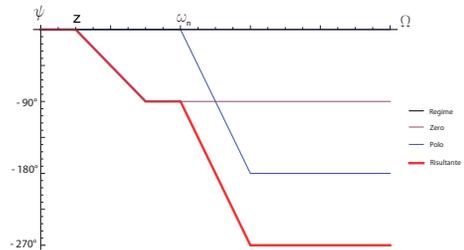


Figura 5.21: Diagramma di Bode asintotico - Fase

Zero negativo precede polo

Nel caso in cui il valore dello zero di $G(j\omega)$ continui a precedere quello della frequenza naturale ma abbia segno negativo, si ha un andamento del diagramma delle ampiezze analogo a quello visto nel caso precedente, mentre per quanto riguarda la fase l'effetto dello zero è di segno opposto rispetto a quello dei poli.

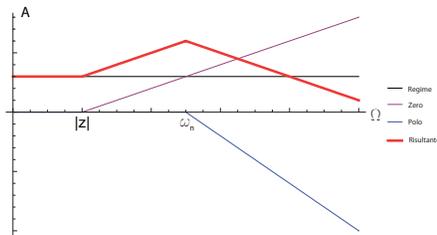


Figura 5.22: Diagramma di Bode asintotico - Ampiezza

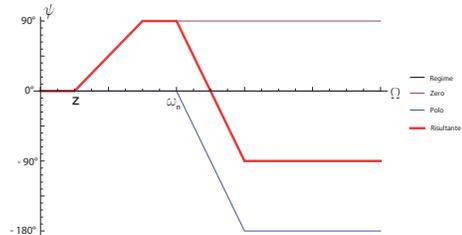


Figura 5.23: Diagramma di Bode asintotico - Fase

Zero positivo segue polo

Se lo zero di $G(j\omega)$ si realizza per un valore di frequenza superiore rispetto al valore della frequenza naturale, si ha un diagramma delle ampiezze senza picco di risonanza, con valori di guadagno che decrescono una volta superato il valore di ω_n . Per quanto riguarda la fase l'influenza dello zero positivo è diretta nella stessa direzione di quella del polo.

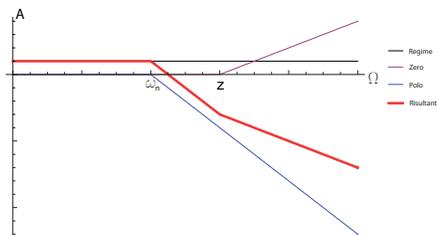


Figura 5.24: Diagramma di Bode asintotico - Ampiezza

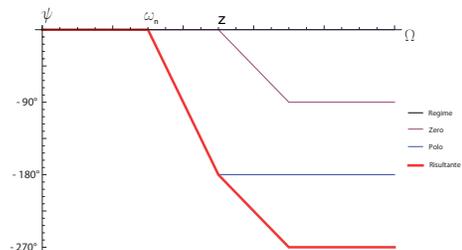


Figura 5.25: Diagramma di Bode asintotico - Fase

Zero negativo segue polo

Infine nel caso in cui lo zero di $G(j\omega)$ segua il valore della frequenza naturale ma abbia segno negativo, si ha un diagramma delle ampiezze senza risonanza,

e un diagramma delle fasi in cui l'effetto dello zero è di segno opposto rispetto a quello del polo.

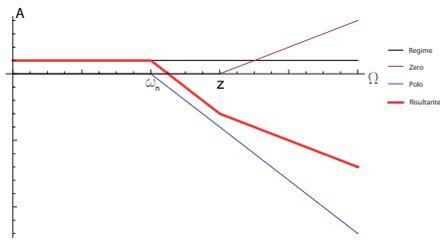


Figura 5.26: Diagramma di Bode asintotico - Ampiezza

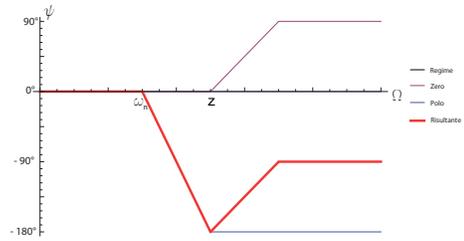


Figura 5.27: Diagramma di Bode asintotico - Fase

Capitolo 6

Simulazione manovre e predizione risultati

6.1 Colpo di sterzo

La manovra di colpo di sterzo può essere utile per acquisire informazioni riguardo la prontezza di risposta del sistema, la frequenza smorzata e il fattore di smorzamento dello stesso, oltre che il valore di regime della variabile di stato considerata cui il veicolo si porta quando avviene la stabilizzazione.

Dal punto di vista matematico si tratta di antitrasformare nel dominio del tempo le funzioni

$$\begin{aligned} S_\beta(s) &= D \frac{1}{s} G_\beta(s) \\ S_\rho(s) &= D \frac{1}{s} G_\rho(s) \end{aligned} \tag{6.1}$$

dove $1/s$ è la funzione gradino nel dominio di Laplace e D è l'ampiezza del gradino imposto all'angolo volante, espressa in radianti.

Sarebbe possibile altrimenti imporre all'angolo volante un andamento a rampa, al fine di evitare l'irrealistica istantaneità della manovra, antitrasformando la funzione

$$\begin{aligned} R_\beta(s) &= D \frac{1}{t_s s^2} (1 - e^{-t_s s}) G_\beta(s) \\ R_\rho(s) &= D \frac{1}{t_s s^2} (1 - e^{-t_s s}) G_\rho(s) \end{aligned} \tag{6.2}$$

dove t_s è il tempo di salita della rampa.

In realtà, come accennato e come ribadiremo nel seguito, l'interesse non è quello di simulare manovre realistiche, bensì riuscire a ricavare delle indicazioni dal sistema linearizzato che possano risultare utili nell'ottica di modificare il comportamento del veicolo. Perciò non verrà presa in considerazione la risposta alla rampa ma unicamente quella al gradino.

Il maggior problema da risolvere riguarda la dipendenza della trasformata di Laplace dall'accelerazione laterale \tilde{a}_y e dalla velocità di avanzamento u_a . Si deve infatti scegliere la velocità di avanzamento, supposta ovviamente costante, cui effettuare la manovra e l'accelerazione laterale. La scelta della velocità non crea alcun problema, è possibile costruire uno spettro di risposte al variare della velocità, quello che invece può risultare problematico è la scelta dell'accelerazione laterale. Risulta evidente infatti che mentre la velocità si mantiene pressoché costante durante la manovra l'accelerazione varia, e di molto.

Per capire però quale sia il valore di \tilde{a}_y più indicato basta però ricordare in quali condizioni, per definizione, deve essere calcolato il valore delle derivate di stabilità da inserire nel sistema linearizzato: si deve considerare il valore di regime di accelerazione laterale e angolo di sterzo nell'istante precedente la perturbazione dei comandi. Si dovrà perciò considerare la risposta di un sistema che abbia velocità di avanzamento imposta e accelerazione laterale di regime $\tilde{a}_y = 0$.

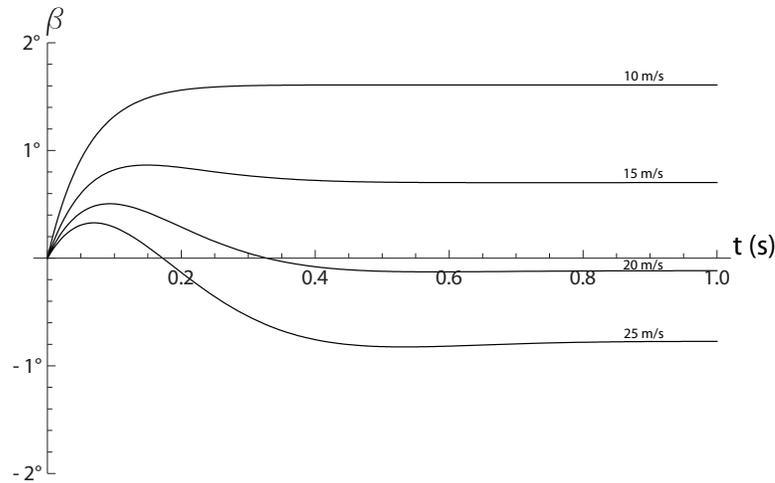


Figura 6.1: Risposta al gradino unitario - Angolo di assetto β - Veicolo 3

In Fig. 6.1 e Fig. 6.2 si riporta l'andamento dell'angolo di assetto β e della curvatura ρ in risposta al gradino unitario ($1rad$), per il Veicolo 3.

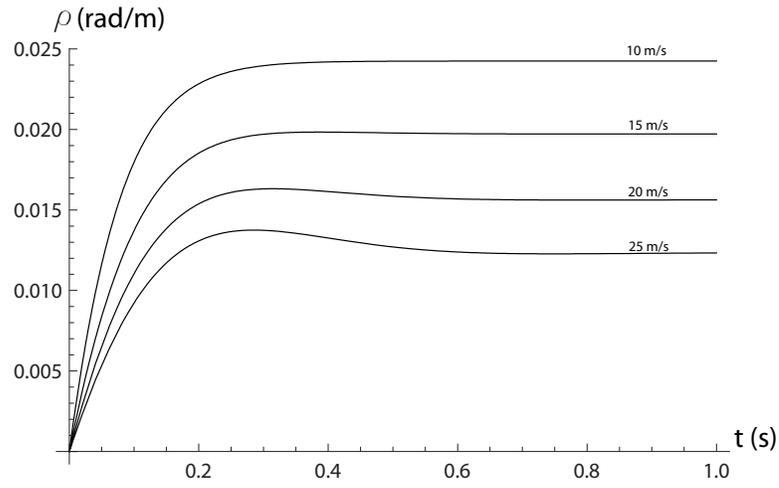


Figura 6.2: Risposta al gradino unitario - Curvatura ρ - Veicolo 3

u (m/s)	10	15	20	25
K_β ($^\circ$)	1.6	0.7	-0.1	-0.8
Z_β (rad/s)	-17.3	-6.2	0.98	6.6
ω_n (rad/s)	17.0	12.6	10.6	9.6
ζ	0.98	0.89	0.79	0.70

Tabella 6.1: Parametri caratteristici G_β

u (m/s)	10	15	20	25
K_ρ (rad/m)	0.024	0.020	0.016	0.12
Z_ρ (rad/s)	-23.3	-15.5	-11.6	-9.3
ω_n (rad/s)	17.0	12.6	10.6	9.6
ζ	0.98	0.89	0.79	0.70

Tabella 6.2: Parametri caratteristici G_ρ

In Tab. 6.1 e Tab. 6.2 sono riportati i valori di guadagno, zero, pulsazione naturale e fattore di smorzamento che caratterizzano le due funzioni di trasferimento $G_\beta(s)$ e $G_\rho(s)$ in funzione della velocità di avanzamento del veicolo. Si verifica che

- all'aumentare della velocità il guadagno dell'angolo di assetto passa da positivo a negativo, si passa cioè dalla condizione 'naso in fuori' a quella 'naso in dentro'. Si verifica inoltre che l'angolo di assetto continua a decrescere all'aumentare della velocità, fino a raggiungere il valore limite di -3.24° , mentre il valore di u_a per cui il guadagno risulta nullo è prossimo ai $20m/s$
- all'aumentare della velocità il guadagno della curvatura decresce, cioè il veicolo si assesta su traiettorie sempre più larghe
- il valore di Z_β che come visto condiziona il primo transitorio della risposta a gradino, passa, col crescere di u_a da valori negativi (primo picco concorde dal valore di regime dell'angolo di assetto) a valori positivi (primo picco concorde col valore di regime). Il modulo di Z_β non ha molto interesse in questa fase visto che si presta a essere utile per considerazioni semplici a patto di avere ζ e ω_n costanti
- anche riguardo a Z_ρ non è possibile fare molte considerazioni immediate, se non verificare che la diminuzione del modulo, e il conseguente aumento di $|\tau_\beta|$ assieme alla diminuzione della frequenza naturale e del coefficiente di smorzamento, contribuiscono ad accentuare il carattere oscillatorio del sistema
- la frequenza naturale ω_n risulta la medesima sia per $G_\beta(s)$ sia per $G_\rho(s)$ e stessa considerazione vale per lo smorzamento. Al crescere della velocità sia la frequenza naturale sia il fattore di smorzamento decrescono, accentuando il carattere oscillatorio del sistema. Al crescere di u_a si verifica che la frequenza si assesta sul valore di circa $7.3rad/s$, valore che può essere approssimato con un errore inferiore al 10 % solo per velocità molto elevate, pari a quasi $50m/s$
- interessante constatare anche il fatto che al decrescere di u_a il fattore di smorzamento aumenta e raggiunge valore unitario per $u_a \simeq 9.3m/s$, valore al di sotto del quale la risposta non è più oscillatoria smorzata ma esponenzialmente decrescente

Si vuol far notare che i parametri caratteristici considerati nell'analisi di questo sistema sono ancora sei

$$(K_\beta \quad K_\rho \quad Z_\beta \quad Z_\rho \quad \omega_n \quad \zeta) \quad (6.3)$$

come del resto sono sei anche le derivate di stabilità o gli elementi che costituiscono la sestina $(\beta_y, \beta_\delta, \rho_y, \rho_\delta, Y_\delta/m, N_\delta/J)$ già considerata nelle analisi precedenti.

La differenza sta però nel fatto che l'analisi delle ultime quantità considerate è molto più intuitiva ed ha un maggior senso fisico, mentre l'analisi delle altre poteva risultare un interessante esercizio teorico con pochi risvolti applicativi.

A titolo di esempio si vuole riportare il confronto della risposta al gradino relativa al *Veicolo 4*, che presenta un basso indice IRV come riportato in Fig. 4.18, con quella relativa al *Veicolo 5*, ritenuto invece buono nella velocità di risposta.

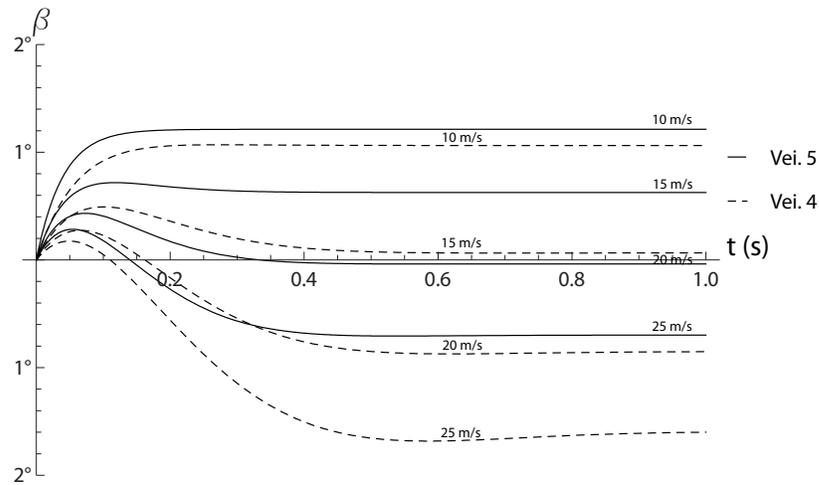


Figura 6.3: Risposta al gradino unitario - Angolo di assetto β

Si evidenziano differenze principalmente in Fig. 6.4, dove il *Veicolo 4* è caratterizzato da una risposta con un tempo di salita più elevato rispetto al *Veicolo 5* e un maggior carattere oscillatorio della stessa, fattori che comportano quindi anche un elevato tempo di assestamento.

Si pensa pertanto di voler intervenire per rendere i due veicoli più simili, cioè con lo scopo di migliorare il comportamento del *Veicolo 4* in termini di prontezza di risposta. Si deve tener presente che i due veicoli sono costruttivamente assai diversi e quindi i risultati che si ottengono possono essere più o meno realistici. Spetta però a coloro che si occupano di meccanica del veicolo il compito di operare a livello strutturale per ottenere le caratteristiche volute, o le loro migliori approssimazioni.

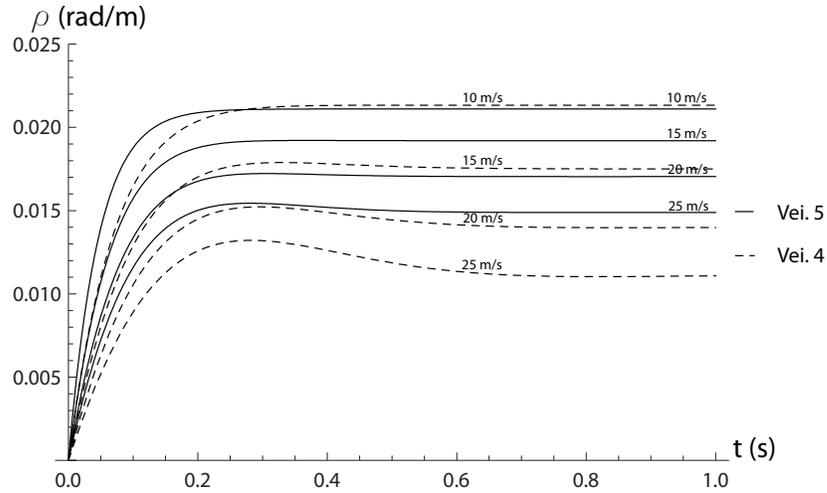


Figura 6.4: Risposta al gradino unitario - Curvatura ρ

Come primo passaggio pare utile considerare i parametri che caratterizzano l'andamento della curvatura ρ per i due veicoli, tralasciando per adesso quelli di β .

u (m/s)	10	15	20	25
K_ρ (rad/m)	0.021	0.017	0.014	0.011
Z_ρ (rad/s)	-15.5	-10.4	-7.8	-6.2
ω_n (rad/s)	15.7	11.3	9.3	8.3
ζ	0.98	0.89	0.80	0.71

Tabella 6.3: Parametri caratteristici G_ρ - Veicolo 4

In Tab. 6.3 e Tab. 6.4 sono stati evidenziati i parametri relativi a $u_a = 20\text{m/s}$. Con riferimento a questi valori si impone come primo passaggio l'uguaglianza delle frequenze naturali e dei fattori di smorzamento dei due veicoli. Per fare ciò il *Veicolo 5* viene preso a riferimento, mentre il *Veicolo 4* viene trasformato in un *Veicolo 4a* avente le stesse caratteristiche del *Veicolo 4*, fatta eccezione per le rigidzze di deriva $C_1 = \Phi_1(0)$ e $C_2 = \Phi_2(0)$ ottenute risolvendo il sistema

$$\begin{aligned}\omega_n^{(4a)}(\Phi_1(0), \Phi_2(0)) &= \omega_n^{(5)} \\ \zeta^{(4a)}(\Phi_1(0), \Phi_2(0)) &= \zeta^{(5)}\end{aligned}\tag{6.4}$$

u (m/s)	10	15	20	25
K_ρ (rad/m)	0.021	0.019	0.017	0.015
Z_ρ (rad/s)	-28.8	-19.2	-14.4	-11.5
ω_n (rad/s)	26.4	18.0	14.1	12.0
ζ	1.00	0.95	0.90	0.84

Tabella 6.4: Parametri caratteristici G_ρ - *Veicolo 5*

I valori di $\Phi_1(0)$ e $\Phi_2(0)$ sono riportati in Tab. 6.5 e confrontati con quelli del *Veicolo 4* e *Veicolo 5*

	<i>Veicolo 4</i>	<i>Veicolo 5</i>	<i>Veicolo 4a</i>
$\Phi_1(0)$ (N/rad)	58705	134868	108541
$\Phi_2(0)$ (N/rad)	65515	217476	106656

Tabella 6.5: Rigidezze di deriva

risultano intermedi tra quelli del *Veicolo 4* e quelli del *Veicolo 5*.

Si verifica che il tempo di salita continua ad essere inferiore per il *Veicolo 5*, ma il *Veicolo 4a* presenta un andamento oscillatorio di periodo più breve e più smorzato rispetto a quello del *Veicolo 4*. Anche l'andamento di β per i due veicoli tende ad essere meno differente visto che per adesso si è agito soltanto su ω_n e ζ , frequenza propria e smorzamento che caratterizzano tutte e due le variabili di stato.

Si verifica inoltre che nonostante l'uguaglianza sia stata impostata con riferimento alla velocità $u_a = 20\text{m/s}$ la tendenza è verificata anche per gli altri valori considerati.

In Tab. 6.6 sono riassunti i parametri caratteristici di G_ρ relativi al *Veicolo 4a*

u (m/s)	10	15	20	25
K_ρ (rad/m)	0.023	0.021	0.019	0.016
Z_ρ (rad/s)	-25.4	-16.9	-12.7	-10.2
ω_n (rad/s)	29.5	17.9	14.1	12.0
ζ	1	0.96	0.90	0.84

Tabella 6.6: Parametri caratteristici G_ρ - *Veicolo 4a*

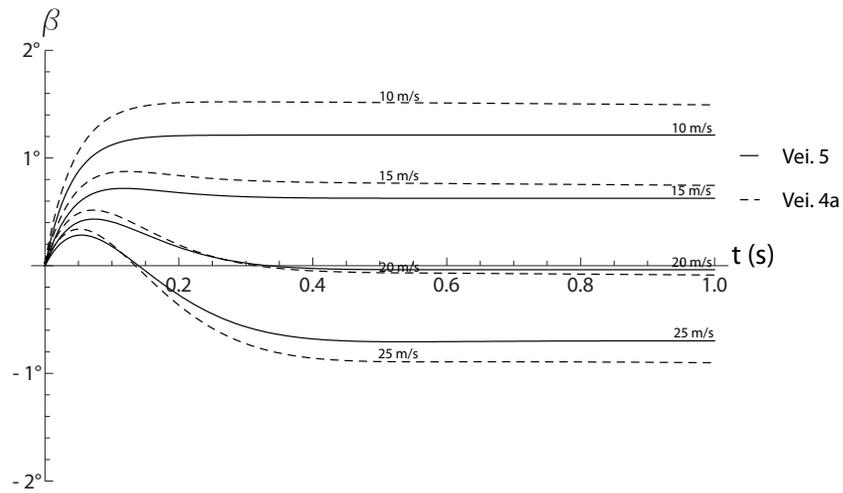


Figura 6.5: Risposta al gradino unitario - Angolo di assetto β

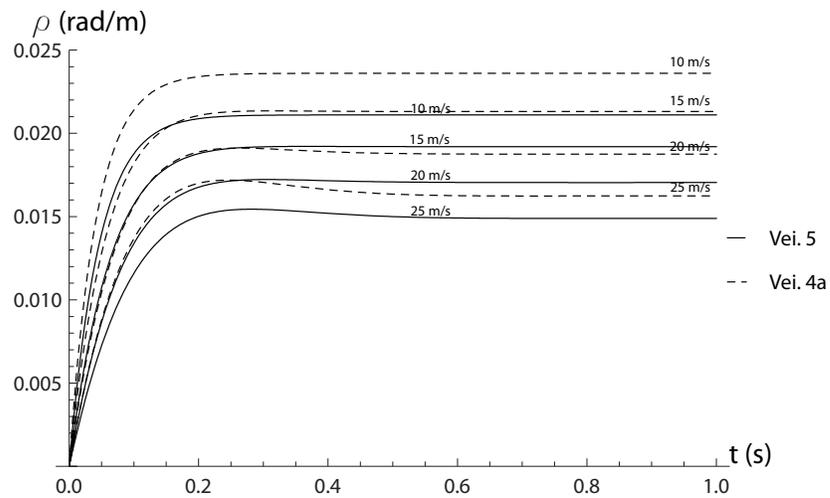


Figura 6.6: Risposta al gradino unitario - Curvatura ρ

Confrontando la Tab. 6.4 e la Tab. 6.6 è possibile verificare che i valori di ω_n e di ζ sono identici per $u_a = 20m/s$, ma risultano molto simili anche per gli altri valori di velocità considerati.

Ci si pone adesso il problema di rendere ancora più simile la risposta del *Veicolo 4* a quella del *Veicolo 5* preso come riferimento. Si pensa così di fare in modo che il valore dello zero di $G_\rho^{(4b)}$ sia uguale a quello di $G_\rho^{(5)}$. Le caratteristiche su cui poter agire potrebbero essere molte ma scegliamo di agire sul valore della ripartizione della sterzata al posteriore χ per due motivi

- il valore di χ non influenza né ω_n né ζ per cui le rigidezze di deriva possono essere quelle trovate nel passaggio precedente
- agire su parametri quali la massa m , il momento di inerzia J o la lunghezza dei semipassi a_1 e a_2 va ad intaccare le caratteristiche basilari del veicolo, che risultano primariamente legate a elementi commerciali (settore di appartenenza, consumi, abitabilità interna ecc.) più che alla dinamica del veicolo.

Si tratta di risolvere l'equazione

$$Z_\rho^{(4b)}(\chi) = Z_\rho^{(5)} \quad (6.5)$$

con il *Veicolo 4b* che ha stesso rapporto di sterzo, massa, momento di inerzia e lunghezza dei semipassi del *Veicolo 4*, rigidezze di deriva del *Veicolo 4a* e ripartizione della sterzata al posteriore incognita.

Si ottiene una ripartizione di sterzata χ in fase

$$\chi = 0.1678 \quad (6.6)$$

cioè per ogni grado di sterzata delle ruote anteriori, quelle posteriori sterzano 0.1678° . Considerando i rapporti di sterzata anteriore e posteriore così come definiti in (3.2)

$$\tau_1 = \tau = \frac{1}{15.8} = 0.0633 \quad \tau_2 = \chi\tau = \frac{1}{94.2} = 0.0106 \quad (6.7)$$

In Fig. 6.7 e Fig. 6.8 è riportato l'andamento della risposta al gradino per il *Veicolo 4b*. Si evidenzia che l'andamento di ρ è molto simile a quello del *Veicolo 5*, scelto come riferimento, specialmente nella prima fase, condizionata fortemente dal valore dello zero, dove il rateo di salita e il tempo di assestamento sono praticamente identici anche per velocità diverse da quella

(20 m/s) per cui è stata impostata l'uguaglianza.

Per quanto riguarda β invece si hanno delle differenze, visto che i valori di Z_β non sono gli stessi per i due veicoli, che risultano però contenute nell'ordine di 0.5° .

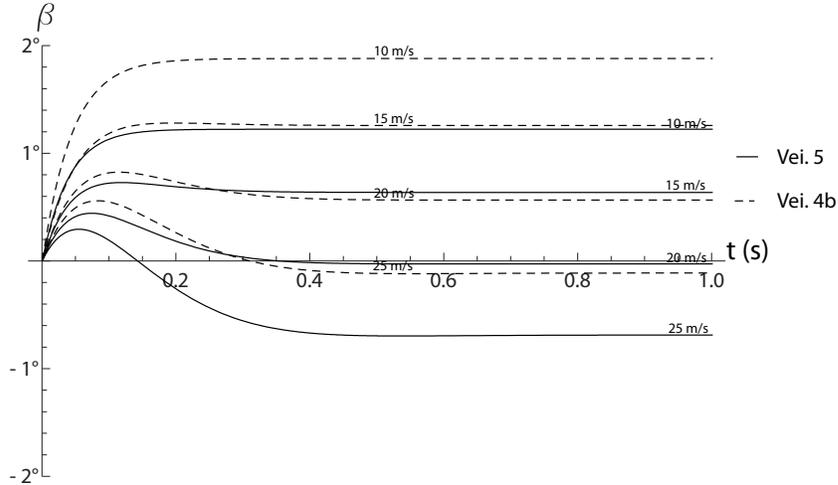


Figura 6.7: Risposta al gradino unitario - Angolo di assetto β

u (m/s)	10	15	20	25
K_ρ (rad/m)	0.020	0.018	0.016	0.014
Z_ρ (rad/s)	-28.9	-19.2	-14.4	-11.5
ω_n (rad/s)	29.5	17.9	14.1	12.0
ζ	1	0.96	0.90	0.84

Tabella 6.7: Parametri caratteristici G_ρ - Veicolo 4b

Da tenere in considerazione anche il fatto che attraverso la tecnologia *Drive by wire* è possibile pensare di costruire una mappa di τ e χ variabili a seconda dello stato del veicolo, riuscendo ad ottenere i risultati voluti in condizioni di guida più differenti.

Come ultimo passaggio nella serie che ci porta a rendere quanto più simile la risposta della curvatura del *Veicolo 4* a quella del *Veicolo 5*, si consideri la possibilità di variare il rapporto di sterzo τ , fattore che incide unicamente su K_β e K_ρ . Si tratterà così di considerare un *Veicolo 4c* avente stessa massa, momento di inerzia e lunghezza dei semipassi del *Veicolo 4*, rigidzze di deriva del *Veicolo 4a* e ripartizione di sterzata del *Veicolo 4b*, mentre il rapporto di sterzo è ricavato risolvendo l'equazione

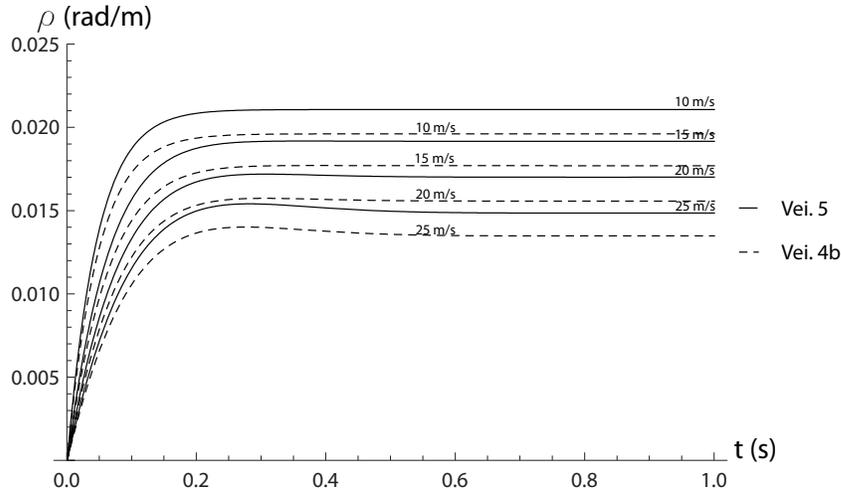


Figura 6.8: Risposta al gradino unitario - Curvatura ρ

$$K_{\rho}^{(4c)}(\tau) = K_{\rho}^{(5)} \quad (6.8)$$

$$\tau = \frac{1}{14.5} = 0.06914 \quad (6.9)$$

	<i>Veicolo 4</i>	<i>Veicolo 5</i>	<i>Veicolo 4c</i>
τ	$(13.2)^{-1}$	$(15.8)^{-1}$	$(14.5)^{-1}$
χ	0	0	0.1678

Tabella 6.8: Rapporti di sterzo

In Tab. 6.8 sono riassunti i valori relativi alla cinematica di sterzo per i veicoli considerati; il valore del rapporto di sterzo ottenuto è intermedio tra quello dei due veicoli di partenza e quindi ottenibile facilmente attraverso piccoli accorgimenti sui rapporti di riduzione.

In Fig. 6.10 è evidente come, seguendo le indicazioni derivanti dall'analisi delle funzioni di trasferimento e agendo sui parametri costruttivi, si è ottenuto una risposta identica per due veicoli costruttivamente molto diversi. Anche per velocità differenti da quella considerata come riferimento si ha un comportamento analogo a livello di curvatura, mentre la risposta di β è differente tra i due veicoli ma, analizzando la Fig. 6.9, si evidenziano differenze legate soprattutto all'ampiezza della risposta più che all'andamento della stessa, dell'ordine di 1° , difficilmente apprezzabili nella guida.

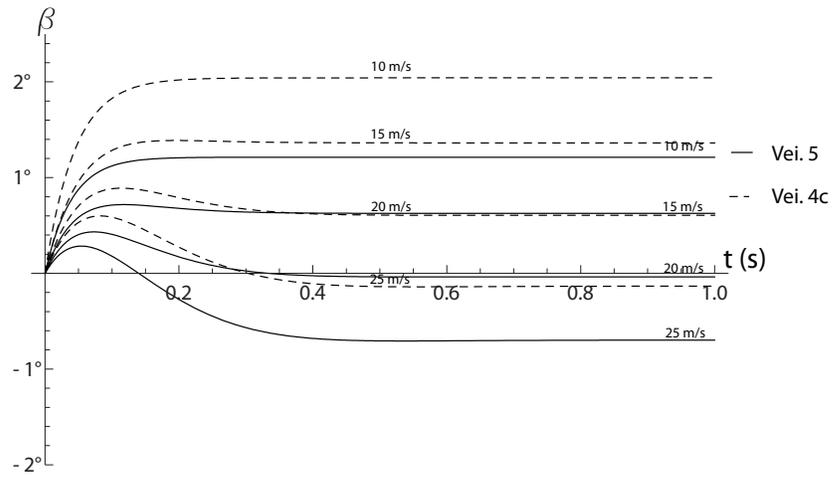


Figura 6.9: Risposta al gradino unitario - Angolo di assetto β

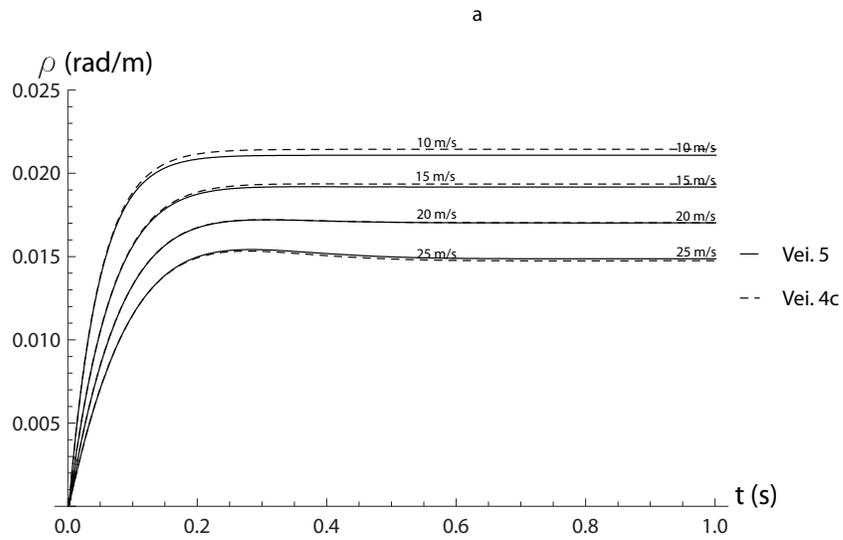


Figura 6.10: Risposta al gradino unitario - Curvatura ρ

Si è così riusciti a prendere un veicolo del segmento B, un'utilitaria, e renderne la telemetria praticamente identica a quella di un veicolo appartenente al segmento C, quale potrebbe essere una berlina o una *station wagon*, senza variare i parametri costruttivi che caratterizzano a fini commerciali il veicolo di partenza. Si è difatti modificata la caratteristica dei pneumatici e la cinematica di sterzo, lasciando intatti tutti gli altri parametri, rendendo così il *Veicolo 4* indistinguibile dal *Veicolo 4c* se esposto in un autosalone, ma sensibilmente diverso nel momento in cui se ne consideri la dinamica.

Ovviamente la risposta dei due veicoli reali non sarà così identica come riportato nei grafici di sopra, in quanto quello che si è analizzato è un sistema linearizzato. Al variare dell'accelerazione laterale cambia difatti la rigidezza di deriva generalizzata degli assali, che si discosta dal valore della rigidezza di deriva C_1 e C_2 . Questo però non deve apparire come un problema insormontabile, in quanto è sufficiente reimpostare il sistema (6.4) e calcolare i valori di $\Phi_1(\tilde{a}_y)$, $\Phi_2(\tilde{a}_y)$ che rendono uguale la frequenza propria e il fattore di smorzamento per vari valori dell'accelerazione laterale, e cercare poi di ottenere una caratteristica dell'assale quanto più possibile simile a quella desiderata.

A questo scopo è stato impostato il seguente sistema

$$\begin{aligned}\omega_n^{(4a)}(\Phi_1(\tilde{a}_y), \Phi_2(\tilde{a}_y)) &= \omega_n^{(5)}(\tilde{a}_y) \\ \zeta^{(4a)}(\Phi_1(\tilde{a}_y), \Phi_2(\tilde{a}_y)) &= \zeta^{(5)}(\tilde{a}_y)\end{aligned}\tag{6.10}$$

per tre diversi valori dell'accelerazione laterale \tilde{a}_y , che nella fattispecie sono stati (0 m/s^2 , 3 m/s^2 , 7 m/s^2), trovando così i valori delle rigidezze di deriva generalizzate che il *Veicolo 4a* deve avere per avere stessa frequenza propria e stesso fattore di smorzamento del *Veicolo 5* in corrispondenza delle accelerazioni laterali considerate. Successivamente si è considerata la Magic Formula nella sua forma più semplice, con tre soli coefficienti

$$Y_i = D_i \sin(C_i \arctan(B_i \alpha_i))\tag{6.11}$$

e, una volta espresso il legame tra α_i e \tilde{a}_y a regime, ottenibile invertendo la (6.12)

$$m\tilde{a}_y \frac{a_j}{a_i + a_j} = D_i \sin(C_i \arctan(B_i \alpha_i))\tag{6.12}$$

è stato possibile calcolare i valori di (B_1, C_1, D_1) e (B_2, C_2, D_2) tali da

garantire i valori di rigidezza ottenuti in corrispondenza delle accelerazioni \tilde{a}_y considerate.

In Fig. 6.11 e Fig. 6.12 sono riportate le caratteristiche degli assali e le caratteristiche degli assali normalizzate ottenute. Importante comprendere che questi grafici non hanno evidenti elementi comuni con quelli relativi al *Veicolo 4* e *Veicolo 5*, in quanto sono stati ottenuti risolvendo un sistema che prende in considerazione la frequenza propria e lo smorzamento del veicolo.

Per verificare la validità dei risultati ottenuti si è voluto simulare la risposta ad un colpo di sterzo a gradino, di ampiezza pari a un radiante, per il *Veicolo 4c* e per il *Veicolo 5*, non studiando il sistema linearizzato bensì il sistema completo, non lineare e senza alcuna approssimazione relativo al modello monotraccia. La grande differenza sta nel fatto che all'interno del sistema linearizzato le rigidzze di deriva sono mantenute costanti, mentre per il sistema completo le caratteristiche sono considerate nella loro forma estesa, con valori di rigidzza di deriva generalizzata che variano durante la manovra al variare dell'accelerazione laterale, anche in istanti in cui non si è in condizioni di regime.

In Fig. 6.13 e Fig. 6.14 è riportato l'andamento reale delle due variabili di stato in risposta al gradino dell'angolo di sterzo. Si verifica che, come predetto nell'analisi lineare, il valore della curvatura, che è stato controllato attraverso le modifiche suggerite dallo studio della funzione G_ρ è praticamente identico per i due veicoli, nonostante il fatto che, come è evidente in Fig. 6.15, i valori delle accelerazioni laterali si discostino di parecchio da quello considerato per la linearizzazione. Il valore dell'angolo di assetto è invece, come del resto si era già visto in Fig. 6.9, diverso per i due veicoli, ma dall'analisi della Fig. 6.13 si evince che la frequenza propria e lo smorzamento sono gli stessi per i due veicoli, mentre la differenza in senso assoluto tra gli angoli di assetto dei due veicoli è intorno agli 0.5° .

Per avere un'idea del lavoro fatto in Fig. 6.16 è riportato l'andamento

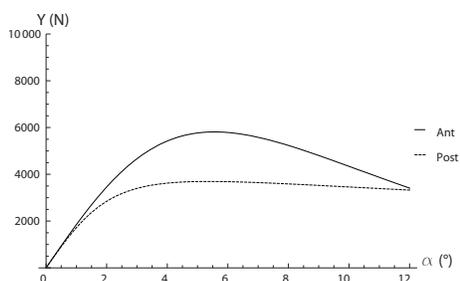


Figura 6.11: Caratteristica Assale - *Veicolo 4a*

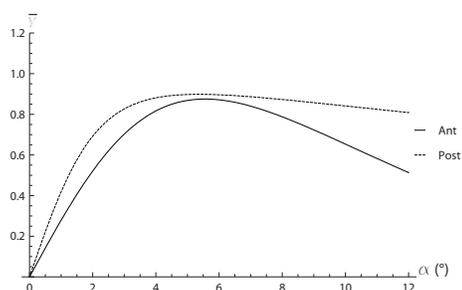


Figura 6.12: Caratteristica Assale Normalizzata - *Veicolo 4a*

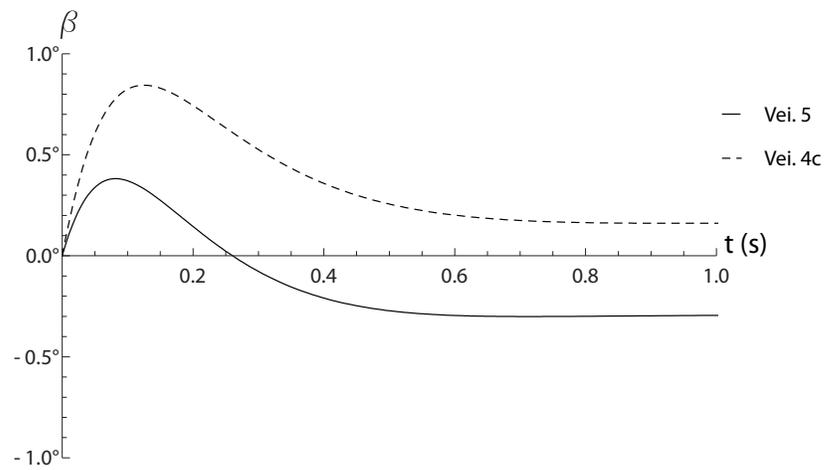


Figura 6.13: Risposta al gradino unitario - $u_a = 20m/s$ - Angolo di assetto β

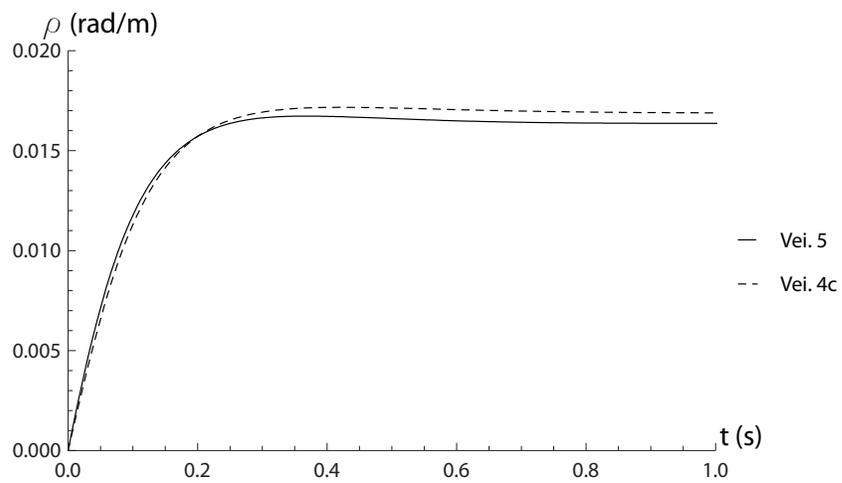


Figura 6.14: Risposta al gradino unitario - $u_a = 20m/s$ - Curvatura ρ

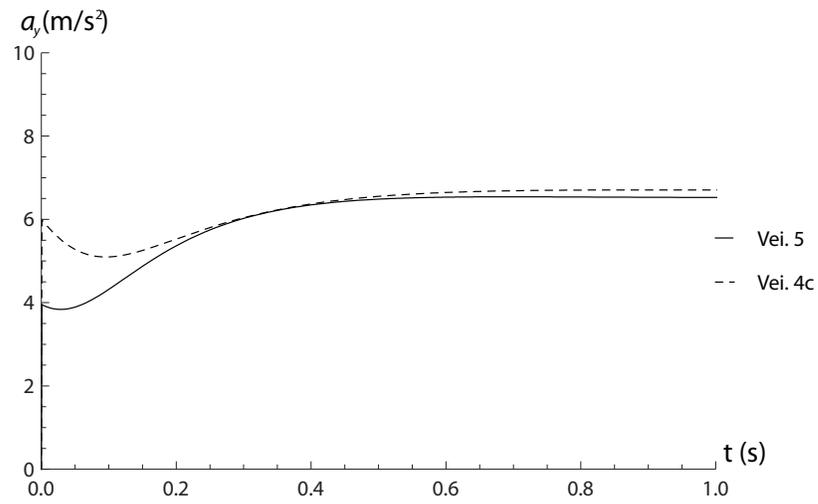


Figura 6.15: Risposta al gradino unitario - $u_a = 20m/s$ - Accelerazione \tilde{a}_y

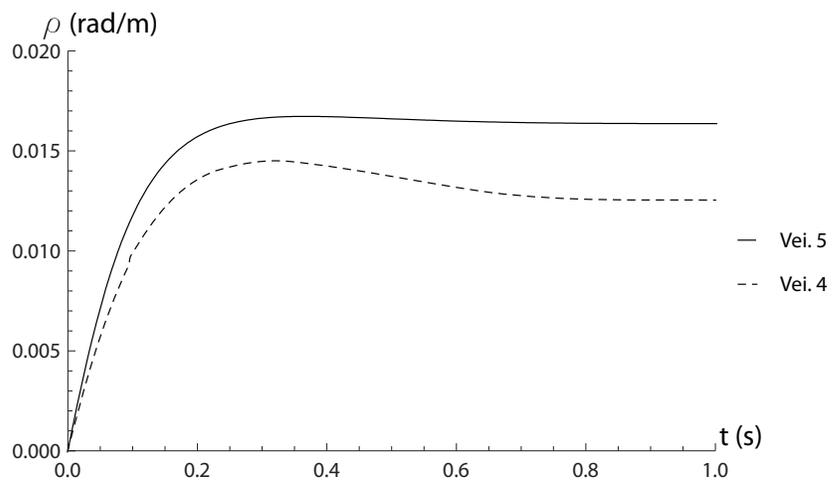


Figura 6.16: Risposta al gradino unitario - $u_a = 20m/s$ - Curvatura ρ

della curvatura in risposta ad un gradino dell'angolo di sterzo, in cui si confrontano il *Veicolo 4* e il *Veicolo 5*. La differenza è molta sia per quanto concerne il valore di regime sia riguardo la parte oscillatoria della risposta, che evidenzia grosse differenze sia in termini di frequenza proprio sia in termini di smorzamento del sistema. Si ricorda che le modifiche apportate riguardano solo la rigidità degli assali e la cinematica del sistema di sterzo, elementi solitamente appannaggio della dinamica del veicolo.

Quella proposta è ovviamente una delle possibili analisi che possono essere fatte a partire dalle proprietà delle funzioni di trasferimento; sta ovviamente alla capacità di chi deve analizzare la dinamica del veicolo scegliere di volta in volta i parametri su cui è più opportuno intervenire per apportare modifiche in grado di modificare a proprio piacimento la dinamica del veicolo.

6.2 Sorpasso

Il *CRF* ha messo a nostra disposizione due tracciati del segnale dell'angolo di sterzo durante una manovra di *double lane change* (sorpasso con rientro in corsia), uno relativo ad uno stile di guida classico, l'altro relativo ad uno stile di guida più sportivo.

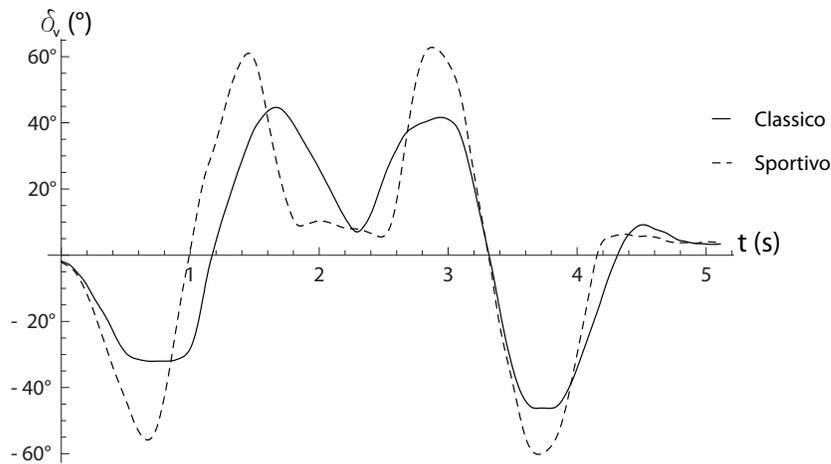


Figura 6.17: Angolo volante durante manovre di sorpasso

Anche se come risulta dalla Fig. 6.17 l'andamento dell'angolo volante non è periodico né tanto meno armonico, è possibile sfruttare i diagrammi di Bode, e quindi l'analisi dell'ampiezza e della fase della risposta armonica

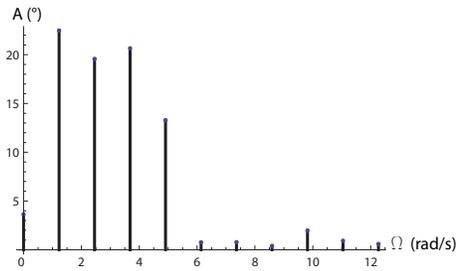


Figura 6.18: Spettro di Ampiezza - Sorpasso Classico

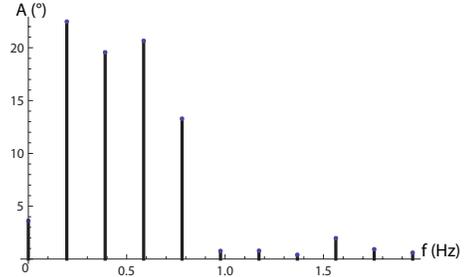


Figura 6.19: Spettro di Ampiezza - Sorpasso Classico

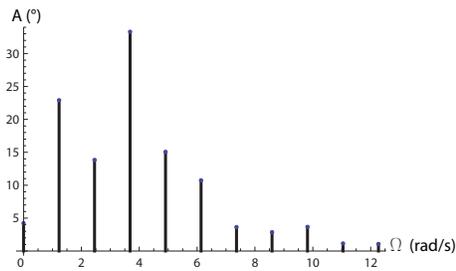


Figura 6.20: Spettro di Ampiezza - Sorpasso Sportivo

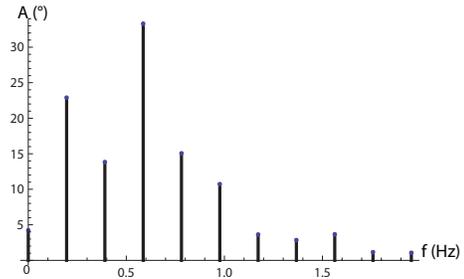


Figura 6.21: Spettro di Ampiezza - Sorpasso Sportivo

connessa al sistema linearizzato. Difatti è possibile, attraverso la trasformata di Fourier [3, p. 525], decomporre il segnale dato in una somma di segnali sinusoidali

$$\delta_v(t) = \Delta_0 + \sum_{i=1}^{\infty} \Delta_i \cos(\Omega_i t + \Psi_i) \quad (6.13)$$

dove Δ_0 è il valore medio del segnale, Δ_i , ω_i e Ψ_i sono rispettivamente ampiezza, pulsazione e angolo di fase dell'armonica i -esima, per la cui determinazione si rimanda a (BIB).

Una buona approssimazione del segnale può essere ottenuta considerando anche un numero di armoniche ridotto

In Fig. 6.18 e Fig. 6.20 è riportato l'andamento delle ampiezze per le varie armoniche considerate, espressa in funzione della pulsazione di eccitazione, mentre in Fig. 6.19 e Fig. 6.21 sono riportate le stesse grandezze espresse però stavolta in funzione della frequenza eccitante. Per la manovra classica si nota come, oltre al valor medio del segnale, le armoniche più importanti sono le prime quattro, mentre nel sorpasso sportivo sono discretamente influenti tutte le armoniche fino all'ottava.

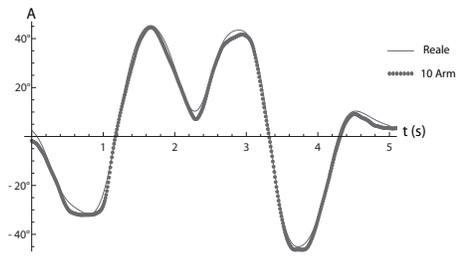


Figura 6.22: Angolo Volante - Sorpasso Classico

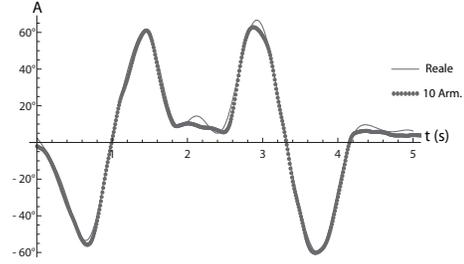


Figura 6.23: Angolo Volante - Sorpasso Sportivo

In Fig. 6.22 e Fig. 6.23 è confrontato l'andamento dell'angolo volante, sia per il sorpasso standard sia per quello sportivo, con l'andamento approssimato considerando le prime dieci armoniche ottenute dalla trasformata di Fourier. Le differenze sono minime.

Si prende così in considerazione la risposta armonica del sistema così come descritto nel paragrafo 5.4.3. Considerando l'armonica i -esima si ha un segnale di ingresso

$$\delta_i(t) = \Delta_i \cos \Omega_i t + \psi_i \quad (6.14)$$

trasformato in un altro segnale armonico attraverso la funzione di trasferimento, G_β o G_ρ , che in forma generalizzata diventa

$$x_i(t) = X_i(\Omega_i, u_a, \tilde{a}_y) \Delta_i \sin(\Omega_i, u_a, \tilde{a}_y t + \psi_i + \Psi_i(\Omega_i, u_a, \tilde{a}_y)) \quad (6.15)$$

dove $X_i(\Omega_i, u_a, \tilde{a}_y)$ è il guadagno della risposta armonica e $\Psi_i(\Omega_i, u_a, \tilde{a}_y)$ la fase. Il segnale di uscita sarà pertanto dato da

$$x(t) = X_0 + \sum_{i=1}^{10} X_i(\Omega_i, u_a, \tilde{a}_y) \Delta_i \sin(\Omega_i, u_a, \tilde{a}_y t + \psi_i + \Psi_i(\Omega_i, u_a, \tilde{a}_y)) \quad (6.16)$$

nel caso che si considerino le prime dieci armoniche.

Come risulta dall'equazione (6.15) l'ampiezza e la fase della risposta armonica sono condizionate, oltre che dalla frequenza di eccitazione, anche dalla velocità di avanzamento u_a e dall'accelerazione laterale \tilde{a}_y del veicolo. Per quanto riguarda la velocità di avanzamento non si evidenziano grossi problemi in quanto è sufficiente scegliere, come al solito, il valore di velocità cui

eseguire la prova. Nel nostro caso la scelta ricade su $u_a = 25m/s = 90km/h$. La scelta dell'accelerazione risulta invece più delicata visto che nel sistema se ne deve scegliere un valore attorno cui effettuare la linearizzazione, mentre durante la manovra il suo valore cambia di molto. Si pensa di far ricadere la scelta sul valor quadratico medio (rms) del accelerazione di uscita, considerando che le armoniche possono essere analizzate singolarmente come degli slalom effettuati lungo una traiettoria circolare per la quale il veicolo raggiunga detto valore di accelerazione laterale.

Il problema sta nel fatto che prima di simulare la manovra non si ha idea di quale sia il rms durante la stessa e inoltre, considerando la risposta al sistema linearizzato, il segnale di uscita dell'accelerazione, e quindi il suo valor quadratico medio, è funzione dell'accelerazione in corrispondenza della quale si è linearizzato. Si deve così procedere per via iterativa, scegliendo un valore iniziale dell'accelerazione attorno alla quale linearizzare, ad esempio $\tilde{a}_y = 0$, calcolare il rms del segnale di accelerazione ottenuto in uscita per impostarlo come punto attorno cui linearizzare nella simulazione successiva. Il valore di rms finale ottenuto sarà quello per cui la differenza tra quello inserito in ingresso e quello ottenuto dall'analisi del segnale di uscita risulta al di sotto di una determinata soglia.

In Fig. 6.24, Fig. 6.25 e Fig. 6.26 è riportato l'andamento delle due variabili di stato β e ρ e dell'accelerazione laterale a_y per due veicoli completamente differenti, il *Veicolo 2*, appartenente al segmento A e avente un giudizio globale molto basso (5.5), e il *Veicolo 8*, segmento D, giudicato dal *CRF* il migliore tra i veicoli considerati, con un giudizio di 8.8.

Le simulazioni sono effettuate a $25 m/s$ e il valore quadratico medio della accelerazione risulta differente per i due veicoli e pari a

	$rms (m/s^2)$
<i>Veicolo 2</i>	3
<i>Veicolo 8</i>	4

Tabella 6.9: Valori quadratici medi delle accelerazioni

Si nota che l'andamento dell'angolo di assetto è praticamente il medesimo per i due veicoli, segno che non è un fattore che ne determina in maniera forte il carattere, mentre la curvatura e l'accelerazione laterale, che ha un andamento che con buona approssimazione è una riproposizione sotto diversa scala della curvatura stessa, risultano differenti, mettendo in evidenza un andamento più blando per il veicolo ritenuto peggiore.

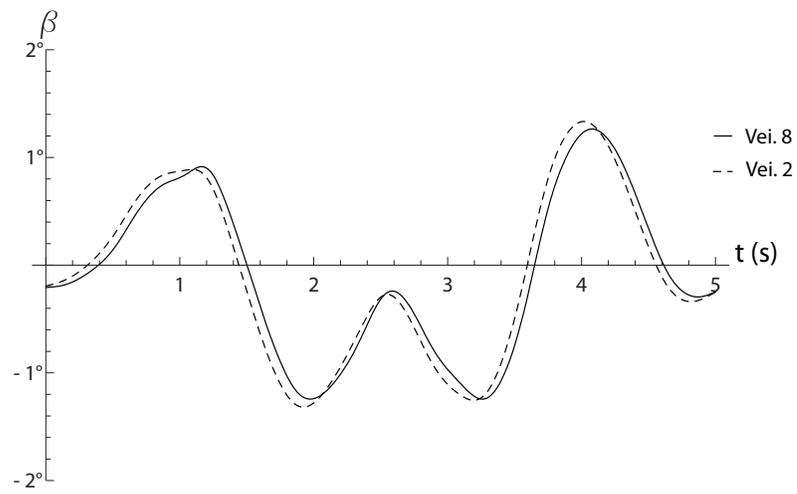


Figura 6.24: Angolo di assetto β - Sorpasso Standard

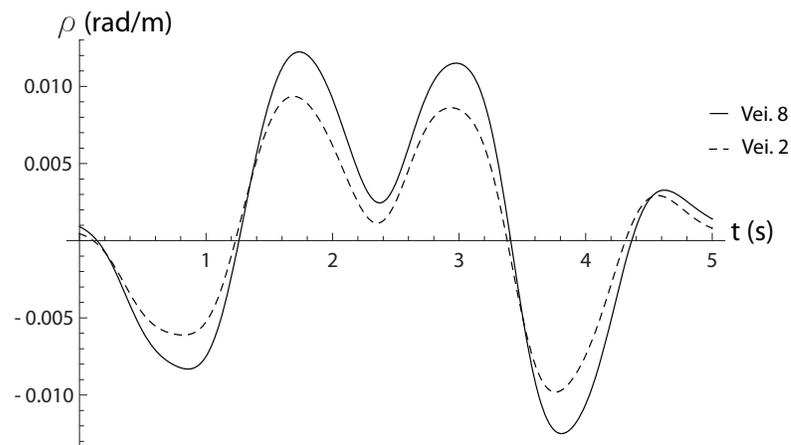


Figura 6.25: Curvatura ρ - Sorpasso Standard

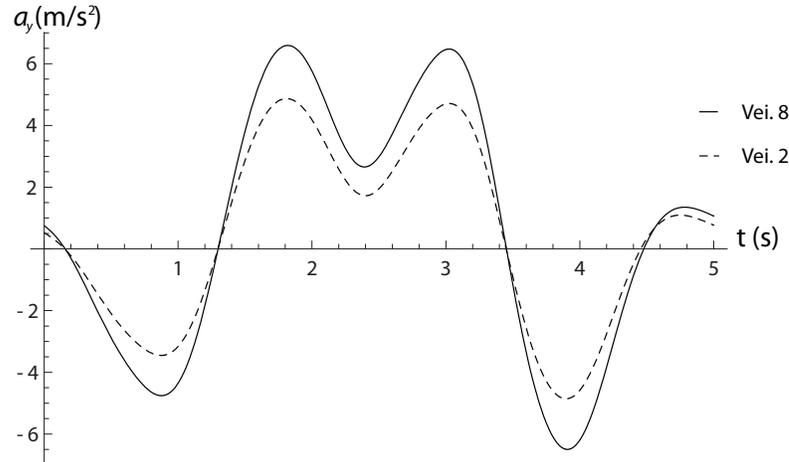


Figura 6.26: Accelerazione laterale a_y - Sorpasso Standard

Si vuole, analogamente a quanto fatto con la risposta a gradino, rendere la risposta della curvatura e, conseguentemente, con buona approssimazione, quella dell'accelerazione praticamente identiche per i due veicoli, lasciando libero l'angolo di assetto di comportarsi di conseguenza.

I valori dei parametri che caratterizzano G_ρ sono riportati in Tab. 6.10, mentre in Fig. 6.27 e Fig. 6.28 sono riportati i diagrammi di Bode per i due veicoli. Si evidenzia il fatto che lo sfasamento è praticamente lo stesso, mentre ci sono differenze nel diagramma di Bode delle ampiezze, legate principalmente ai differenti valori di guadagno K_ρ , Z_ρ e del fattore di smorzamento ζ , mentre il valore della frequenza propria è praticamente lo stesso per i due veicoli.

	<i>Veicolo 2</i>	<i>Veicolo 8</i>
$rms(a_y)$ (m/s ²)	3	4
K_ρ (rad/m)	0.0103	0.146
Z_ρ (rad/s)	-6.18	-7.35
ω_n (rad/s)	7.41	7.46
ζ	0.65	0.76

Tabella 6.10: Parametri caratteristici G_ρ

L'obiettivo è ora quello di modificare la cinematica di sterzo, χ e τ , e le caratteristiche degli assali del *Veicolo 2* in maniera tale da far sì che l'andamento di ρ in risposta alla manovra di sorpasso sia analogo a quello registrato per il *Veicolo 8*.

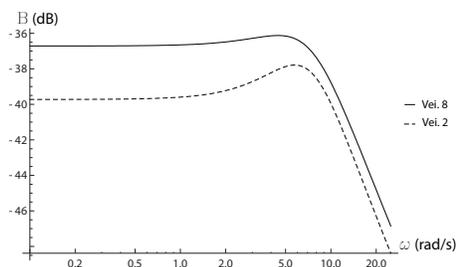


Figura 6.27: Diagramma di Bode - Ampiezza

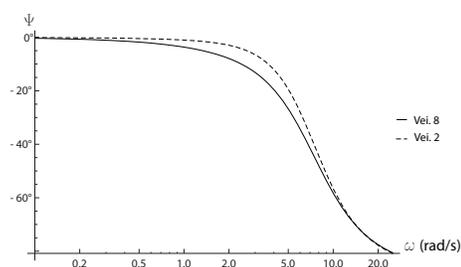


Figura 6.28: Diagramma di Bode - Fase

Il problema principale è legato a quale sia il valore di accelerazione per il quale i due veicoli vanno confrontati, problema che può essere facilmente risolto considerando l'obiettivo prefissato. Nel momento in cui l'andamento di $\rho(t)$ del *Veicolo 2a* sarà analogo a quello del *Veicolo 8*, si avrà un grafico di a_y molto simile a quello che già caratterizza il *Veicolo 8*, per cui il valore di rms da considerare sarà pari a $4 m/s^2$.

Uguagliando i valori della frequenza propria e del fattore di smorzamento si ottengono le rigidzze di deriva generalizzate che deve avere il *Veicolo 2a*

	<i>Veicolo 2</i>	<i>Veicolo 8</i>	<i>Veicolo 2a</i>
$\Phi_1(4m/s^2)$ (N/rad)	39873	105236	66763
$\Phi_2(4m/s^2)$ (N/rad)	52512	127407	69704

Tabella 6.11: Rigidzze di deriva

che anche in questo caso risultano intermedie tra quelle del veicolo di partenza e quelle del veicolo di riferimento. Anche in questo caso non ci si è limitati a considerare il valore nella rigidzza di deriva in corrispondenza del valore di \tilde{a}_y desiderato, ma si è impostata l'uguaglianza della frequenza propria e del fattore di smorzamento anche per altri due valori di accelerazione laterale, in maniera tale da poter ottenere i coefficienti B_i , C_i , D_i da inserire nella Magic Formula, così da avere a disposizione una caratteristica degli assali cui riferirsi nella simulazione del modello monotraccia completo.

Le caratteristiche degli assali di Fig. 6.29 e Fig. 6.30 sono ottenute imponendo che il *Veicolo 2a* abbia stessa frequenza propria e stesso fattore di smorzamento del *Veicolo 8* in corrispondenza di $\tilde{a}_y = 0m/s^2$, $4m/s^2$, $7m/s^2$. Per quanto riguarda la cinematica di sterzo si è imposto che per $u_a = 25m/s$ e $\tilde{a}_y = 4m/s^2$, il *Veicolo 2a* e il *Veicolo 8* abbiano stesso valore di K_ρ e di Z_ρ . Per soddisfare questa condizione è sufficiente modificare il rapporto di

sterzo τ , rendendolo più diretto, e utilizzare la ripartizione di sterzata al posteriore χ

	<i>Veicolo 2</i>	<i>Veicolo 8</i>	<i>Veicolo 2a</i>
τ	$(16.3)^{-1}$	$(12.8)^{-1}$	$(12.8)^{-1}$
χ	0	0	0.17

Tabella 6.12: Rapporti di sterzo

$$\tau_1 = \tau = \frac{1}{12.8} = 0.0780 \quad \tau_2 = \chi\tau = \frac{1}{75.4} = 0.01326 \quad (6.17)$$

Si ottengono così diagrammi di Bode identici per ampiezza e fase della curvatura ρ e la manovra di sorpasso viene simulata considerando le prime dieci armoniche della trasformata di Fourier.

L'andamento di $\beta(t)$ riportato in Fig. 6.31 e risulta leggermente diverso per i due veicoli, mentre quello di $\rho(t)$ e di $a_y(t)$ è praticamente lo stesso, fatto che conferma la bontà dell'ipotesi fatta circa il valore quadratico medio di accelerazione da considerare.

Analogamente a quanto fatto per la manovra di colpo di sterzo a gradino si è voluto anche in questo caso simulare la manovra di sorpasso con il simulatore monotraccia completo. I risultati sono sorprendentemente buoni e concordi con l'analisi lineare, nonostante i valori di accelerazione laterale abbastanza elevati che vengono raggiunti, a conferma del fatto che le scelte adoperate circa la stima delle accelerazioni laterali sono state nella direzione giusta.

Confrontando i grafici relativi al veicolo simulato attraverso il sistema lineare e quelli relativi al modello monotraccia completo, si constata che, oltre ad avere indicazioni sul comportamento relativo dei due veicoli, si hanno

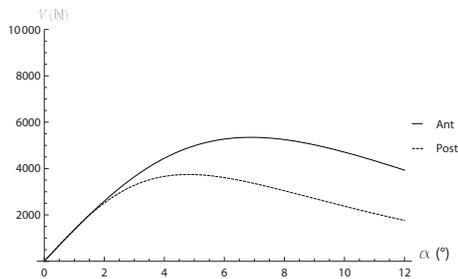


Figura 6.29: Caratteristica Assale - *Veicolo 2a*

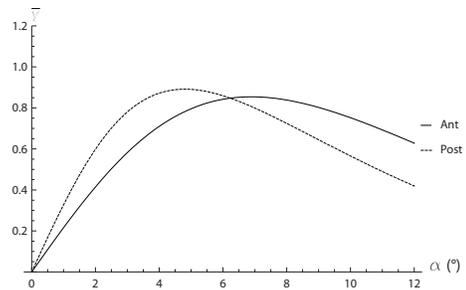


Figura 6.30: Caratteristica Assale Normalizzata - *Veicolo 2a*

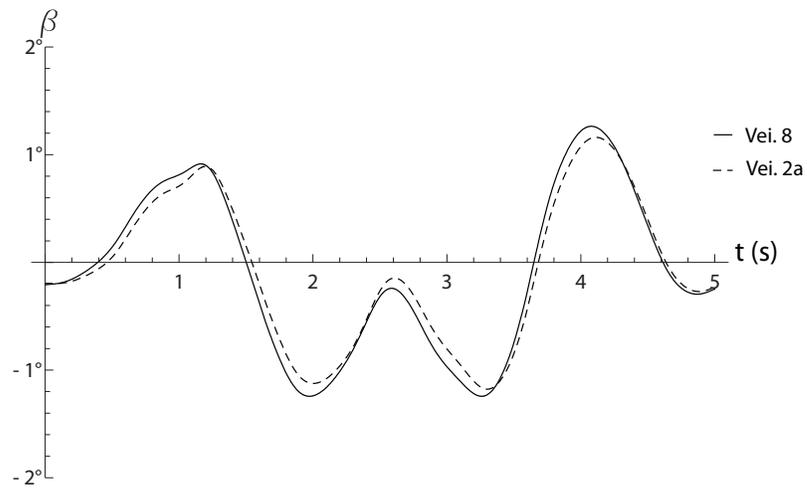


Figura 6.31: Angolo di assetto β - Sorpasso Standard

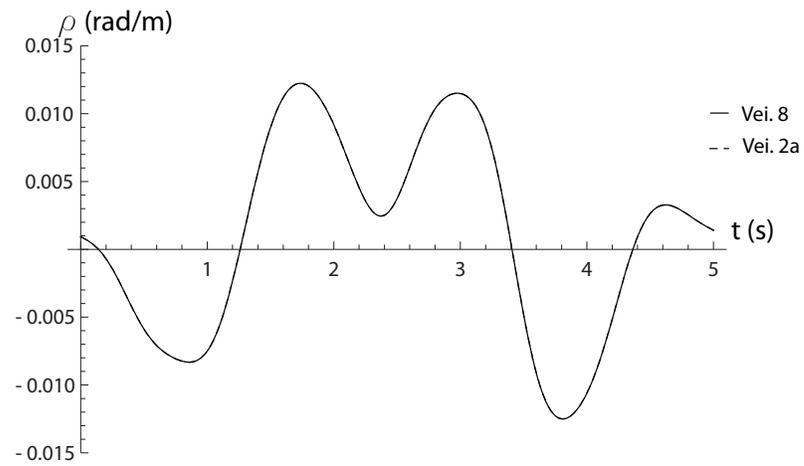


Figura 6.32: Curvatura ρ - Sorpasso Standard

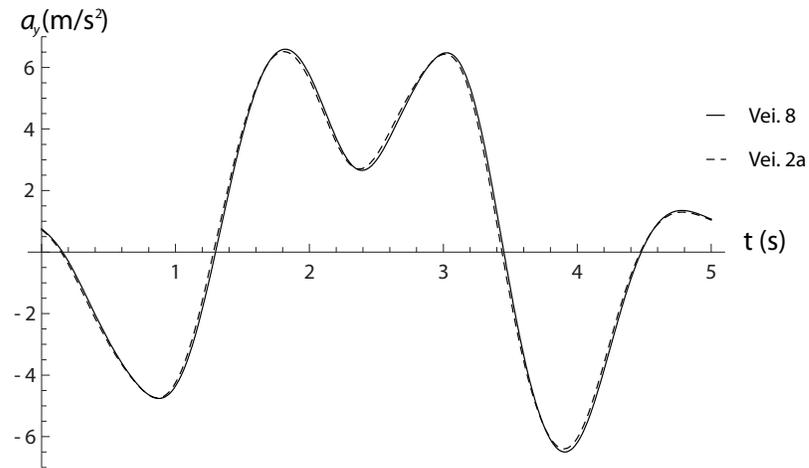


Figura 6.33: Accelerazione laterale a_y - Sorpasso Standard

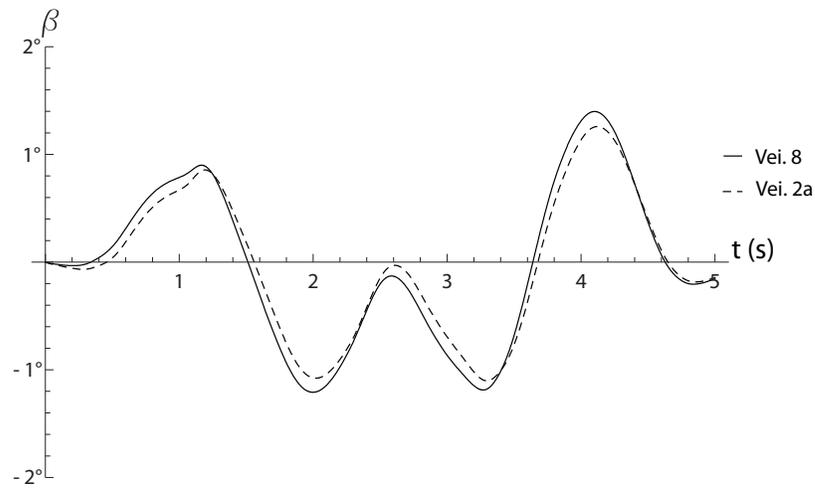


Figura 6.34: Angolo di assetto β - Sorpasso Reale Standard

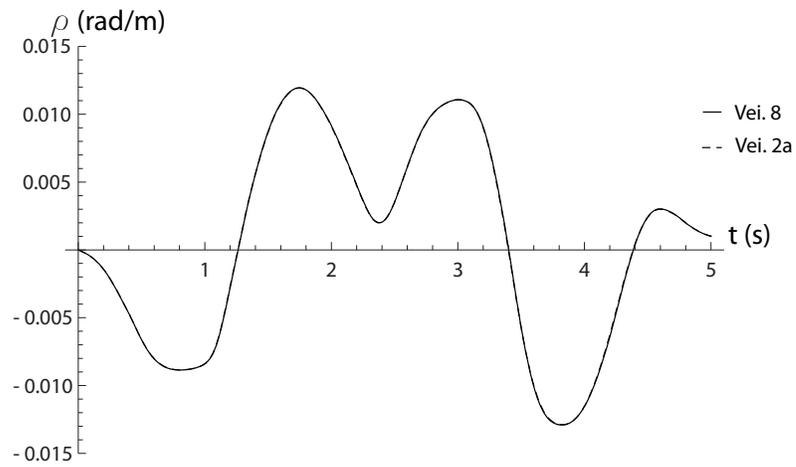


Figura 6.35: Curvatura ρ - Sorpasso Reale Standard

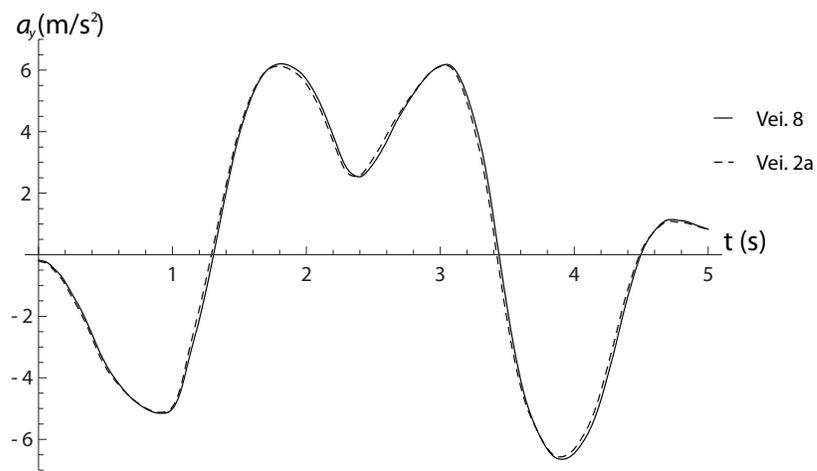


Figura 6.36: Accelerazione laterale a_y - Sorpasso Reale Standard

anche informazioni affidabili riguardo il comportamento in senso assoluto delle grandezze analizzate.

In Fig. 6.37 è riportato l'andamento della curvatura ottenuta durante la manovra di sorpasso simulata considerando il modello monotraccia completo, con il confronto tra il comportamento dei due veicoli originali, *Veicolo 2* e *Veicolo 8*, prima di apportare le modifiche descritte.

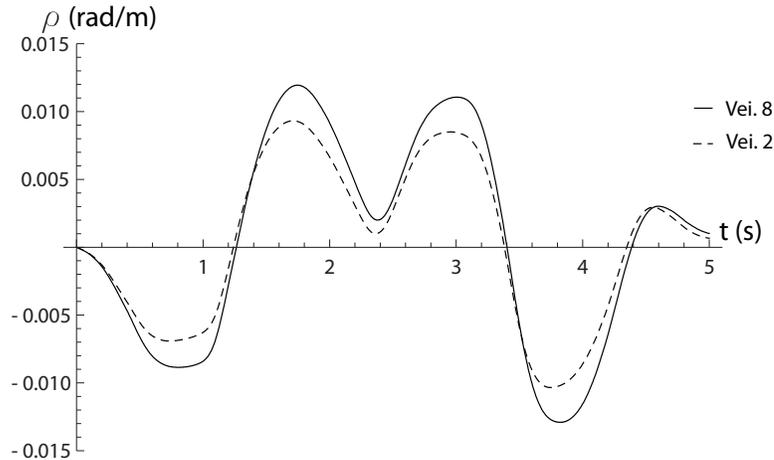


Figura 6.37: Curvatura ρ - Sorpasso Reale Standard

Infine in Fig. 6.38, Fig. 6.39 e Fig. 6.40 è riportato l'andamento delle grandezze considerate durante la manovra di sorpasso sportivo. Si è voluto in questo modo considerare il comportamento del *Veicolo 2a*, calibrato per avere un comportamento molto simile a quello del *Veicolo 8* durante la manovra di sorpasso standard, nel momento in cui si decida di affrontare una manovra diversa, ad esempio quella di sorpasso sportivo riportata in Fig. 6.23. La differenza tra le due manovre sta principalmente nel diverso valor quadratico medio delle accelerazioni, ma anche nel diverso contributo che le armoniche del segnale dell'angolo volante, riportate in Fig. 6.20, portano al comportamento globale del veicolo.

A rigore sarebbe stato necessario ricalibrare i valori delle rigidità di deriva, oltre che i rapporti di sterzo, per rendere identici i veicoli in questa manovra. In realtà risulta più interessante vedere se veicoli praticamente identici nella manovra di sorpasso classico, continuano ad essere simili durante una manovra più spinta.

I risultati sono sorprendenti ed evidenziano come il *Veicolo 2a* e il *Veicolo 8* abbiano medesime curvatura e accelerazione laterale durante la manovra, confermando quindi la validità dell'analisi lineare nonostante si raggiungano valori di accelerazione laterale di quasi 8 m/s^2 .

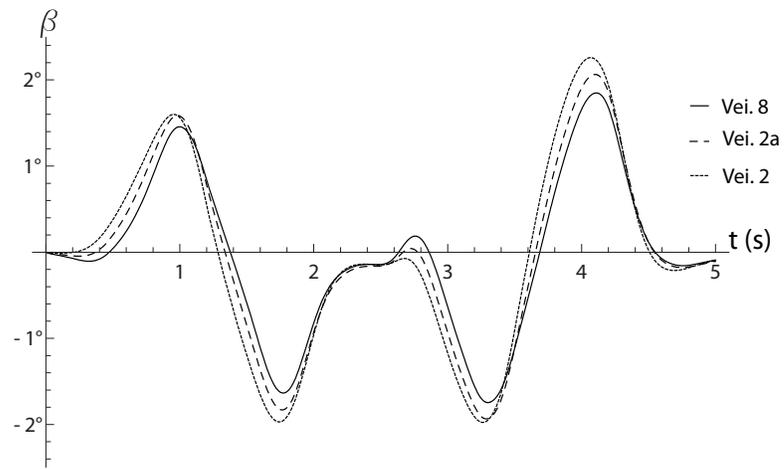


Figura 6.38: Angolo di assetto β - Sorpasso Reale Sportivo

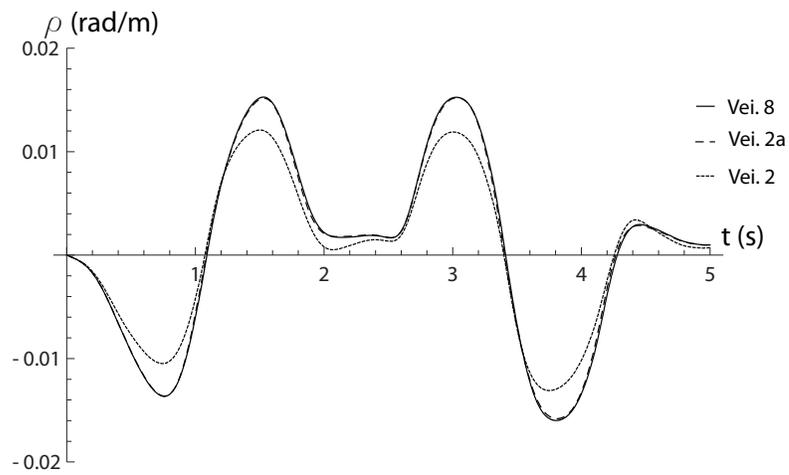


Figura 6.39: Curvatura ρ - Sorpasso Reale Sportivo

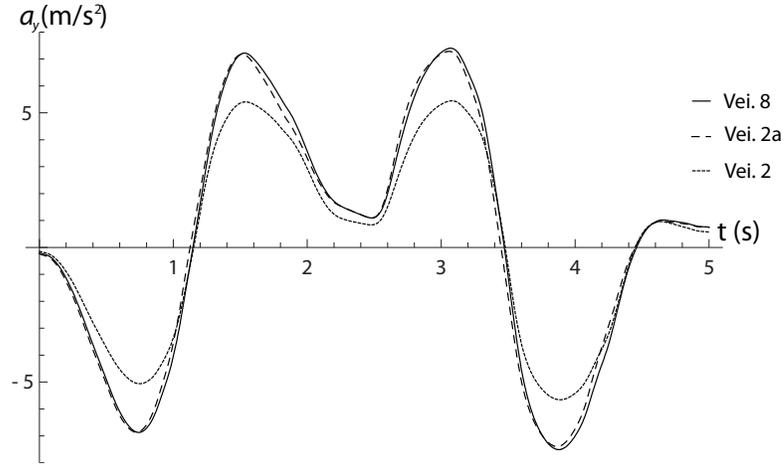


Figura 6.40: Accelerazione laterale a_y - Sorpasso Reale Sportivo

6.3 Modelli con ritardo di risposta

Nella parte riguardante i modelli di veicolo si è dimostrato come il ritardo di risposta sia affrontabile all'interno del sistema linearizzato, a patto di considerare anziché sei, otto parametri fondamentali per descrivere la dinamica del veicolo. I due parametri in più sono proprio i valori delle lunghezze di rilassamento anteriore (l_1) e posteriore (l_2). Come visto in (3.86-3.89) e in (3.90) le funzioni di trasferimento che legano il comando di ingresso dell'angolo volante alle variabili di stato sono in questo caso quattro, e hanno una struttura differente da quelle viste per il modello senza ritardo di risposta, presentando un numero diverso di poli e di zeri.

Quello su cui si vuol focalizzare l'attenzione riguarda però lo studio della dinamica del veicolo attraverso i parametri caratteristici, che possono essere i gradienti di assetto e di curvatura, le derivate di stabilità, i coefficienti caratteristici del sistema di secondo grado ma anche, come visto, guadagno, zero e poli della funzione di trasferimento relativa al modello di veicolo senza ritardo di risposta. Infatti in (3.84) si è dimostrato come la dinamica linearizzata di due differenti veicoli risulterà la stessa a patto che siano uguali i valori dell'ottupla

$$\beta_y \quad \rho_y \quad \beta_\delta \quad \rho_\delta \quad \frac{Y_\delta}{m} \quad \frac{N_\delta}{J} \quad l_1 \quad l_2 \quad (6.18)$$

Considerando però che i valori di guadagno, zeri e poli di G_β e G_ρ relative al modello senza ritardo di risposta sono legati in maniera univoca ai

primi sei elementi dell'ottupla di cui sopra, è possibile ricavare che, per il modello di veicolo con ritardo di risposta dei pneumatici, si può considerare alternativamente come ottupla la (6.19)

$$K_\beta \quad K_\rho \quad Z_\beta \quad Z_\rho \quad \zeta \quad \omega_n \quad l_1 \quad l_2 \quad (6.19)$$

dove i primi sei elementi sono relativi al modello di veicolo per il quale non si consideri il ritardo di risposta dei pneumatici.

In questo modo è possibile sfruttare i risultati ottenuti nei paragrafi precedenti relativi a modelli di veicolo senza ritardo di risposta e aggiungere ai parametri che li caratterizzano le lunghezze di rilassamento. Si avrà pertanto, come è ovvio, che veicoli uguali con pneumatici rigidi rimangono identici anche considerando i pneumatici con ritardo di risposta, a patto di avere medesima lunghezza di rilassamento degli stessi.

A tale scopo si considerino il *Veicolo 2a* e il *Veicolo 8* che si è mostrato nel paragrafo precedente avere stessa risposta per quel che concerne ρ durante una manovra di sorpasso, con $u_a = 25m/s$ e $\tilde{a}_y = 4m/s^2$. Le lunghezze di rilassamento equivalenti degli assali dei due veicoli risultano

	<i>Veicolo 2</i>	<i>Veicolo 8</i>
l_1 (m)	0.939	0.989
l_2 (m)	1.058	0.362

Tabella 6.13: Lunghezza di rilassamento

L'andamento dell'ampiezza in risposta ρ a una sollecitazione armonica per dell'angolo volante per $u_a = 25m/s$ e $\tilde{a}_y = 4m/s^2$ è riportato in Fig. 6.41 e risulta diverso, nonostante i due veicoli avessero analogo guadagno di curvatura nel caso i pneumatici fossero considerati rigidi.

Se però le lunghezze di rilassamento del *Veicolo 2a* vengono rese identiche a quelle del *Veicolo 8* si torna ad avere medesima risposta, limitatamente a ρ , per i due veicoli, che a questo punto presentano sei degli otto valori della ottupla caratteristica identici

$$K_\beta \quad \mathbf{K}_\rho \quad Z_\beta \quad \mathbf{Z}_\rho \quad \zeta \quad \omega_n \quad \mathbf{l}_1 \quad \mathbf{l}_2 \quad (6.20)$$

L'influenza della lunghezza di rilassamento sulle differenti variabili di stato potrebbe essere approfondita, ma, visto che può essere trattata separatamente dall'analisi linearizzata, lo studio sarebbe una riproposizione in chiave

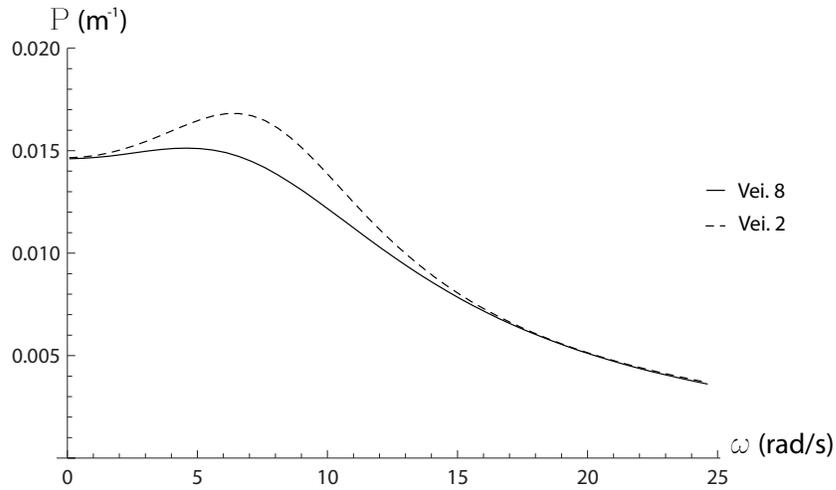


Figura 6.41: Guadagno curvatura ρ

leggermente diversa di quanto già affrontato nella letteratura classica. Risulta infine utile ricordare che i valori delle derivate di stabilità e conseguentemente degli altri parametri fino ad arrivare al guadagno, zero e poli delle funzioni di trasferimento del modello monotraccia con pneumatici rigidi, possono essere ricavati attraverso manovre di regime, per le quali la lunghezza di rilassamento dei pneumatici non risulta condizionante. Quindi non è un esercizio puramente teorico lo studio del veicolo con pneumatici supposti rigidi, in quanto i veicoli reali, che necessariamente presentano ritardo di risposta, possono essere agevolmente analizzati attraverso le derivate di stabilità calcolate in condizioni di regime, prendendo in considerazione in maniera separata l'incidenza del ritardo di risposta.

Capitolo 7

Conclusioni

Lo studio si è proposto due fini, riconducibili alle due macro-sezioni su cui è strutturata questa relazione:

- un'analisi teorica volta ad approfondire e validare lo studio del sistema linearizzato per vari tipi di modelli di veicolo
- una parte applicativa in cui si affronta, relativamente al modello monotraccia non lineare, lo studio dal punto di vista numerico

7.1 Analisi teorica

Lo studio del sistema linearizzato è risultato adeguato per praticamente tutti i tipi di modello di veicolo considerati, visto che si è riusciti a legare i parametri che caratterizzano il sistema a manovre da condursi a regime, oltre che ai parametri costruttivi stessi dei veicoli.

Per quanto riguarda i modelli monotraccia di veicolo si dimostra che non è necessario conoscere neanche la caratteristica degli assali per poter ottenere le funzioni caratteristiche, quindi, per i veicoli che di solito sono riconducibili al modello monotraccia, è sufficiente condurre poche manovre per ottenere i coefficienti del sistema. Per modelli di veicolo più complessi si devono invece fare ipotesi aggiuntive circa la risposta dei pneumatici, visto che non è sempre possibile scrivere una correlazione analitica tra l'accelerazione laterale del veicolo e la zona di impiego del pneumatico. Questa limitazione però non è nuova, infatti lo studio dei veicoli con differenziale bloccato, viene già condotto per via numerica, supponendo nota la caratteristica dei pneumatici.

I parametri che possono essere tenuti in considerazione sono molti, si va dai gradienti di assetto e curvatura, che come si è visto sono molto simili ai più classici gradienti di assetto e di sottosterzo, alle derivate di stabilità,

fino ad arrivare ai coefficienti caratteristici del sistema di secondo ordine e ai valori di guadagno, zero e poli delle funzioni di trasferimento ad esso associati. Allo stato attuale pare che lo studio delle caratteristiche delle funzioni di trasferimento sia il più significativo, come è prassi per i classici sistemi oscillatori.

7.2 Risultati sperimentali

Nella seconda parte del lavoro si sono ottenuti risultati molto interessanti relativamente alla risposta del veicolo a manovre classiche.

In un primo momento si era pensato di correlare i valori dei vari coefficienti del sistema ai voti attribuiti dal *CRF*, al fine di validare e eventualmente confermare una metrica di giudizio già esistente. In realtà si è poi capito che risulta artificioso condurre questo tipo di analisi, mentre è più utile ragionare sul ruolo dei vari parametri in relazione alla risposta del veicolo durante le varie manovre. Si è così cercato di dare un senso ai numeri e alle formule ottenute, di stabilire il legame che sussiste con le caratteristiche costruttive del veicolo, per poi proporre degli esempi di semplice progettazione per similitudine.

I risultati sono soddisfacenti, in quanto si può correggere il comportamento del veicolo direttamente e proficuamente, agendo in maniera mirata su alcuni parametri costruttivi, evitando lunghe ed onerose campagne sperimentali. Con ciò non si vuole concludere che sia inutile l'approccio simulativo e sperimentale alla materia, si vuole però dire che la direzione lungo cui muoversi per ottenere determinati risultati può essere tracciata fin dallo studio del sistema linearizzato, tenendo le simulazioni e le prove sperimentali come elementi utili per affinare e calibrare al meglio le modifiche da questo suggerite.

Bibliografia

- [1] Abe M. (1999), Vehicle dynamics and control for improving handling and active safety: from four-wheel steering to direct yaw moment control, Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part K: Journal of Multi-body Dynamics, p. 87-101
- [2] Bicchi A. (2009), Appunti di Regolazione e Controllo, <http://www.piaggio.ccii.unipi.it/corsi/robotica/regolazione-e-controllo-N.O./fda1-text.pdf>
- [3] Bolzern P., Scattolini R. e Schiavoni N. (2004), *Fondamenti di Controlli Automatici*, McGraw-Hill, Milano
- [4] Casarosa C. (2005), *Meccanica del Volo*, Edizioni Plus, Pisa
- [5] Cecconi Jaures P. e Stampacchia G. (1983), *Analisi Matematica. Funzioni di più variabili*, Liguori
- [6] Data S. e Frigerio F. (2002), Objective evaluation of handling quality, Centro Ricerche Fiat, Orbassano (TO)
- [7] Demidovic Boris P. (2003), *Esercizi e problemi di analisi matematica*, Editori Riuniti
- [8] Frenzo F., Greco G. e Guiggiani M. (2006), Critical review of handling diagram and understeer gradient for vehicles with locked differential, Vehicle System Dynamics, Volume 44, Issue 6 June 2006 , pages 431 - 447
- [9] Frenzo F., Greco G., Guiggiani M. e Sponziello A. (2007), The handling surface: a new perspective in vehicle dynamics, Vehicle System Dynamics, Volume 45, Issue 11 November 2007 , pages 1001 - 1016
- [10] Hugo S. Radt (1997), Variable dynamic testbed vehicle - Analysis of handling performance with and without rear steer, Milliken Research Associates

- [11] Hugo S. Radt, Jr. e Donald J. Van Disb (1996), *Vehicle Handling Responses Using Stability Derivatives*, SAE Publications, paper n. 960483
- [12] Galoppini M. (2004), *Analisi della dinamica di veicoli con differenziale bloccato*, Tesi di laurea in Ingegneria Meccanica, UniPi
- [13] Guiggiani M. (2007), *Dinamica del veicolo*, Città Studi Edizioni, Torino
- [14] Milliken W. F. e Milliken D.L. (1995), *Race Car Vehicle Dynamics*, Society of Automotive Engineers (SAE), Warrendale, USA
- [15] Palm W.J. (2007), *Mechanical Vibration*, John Wiley and Sons, USA